

科学上没有平坦的大道,真理的长河中有无数礁石险滩。只有不畏攀登的采药者,只有不怕巨浪的弄潮儿,才能登上高峰采得仙草,深入水底觅得骊珠。

——华罗庚

前面章节介绍了线性元件的伏安特性,以及由其构成的线性电路的分析方法。在实际中,仅用线性元件无法构成具有实际功能的电路。从本章开始将陆续引入非线性电子元件,介绍非线性电路的一般分析方法。

5.1 线性与非线性电路

线性电路是由线性元件构成的电路。线性元件就是其伏安特性可以用线性方程描述的元件。比如前面章节学习的电阻均为线性的,其伏安特性 $i = \frac{u}{R}$,如图 5-1(a)所示的 $i-u$ 关系图中,是一条过原点的直线, R 为常数,因此是线性的。二极管、晶体管等为非线性器件。二极管的 $i-u$ 关系为

$$i_D = I_S (e^{\frac{u_D}{U_T}} - 1) \quad (5-1)$$

其中, I_S 和 U_T 为常数, I_S 的典型值为 10^{-12} A, U_T 室温下的值为 0.026 V。图 5-1(b)为实际二极管的伏安特性曲线。当 $u_D < U_{on}$ 时,电流 $i_D \approx 0$ 。

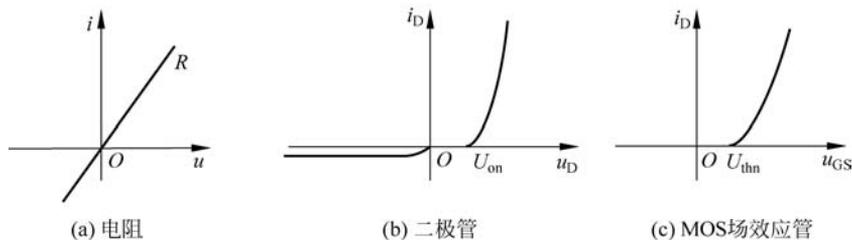


图 5-1 线性与非线性元件的伏安特性

实际二极管与理想二极管的电路符号如图 5-2 所示。

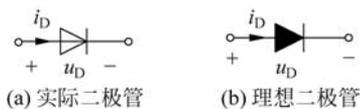


图 5-2 二极管的符号

对于实际二极管而言,当 $u_D > U_{on}$ 时,电压 u_D 的一个很小的增量将引起电流 i_D 的快速增长。例如,若 $U_T = 0.026\text{V}$, $I_S = 1\text{pA}$, 当 $u_D = 0.6\text{V}$ 时,根据式(5-1), $i_D = 1 \times 10^{-12} \times (e^{0.6/0.026} - 1) \approx 10.5\text{mA}$ 。当 $u_D = 0.65\text{V}$ 时, $i_D = 1 \times 10^{-12} \times (e^{0.65/0.026} - 1) \approx 72\text{mA}$ 。

第 8 章介绍的 MOS 场效应晶体管,当其工作在恒流区时的电流电压关系为平方律: $i_D = K_n(u_{GS} - U_{thn})^2$, 其中的 K_n 与 U_{thn} 为常数,也为非线性器件,伏安特性如图 5-1(c) 所示。

对比线性和非线性元件的伏安曲线,可以看出,非线性体现在伏安特性曲线的斜率不是常数,是变化的。在分析非线性电路时,对于仅适用于线性电路的分析方法如叠加定理无法使用。下面介绍非线性电路的基本方法。

5.2 解方程法

分析非线性电路的基本依据依然遵循两类约束关系:一类是元器件本身的伏安关系;另一类是拓扑关系,即元器件所在电路的电气连接方式。根据这两个约束关系分别列写伏安方程,然后联立求解。

图 5-3(a) 电路中包含二极管,属于非线性电路。首先根据电路的拓扑结构,列写 KVL 方程为

$$u_D = U_{DD} - i_D R \quad (5-2)$$

将式(5-2)代入二极管的伏安方程式(5-1),得到

$$i_D = I_s [e^{(U_{DD} - i_D R)/U_T} - 1] \quad (5-3)$$

电路确定后,方程(5-3)中除了电流 i_D 均为已知量,接下来求解关于 i_D 的方程。方程(5-3)为超越方程,可以用计算机求出数值解。得到电流 i_D 后,进而求出 u_D ,这里不再介绍非线性方程(组)的求解方法。

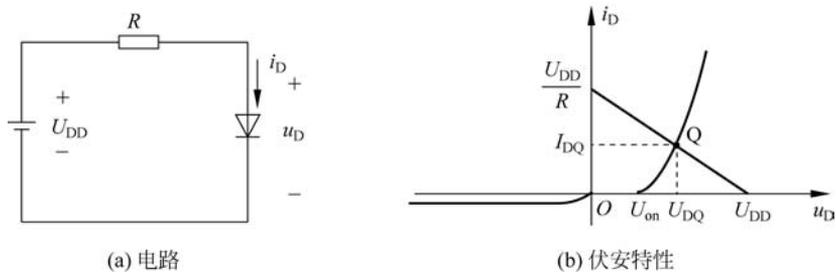


图 5-3 二极管电路

5.3 图解法

求解方程(组)法需要根据元器件的伏安特性和电路连接的拓扑关系列写 KCL 或者

KVL 方程,然后求解解析或数值解。图解法则是将上述方程用曲线的形式在图中表现出来,进而得到所需电流和电压量的过程。这里讨论三种情况:直流电压源作用的电路;随时间变化的大信号激励的电路;随时间变化的交流小信号激励下的电路。

5.3.1 直流源作用的电路

以含有二极管的电路为例说明图解法。图 5-3(a)电路中,列写出的 KVL 方程(5-2)在 $i-u$ 关系图中表现为一条直线,如图 5-3(b)所示。该直线方程为

$$i_D = -\frac{u_D - U_{DD}}{R} \quad (5-4)$$

二极管的伏安特性方程为

$$i_D = I_s (e^{u_D/U_T} - 1) \quad (5-5)$$

在图 5-3(b)中 i_D-u_D 关系图中为一条指数规律函数的曲线。

求解上述两个方程解就是要找到式(5-4)的直线与式(5-5)所示的二极管伏安特性曲线的交点。其中直线称为直流负载线,与二极管伏安曲线的交点称为静态工作点(Quiescent Point)。这里静态是指电路中只有直流源作用时电路的状态。 Q 点横坐标和纵坐标就是要求的二极管静态电流和电压,记作 I_{DQ} 和 U_{DQ} 。

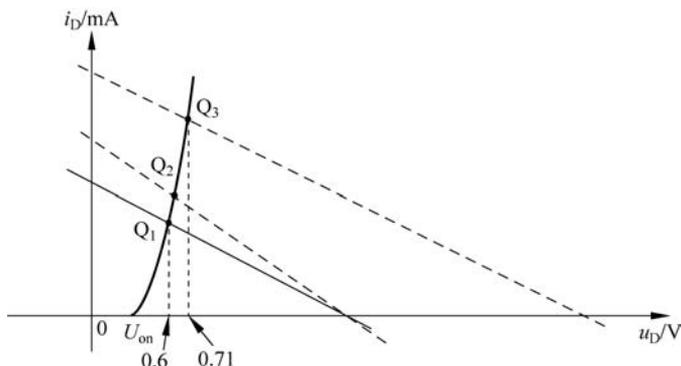


图 5-4 二极管电路参数变化时对 Q 点的影响

当电路中电阻 R 不变,电压 U_{DD} 改变时,直线的斜率不变,截距发生变化;当电路中电压 U_{DD} 不变,电阻 R 改变时,直线的斜率发生变化,截距不变,如图 5-4 所示。无论何种情况,只要交点 Q 位于 $u > U_{on}$,则 U_{DQ} 大小均在 $0.7V$ 左右,这说明了二极管正向导通时两端电压可以近似为 $0.7V$ 。

5.3.2 交流大信号激励的电路

电路如图 5-5(a)所示,除了激励换为交流信号源,其余的与图 5-3(a)电路相同。当交流信号作用时,不同时刻的 u_i 值不同,导致直线的截距改变,但斜率不变,得到的交点如图 5-5(b)所示。可见交点也是随时间变化的,其中交点纵坐标随时间变化的规律就是 $i_D(t)$,横坐标随时间变化的规律为 $u_D(t)$,输出电压 $u_o(t)$ 是电阻 R 上的压降。

由于二极管截止时,其电流 $i_D(t)$ 近似为 $0V$, $u_o = 0$ 。导通时,两端电压 $u_D(t)$ 近似为 $0.7V$,则 $u_o = u_i - 0.7$ 。当输入是幅度较大的交流信号(如图 5-6(a)所示的正弦波)时,可以

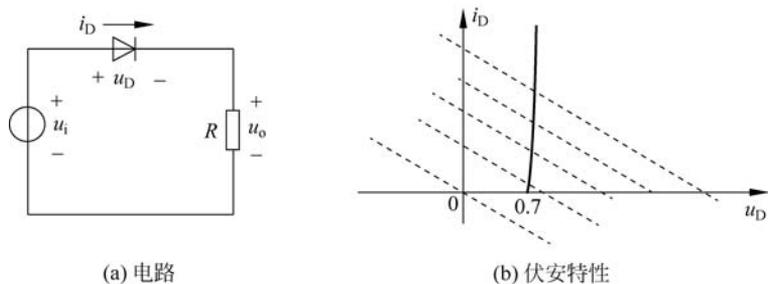


图 5-5 大信号激励时

画出输出电压波形如图 5-6(b)所示。

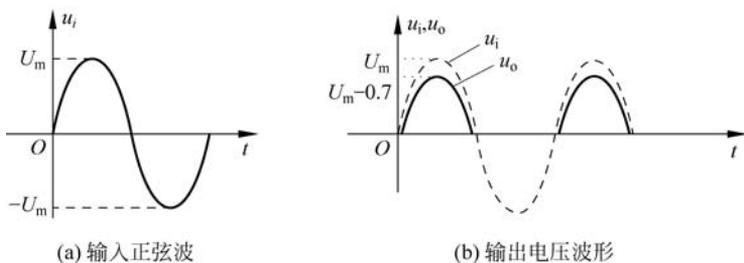


图 5-6 图 5-5 的输入和输出电压波形

5.3.3 交流小信号激励的电路

如果信号源幅度较小,如 $u_i(t) = 0.05\sin\omega t$ (V),且该小信号 $u_i(t)$ 驮载在直流电平 U_{DD} 上,如图 5-7(a)所示电路。由前面的分析可知,得到的交点也是随时间变化的。二极管的电流和电压在直流 I_{DQ} 以及 U_{DQ} 基础上微小变化 Δi_D 和 Δu_D ,也可以用 i_d 表示电流增量 Δi_D , u_d 表示电压增量 Δu_D 。若将流过二极管的瞬时电流记为 $i_D(t)$,则得到 $i_D(t) = I_{DQ} + i_d(t)$,其中 I_{DQ} 是仅有直流电压源 U_{DD} 作用时得到的直流分量,而 $i_d(t)$ 是由小信号引起的交流变化量。同理,二极管两端的瞬时电压为 $u_D(t)$, $u_D(t) = U_{DQ} + u_d(t)$ 。如

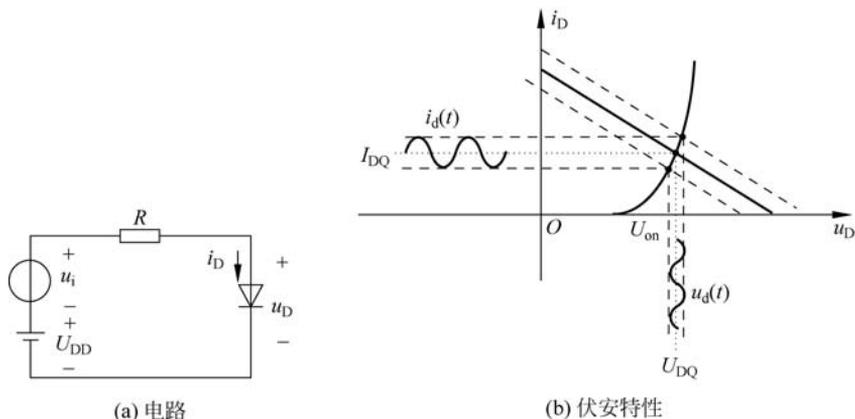


图 5-7 小信号激励时的二极管电路以及图解方法

图 5-7(b)所示。由于小信号的变化幅度小,交点的位置仅在伏安曲线的一个小范围内变化,说明二极管的工作区域集中在 Q 点附近的一小部分,这一小部分曲线的斜率变化很小,可用一小段直线段近似,只要输入信号动态范围很小(即小信号),工作点附近的二极管电导可视为一个常量(相当于一次方程斜率不变),这就是小信号约束条件下非线性元件线性化近似的基本出发点。显然,大信号输入条件下,这种近似方式是不可取的。

5.4 分段线性分析法

分析非线性电路时,如果输入信号幅度较大,可以将非线性曲线分成若干段,其中的每一段用线性特性近似,通过这种近似可以将非线性电路近似为线性电路,从而简化分析。分段线性分析法也称为折线分析法,这种牺牲“精度”换取“简单”的分析方法可作为非线性电路的一种工程近似方法。

假设某非线性器件的伏安特性如图 5-8(a)所示,分段线性近似后如图 5-8(b)所示。近似后,当 $i \geq 0$ 时,该器件的伏安特性与电阻 R_1 一致。当 $i < 0$ 时,该器件的伏安特性与电阻 R_2 一致。由直线的斜率可知,电阻 $R_2 \gg R_1$ 。图 5-9(a)为包含该非线性器件的电路。

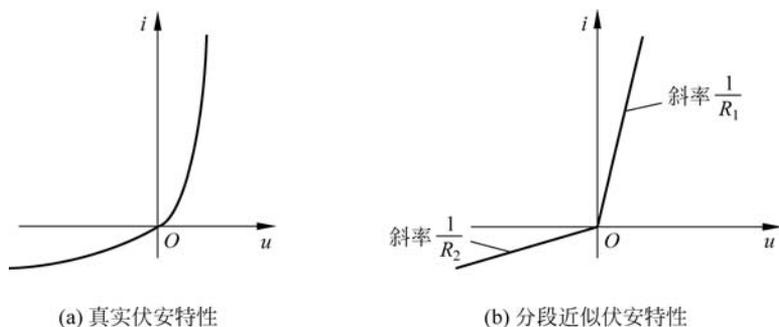


图 5-8 某非线性元件的伏安特性及其分段近似

如果 $u_i \geq 0$,电路中的电流 $i \geq 0$,则非线性器件用电阻 R_1 代替,电路简化为图 5-9(b),很容易求出电流 $i = \frac{u_i}{R + R_1}$,以及电压 $u_o = iR_1 = \frac{u_i R_1}{R_1 + R}$ 。

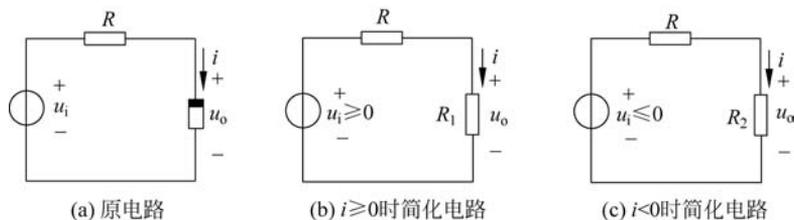


图 5-9 非线性电路与其等效电路

如果 $u_i \leq 0$,电路中的电流 $i < 0$,则非线性器件用电阻 R_2 代替,电路简化为图 5-9(c),电流 $i = \frac{u_i}{R + R_2}$,以及电压 $u_o = iR_2 = \frac{u_i R_2}{R_2 + R}$ 。

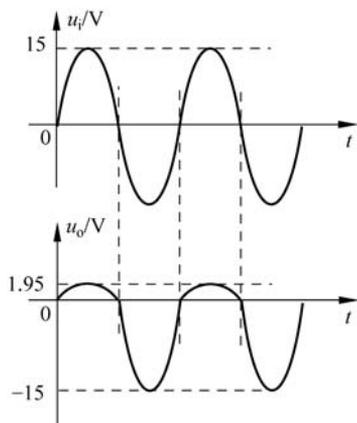


图 5-10 例 5-1 中的输入和输出电压波形

输出电压波形如图 5-10 所示。可见,非线性器件导致输出波形产生了明显失真。

在例 5-1 中,输入正弦电压 u_i 为单一频率正弦波,非线性器件导致的输出电压波形失真是一种非线性失真,其特点是在 u_o 中除了与 u_i 相同的频率(称为基频)分量外,还新出现了若干谐波频率(基频整数倍频率)分量。

5.5 小信号分析法

5.3.2 节的图解法分析了小信号激励时二极管电流电压变化情况。这里介绍另一种方法——小信号分析法,以图 5-11(a)的电路为例进行说明。

图 5-11(a)中的二极管参数为 $I_s = 1\text{pA}$, $U_T = 26\text{mV}$ 。直流电压源 U_D 为 0.7V , $u_d = 0.001\sin\omega t$ (V),求二极管电流 i_D 的表达式并画出其波形。

根据二极管的伏安特性方程 $i_D = I_S (e^{\frac{u_D}{U_T}} - 1)$ 以及 $u_D = U_D + u_d(t) = 0.7 + 0.001\sin\omega t$, 可得

$$i_D = I_S (e^{\frac{u_D}{U_T}} - 1) = I_S (e^{\frac{0.7+0.001\sin\omega t}{0.026}} - 1)$$

由此可以方便得到 i_D 的表达式,但是从该表达式很难画出波形。由于正弦波幅度很小,这里借助数学工具对 i_D 的表达式做进一步的分析。

一般情况下,电流 i_D 近似为

$$i_D = I_S (e^{\frac{u_D}{U_T}} - 1) \approx I_S e^{\frac{u_D}{U_T}} \quad (5-6)$$

根据函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 n 阶泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \dots \quad (5-7)$$

$i_D(u_D)$ 在 $u_D = U_D$ 处的泰勒级数为

【例 5-1】 某非线性器件的伏安特性如图 5-8(a) 所示,伏安特性近似为图 5-8(b),由其构成的非线性电路为图 5-9(a)。当输入为正弦波 $u_i(t) = 15\sin\omega t$ (V),电阻 $R_1 = 150\Omega$, $R_2 = 150\text{k}\Omega$, 电阻 $R = 1\text{k}\Omega$ 时,求输出电压,并画出其波形。

解: 由于非线性伏安特性有分段线性的特点,当 $u_i \geq 0$, 电路中的电流 $i \geq 0$, 则输出电压为

$$\begin{aligned} u_o &= \frac{R_1}{R + R_1} u_i = \frac{0.15}{1 + 0.15} u_i = 0.13 u_i \\ &= 0.13 \times 15 \sin\omega t = 1.95 \sin\omega t \text{ (V)} \end{aligned}$$

当 $u_i < 0$, 电路中的电流 $i < 0$, 则输出电压为

$$u_o = \frac{R_2}{R + R_2} u_i = \frac{150}{1 + 150} u_i \approx u_i = 15 \sin\omega t \text{ (V)}$$

$$i_D \approx I_s e^{U_D/U_T} \left[1 + \frac{u_d(t)}{U_T} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_d(t)}{U_T} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{u_d(t)}{U_T} \right)^3 + \dots \right] \quad (5-8)$$

由于输入交流信号幅度微小, $u_d(t) \ll U_T$, 式(5-8)忽略二次以上的高阶项, 可近似为

$$i_D \approx I_s e^{U_D/U_T} \left(1 + \frac{u_d(t)}{U_T} \right) = I_s e^{U_D/U_T} + I_s e^{U_D/U_T} \frac{u_d(t)}{U_T} \quad (5-9)$$

可以看出式(5-9)由两部分组成, 其中第一部分(第一项)只是来自直流电压源 U_D 的作用, 称为直流分量。此时的电路中相当于交流源置零, 只有直流源的情况, 如图 5-11(b)所示, 电流为

$$I_D = I_s e^{U_D/U_T} \quad (5-10)$$

将式(5-10)代入式(5-9), 则有

$$i_D = I_D + I_D \frac{u_d(t)}{U_T} = I_D + i_d(t) \quad (5-11)$$

式(5-11)的第二项 $i_d(t)$ 是交流源 $u_d(t)$ 引起的交流电流分量

$$i_d(t) = u_d(t) \frac{I_D}{U_T} \quad (5-12)$$

一旦二极管电流的直流分量确定, I_D 为已知的常数, U_T 在室温下为 26mV, 说明电流的交流部分随 $u_d(t)$ 变化。若令

$$g_m = \frac{I_D}{U_T} \quad (5-13)$$

将 g_m 的倒数称为二极管的动态电阻 r_d

$$r_d = \frac{1}{g_m} = \frac{U_T}{I_D} \quad (5-14)$$

则式(5-12)中的 $i_d(t)$ 可以写为

$$i_d(t) = u_d(t) g_m = \frac{u_d(t)}{r_d} \quad (5-15)$$

式(5-15)说明, 求解 $i_d(t)$ 的电路应为一个电压源串联一个电阻的简单电路, 其中的电压源是交流电压源 $u_d(t)$, 而电阻为二极管的动态电阻 r_d , 所以求电流交流成分的电路如图 5-11(c)所示。

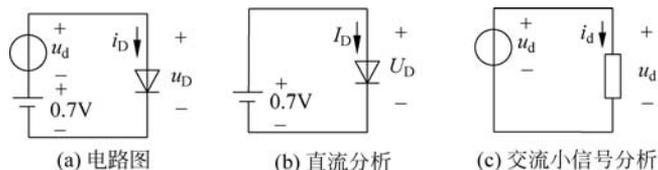


图 5-11 二极管小信号分析法

综上, 二极管电流由直流和交流分量构成, 其中直流分量 I_D 来自直流电压源 U_D 的作用, 求解直流分量 I_D 时, 需要将交流源置零; 交流分量 $i_d(t)$ 为交流电压源 $u_d(t)$ 作用在动态电阻 r_d 上引起的电流, 求解 $i_d(t)$ 时, 将直流源置零, 并将二极管等效为电阻 r_d , 注意电阻 r_d 与静态电流有关。

回到前面的问题, $I_S = 1\text{pA}$, $U_T = 26\text{mV}$, 则 $i_D(t)$ 的直流分量 I_D 为

$$I_D \approx I_S e^{U_D/U_T} = I_S e^{0.7/0.026} = 0.49(\text{A})$$

小信号电阻为

$$r_d = \frac{U_T}{I_D} = \frac{0.026}{0.49} = 0.053(\Omega)$$

根据式(5-15),

$$i_d(t) = \frac{u_d(t)}{r_d} = \frac{0.001\sin\omega t}{0.053} = 0.018\sin\omega t(\text{A}) \quad (5-16)$$

则二极管总电流为

$$i_D = I_D + i_d(t) = 0.49 + 0.018\sin\omega t(\text{A}) \quad (5-17)$$

由式(5-17)容易画出二极管的电流波形,是一个驮载在直流上的正弦波。

以上以二极管为例,分析了小信号激励时非线性器件的工作情况。分析说明,当小信号激励时,若非线性器件的工作区域集中在静点 Q 附近的一小部分,这一小部分曲线的斜率变化很小,可以用 Q 点处的斜率近似,因而这一小段的曲线可近似用直线代替,直线的斜率就是 Q 点处的斜率 g_m ,如图 5-12(a)所示,或等效为电阻 r_d ,该电阻的大小为 $1/g_m$,这种分析方法称为小信号分析法。

二极管在静点处的斜率为

$$g_m = \left. \frac{di_D}{du_D} \right|_Q = \left. \frac{I_S}{U_T} e^{u_D/U_T} \right|_Q = \frac{I_S}{U_T} e^{U_{DQ}/U_T} = \frac{I_{DQ}}{U_T} \quad (5-18)$$

与式(5-13)相同,则等效电阻为

$$r_d = 1/g_m = \frac{U_T}{I_{DQ}} \quad (5-19)$$

MOS 场效应管电路在小信号激励时,MOS 管的工作区域也集中在 Q 点附近的一小部分,如图 5-12(b)所示,这一小部分曲线的斜率变化很小,可以用 Q 点处的斜率 g_m 近似,即

$$g_m = \left. \frac{di_D}{du_{GS}} \right|_Q$$

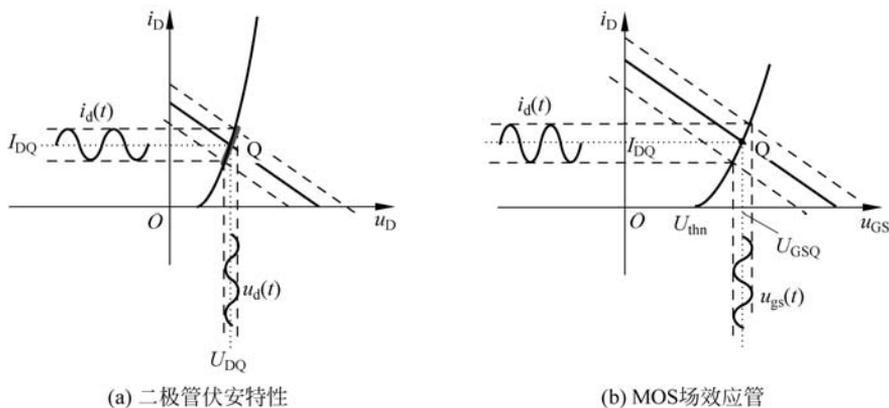


图 5-12 二极管与 MOS 场效应管小信号工作特性

MOS 场效应管的伏安特性为平方律: $i_D = K_n(u_{GS} - U_{thn})^2$, 则

$$g_m = \left. \frac{di_D}{du_{GS}} \right|_Q = 2K_n(u_{GS} - U_{thn}) \Big|_Q = 2K_n(U_{GSQ} - U_{thn}) \quad (5-20)$$

或者根据 $I_Q = K_n(U_Q - U_{thn})^2$, 则 g_m 也可以用式(5-21)计算:

$$g_m = 2\sqrt{K_n I_Q} \quad (5-21)$$

对于小信号激励的非线性电路分析, 分为以下两个步骤。

第一步为直流分析, 分析时将交流源置零, 只有直流电源 U_{DD} 作用时的情况, 得到静态工作点 Q , 即 I_Q 和 U_Q 。

第二步是交流分析, 分析时将直流源置零, 只有交流小信号产生的交流分量, 求出 g_m 或电阻 $r = \frac{1}{g_m}$, 进而求出其两端的交流电压 u 或者交流电流 i 。

总之, 小信号激励时非线性器件的电压和电流为直、交流分量的叠加。

【例 5-2】 某非线性器件构成电路如图 5-13 所示, 其伏安特性为

$$i_N = \begin{cases} Ku_N^2 & u_N > 0 \\ 0 & u_N \leq 0 \end{cases}$$

其中 $K=0.5\text{mA/V}^2$, $U_{DD}=5\text{V}$, $R=2\text{k}\Omega$, 输入信号为 $f(t)=50\sin\omega t$ (mV), 求输出电压 u_o 。

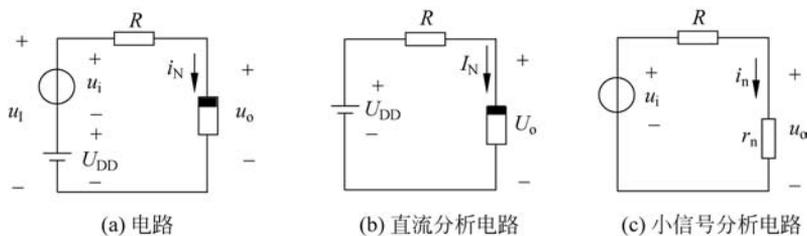


图 5-13 例 5-2 图

解: 根据电路可知, 输出电压 u_o 为非线性器件两端的电压 u_N 。

输入信号幅度小, 叠加在直流电压源上可保证 $u_N > 0$, 因此 $i_N = Ku_N^2$ 。根据小信号分析法的分析步骤如下。

(1) 首先进行直流分析, 由图 5-13(b) 可知

$$U_{DD} = I_N R + U_N \quad (5-22)$$

将 $I_N = KU_N^2$ 代入式(5-22), 可得

$$RKU_N^2 + U_N - U_{DD} = 0 \quad (5-23)$$

求解方程(5-23)得到

$$U_N = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4U_{DD}RK}}{2RK} \quad (5-24)$$

代入已知条件: $K=0.5\text{mA/V}^2$, $U_{DD}=5\text{V}$, $R=2\text{k}\Omega$, 可得两组解, 舍去 $U_N < 0$ 这个不合理的解, 得到静态工作点: $U_{NQ}=1.8\text{V}$, $I_{NQ}=3.24\text{mA}$ 。

(2) 小信号分析如下

$$g_m = \left. \frac{di_N}{du_N} \right|_Q = 2KU_N \Big|_Q = 2KU_{NQ}$$

小信号等效电阻为

$$r_n = 1/g_m = \frac{1}{2KU_{NQ}}$$

代入数据可得 r_n 为

$$r_n = \frac{1}{2 \times 0.5 \times 10^{-3} \times 1.8} = 556(\Omega)$$

根据电路图 5-13(c), 得到交流成分为

$$u_n = \frac{r_n}{R + r_n} u_i = \frac{556}{1000 + 556} u_i = 0.35 \times 50 \sin \omega t = 17.9 \sin \omega t (\text{mV})$$

最终得到

$$u_o = u_N = u_n + U_N = 1.8 \text{V} + 17.9 \sin \omega t (\text{mV})$$

小结

本章介绍了非线性电路及其分析方法。非线性电路就是包含非线性元器件的电路, 分析时仍可列写 KCL、KVL 方程。

非线性电路的分析方法有求解方程法、图解法、分段线性分析法以及小信号分析法。解方程法需要列写 KCL、KVL 方程, 以及元器件本身的伏安方程, 然后求出解析解或者数值解。图解法将上述方程以图的形式表现出来, 从而找到工作点。分段线性法分析将非线性元器件的伏安特性用不同斜率的直线表示, 在每一段的电压电流范围内的伏安特性视为线性, 一般用在大信号激励时。小信号分析法适用于非线性器件的工作电压和电流在一个小范围内变化的情况, 将此范围内的伏安特性近似为线性, 从而可以用分析线性电路的方法进行分析。

习题

5.1 结型场效应管(JFET)的伏安特性如图 5-14 所示, 由电路得到的伏安方程为 $U_{GS} = 4.5 - I_D$, 用图解法求出电路的静态工作点。

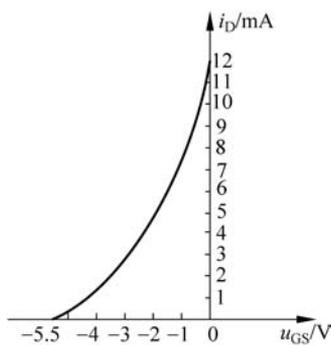


图 5-14 题 5.1 图

5.2 某结型场效应管的伏安特性为: 当 $-2.5 \text{V} \leq u_{GS} < 0$ 时, $i_D = I_{DSS} \left(1 - \frac{u_{GS}}{U_{pn}}\right)^2$, 其中 $I_{DSS} = 5 \text{mA}$, $U_{pn} = -2.5 \text{V}$ 。如果电路中列写的 KVL 方程为 $U_{GS} = -I_D R$, 其中 $R = 1 \text{k}\Omega$ 。求该晶体管的工作点电流 I_{DQ} 和 U_{GSQ} 。

5.3 电路如图 5-15(a) 所示, 其中非线性元件的分段线性近似如图 5-15(b) 所示, 求其两端的电压。

5.4 某 JFET 场效应晶体管, 当 $-3 \text{V} < u_{GS} \leq 0$ 时, 其伏安特性方程为 $i_D = 10 \times \left(1 + \frac{u_{GS}}{3}\right)^2$, 已知静态工作点为 $I_{DQ} = 3 \text{mA}$, $U_{GSQ} = -1.36 \text{V}$, 求静点处的跨导 g_m 。

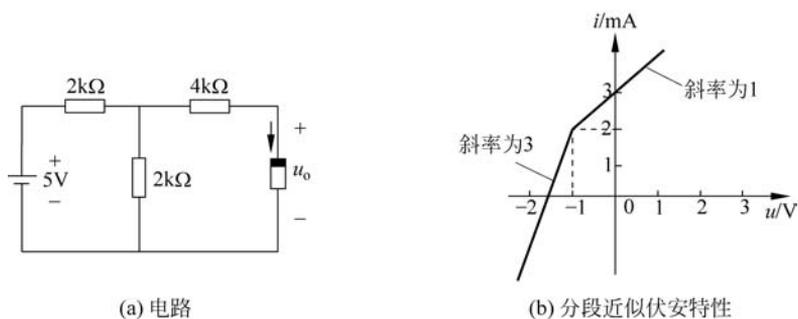


图 5-15 题 5.3 图

5.5 二极管电路如图 5-16 所示, 已知 $U_{DD} = 5V$, $R = 1k\Omega$, 输入 $u_i = 200\sin\omega t$ (mV), 求输出电压 u_o 并画出其波形。

5.6 已知非线性元件 A, 当 $u_A < 0$ 时, $i_A = 0$; $u_A \geq 0$, $i_A = a_1 u_A^2 + a_2 u_A$, 含有非线性元件 A 的电路如图 5-17 所示, 求 U_A 和 I_A 的解析解。

5.7 题 5.6 中的非线性元件 A, $a_1 = 2mA/V^2$, $a_2 = 1mA/V$, 含有元件 A 的电路如图 5-18 所示, 当 $U_{DD} = 5V$, $R = 2k\Omega$, $u_i = 50\sin\omega t$ (mV) 时, 求 u_A 并画出波形。

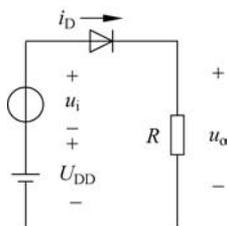


图 5-16 题 5.5 图

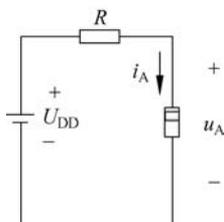


图 5-17 题 5.6 图

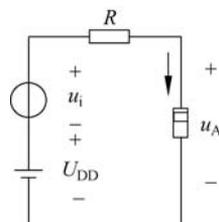


图 5-18 题 5.7 图