

第 5 章

函 数



函数是一种特殊的关系,也称为映射,它在计算机科学与技术以及相关学科中有重要的作用和广泛的应用。

函数概念的来源可以一直追溯到意大利物理学家、天文学家和哲学家伽利略(Galileo Galilei,1564—1642)。而最初开始使用函数一词的是德国哲学家和数学家莱布尼茨(G.W.Leibniz,1646—1716),用以描述曲线的一个相关量。中文的“函数”一词由清朝数学家李善兰(1811—1882)译出。

本章主要介绍函数的定义、几种特殊函数及相关性质、函数的运算以及常用的函数。

5.1 函数的定义

定义 5.1 设 f 为集合 A 到 B 的二元关系。若对于任意 $x \in \text{Dom}(f)$ 都存在唯一的 $y \in \text{Ran}(f)$ 使得 $(x, y) \in f$ 成立,则称 f 为函数(function),此时记 $y = f(x)$,称 x 为自变量(argument), y 为 f 在 x 的值(value)或 x 在 f 作用下的像(image)。函数也称为映射

(mapping)或变换(transformation)。

注: $A=A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 时,一般也将 $f((x_1, x_2, \cdots, x_n))$ 简记为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 。

函数的概念如图 5.1 所示。

【例 5.1】 $R_1 = \{(1, 1), (2, 3), (4, 1), (3, 5), (5, 3)\}$ 是函数;而 $R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (4, 1), (3, 5), (5, 3)\}$ 不是函数,因为 $R_2(1) = \{1, 3\}$ 。

在函数 R_1 中, $R_1(1) = 1, R_1(2) = 3, R_1(4) = 1, R_1(3) = 5, R_1(5) = 3$, 于是 R_1 也可以写作 $R_1 = \{(1, R_1(1)), (2, R_1(2)), (4, R_1(4)), (3, R_1(3)), (5, R_1(5))\}$ 。

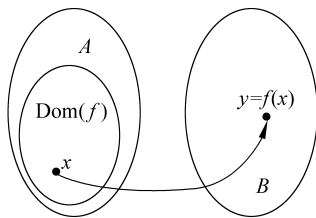


图 5.1 函数的概念

【例 5.2】 设 $A=B=\mathbb{R}$, 则 $f(x)=x+1, g(x)=\sqrt{x}, h(x)=\frac{1}{x}$ 都是函数。

注: 两个函数 f 和 g 相等当且仅当同时满足下面两个条件:

(1) $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ 。

(2) 对于任意 $x \in \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ 都有 $f(x) = g(x)$ 。

例如, 函数 $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ 和 $g(x) = x + 1$ 不相等, 因为 $\text{Dom}(f) \subset \text{Dom}(g)$ 。

定义 5.2 设 A, B 是非空集合, f 是 A 到 B 的一个关系。如果对每个 $x \in A$, 存在唯一的 $y \in B$, 使得 $(x, y) \in f$, 则称 f 为 **A 到 B 的函数**, 记作 $f: A \rightarrow B$ 。此时也称 f 是 **处处定义的 (everywhere defined)**。

注:

(a) 对于 A 到 B 的函数 $f, \text{Dom}(f) = A, \text{Ran}(f) \subseteq B$ 。

(b) 对于定义 5.1 中定义的函数, 有时也将其称作 A 到 B 的函数, 但对于 $x \notin \text{Dom}(f)$, 需指定 $f(x)$ 的值为“无定义”。

(c) 对于定义 5.1 中定义的函数, 当 $\text{Dom}(f) \subset A$ 时, 有些文献也称其为 **部分函数 (partial function)**。

如果一个 A 到 B 的关系是函数, 则它的关系矩阵中每一行至多有一个 1; 如果它是一个 A 到 B 的函数, 则它的关系矩阵每一行恰好有一个 1。

如果一个 A 上的关系是函数, 则它的关系图中每一个顶点至多发出一条有向边 (出度不超过 1); 如果它是一个 A 上的函数, 则它的关系图中每一个顶点恰好发出一条有向边 (出度恰为 1)。

【例 5.3】 设 $A=B=\mathbb{R}$, 则 $f(x)=x+1$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, 而 $g(x)=\sqrt{x}$ 和 $h(x)=\frac{1}{x}$ 则不是。

定义 5.3 设函数 $f: A \rightarrow B, A_1 \subseteq A$, 则称 $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$ 为 **A_1 在 f 下的像 (image of A_1 under f)**, $f(A)$ 称为函数的像 (image)。

【例 5.4】 设函数 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ 定义为 $f(1)=1, f(n)=n-1 (n>1)$, 则有 $f(\{2, 3\}) = f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2\}$ 。

下面定义一些常用的函数。

定义 5.4

(a) 设 $f: A \rightarrow B$, 如果存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是常值函数。

(b) 设 A 是非空集合, 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数(identity function), 也记作 1_A 。即对于所有的 $x \in A, 1_A(x) = x$ 。

(c) 设 R 是 A 上的等价关系, 定义从 A 到 A/R 的函数 $g: A \rightarrow A/R$, 对任意 $a \in A, g(a) = [a]$, 即将元素映射到该元素所在的等价类, 称 g 是从 A 到商集 A/R 的典范映射(canonical map)或自然映射。

(d) 设 n 是一个正整数, 则可以定义从 $\mathbb{Z}$ 到 $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 的取余函数 $\text{mod } n$ 。

(e) 设集合 $A \subseteq B, A$ 到 B 的包含映射(inclusion map)或嵌入(embedding)为函数 $i: A \hookrightarrow B$, 对于任意 $x \in A, i(x) = x$ 。

注: 给定集合 A 和 A 上的一个等价关系 R , 就可以确定一个典范映射 $g: A \rightarrow A/R$ 。不同的等价关系确定不同的典范映射。

【例 5.5】 定义函数 g 为 $g(x) = 2$, 则 g 是 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的常值函数。

【例 5.6】 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的等价关系 $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$ 所确定的典范映射是 $g_1(1) = g_1(3) = \{1, 3\}, g_1(2) = \{2\}$ 。 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的恒等关系 I_A 所确定的典范映射是 $g_2(1) = \{1\}, g_2(2) = \{2\}, g_2(3) = \{3\}$ 。

习 题 5.1

5.1 判断以下 $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$ 上的关系中哪些构成函数。

(a) $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A, y + x < 7\}$ 。

(b) $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A, x^2 + y^2 \leq 20\}$ 。

(c) $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A, y = x^2\}$ 。

(d) $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A, x = y^2\}$ 。

5.2 判断以下 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系中哪些构成函数, 哪些构成 A 上的函数。

(a) $R = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, a)\}$ 。

(b) $R = \{(a, b), (b, b)\}$ 。

(c) $R = \{(a, b), (b, b), (c, c)\}$ 。

5.3 判断以下关系 f 中哪些是 A 到 B 的函数。

(a) $A = B = \mathbb{R}, xfy$ 当且仅当 $x^2 = y^2$ 。

(b) $A = B = \mathbb{R}, xfy$ 当且仅当 $x^3 = y^3$ 。

(c) $A = B = \mathbb{C}, (a + bi) f(c + di)$ 当且仅当 $a = c$ 。

5.4 设 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, 定义为

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \text{ 为偶数} \\ x+1, & x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

令 $A = \{0, 1\}, B = \{2\}$, 计算 $f(A)$ 和 $f(B)$ 。

- 5.5 设 f 和 g 都是集合 A 到集合 B 的函数,证明 $f \cap g$ 也是函数。
- 5.6 将集合 A 到集合 B 的所有函数的集合记为 B^A ,称为**指数集**,即 $B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$ 。设 A, B 都是有限集合, $|A|=m, |B|=n$,计算 $|B^A|$ 。
- 5.7 设集合 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ 上划分 $\{\{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f\}\}$ 决定的等价关系为 R ,计算 A/R 的典范映射。

5.2 函数的性质

定义 5.5 设函数 $f: A \rightarrow B$ 。

- (a) 若 $\text{Ran}(f) = B$,则称 f 是**满射(surjection)**或**映上的(onto)**。
- (b) 若任意 $y \in \text{Ran}(f)$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$,则称 f 是**单射(injection)**或**一一的(one-to-one)**。
- (c) 若 f 既是满射又是单射,则称 f 是**双射(bijection)**或**一一对应(one-to-one correspondence)**。

注:

- (a) f 是满射意味着: 对于任意 $y \in B$,都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$ 。
- (b) f 是单射另有如下两个等价定义:
- (b.1) 如果 $a, b \in A$ 满足 $a \neq b$,则 $f(a) \neq f(b)$ 。
- (b.2) 如果 $a, b \in A$ 满足 $f(a) = f(b)$,则 $a = b$ 。

函数的满射、单射和双射如图 5.2 所示。其中,(a)是单射,(b)是满射,(c)是双射。

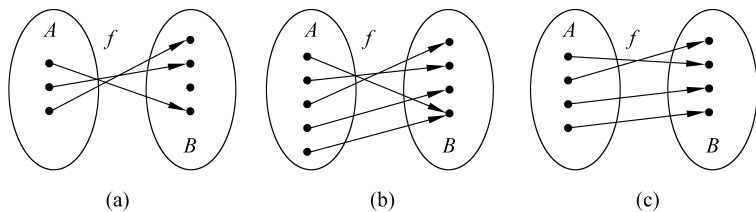


图 5.2 函数的性质

【例 5.7】 函数 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, 定义为 $f(1)=1, f(n)=n-1 (n>1)$ 。 f 是满射——对于任意 $y \in \mathbb{Z}^+$, 有 $f(y+1)=y$; 但不是单射—— $f(1)=f(2)=1$ 。从而 f 不是双射。

【例 5.8】 函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 定义为 $g(x) = x^2 - 2x + 1$ 。 g 不是单射—— $g(0) = g(2) = 1$; g 也不是满射—— g 在 $x=1$ 取得最小值 0。从而 g 不是双射。

【例 5.9】 函数 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 定义为 $h(x) = 2x + 1$ 。 h 是单射——若 $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$, 则必然有 $x_1 = x_2$; h 是满射——对于任意 $y \in \mathbb{R}$, 有 $h\left(\frac{y-1}{2}\right) = y$ 。从而 h 是双射。

【例 5.10】 设 A 是非空集合, A 上的恒等函数 1_A 既是单射又是满射, 从而是双射。

【例 5.11】 设 A 是非空集合, R 是 A 上的一个等价关系, 则恒等关系 I_A 所确定的典范映射是双射, 而其他的典范映射只是满射。

对于有限集合上的函数, 有如下主要结论。

定理 5.1 设 A 和 B 是两个有限集合且满足 $|A| = |B|$, 则函数 $f: A \rightarrow B$ 是单射当且仅当 f 是满射。

定理 5.2 设 A 和 B 都是有限集合, 则

(a) 若 $|A| < |B|$, 则必然存在从 A 到 B 的单射函数, 必然不存在从 A 到 B 的满射函数。

(b) 若 $|A| > |B|$, 则必然存在从 A 到 B 的满射函数, 必然不存在从 A 到 B 的单射函数。

(c) 若 $|A| = |B|$, 则必然存在从 A 到 B 的双射函数。

推论 设 A 是有限集合, B 是无限集合, 则

(a) 必然不存在从 A 到 B 的满射函数。

(b) 必然不存在从 B 到 A 的单射函数。

函数性质在关系矩阵和关系图中的体现如下:

(a) 如果一个 A 到 B 的函数是单射, 则它的关系矩阵中每一列至多有一个 1; 如果它是一个满射, 则它的关系矩阵每一列至少有一个 1; 如果它是一个双射, 则它的关系矩阵每一行每一列都恰好有一个 1。

(b) 如果一个 A 上的函数是单射, 则它的关系图中每一个顶点至多存在一条指向它的边(入度不超过 1); 如果它是一个满射, 则它的关系图中每一个顶点至少存在一条指向它的边(入度不小于 1); 如果它是一个双射, 则它的关系图中每一个顶点都发出一条有向边, 且恰存在一条指向它的边(出度和入度都恰好为 1)。

习 题 5.2

5.8 给出以下函数的例子。

(a) $\mathbb{Z}^+$ 到 $\mathbb{Z}^+$ 的既非单射又非满射的函数。

(b) $\mathbb{Z}^+$ 到 $\mathbb{Z}^+$ 的是单射但不是满射的函数。

(c) $\mathbb{Z}^+$ 到 $\mathbb{Z}^+$ 的非单射但是是满射的函数。

(d) $\mathbb{Z}^+$ 到 $\mathbb{Z}^+$ 的既是单射又是满射的函数。

5.9 判断下列函数是否为单射、满射、双射, 为什么?

(a) $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ 。

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ 。

(c) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$, 其中 $\mathbb{R}^+$ 为正实数集。

(d) $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x, y) = x + y + 1$ 。

(e) $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x, y) = (x + y, x - y)$ 。

(f) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = (x + y, x - y)$ 。

5.10 设 A 和 B 是两个有限集, 函数 $f: A \rightarrow B$, 证明:

(a) 若 f 是单射, 则 $|A| \leq |B|$ 。

(b) 若 f 是满射, 则 $|B| \leq |A|$ 。

5.11 证明定理 5.1。

5.12 证明定理 5.2。

5.13 设 A, B 都是有限集合, $|A|=m, |B|=n$, 请计算集合 A 到集合 B 的所有单射函数的个数。

5.14 设 A, B 都是有限集合, $|A|=|B|=n$, 请计算集合 A 到集合 B 的所有双射函数的个数。

5.15 设有函数 $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D$, 则可定义 $A \times C$ 到 $B \times D$ 的函数 $f \times g$ 为 $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$ 。

(a) 证明: 若 f 和 g 都是单射, 则 $f \times g$ 也是单射。

(b) 证明: 若 f 和 g 都是满射, 则 $f \times g$ 也是满射。

(c) 证明: 若 f 和 g 都是双射, 则 $f \times g$ 也是双射。

5.16 对于以下集合 A 和 B , 构造从 A 到 B 的双射函数。

(a) $A = (0, 1), B = (5, 25)$ (二者都是实数集上的开区间)。

(b) $A = \{a, b, c\}, B = \{\text{张三}, \text{李四}, \text{王五}\}$ 。

(c) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}^+$ 。

5.3 函数的复合

定理 5.3 设 A, B, C 是集合, f 是 A 到 B 的关系, g 是 B 到 C 的关系。若 f, g 是函数, 则 $g \circ f$ 也是函数, 且满足以下两个条件:

(a) $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \mid x \in \text{Dom}(f) \text{ 且 } f(x) \in \text{Dom}(g)\}$ 。

(b) 对于任意 $x \in \text{Dom}(g \circ f)$ 有 $g \circ f(x) = g(f(x))$ 。

证明: 由定义 4.10, 若对于某个 $x \in \text{Dom}(g \circ f)$ 存在 $y_1, y_2 \in \text{Ran}(g \circ f)$ 使得 $(x, y_1) \in g \circ f$ 且 $(x, y_2) \in g \circ f$, 则存在 $t_1 \in \text{Dom}(g)$ 使得 $(x, t_1) \in f$ 且 $(t_1, y_1) \in g, t_2 \in \text{Dom}(g)$ 使得 $(x, t_2) \in f$ 且 $(t_2, y_2) \in g$ 。由于 f 是函数, 因此 $t_1 = t_2$; 又由于 $(t_1, y_1) \in g, (t_2, y_2) \in g$, 且 g 是函数, 有 $y_1 = y_2$ 。因此 $f \circ g$ 为函数。

(a) 由定义 4.10 即得。

(b) 由定理 4.6 即得。 □

函数的复合如图 5.3 所示。

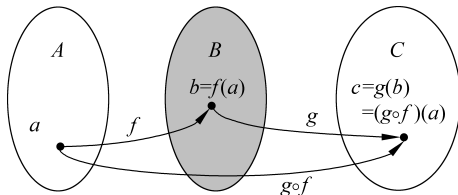


图 5.3 函数的复合

于是, 也可以定义函数的幂, 它也是函数。

由定理 5.3 及关系复合运算的性质易得如下推论。

推论 设 A, B, C, D 均为非空集合, f 为 A 到 B 的关系, g 为 B 到 C 的关系, h 为 C

到 D 的关系。若 f, g, h 都是函数, 则 $(h \circ g) \circ f$ 和 $h \circ (g \circ f)$ 也都是函数, 且 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ 。

【例 5.12】 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $f(x) = x + 1$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $g(x) = 2x + 1$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $h(x) = x^2 + 1$, 则

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(x + 1) + 1 = 2x + 3$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = 2x + 1 + 1 = 2x + 2$$

$$h \circ g \circ f(x) = h(g(f(x))) = (2x + 3)^2 + 1 = 4x^2 + 12x + 10$$

定理 5.4 设 A, B, C 为非空集合, 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 那么

(a) 如果 g 和 f 都是满射, 则 $g \circ f$ 也是满射。

(b) 如果 g 和 f 都是单射, 则 $g \circ f$ 也是单射。

(c) 如果 g 和 f 都是双射, 则 $g \circ f$ 也是双射。

证明:

(a) 对于任意的 $c \in C$, 因 g 是满射, 故存在 $b \in B$ 使得 $g(b) = c$; 现考查 b , 因 f 是满射, 故而存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$ 。于是 $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$, 从而证明 $g \circ f$ 是满射。

(b) 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, 则由 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ 及 g 是单射知 $f(x_1) = f(x_2)$; 又由于 f 也是单射, 所以 $x_1 = x_2$ 。从而证明 $g \circ f$ 是单射。

(c) 由 (a)、(b) 即得。 $\square$

定理 5.4 的说明见图 5.4, 其中 (a) 为满射的复合, (b) 为单射的复合, (c) 为双射的复合。

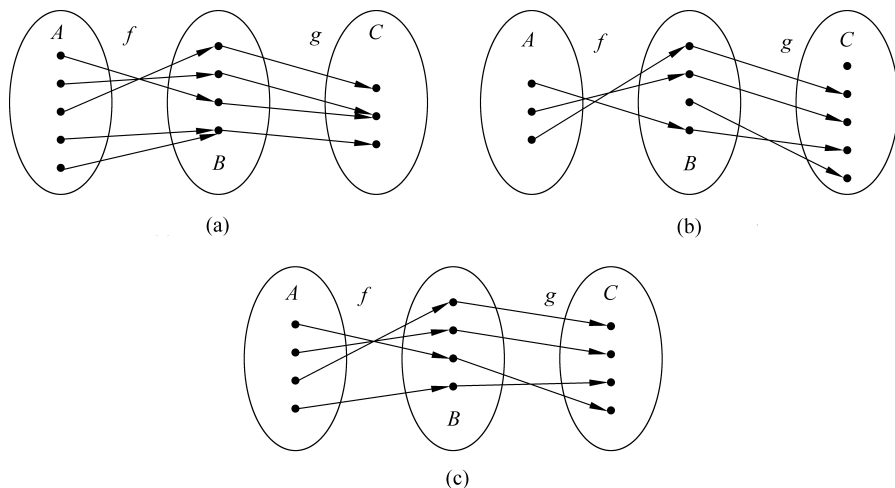


图 5.4 定理 5.4 用图

但是反过来, 定理 5.4 的逆定理并不全部成立, 而只是部分成立。

定理 5.5 设 A, B, C 为非空集合, 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 那么

(a) 若 $g \circ f$ 是单射, 则 f 是单射。

(b) 若 $g \circ f$ 是满射, 则 g 是满射。

(c) 若 $g \circ f$ 是双射, 则 f 是单射, g 是满射。

证明:

(a) 假设 f 不是单射, 即存在 $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ 且 $f(a_1) = f(a_2)$, 于是 $g \circ f(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = g \circ f(a_2)$, 而这与 $g \circ f$ 是单射矛盾。

(b) 若 $g \circ f$ 是满射, 则对于任意 $c \in C$, 存在 $a \in A$, 使得 $g \circ f(a) = c$, 于是 $g(f(a)) = c$, 故 g 是满射。

(c) 由(a)、(b)即得。 □

定理 5.5 可以用图 5.5 说明。(a)中 $g \circ f$ 是单射, 而 g 不是单射;(b)中 $g \circ f$ 是满射, 而 f 不是满射;(c)中 $g \circ f$ 是双射, 而 g 不是单射且 f 不是满射。

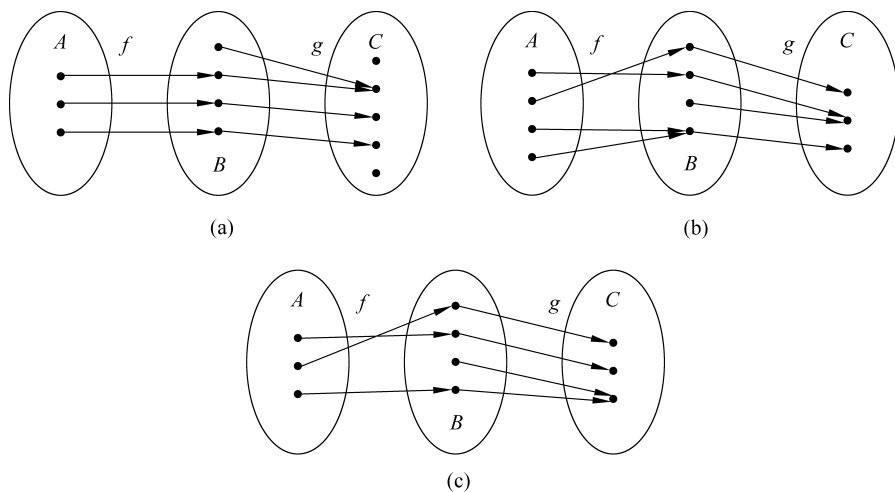


图 5.5 定理 5.5 用图

定理 5.6 设 A, B 为集合, 函数 $f: A \rightarrow B$, 则 $f = f \circ 1_A = 1_B \circ f$ 。

证明: 由定理 4.7 即得。 □

本节最后给出一些除函数复合外的常用记号:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

$$(m \cdot f)(x) = m \cdot f(x) (m \text{ 为非零常数})$$

习 题 5.3

5.17 设 $f = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (c, \beta)\}, g = \{(\alpha, 0), (\beta, 1)\}$, 计算 $g \circ f$ 。

5.18 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $f(x) = 256x, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $g(x) = 2^x, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $h(x) = x^3$, 计算 $g \circ f(x), f \circ g(x), h \circ g \circ f(x)$ 。

5.19 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ -2, & x < 3 \end{cases}; g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 2$ 。求 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 。

5.20 设函数 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, 定义为

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \text{ 为偶数} \\ x+1, & x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

计算 $f^4(15)$ 和 $f^6(65)$ 。

5.21 设有两个 $\mathbb{Z}^+$ 到 $\mathbb{Z}^+$ 的函数: $f(n) = n+1, g(n) = \max(1, n-1)$ 。证明:

- (a) f 是单射而不是满射。
- (b) g 是满射而不是单射。
- (c) $g \circ f = 1_{\mathbb{Z}^+}$, 而 $f \circ g \neq 1_{\mathbb{Z}^+}$ 。

5.4 逆 函 数

关系的逆关系仍然是关系; 而函数作为关系, 其逆关系却不一定也是函数。

【例 5.13】 设 $f = \{(1, 1), (2, 3), (4, 1), (3, 5), (5, 3)\}$ 是一个函数, 而 f 的逆关系 $f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (1, 4), (5, 3), (3, 5)\}$ 是一个关系, 但不是函数。

定义 5.6 设 A, B 为集合, 如果以函数 $f: A \rightarrow B$ 作为关系的逆关系 f^{-1} 是 B 到 A 的函数, 则称之为可逆的 (invertible), 称 f^{-1} 为 f 的反函数或逆函数 (inverse function)。

定理 5.7 设 A, B 为集合, $f: A \rightarrow B$, 若函数 f^{-1} 存在, 则

- (a) $f^{-1} \circ f = 1_A$ 。
- (b) $f \circ f^{-1} = 1_B$ 。

证明: 假设函数 f^{-1} 存在, 对于任意 $x \in A$, 由于 f 是 A 到 B 的函数, 因此存在 $y \in B$, 使得 $(x, y) \in f$ 。于是 $(x, x) \in f^{-1} \circ f$, 即得 $1_A \subseteq f^{-1} \circ f$ 。又由于 f 和 f^{-1} 都是函数, 定理 5.3 表明 $f^{-1} \circ f$ 也是函数, 因此对于任意 $x \in A$, 若还存在 $y \in A$ 使得 $(x, y) \in f^{-1} \circ f$, 则必然有 $y = x$, 即 $f^{-1} \circ f = 1_A$ 。

类似地, 可证明 $f \circ f^{-1} = 1_B$ 。 □

定理 5.8 给出了逆函数存在的充要条件。

定理 5.8 设 A, B 为非空集合, 函数 $f: A \rightarrow B$, 则 f 可逆当且仅当 f 是双射, 且 f 的逆函数若存在则也是双射。

证明: (充分性) 假设 f 是双射。下面证明 f^{-1} 是 B 到 A 的函数。

因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且由 f 是双射有 $\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f) = B$, $\text{Ran}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = A$ 。

对于任意的 $b \in B$, 若存在 $a_1, a_2 \in A$ 使得 $(b, a_1) \in f^{-1}$ 且 $(b, a_2) \in f^{-1}$, 则由关系逆的定义有 $(a_1, b) \in f$ 且 $(a_2, b) \in f$, 根据 f 是单射可得 $a_1 = a_2$ 。从而证明 f^{-1} 是 B 到 A 的函数。

(必要性) 假设 f 可逆, 以下分两个步骤证明 f 是双射:

- (1) f 是单射。由定理 5.7, $f^{-1} \circ f = 1_A$, 而 1_A 是单射, 由定理 5.5, f 是单射。
- (2) f 是满射。由定理 5.7, $f \circ f^{-1} = 1_B$, 而 1_B 是满射, 由定理 5.5, f 是满射。

下面证明 f^{-1} 也是双射:

- (1) f^{-1} 是满射。由定理 5.7, $f^{-1} \circ f = 1_A$, 而 1_A 是满射, 由定理 5.5, f^{-1} 是满射。

(2) f^{-1} 是单射。由定理 5.7, $f \circ f^{-1} = 1_B$, 而 1_B 是单射, 由定理 5.5, f^{-1} 是单射。□

注: 由定理 5.8 及关系的逆运算、复合运算的性质, 易得:

(a) 若函数 $f: A \rightarrow B$ 是双射, 则 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

(b) 若函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 均是双射, 则 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

【例 5.14】 函数 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2x + 1$ 是双射, 因此可逆, 其逆函数是 $h^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ 。而函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2 + 2x - 1$ 不是双射, 因此 g 的逆函数不存在。

本节最后给出一个更强的结论, 它在实际应用中具有重要意义和价值。

定理 5.9 设 A, B 为集合, 若 A 到 B 的函数 f 和 B 到 A 的函数 g 满足 $g \circ f = 1_A$ 及 $f \circ g = 1_B$, 则 f 是一个 A 到 B 的双射, g 是一个 B 到 A 的双射, 而且 f 和 g 互为逆函数。

证明: 由 $g \circ f = 1_A$ 知 f 是满射, 由 $f \circ g = 1_B$ 知 f 是单射, 因此 f 是双射, f 可逆。且 $f^{-1} = f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = 1_A \circ g = g$ 。

类似可证明 g 也是双射, g 可逆且 $g^{-1} = f$ 。□

由此逆函数也可以等价地定义如下。

定义 5.7 设 A, B 为集合, 对于函数 $f: A \rightarrow B$ 若存在函数 g 使得 $g \circ f = 1_A$ 且 $f \circ g = 1_B$ 。则称 f 为可逆的, 此时称 g 为 f 的反函数或逆函数, 记作 $g = f^{-1}$ 。

习 题 5.4

5.22 设 $A = \{1, 2, 3\}$, 求出 A 上所有的可逆函数。

5.23 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ 9, & x < 3 \end{cases}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $g(x) = x + 2$ 。如

果 f 和 g 存在逆函数, 则求出它们的逆函数; 如果不存在逆函数, 说明理由。

5.24 设函数 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 定义为 $f(x, y) = (x + y, x - y)$ 。

(a) 证明 f 是双射。

(b) 求 f 的逆函数。

(c) 求 $f \circ f$ 。

5.25 设 $f_1, f_2, f_3: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ 定义为

$$f_1(n) = 2n$$

$$f_2(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ 为偶数} \\ n+1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$f_3(n) = \begin{cases} n-1, & n \text{ 为偶数} \\ n+1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

分析 f_1, f_2, f_3 是否为单射、满射、双射, 说明 f_1, f_2, f_3 是否可逆。

5.26 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow A$ 。若 $h \circ g \circ f = 1_A, f \circ h \circ g = 1_B, g \circ f \circ h = 1_C$, 证明 f, g, h 均为双射。