第3章

连续时间信号与系统的频域分析

第 2 章介绍了信号与系统的时域分析，以时间为自变量，讨论了线性时不变系统数学模型的建立，以及零输入响应和零状态响应求解方法。系统的分析与计算都是在时间域完成的，这种方法物理概念清晰，直观明了，是信号和系统分析的基础。实际上信号包含多种属性，频域分析是以频率为自变量，通过建立时域和频域之间的内在联系，对信号与系统的频率特性进行分析。

本从周期信号入手，介绍傅里叶级数展开的两种形式，并引入信号频谱图的描述方法。对于非周期信号，通过傅里叶变换揭示信号时间特性和频率特性之间的内在联系。利用频域分析方法讨论了系统特性和响应求解，从而建立信号通过线性系统的一些重要概念，包括无失真传输、理想滤波器、调制解调和时域采样等。

3.1　周期信号的傅里叶级数

在前两章时域分析中，讨论了信号的脉冲分解，是以单位冲激信号为基本单元，将任意信号分解为不同时刻不同强度的冲激信号的组合，这种分解方式为系统零状态响应的卷积分析法奠定了基础。由于信号具有多种属性，所以可以从多种角度进行分解。对于周期信号，一种常见的方法就是以正弦信号作为基本单元，将其分解为不同频率的正弦信号的叠加，从而可从频率构成来分析。这一思想由法国物理学家傅里叶在 1807 年提出，后人将这一结论命名为傅里叶级数理论。

3.1.1　三角形式的傅里叶级数

式(3.1-1)为正弦信号的时域表达式，它是随时间变化的函数，只要确定其表达式中的振幅 A、角频率 ω 和相位 θ 这三个要素，该正弦信号也就唯一确定。其中角频率 ω 决定了正弦信号的变化速率，振幅 A 决定了正弦信号的幅度变化范围，相位 θ 决定了正弦信号的初始位置。

$$f(t)=A\sin(\omega t+\theta) \tag{3.1-1}$$

设正弦信号 $f_1(t)$ 的角频率为 1，振幅为 $\frac{4}{\pi}$，相位为 0，则其波形如图 3-1(a)所示，数学表达式为

$$f_1(t)=\frac{4}{\pi}\sin t$$

若给信号 $f_1(t)$ 再叠加两个正弦分量 $\frac{4}{3\pi}\sin 3t$ 和 $\frac{4}{5\pi}\sin 5t$，可得到信号 $f_2(t)$，其波形如图 3-1(b)所示，数学表达式为

$$f_2(t)=\frac{4}{\pi}\sin t+\frac{4}{3\pi}\sin 3t+\frac{4}{5\pi}\sin 5t$$

可以看出 $f_2(t)$ 仍然是周期信号，其周期与 $f_1(t)$ 相同。若按照此规律将 100 个正弦分量叠加，则可得到波形如图 3-1(c)所示信号 $f_3(t)$，其表达式为

$$f_3(t)=\sum_{n=0}^{99}\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin[(2n+1)t]$$

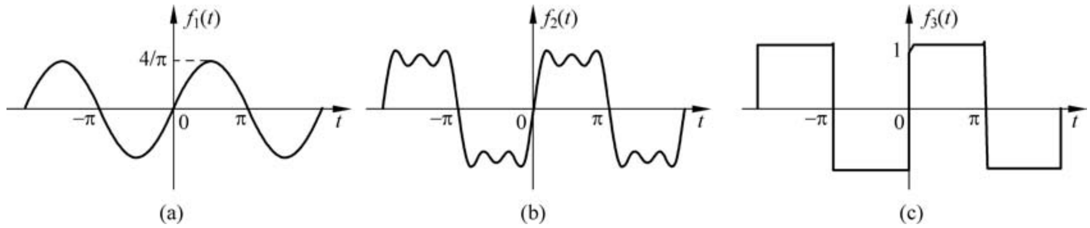


图 3-1　正弦信号合成周期矩形信号示意图

可以看出，信号 $f_3(t)$ 的波形形状与周期矩形信号非常相似。实际上，当 n 取到无穷大时，合成的波形即为周期矩形信号。

不仅周期矩形信号可以由不同频率的正弦信号组合而成，其他的周期信号也具有类似的特点。例如，图 3-2(a)为正弦信号 $f_1(t)=\frac{4}{\pi}\sin t$ 的波形，图 3-2(b)为 $f_2(t)=\frac{4}{\pi}\sin t-\frac{4}{2\pi}\sin 2t+\frac{4}{3\pi}\sin 3t$ 的波形，图 3-2(c)为 $f_3(t)=\sum_{n=1}^{99}(-1)^{n+1}\frac{4}{n\pi}\sin(nt)$ 的波形。可以看出，随着正弦分量的增加，信号波形越来越接近周期锯齿信号。当 n 取到无穷大时，合成的波形即为周期锯齿信号。

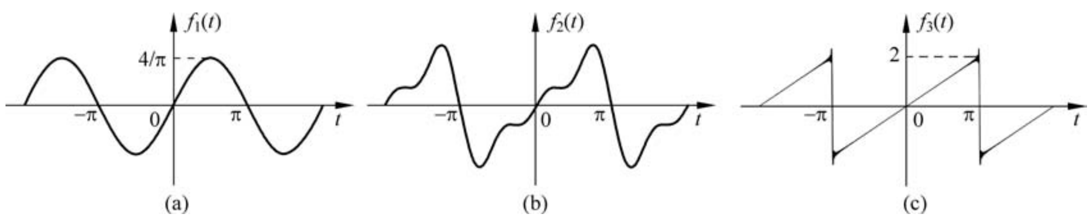


图 3-2　正弦信号合成锯齿波

由上面的讨论可以看出，周期信号可以由不同频率的正弦信号叠加而成，这就是傅里叶级数理论的主要思想，即周期信号 $f(t)$ 可以用正弦级数来表示，表达式为

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \tag{3.1-2}$$

式(3.1-2)称为周期信号三角形式的傅里叶级数展开式。其中 n 为正整数，a_0 为常数，也称为直流分量，a_n 为余弦分量的振幅，b_n 为正弦分量的振幅。若周期信号的周期为 T_1，则角频率 $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$。

当然傅里叶的这一描述并不完全准确，1829 年由狄里赫利给出了若干条件后，此理论才趋于完善。狄里赫利指出，若周期信号 $f(t)$ 满足以下三个条件才可以展开为傅里叶级数，即

(1) 在一个周期内，信号连续或者第一类间断点的个数有限；

(2) 在一个周期内,信号的极大值和极小值的个数是有限的;

(3) 在一个周期内,信号绝对可积,即 $\int_{t_0}^{t_0+T_1} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$。

通常将上述条件称为狄里赫利条件。工程中常用的实周期信号通常均满足狄里赫利条件,因此一般不再特殊考虑。

式(3.1-2)可展开为

$$f(t) = a_0 + a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t + a_2\cos 2\omega_1 t + b_2\sin 2\omega_1 t + \cdots + a_n\cos n\omega_1 t + b_n\sin n\omega_1 t + \cdots \tag{3.1-3}$$

从式(3.1-3)可以看出,周期信号可以展开为直流以及无穷多个不同频率的正弦分量和余弦分量的叠加,各分量的频率均为 ω_1 的整数倍。a_0、a_n 和 b_n 称为傅里叶系数,计算方法如下:

直流分量

$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\mathrm{d}t \tag{3.1-4}$$

余弦分量振幅

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)\mathrm{d}t \tag{3.1-5}$$

正弦分量振幅

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t \tag{3.1-6}$$

通常为了计算方便,积分区间取 $0 \sim T_1$ 或 $-\frac{T_1}{2} \sim \frac{T_1}{2}$。根据数学运算规律可知,$a_n$ 是关于 $n\omega_1$ 的偶函数,b_n 是关于 $n\omega_1$ 的奇函数。若周期信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的周期均为 T_1,则它们的角频率 ω_1 相同,它们包含的频率分量均为 ω_1 的整数倍,但由于傅里叶系数 a_n 和 b_n 的不同,使得各频率分量的振幅不同,所以叠加后得到两个不同周期信号。图 3-1 和图 3-2 就说明了这一点。

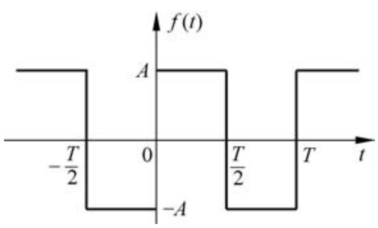


图 3-3　周期矩形脉冲信号时域波形

例 3-1　已知周期矩形脉冲信号波形如图 3-3 所示,计算其三角形式的傅里叶级数展开式。

解:从图 3-3 可以看出,周期信号 $f(t)$ 是关于 t 的奇函数,故可得

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_1 t)\mathrm{d}t = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4}{T}\frac{1}{n\omega_1}(-\cos n\omega_1 t)\Big|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{4A}{n\omega_1 T}\left(1-\cos n\omega_1\frac{T}{2}\right)$$

$$=\frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

将系数代入式(3.1-2)可得该周期矩形脉冲信号的级数展开式为

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin(n\omega_1 t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{n\pi}\sin(n\omega_1 t),\quad n=1,3,5,\cdots$$

$$=\frac{4A}{\pi}\sin(\omega_1 t)+\frac{4A}{3\pi}\sin(3\omega_1 t)+\frac{4A}{5\pi}\sin(5\omega_1 t)+\cdots$$

由展开式可以看出，由于 $a_0=0$，$a_n=0$，故图 3-3 所示的周期矩形脉冲信号中仅包含了奇次频率的正弦分量，无直流和余弦分量，其中各正弦分量的振幅随着频率的增加而减小。

式(3.1-2)中，$a_n\cos n\omega_1 t$ 和 $b_n\sin n\omega_1 t$ 都是角频率为 $n\omega_1$ 的三角分量，可以利用三角函数的计算公式，将正弦分量和余弦分量进行合并。

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

$$=a_0+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos n\omega_1 t-\frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin n\omega_1 t\right)$$

令 $c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$\theta_n=\arctan\dfrac{-b_n}{a_n}$，可得

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\cos\varphi_n\cos n\omega_1 t-\sin\varphi_n\sin n\omega_1 t)$$

$$=c_0\cos\theta_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\theta_n)\qquad(3.1\text{-}7)$$

式(3.1-7)可以称为标准三角形式级数展开式。其中，c_0 是直流分量的幅度，θ_0 是直流分量的相位，θ_0 一般取值为 0 或 $\pm\pi$。由于正弦信号和余弦信号具有相同的特性，两者仅在相位上相差 $\pi/2$，且可以互相转化，故本教材通常将两者统称为“正弦信号”。三角形式的级数展开式中各正弦分量的频率均为 $n\omega_1$，是角频率 ω_1 的整数倍。通常把 $n=1$ 时的正弦分量称为基波，ω_1 为基波频率，c_1 为基波振幅，θ_1 为基波相位；$n>1$ 以后的正弦分量称为谐波，例如 $c_2\cos(2\omega_1 t+\theta_2)$ 称为二次谐波，$2\omega_1$ 为二次谐波频率，c_2 为二次谐波振幅，θ_2 为二次谐波相位。以此类推，$c_n\cos(n\omega_1 t+\theta_n)$ 就是 n 次谐波，$n\omega_1$ 是 n 次谐波频率，c_n 是 n 次谐波振幅，θ_n 是 n 次谐波相位。由于 c_n 表示振幅，根据计算公式可知 $c_n\geqslant 0$，同时为了保证相位的唯一性，通常规定 $-\pi\leqslant\theta_n\leqslant\pi$。

由式(3.1-7)可以看出，周期信号由直流、基波和各次谐波线性组合而成。其中每个正弦分量均由其频率 $n\omega_1$、振幅 c_n 和相位 θ_n 三个要素决定。根据此式，可以清楚地了解

该周期信号中含有哪些频率分量,各频率分量的振幅和相位分别是多少。也就是说通过三角级数展开式,将周期信号的特性分析转化为其包含的各频率分量的振幅、相位的计算。

例 3-2 已知周期信号 $f(t)$如下,写出其标准三角形式的傅里叶级数展开式。

$$f(t)=1+\sqrt{2}\cos\omega_0 t-\cos\left(2\omega_0 t+\frac{5\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\omega_0 t+0.5\sin 3\omega_0 t$$

解:由三角函数的运算,可将表达式改写为

$$\begin{aligned}f(t)&=1+(\sqrt{2}\cos\omega_0 t+\sqrt{2}\sin\omega_0 t)+\cos\left(2\omega_0 t+\frac{5\pi}{4}-\pi\right)+0.5\cos\left(3\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)\\&=1+2\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)+0.5\cos\left(3\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

从结果中可以看出,相较三角级数一般的展开式,标准三角形式级数展开式能更直观地表现信号包含的频率信息。本例中周期信号 $f(t)$含有 0、ω_0、$2\omega_0$ 和 $3\omega_0$ 四个频率的正弦分量。其中,频率为 0 的正弦分量,其振幅为 1,相位为 0;频率为 ω_0 的正弦分量,振幅为 2,相位为$-\frac{\pi}{4}$;频率为 $2\omega_0$ 的正弦分量,振幅为 1,相位为$\frac{\pi}{4}$;频率为 $3\omega_0$ 的正弦分量,振幅为 0.5,相位为$-\frac{\pi}{2}$。

3.1.2 复指数形式的傅里叶级数

3.1.1 节中以正弦信号为基本单元介绍了周期信号的三角形式傅里叶级数展开,实际中与正弦信号具有类似特性的基本单元还有复指数信号 $e^{j\omega t}$。它们的共同特点是:三角函数和复指数信号都具有正交性、微积分不变性,并且同时具有时间和频率的含义。

利用复指数信号可将周期为 T_1 的周期信号展开为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} \tag{3.1-8}$$

式中,$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$是周期信号的基波频率,$n$ 为$-\infty\sim+\infty$的整数。式(3.1-8)说明周期信号可以展开为无穷多个频率为 $n\omega_1$ 的复指数信号 $e^{jn\omega_1 t}$ 的线性组合,各项的系数为 $F(n\omega_1)$。因此,通常将 $F(n\omega_1)$称为复指数级数展开式的系数,简称谱系数。$F(n\omega_1)$有时也简写为 F_n,具体计算如式(3.1-9)所示。

$$F_n=F(n\omega_1)=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \tag{3.1-9}$$

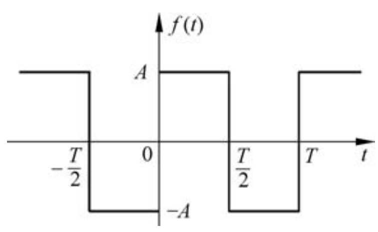


图 3-4 周期矩形脉冲的时域波形

例 3-3 求图 3-4 所示周期矩形脉冲复指数形式的傅里叶级数。

解:根据式(3.1-9)计算傅里叶系数。

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-A)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{A}{T}\cdot\frac{1}{-\mathrm{j}n\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{A}{T}\cdot\frac{1}{-\mathrm{j}n\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$
$$=\frac{A}{\mathrm{j}n\omega_1 T}(2-\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1\frac{T}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1\frac{T}{2}})=\frac{A}{\mathrm{j}n\pi}(1-\cos n\pi)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{2A}{\mathrm{j}n\pi}, & n=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots\\ 0, & n=0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots\end{cases}$$

将谱系数 F_n 代入式(3.1-8),所以级数展开式为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2A}{\mathrm{j}n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t},\quad n=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots$$

比较例 3-1 和例 3-3,可以看出同一个周期信号既可以展开为三角形式的傅里叶级数,也可以展开为复指数形式的傅里叶级数。式(3.1-10)所示的欧拉公式给出了正余弦信号和复指数信号之间的关系,所以两种形式的傅里叶级数可以相互转换。

$$\begin{cases}\cos\omega t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\\ \sin\omega t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\end{cases}\tag{3.1-10}$$

例如,例 3-1 中周期矩形信号的三角级数展开式为

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{n\pi}\sin(n\omega_1 t),\quad n=1,3,5,\cdots$$

根据欧拉公式,可将上式变化为

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{n\pi}\cdot\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{\mathrm{j}n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{\mathrm{j}n\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{\mathrm{j}n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{\mathrm{j}(-n)\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-n)\omega_1 t}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2A}{\mathrm{j}n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t},\quad n=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots$$

这与例 3-3 的计算结果一致。实际上,利用式(3.1-10)对周期信号三角形式傅里叶级数展开式进行变换,可得

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$
$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}}{2}+b_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}}{2\mathrm{j}}\right)$$
$$=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n+\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\tag{3.1-11}$$

将式(3.1-8)展开可得

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}=F_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}+F_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}) \tag{3.1-12}$$

比较式(3.1-11)和式(3.1-12)可得

$$F_0=a_0,\quad F_n=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n),\quad F_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+\mathrm{j}b_n) \tag{3.1-13}$$

从上述讨论可知,三角级数和复指数级数是周期信号的两种不同展开方式,式(3.1-13)给出了两种形式傅里叶级数展开式的系数关系。

3.1.3 周期信号的频谱

周期信号可以分解为不同频率的正弦分量的组合,而每个正弦分量都可以用振幅、角频率和初相位三个要素来确定。为了直观、清楚地表示信号中所包含的频率分量,以及各频率分量的振幅和相位信息,可以借助频谱图来描述信号的频率特性。

1. 三角形式的频谱图

一般来说,频谱图包含振幅谱图和相位谱图两部分。

(1) 振幅谱图:以频率为横轴,振幅为纵轴,用长短不同的谱线来表示信号所包含的各正弦分量的振幅大小,称为周期信号的振幅谱图。

(2) 相位谱图:以频率为横轴,相位为纵轴,用长短不同的谱线来表示信号各频率分量的相位,称为周期信号的相位谱图。

根据前面的讨论可知,周期信号可展开为三角形式的傅里叶级数,即

$$f(t)=c_0\cos\theta_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\theta_n)$$

式中,c_n 体现了不同频率正弦信号的振幅,θ_n 体现了不同频率正弦信号的相位。因此 c_n 随 ω 的变化谱线就称为周期信号三角形式的振幅谱图,θ_n 随 ω 的变化谱线就称为周期信号三角形式的相位谱图。由于在三角级数展开式中信号所包含的频率 $\omega\geqslant 0$,信号的振幅谱线和相位谱线只会出现在纵轴和它右边,且呈现离散的线状图,因此三角形式的频谱图也称为单边谱。

例 3-4 已知周期信号 $f(t)$如下,画出该信号的振幅谱和相位谱。

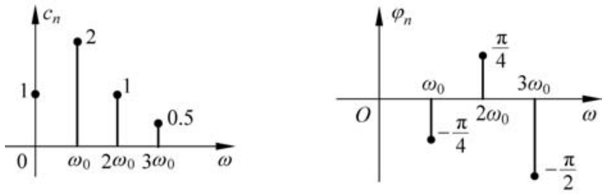
$$f(t)=1+\sqrt{2}\cos\omega_0 t-\cos\left(2\omega_0 t+\frac{5\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\omega_0 t+0.5\sin 3\omega_0 t$$

解:为了获得信号 $f(t)$所包含的频率分量及各频率分量的振幅和相位信息,需要先得到该周期信号标准三角形式的级数展开式。

由例 3-2 的结论可知

$$f(t)=1+2\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)+0.5\cos\left(3\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)$$

故 $f(t)$的振幅谱和相位谱如图 3-5 所示。



(a) 振幅谱　　　　(b) 相位谱

图 3-5　信号频谱

例 3-5　已知某周期信号的频谱如图 3-6 所示,请写出该周期信号的表达式。

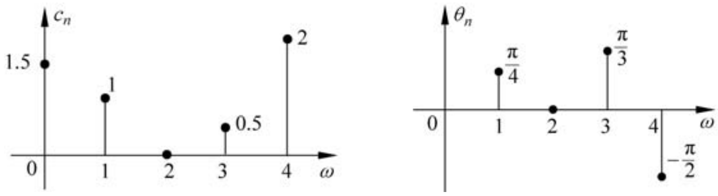


图 3-6　例 3-5 信号振幅谱和相位谱

解:由图中可以看出,信号包含了 0,1,3,4 四个频率,每个频率对应的振幅和相位如下:

信号包含的频率为

$$\omega=0,\quad \omega=1,\quad \omega=3,\quad \omega=4$$

对应振幅为

$$c_0=1.5,\quad c_1=1,\quad c_3=0.5,\quad c_4=2$$

对应相位为

$$\theta_0=0,\quad \theta_1=\frac{\pi}{4},\quad \theta_3=\frac{\pi}{3},\quad \theta_4=-\frac{\pi}{2}$$

因此该信号的表达式为

$$f(t)=1.5+\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+0.5\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(4t-\frac{\pi}{2}\right)$$

从上述例题中可以看出,根据周期信号傅里叶级数展开式能够确定信号中包含的频域信息,可利用频谱图来描述信号中包含的频率、振幅和相位信息。反之,根据频谱图也可以确定周期信号的时域表达式。即周期信号的时域与频域间存在一一对应的关系。

2. 复指数形式的频谱图

周期信号也可展开为复指数形式的傅里叶级数,即

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

式中，谱系数 F_n 一般是复数，可以将其表示为

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} \tag{3.1-14}$$

可以看出，F_n 是 $e^{jn\omega_1 t}$ 分量的系数，包含了该频率分量的振幅和相位信息。通常将振幅 $|F_n|$ 随频率 ω 变化的图形描述称为振幅谱图；相位 φ_n 随频率 ω 变化的图形描述称为相位谱图。

由式(3.1-13)可知：

(1) 当 $n=0$，振幅 $|F_0|=c_0$，$\varphi_0=\theta_0$。即频率为 0 时，三角形式频谱和复指数形式频谱的振幅和相位相同。

(2) 当 $n\neq 0$ 时，有

$$|F_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2} = \frac{1}{2}c_n, \quad \varphi_n = \arctan\frac{-b_n}{a_n} = \theta_n \tag{3.1-15}$$

$$|F_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2} = \frac{1}{2}c_n, \quad \varphi_{-n} = \arctan\frac{b_n}{a_n} = -\theta_n \tag{3.1-16}$$

谱系数 F_n 中既包含了振幅信息，也包含了相位信息，故三角级数展开式和复指数级数展开式的本质是相同的，只是采用的基元不同而已。由于实际系统中的信号均为实信号，对实信号进行频谱分析时，负频率没有实际意义，仅是数学运算的结果。一般 $e^{jn\omega_1 t}$ 和 $e^{-jn\omega_1 t}$ 同时成对出现，只有负频率项与相应的正频率项合并起来，才是信号实际的频谱。

例 3-6 画出例 3-5 所示信号的复指数形式频谱图。

解：例 3-5 中根据频谱图得到信号表达式为

$$f(t) = 1.5 + \cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) + 0.5\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(4t-\frac{\pi}{2}\right)$$

根据欧拉公式可将其展开为

$$f(t) = 1.5 + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-jt} + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}\cdot e^{j3t} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}\cdot e^{-j3t} + e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j4t} + e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-j4t}$$

可得直流分量 $F_0=1.5$，其余各项系数分别为

$$F_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad F_3 = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}, \quad F_4 = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$F_{-1} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad F_{-3} = \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}, \quad F_{-4} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

所以复指数形式频谱图如图 3-7 所示。

从图 3-7 中可以看出，由于复指数级数展开式中，n 的取值为 $-\infty\sim+\infty$，因此复指数频谱图是双边谱。

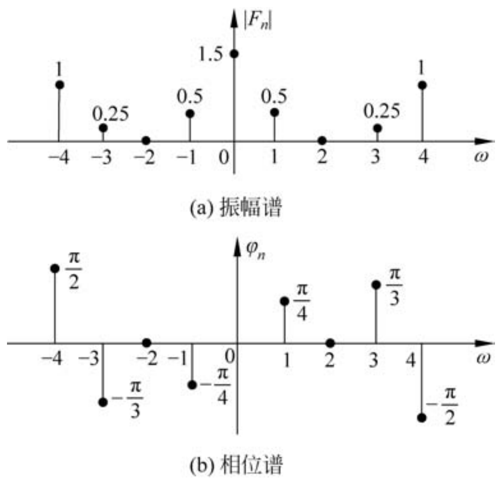


图 3-7　例 3-6 信号复指数形式频谱

比较例 3-5 和例 3-6 的频谱图，结合之前的分析可建立复指数频谱与三角频谱的关系，即

(1) 振幅谱：$n=0$ 时，$|F_0|=c_0$，两者振幅相等；$n\neq 0$ 时，$|F_n|=|F_{-n}|=\frac{1}{2}C_n$，复指数形式振幅是三角形式振幅的 1/2，是关于 ω 的偶函数，振幅谱图关于纵轴对称。

(2) 相位谱：$n\geqslant 0$ 时，$\varphi_n=\theta_n$，两者相位相同；$n<0$ 时，$\varphi_n=-\varphi_{-n}$，F_n 的相位是关于 ω 的奇函数，相位谱图关于原点对称。

3.1.4　常用周期信号频谱分析

通过常用周期信号的频谱分析，可以了解周期信号频谱的一般规律和特点。

1. 周期矩形脉冲信号

周期矩形脉冲信号是一种常用的周期信号，设其脉宽为 τ，脉冲高度为 E，周期为 T_1，且 $\tau<\frac{T_1}{2}$，则信号波形如图 3-8 所示。

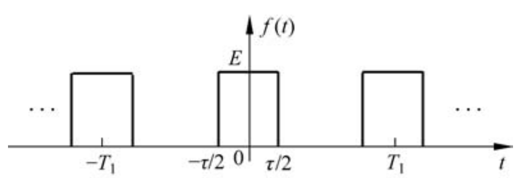


图 3-8　周期矩形信号时域波形

$f(t)$在一个周期内$\left(-\frac{T_1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T_1}{2}\right)$的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}E, & -\frac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2}\\ 0, & 其他\end{cases}$$

利用式(3.1-9)可得其复指数形式的傅里叶谱系数为

$$\begin{aligned}F_n&=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T_1}\cdot\frac{E}{-\mathrm{j}n\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{E}{\mathrm{j}n\omega_1 T_1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1\frac{\tau}{2}}\right)\\&=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)\end{aligned}\tag{3.1-17}$$

所以周期矩形脉冲信号的复指数形式的级数展开式为

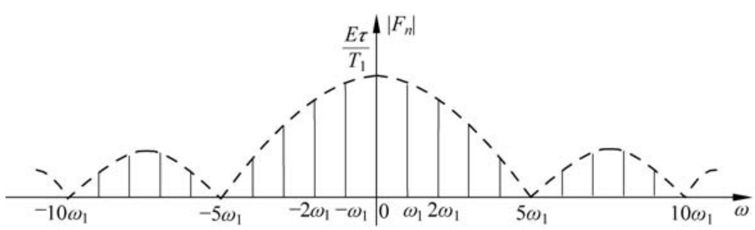
$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

根据式(3.1-17)可知 F_n 为实数,故

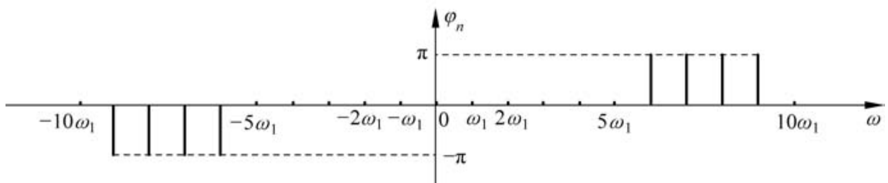
$$|F_n|=\left|\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)\right|=\frac{E\tau}{T_1}\left|\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)\right|$$

$$\varphi_n=\begin{cases}0, & F_n\geqslant 0\\ \pm\pi, & F_n<0\end{cases}$$

图 3-9(a)和(b)分别为 $T=5\tau$ 时,周期矩形脉冲信号的振幅谱和相位谱。



(a) 振幅谱



(b) 相位谱

图 3-9 周期矩形脉冲信号的频谱

由于周期矩形脉冲信号的谱系数 F_n 是实数,可以直接画出 F_n 随 ω 的变化情况,所

以振幅谱和相位谱可以合并为一幅图，如图 3-10 所示，其中相位可通过振幅的正负来体现。

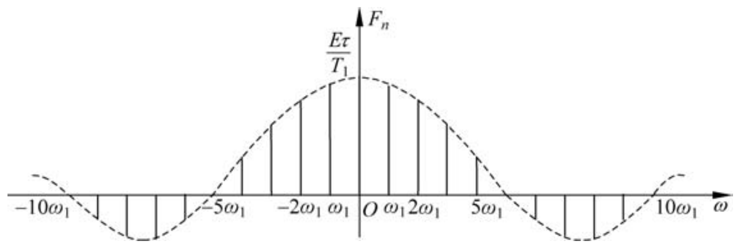


图 3-10　周期矩形脉冲信号的频谱

从图 3-10 中可以看出，周期矩形脉冲信号的频谱是间隔为 ω_1 的离散谱线，振幅包络线形状为抽样函数，最大值在 $n=0$ 处，振幅为$\dfrac{E\tau}{T_1}$。当 $\omega=\dfrac{2n\pi}{\tau}(n=\pm1,\pm2,\cdots)$时，$F_n=0$，其中第一个零点坐标为 $5\omega_1=5\cdot\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\tau}$。

周期矩形脉冲信号的脉宽 τ 和周期 T_1 与其频谱分布有着密切关系。

(1) 脉宽 τ 不变，周期 T_1 改变。

当脉宽 τ 不变，周期 T_1 增加时，信号谱线间隔 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$相应地减小，谱线变得密集，同时各频率的振幅整体变小，如图 3-11 所示。当 $T_1\to\infty$时，谱线无限密集，谱线间隔 $\omega_1\to0$，离散谱将变为连续谱。

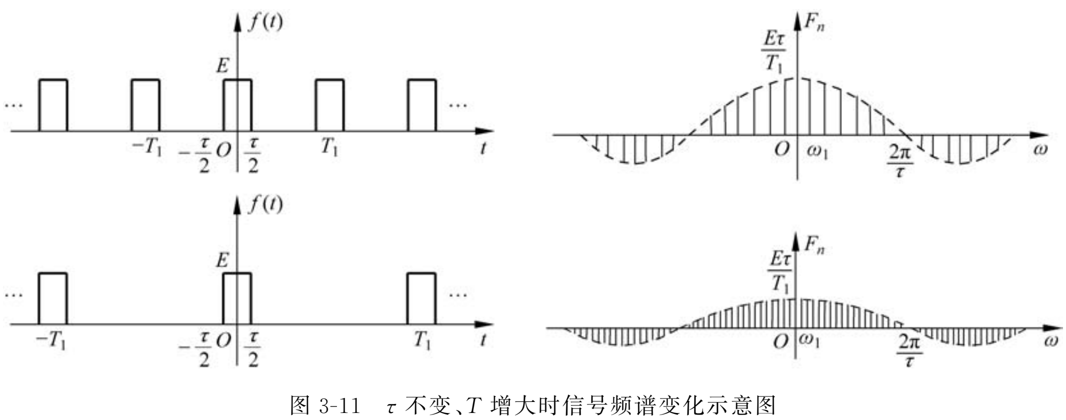


图 3-11　τ 不变、T 增大时信号频谱变化示意图

(2) 周期 T_1 不变，脉宽 τ 改变。

当周期不变时，谱线间隔 ω_1 保持不变。若脉宽 τ 减小，则第一个过零点的频率变大，在 $0\sim2\pi/\tau$ 的频率范围内，包含的信号谱线数量增加，信号频谱幅度整体减小，如图 3-12 所示。

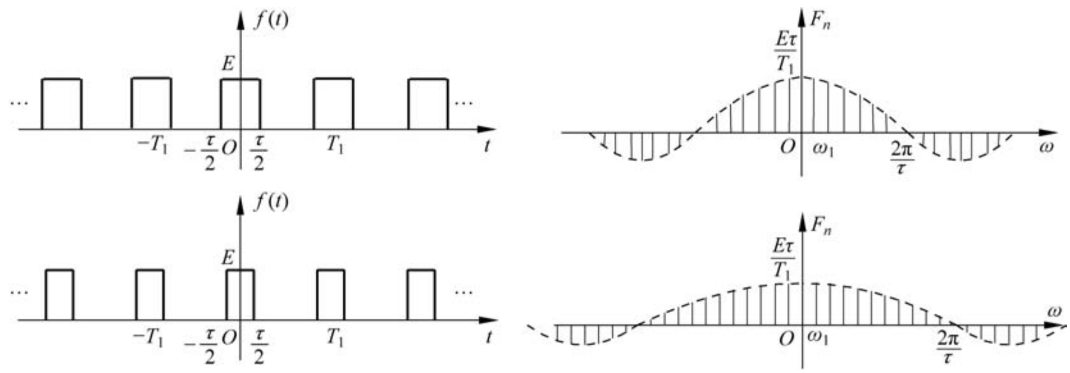


图 3-12　T 不变、τ 减小时信号频谱变化示意图

2. 周期三角脉冲信号

如图 3-13 所示的周期三角脉冲信号，其周期为 T_1。

周期三角脉冲信号在一个周期内的函数表达式为

$$f_1(t)=-\frac{2E}{T_1}\mid t\mid+E,\quad -\frac{T_1}{2}<t<\frac{T_1}{2}$$

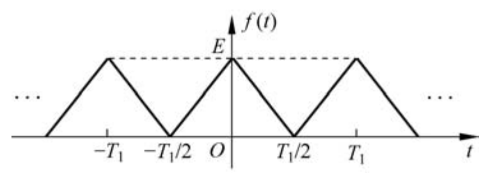


图 3-13　周期三角脉冲信号时域波形

从图 3-13 可以看出，周期三角脉冲信号为偶函数，因此其三角级数展开式中余弦分量的系数 $b_n=0$。根据式(3.1-4)和式(3.1-5)可得

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\frac{E}{2}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)\mathrm{d}t=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}\left(-\frac{2E}{T_1}t+E\right)\cos(n\omega_1 t)\mathrm{d}t\\&=\frac{2E}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)\end{aligned}$$

则周期三角脉冲信号的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{E}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2E}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)\cos n\omega_1 t\\&=\frac{E}{2}+\frac{4E}{\pi^2}\left(\cos\omega_1 t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega_1 t+\cdots\right)\end{aligned}\tag{3.1-18}$$

其中，$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$。从式(3.1-18)中可以看出，周期三角脉冲信号的频谱中只包含直流和奇次谐波分量，且各频率的相位均为 0。该信号三角形式的振幅谱和复指数形式的振幅谱分别如图 3-14 和图 3-15 所示。

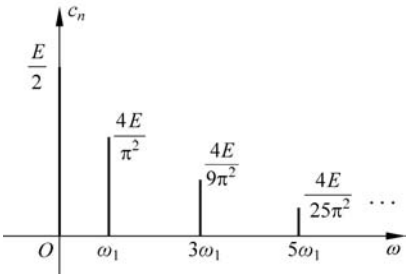


图 3-14　三角形式的振幅谱

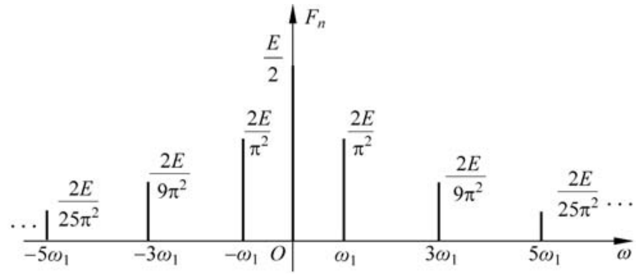


图 3-15　复指数形式的振幅谱

3. 周期锯齿波信号

周期锯齿波也是常见的周期信号,在显像器件的光栅扫描中起到很关键的作用。周期为 T_1 的锯齿波时域波形如图 3-16 所示。

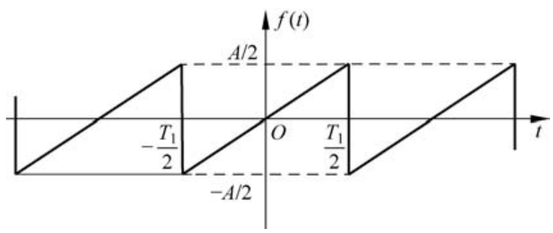


图 3-16　周期锯齿波信号时域波形

周期锯齿波在一个周期内的函数表达式为

$$f_1(t)=\frac{A}{T_1}t,\quad -\frac{T_1}{2}<t<\frac{T_1}{2}$$

从图 3-16 中可以看出,周期锯齿波信号为奇函数,因此其三角级数展开式中系数 a_0 和 a_n 均为零。由傅里叶级数系数公式可得

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\frac{A}{T_1}t\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t=\frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1},\quad n=1,2,3\cdots$$

则周期锯齿波信号三角形式的傅里叶级数为

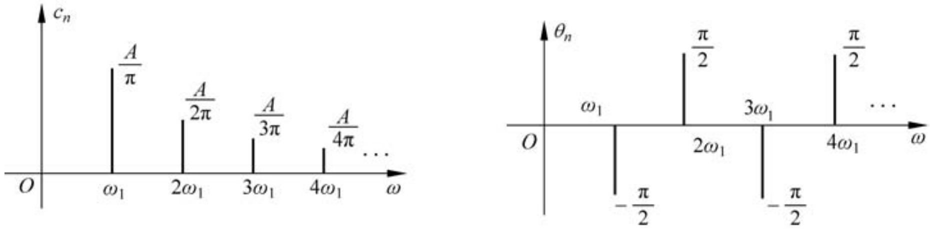
$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{A}{\pi}\sin\omega_1 t-\frac{A}{2\pi}\sin 2\omega_1 t+\frac{A}{3\pi}\sin 3\omega_1 t-\frac{A}{4\pi}\sin 4\omega_1 t\cdots\\&=\frac{A}{\pi}\cos\left(\omega_1 t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{A}{2\pi}\cos\left(2\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{A}{3\pi}\cos\left(3\omega_1 t-\frac{\pi}{2}\right)+\cdots\end{aligned}$$

其振幅谱和相位谱如图 3-17 所示。

根据三角频谱和复指数频谱的关系,可得周期锯齿波信号的双边谱如图 3-18 所示。

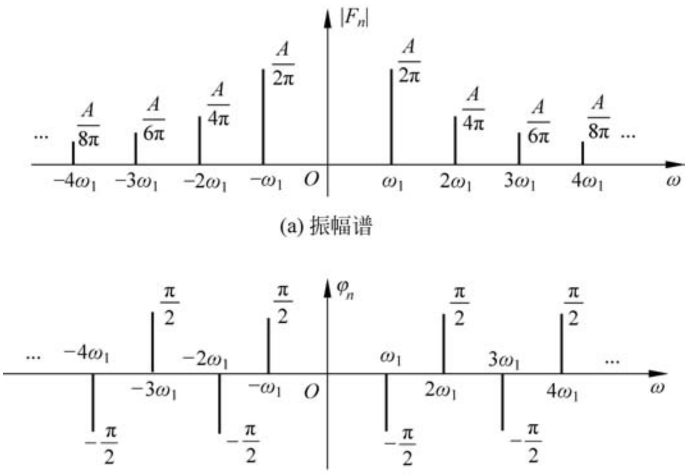
通过上述信号分析可知,周期信号的频谱具有下列一般性特点。

(1) 离散性:周期信号的频谱由间隔为 ω_1 的不连续谱线组成,每条谱线代表一个正弦分量。振幅谱线的长度代表该正弦分量的振幅,相位谱线的长度代表该正弦分量的



(a) 振幅谱　　(b) 相位谱

图 3-17　周期锯齿波的频谱



(b) 相位谱

图 3-18　周期锯齿波的双边频谱

相位。

（2）谐波性：谱线只出现在基频 ω_1 的整数倍上，不包含有非基频整数倍的频率分量。

（3）收敛性：各次谐波的振幅总趋势是随着谐波频率 $n\omega_1$ 的增加而减小，并最终趋于零。需要注意的是，周期冲激信号的谱系数不满足收敛性，3.4 节会对周期冲激信号的谱系数做详细说明。

例 3-7　图 3-19 所示的周期矩形脉冲信号，其幅度 $E=5\text{V}$，周期 $T_1=50\mu\text{s}$，脉冲宽度 $\tau=20\mu\text{s}$，判断该信号中是否包含有 20kHz、60kHz、90kHz 和 100kHz 的频率分量。

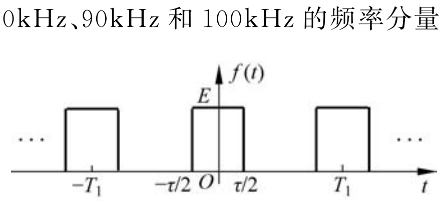


图 3-19　例 3-7 的图

解：根据信号周期 T_1，可计算得到该周期信号的基波频率 $f_1=\frac{1}{T_1}=20\text{kHz}$。根据周期信号频谱的谐波性，信号中只包含 f_1 整数倍的频率，则可判断 $f(t)$ 中不包含 90kHz 的频率分量。

根据式(3.1-17)可知,周期矩形脉冲信号的傅里叶复系数 $F_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$,当 $\frac{n\omega_1\tau}{2}=k\pi$,即 $\omega=n\omega_1=\frac{2k\pi}{\tau}=\frac{2k\pi}{20\times10^{-6}}=10^5k\pi$ 时,$F_n=0$,故信号 $f(t)$ 不包含频率为 $5k\times10^4\,\mathrm{Hz}$ 的分量。

结合上述分析可知,该信号中包含了 20kHz 和 60kHz 的频率分量,不含有 90kHz 和 100kHz 的频率分量。

3.2 傅里叶变换

3.1 节讨论了周期信号的傅里叶级数展开,从展开式中可知周期信号的频率分布情况。实际工程中除了周期信号外,还存在大量的非周期信号,例如语音、图像等。本节沿用信号分解的思想来分析非周期信号的频域表示。

3.2.1 定义

当周期信号的周期 T 趋于无穷大时,在可观测范围内,只存在一个周期的波形,此时可以将周期信号看作非周期信号。根据上节对周期矩形脉冲的频谱分析可知,当 $T\to\infty$ 时,信号的频谱间隔 $\omega_1\to0$,谱线无限密集,离散谱将变为连续谱,同时谱线的振幅 $|F(n\omega_1)|\to0$,即信号所包含的各正弦分量的振幅均趋向于 0,因此对非周期信号不适合使用傅里叶级数来表示。但应注意,虽然各频谱系数幅度无限小,但相对大小仍存在。

周期信号复指数形式的谱系数计算公式为

$$F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1t}\,\mathrm{d}t \tag{3.2-1}$$

对式(3.2-1)两边同乘以 T_1,有

$$T_1F(n\omega_1)=\frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1}=\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1t}\,\mathrm{d}t \tag{3.2-2}$$

式中,当 $T_1\to\infty$ 时,频率 $f_1=\frac{1}{T_1}$ 趋于零,$F(n\omega_1)$ 也趋于零,若 $\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$ 的极限存在,记为 $F(\omega)$,有时也写成 $F(\mathrm{j}\omega)$,即

$$F(\omega)=\lim_{T_1\to\infty}T_1F(n\omega_1)=\lim_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1t}\,\mathrm{d}t \tag{3.2-3}$$

当 $T_1\to\infty$ 时,离散谱将变为连续谱,$n\omega_1\to\omega$,故式(3.2-3)可以改写为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{3.2-4}$$

由于 $\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$ 表示了信号单位频带的频谱值,因此 $F(\omega)$ 称为信号 $f(t)$ 的频谱密度

函数,简称频谱函数。

根据傅里叶级数的复指数形式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\cdot\omega_1=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\cdot\omega_1$$

当 $T_1\to\infty$时,$\frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1}\to F(\omega)$,$n\omega_1\to\omega$,$\omega_1\to \mathrm{d}\omega$,求和变为求积分,故可得

$$f(t)=\lim_{T_1\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{3.2-5}$$

时域信号 $f(t)$和频谱函数 $F(\omega)$之间的变换关系也可以表示为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$,两者称为一组傅里叶变换对。习惯上采用如下方法表示:

傅里叶正变换

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{3.2-6}$$

傅里叶反变换

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{3.2-7}$$

从这一对变换公式可以看出,$f(t)$和 $F(\omega)$是一一对应的,即已知信号 $f(t)$可唯一地确定其频谱函数 $F(\omega)$,反之根据 $F(\omega)$也可唯一地确定 $f(t)$。注意,$f(t)$和 $F(\omega)$是同一个信号的两种描述方法,$f(t)$是从时域角度描述信号,$F(\omega)$是从频域角度描述信号。

频谱函数 $F(\omega)$一般为复数,可以表示为

$$F(\omega)=|F(\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega) \tag{3.2-8}$$

式中,$|F(\omega)|$称为振幅谱函数,$|F(\omega)|$随频率 ω 的变化关系曲线称为振幅谱;$\varphi(\omega)$称为相位谱函数,$\varphi(\omega)$随频率 ω 的变化关系曲线称为相位谱。

若 $f(t)$为实函数,利用傅里叶变换的定义式(3.2-6),可得

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\omega t-\mathrm{j}\sin\omega t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

则

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t \tag{3.2-9}$$

$$X(\omega)=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t \tag{3.2-10}$$

可以看出,$R(\omega)$是 ω 的偶函数,$X(\omega)$是 ω 的奇函数,即

$$R(\omega)=R(-\omega),\quad X(\omega)=-X(-\omega)$$

又因为

$$|F(\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

所以$|F(\omega)|$是ω的偶函数，振幅谱偶对称；$\varphi(\omega)$是ω的奇函数，相位谱奇对称。

将$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$代入傅里叶反变换式(3.2-7)，可得

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|e^{j[\varphi(\omega)+\omega t]}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|\cos[\varphi(\omega)+\omega t]d\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|\sin[\varphi(\omega)+\omega t]d\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}|F(\omega)|\cos[\varphi(\omega)+\omega t]d\omega\end{aligned}\tag{3.2-11}$$

式(3.2-11)说明，与周期信号类似，非周期信号也可以分解为无穷多个不同频率的正弦信号的线性叠加，不同之处在于，非周期信号包含的是连续频率分量。

前面讲到，周期信号展开为傅里叶级数需满足狄里赫利条件，同样傅里叶变换也需要满足一定的条件才存在，不同之处在于时间范围由一个周期变为了无限的区间。信号$f(t)$傅里叶变换存在的充分条件是无限区间内信号绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<\infty\tag{3.2-12}$$

所有能量信号均满足此条件，即存在傅里叶变换。

例 3-8 已知信号$f(t)$波形如图3-20所示，其频谱密度函数为$F(\omega)$，试计算下列值：

(1) $F(\omega)|_{\omega=0}$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)d\omega$。

解：可以从傅里叶变换的定义式求解。

(1) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$F(0)=F(\omega)|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt$$

由于$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt$为信号$f(t)$的面积，故$F(0)=1$。

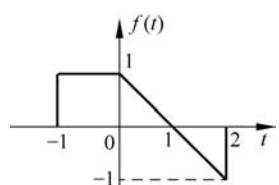


图 3-20 例 3-8 的信号波形

(2) $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)d\omega=2\pi f(0)=2\pi$$

3.2.2 常用信号的傅里叶变换

1. 指数信号

1）因果指数衰减信号

因果指数衰减信号是系统分析中的常用信号，数学表达式为

$$f(t)=E\mathrm{e}^{-at}u(t),\quad a\ 为正实数 \tag{3.2-13}$$

其时域波形如图 3-21 所示。

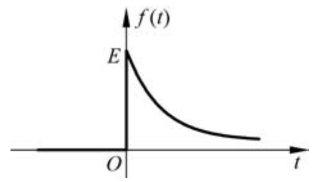


图 3-21 因果指数衰减信号的时域波形

该信号满足绝对可积条件，可以利用式(3.2-6)进行傅里叶变换，即

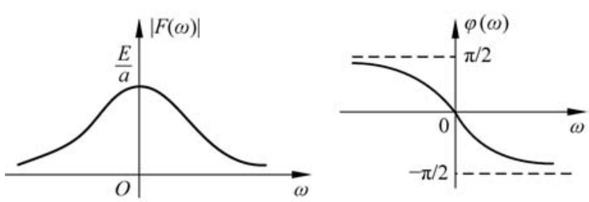
$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}E\mathrm{e}^{-at}u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}E\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{E}{a+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{E}{a+\mathrm{j}\omega}$$

即

$$E\mathrm{e}^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{E}{a+\mathrm{j}\omega} \tag{3.2-14}$$

因果指数衰减信号的振幅谱函数为 $|F(\omega)|=\dfrac{E}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$，当 $\omega=0$ 时，$|F(\omega)|$ 取得最大值 $\dfrac{E}{a}$；当 $\omega\to\pm\infty$ 时，$|F(\omega)|=0$，故其振幅谱曲线如图 3-22(a)所示。相位谱函数为 $\varphi(\omega)=-\arctan\dfrac{\omega}{a}$，当 $\omega\to-\infty$ 时，$\varphi(\omega)=\dfrac{\pi}{2}$；当 $\omega=0$ 时，$\varphi(\omega)=0$；$\omega\to+\infty$ 时，$\varphi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$，故相位谱曲线如图 3-22(b)所示。



(a) 振幅谱　(b) 相位谱

图 3-22 因果指数衰减信号的频谱

2）单边非因果指数衰减信号

单边非因果指数衰减信号的时域表达式为

$$f(t)=\mathrm{e}^{at}u(-t),\quad a\ 为正实数 \tag{3.2-15}$$

其时域波形如图 3-23 所示。

该信号满足绝对可积条件，故其傅里叶变换为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} E\mathrm{e}^{at}u(-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=E\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}t=\frac{E}{a-\mathrm{j}\omega}$$

即

$$E\mathrm{e}^{at}u(-t)\leftrightarrow\frac{E}{a-\mathrm{j}\omega}\qquad(3.2\text{-}16)$$

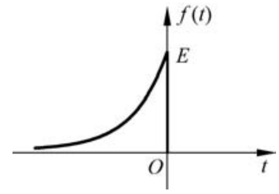
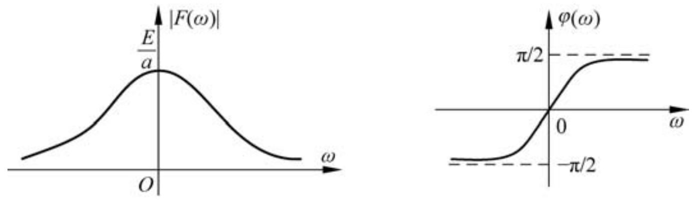


图 3-23 单边非因果指数衰减信号的波形

单边非因果指数衰减信号的振幅谱函数为 $|F(\omega)|=\dfrac{E}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$，相位谱函数为 $\varphi(\omega)=\arctan\dfrac{\omega}{a}$，故其振幅谱与相位谱如图 3-24 所示。



(a) 振幅谱　(b) 相位谱

图 3-24 单边非因果指数衰减信号的频谱

3）双边指数信号

双边指数信号的时域数学表达式为

$$f(t)=E\mathrm{e}^{-a|t|},\quad a\text{ 为正实数}\qquad(3.2\text{-}17)$$

其时域波形如图 3-25 所示。

其傅里叶变换为

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}E\mathrm{e}^{-a|t|}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}E[\mathrm{e}^{-at}u(t)+\mathrm{e}^{at}u(-t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=E\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{at}u(-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{E}{a+\mathrm{j}\omega}+\frac{E}{a-\mathrm{j}\omega}=\frac{2Ea}{a^2+\omega^2}\end{aligned}\qquad(3.2\text{-}18)$$

可以看出，双边指数信号的频谱函数为正实数，故 $|F(\omega)|=F(\omega)$，$\varphi(\omega)=0$。双边指数信号的频谱图如图 3-26 所示。

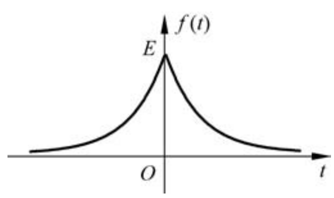


图 3-25 双边指数信号的时域波形

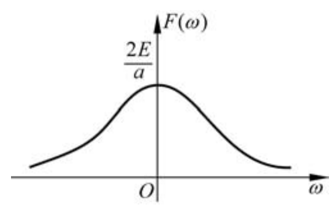


图 3-26 双边指数信号的频谱

2. 矩形脉冲信号

矩形脉冲信号又称门函数，由于其波形简单，实现容易，常常作为通信中的基带信号。振幅为 E，宽度为 τ 的矩形脉冲信号的时域表达式为

$$f(t)=EG_{\tau}(t)=E\left[u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{3.2-19}$$

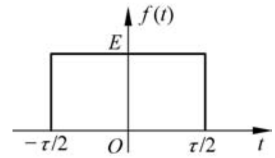


图 3-27 矩形脉冲信号的时域波形

其时域波形如图 3-27 所示。

从图中可以看出，矩形脉冲信号满足绝对可积条件，其傅里叶变换为

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{E}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=-\frac{E}{\mathrm{j}\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\right)=\frac{E}{\mathrm{j}\omega}\cdot 2\mathrm{j}\sin\omega\,\frac{\tau}{2}\\&=E\tau\cdot\frac{\sin\omega\tau/2}{\omega\tau/2}=E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\end{aligned}$$

即

$$EG_{\tau}(t)\leftrightarrow E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \tag{3.2-20}$$

由式(3.2-20)可得到矩形脉冲信号振幅谱函数和相位谱函数分别为

$$|F(\omega)|=E\tau\left|\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}0, & \dfrac{4n\pi}{\tau}<|\omega|<\dfrac{2(2n+1)\pi}{\tau}\\ \pm\pi, & \dfrac{2(2n+1)\pi}{\tau}<|\omega|<\dfrac{2(2n+2)\pi}{\tau}\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots$$

矩形脉冲信号的振幅谱和相位谱如图 3-28 所示。

由于频谱函数 $F(\omega)=E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 是实函数，可将振幅谱和相位谱合成一幅图，如图 3-29 所示。

通常称信号所包含频率范围称为信号的频带宽度。从图 3-29 中可以看出，门函数包含了 0 到无穷大的频率分量。由于实际系统能够传输处理的信号频率范围是有限的，在误差允许的范围内，需要用一定频率范围内的分量来代表原信号。同时绝大多数实用信号的主要能量(或功率)都集中在一段频率范围内，故在工程应用中，通常根据信号频谱的分布情况确定信号的带宽。这里给出两种常用的信号带宽定义。

1) 第一零点带宽

从矩形脉冲信号的频谱图中可以看出，其频谱的主要能量集中在第一个过零点 $\frac{2\pi}{\tau}$ 范

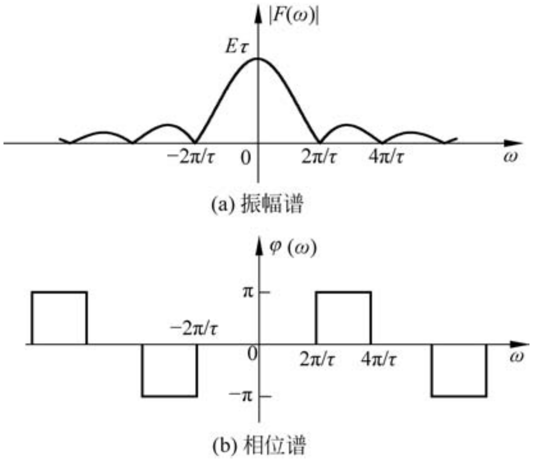


图 3-28 矩形脉冲信号的振幅谱和相位谱

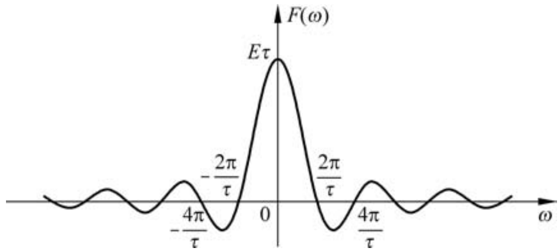


图 3-29 矩形脉冲信号的频谱

围内,频谱具有明显的主瓣,该范围内包含了信号 90%以上的能量。因此,对于具有这类频谱特点的信号,通常定义信号频谱第一个过零点的频率作为信号的频带宽度,称为第一零点带宽。所以,矩形脉冲信号的频带宽度或带宽定义为

$$B_{\omega}=\frac{2\pi}{\tau}\mathrm{rad/s} \quad 或 \quad B_{f}=\frac{1}{\tau}\mathrm{Hz} \tag{3.2-21}$$

从式(3.2-21)也可以看出,矩形脉冲信号的时域脉宽与带宽成反比。信号脉冲持续时间越长,其带宽越窄;信号脉冲持续时间越短,其带宽越宽。

2) 3dB 带宽

若信号频谱中无明显的主瓣,如图 3-30 所示,通常可定义信号频域幅值下降为最大值的$\frac{\sqrt{2}}{2}$时对应的频率为信号的带宽,即

$$|F(\omega_0)|=\frac{\sqrt{2}}{2}|F(\omega)|_{\max} \tag{3.2-22}$$

由于该频率点的功率为功率最大值的$\frac{1}{2}$,用对数表示即为下降了 3dB,因此这种方式定义的带宽称为 3dB 带宽。3dB 带宽点也称半功率点,表示在该带宽内集中了一半的功率。

3. 三角脉冲信号

三角脉冲信号也是实际通信中常用的一种信号,其时域表达式为

$$f(t)=\begin{cases}E\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right), & |t|\leqslant\tau \\ 0, & |t|>\tau\end{cases} \tag{3.2-23}$$

其时域波形图如图 3-31 所示。

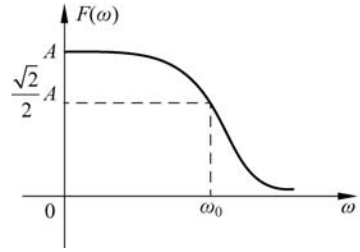


图 3-30　3dB 带宽示意图

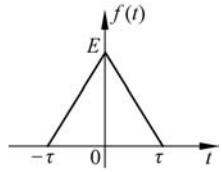


图 3-31　三角脉冲信号波形

三角脉冲信号的傅里叶变换为

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\tau}^{\tau} E\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= E\int_{-\tau}^{0}\left(1+\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t + E\int_{0}^{\tau}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= E\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t + \frac{E}{\tau}\int_{-\tau}^{0} t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t + E\int_{0}^{\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t - \frac{E}{\tau}\int_{0}^{\tau} t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

利用分部积分对上式进行化简，得到

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{E}{(\mathrm{j}\omega)^2\tau}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}) - \frac{2E}{(\mathrm{j}\omega)^2\tau} \\
&= \frac{2E}{\omega^2\tau}(1-\cos\omega\tau) = \frac{4E}{\omega^2\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = E\tau\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \qquad (3.2\text{-}24)
\end{aligned}
$$

三角脉冲信号的频谱图如图 3-32 所示。

从图 3-32 中可以看出，三角脉冲信号的频率分量在频率 $2\pi/\tau$ 后衰减很快，其主瓣更突出。这是因为三角信号频谱为抽样信号的平方，其收敛速度快于抽样信号本身。在实际通信系统中，常常会用频谱收敛较快的三角脉冲作为基带信号。

另一个在通信中常用的基带信号是升余弦信号，其时域波形如图 3-33 所示。该信号时域“尾端”衰减较快，能够降低信号传输中可能存在的码间串扰。

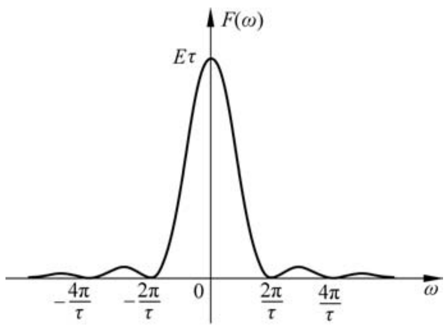


图 3-32　三角脉冲信号频谱

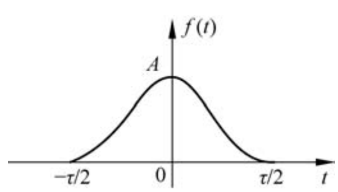


图 3-33　升余弦信号时域波形

升余弦信号时域表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{2}\left(1+\cos\dfrac{2\pi}{\tau}t\right), & |t|\leqslant\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{3.2-25}$$

其傅里叶变换为

$$F(\omega)=\frac{A\tau}{2}\frac{\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2} \tag{3.2-26}$$

信号频谱如图 3-34 所示。

4. 单位冲激信号

单位冲激信号的时域表达式为

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\\ \delta(t)=0, \quad t\neq 0\end{cases} \tag{3.2-27}$$

根据傅里叶变换的公式,可得其傅里叶变换为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=1$$

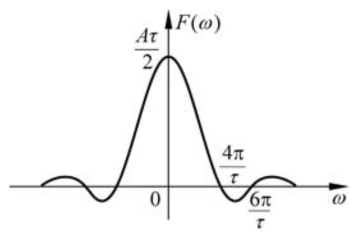


图 3-34 升余弦信号频谱

即

$$\delta(t)\leftrightarrow 1 \tag{3.2-28}$$

单位冲激信号的时域波形和频谱图分别如图 3-35 和图 3-36 所示。

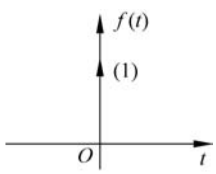


图 3-35 冲激信号的时域波形

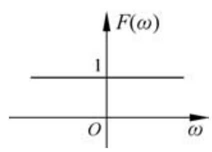


图 3-36 冲激信号的频谱

5. 直流信号

直流信号 $f(t)=1$ 的时域波形如图 3-37 所示。由于直流信号不满足绝对可积的条件,无法通过傅里叶变换的定义式来求其傅里叶变换。这里利用求 $\delta(\omega)$原函数的方法。

$\delta(\omega)$的傅里叶反变换为

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}$$

即

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi}\right]=\delta(\omega)$$

故可得

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \tag{3.2-29}$$

信号 $f(t)=1$ 的频谱图如图 3-38 所示。

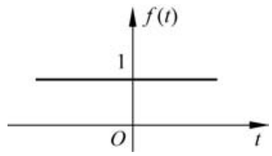


图 3-37　直流信号时域波形

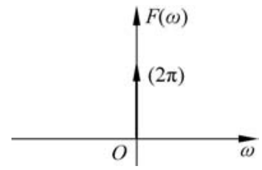


图 3-38　直流信号频谱

从单位冲激信号和直流信号的频谱分析可以看出，时间上无限窄的冲激信号，频谱是无限宽的，而时域无限宽的直流信号，频谱是无限窄的冲激函数，这体现了信号时域特性和频域特性之间具有对称性。

表 3-1 整理了以上分析的几组常用信号的傅里叶变换对。

表 3-1　常用信号的傅里叶变换对

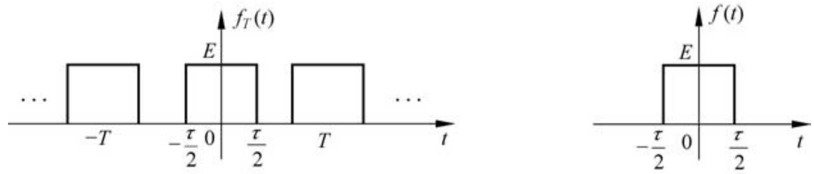
序　号	名　　称	时域函数 $f(t)$	频谱函数 $F(\omega)$
1	因果指数衰减信号	$Ee^{-at}u(t)$，a 为正实数	$\dfrac{E}{a+j\omega}$
2	双边指数信号	$Ee^{-a\|t\|}$，a 为正实数	$\dfrac{2Ea}{a^2+\omega^2}$
3	矩形脉冲信号	$EG_\tau(t)$	$E\tau\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$
4	三角脉冲信号	$f(t)=\begin{cases}E\left(1-\dfrac{\|t\|}{\tau}\right), & \|t\|<\tau \\ 0, & \|t\|>\tau\end{cases}$	$E\tau\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$
5	升余弦信号	$f(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{2}\left(1+\cos\dfrac{2\pi}{\tau}t\right), & \|t\|\leqslant\dfrac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{A\tau}{2}\dfrac{\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2}$
6	单位冲激信号	$\delta(t)$	1
7	直流信号	1	$2\pi\delta(\omega)$

3.2.3　傅里叶谱系数 F_n 与频谱函数 $F(\omega)$ 的关系

周期信号傅里叶级数的谱系数 F_n 与非周期信号的傅里叶变换 $F(\omega)$ 之间存在一定的对应关系。

从周期矩形脉冲信号 $f_T(t)$ 中截取 $\left(-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right)$ 的波形，得到信号 $f(t)$，如图 3-39

所示。



(a) 周期矩形脉冲信号　　(b) 矩形脉冲信号

图 3-39　从周期矩形脉冲信号中截取一个周期

$f(t)$的傅里叶变换为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{3.2-30}$$

周期信号 $f_T(t)$的傅里叶谱系数为

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\,\mathrm{d}t,\quad 其中\quad \omega_1=\frac{2\pi}{T} \tag{3.2-31}$$

可以看出,非周期信号的频谱函数 $F(\omega)$与周期信号的傅里叶谱系数 F_n 之间存在如下关系:

$$F_n=\frac{F(\omega)}{T}\bigg|_{\omega=n\omega_1}=\frac{F(n\omega_1)}{T} \tag{3.2-32}$$

图 3-39(b)中非周期信号 $f(t)$为矩形脉冲信号,易知

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

故图 3-39(a)中周期矩形信号的傅里叶谱系数为

$$F_n=\frac{E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\bigg|_{\omega=n\omega_1}=\frac{E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

例 3-9　计算图 3-40 所示周期三角脉冲信号的复指数形式傅里叶级数展开式。

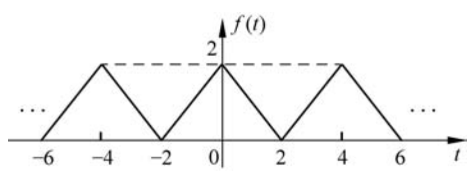


图 3-40　周期三角脉冲信号

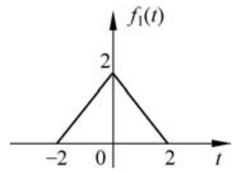


图 3-41　三角信号

解:从 $f(t)$中提取一个周期(−2～2)的波形,可得到如图 3-41 所示的三角信号 $f_1(t)$。由常用信号的傅里叶变换可知,$f_1(t)$的频谱函数为

$$F_1(\omega)=4\mathrm{Sa}^2(\omega)$$

根据式(3.2-32)可得

$$F_n=\frac{F_1(\omega)}{T}\bigg|_{\omega=n\omega_1}=\mathrm{Sa}^2(n\omega_1)$$

该周期三角信号的周期为 4，其频率 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}$，则

$$F_n=\mathrm{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

故复指数形式的级数展开式为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\pi}{2}t}$$

3.3　傅里叶变换的性质和定理

通过 3.2 节分析可知，信号可以用时间函数 $f(t)$ 来描述，也可以用频谱函数 $F(\omega)$ 来描述，两者从不同的角度反映了信号的特性。本节通过讨论傅里叶变换的基本性质和定理，分析信号在时域进行某种运算时，其频谱函数的变化情况，理解信号的时间特性与频率特性之间的联系。

1. 线性特性

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\omega)$，则有

$$k_1f_1(t)+k_2f_2(t)\leftrightarrow k_1F_1(\omega)+k_2F_2(\omega) \tag{3.3-1}$$

其中，k_1，k_2 为任意常数。

证明：
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}k_1f_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}k_2f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=k_1F_1(\omega)+k_2F_2(\omega)\end{aligned}$$

一般地，式(3.3-1)可以推广为

$$\sum_{i=1}^{\infty}k_if_i(t)\leftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}k_iF_i(\omega) \tag{3.3-2}$$

利用傅里叶变换的线性特性，若复杂信号可以分解为简单信号的线性运算，则信号的频谱函数也可由简单信号频谱函数的线性运算得到。

例 3-10　信号 $f(t)$ 波形如图 3-42 所示，计算 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$。

解：$f(t)$ 可以看成是两个脉宽分别为 8 和 4 的矩形脉冲信号相减的结果，即

$$f(t)=2[G_8(t)-G_4(t)]$$

由常用信号的变换对，$EG_\tau(t)\leftrightarrow E\tau\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$，根据线性性质，可得

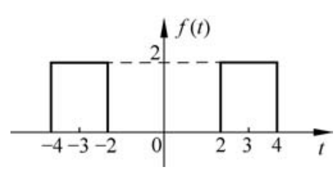


图 3-42　例 3-10 中信号 $f(t)$ 波形

$$F(\omega)=16\mathrm{Sa}(4\omega)-8\mathrm{Sa}(2\omega)$$

2. 对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，则

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \tag{3.3-3}$$

证明：根据傅里叶反变换的公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

可知

$$f(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

将 ω 与 t 的位置互换

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

整理可以得到

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

特别地，若 $f(t)$ 为偶函数，则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$。

式(3.3-3)说明，若 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(\omega)$，则 $F(t)$ 的频谱函数的形状与 $f(t)$ 的形状一样，只是幅度相差 2π 倍。

例 3-11 求直流信号 $f(t)=1$ 的频谱函数 $F(\omega)$。

解：因为直流信号不满足绝对可积，在 3.2.2 节采用了求 $\delta(\omega)$ 反变换的方法，这里采用对称性来求取。

已知 $\delta(t) \leftrightarrow 1$，根据对称性得

$$1 \leftrightarrow F(\omega)=2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

例 3-12 求抽样函数 $\mathrm{Sa}(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ 的频谱密度函数 $F(\omega)$。

解：待求信号为时域抽样信号。已知时域的门函数对应的频谱函数为抽样函数，即

$$EG_{\tau}(t) \leftrightarrow E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

当 $\tau=2, E=1$ 时，$G_2(t) \leftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)$

由对称性可知

$$2\mathrm{Sa}(t) \leftrightarrow F(\omega)=2\pi G_2(-\omega)=2\pi G_2(\omega)$$

即

$$\mathrm{Sa}(t) \leftrightarrow F(\omega)=\pi G_2(\omega)$$

例 3-13 已知信号频谱如图 3-43 所示，求时域信号 $f(t)$。

解：从图 3-43 中可以看出，信号频谱函数可以表示为

$$F(\omega)=2G_8(\omega)$$

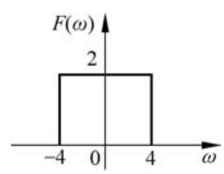


图 3-43 例 3-13 的图

根据 $EG_\tau(t)\leftrightarrow E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，可知

$$2G_8(t)\leftrightarrow 16\mathrm{Sa}(4\omega)$$

由对称性可得

$$\mathrm{Sa}(4t)\leftrightarrow \frac{\pi}{4}G_8(\omega)$$

即

$$G_8(\omega)\leftrightarrow \frac{4}{\pi}\mathrm{Sa}(4t)$$

因此 $F(\omega)$对应的时域函数

$$f(t)=\frac{8}{\pi}\mathrm{Sa}(4t)$$

根据例 3-12 和例 3-13，可以得出一个有用的结论，即

$$\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0}G_{2\omega_0}(\omega) \tag{3.3-4}$$

3. 尺度变换特性

若 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，则

$$f(at)\leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{3.3-5}$$

其中，a 为非零实常数。

证明：$\mathcal{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \overset{令\lambda=at}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\lambda}{a}}\mathrm{d}\frac{\lambda}{a}$

当 $a>0$ 时，

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\lambda}\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

当 $a<0$ 时，

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty}f(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\lambda}\mathrm{d}\lambda=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\lambda}\mathrm{d}\lambda=-\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

结合上述两种情况，有 $f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$。

尺度变换特性说明，信号在时域波形压缩，其频谱扩展；反之，信号在时域波形扩展，频谱压缩。

特别地，当 $a=-1$ 时，有

$$f(-t)\leftrightarrow F(-\omega) \tag{3.3-6}$$

以幅度为 E，脉宽为 τ 的矩形脉冲信号 $EG_\tau(t)$为例，其时域波形和频谱图分别如图 3-44(a)和图 3-44(b)所示。

当 $0<a<1$ 时，以 $a=\frac{1}{2}$为例，$f\left(\frac{t}{2}\right)$的时域波形如图 3-45(a)所示。根据傅里叶变

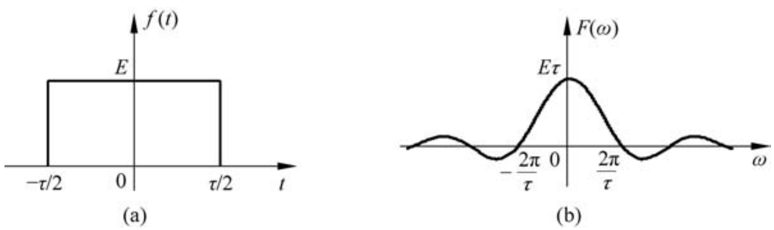


图 3-44　矩形脉冲信号时域和频域波形

换的尺度变换性质，可知

$$f\left(\frac{t}{2}\right) \leftrightarrow 2F(2\omega)$$

故其频谱图如图 3-45(b)所示。

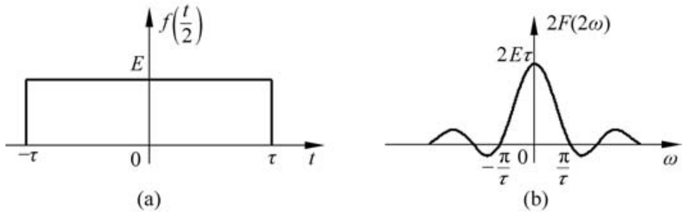


图 3-45　$f\left(\frac{t}{2}\right)$的时域波形和频谱

当 $a>1$ 时，以 $a=2$ 为例，$f(2t)$的时域波形如图 3-46(a)所示。根据傅里叶变换的尺度变换性质，可知其频谱图如图 3-46(b)所示。

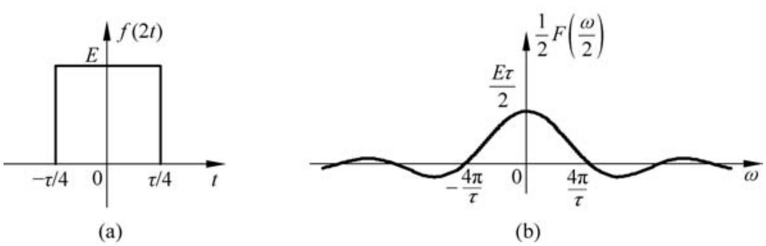


图 3-46　$f(2t)$的时域波形和频谱

从上面的讨论可以看出，信号持续时间与信号占有频带成反比。在实际通信中，有时为加速信号的传递，要将信号持续时间压缩，使单位时间内传输的信号脉冲数增加，必然会导致信号所占用的频谱展宽。因此，信号的高速传递要依靠信道的宽频带来支撑。

4. 时移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，则

$$f(t \pm t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{\pm j\omega t_0} \tag{3.3-7}$$

证明：$\mathcal{F}[f(t\pm t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t\pm t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\overset{令t\pm t_0=\lambda}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(\lambda\mp t_0)}\mathrm{d}\lambda$

$$=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

$$=F(\omega)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}$$

可以看出，信号在时域中沿时间轴右移 t_0，其频域中频谱乘以因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$；在时域中沿时间轴左移 t_0，其频域中频谱乘以因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}$。

由于 $F(\omega)=|F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$，可得

$$F(\omega)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}=|F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\cdot\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}=|F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\varphi(\omega)\pm\omega t_0]}\qquad(3.3\text{-}8)$$

从式(3.3-8)中可以看出，信号发生时移后，其振幅谱函数不变，仅是相位谱函数发生改变，改变量与信号时移量有关，即信号在时域中的时移与频域中的相移相对应。

由于非周期信号可展开为无穷多个连续频率正弦信号的叠加，在时间轴上移动信号，就相当于同时移动若干正弦信号。根据 $\sin\omega(t-t_0)=\sin(\omega t-\omega t_0)$，正弦信号移位时其相位发生改变。因此体现在频域就是信号频谱中振幅不变，相位改变。

例 3-14 求图 3-47 所示信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$。

解：设信号 $f_0(t)=2G_2(t)$，波形如图 3-48 所示。

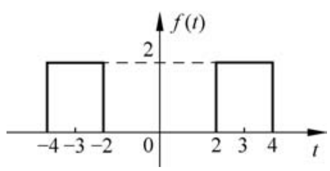


图 3-47 例 3-14 信号时域波形

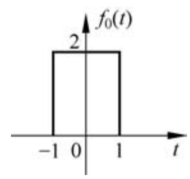


图 3-48 $f_0(t)$波形

可以看出，信号 $f(t)$ 可以看成 $f_0(t)$ 由分别向左、向右时移了 3 个单位后叠加的结果，即 $f(t)=f_0(t+3)+f_0(t-3)$。

由矩形脉冲信号的傅里叶变换，可知

$$F_0(\omega)=\mathcal{F}[f_0(t)]=4\mathrm{Sa}(\omega)$$

根据时移特性可得

$$F(\omega)=F_0(\omega)(\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\omega}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\omega})$$

$$=4\mathrm{Sa}(\omega)\cdot2\cos3\omega=8\mathrm{Sa}(\omega)\cos3\omega$$

在例 3-10 中利用线性特性求解此信号的频谱函数为 $F(\omega)=16\mathrm{Sa}(4\omega)-8\mathrm{Sa}(2\omega)$。虽然利用两种不同性质计算得到的结果形式不同，但是可以互相转换。

$$F(\omega)=8\mathrm{Sa}(\omega)\cos3\omega=8\frac{\sin\omega}{\omega}\cos3\omega=\frac{4}{\omega}[\sin4\omega+\sin(-2\omega)]$$

$$=4\cdot\left(4\frac{\sin4\omega}{4\omega}-2\frac{\sin2\omega}{2\omega}\right)=16\mathrm{Sa}(4\omega)-8\mathrm{Sa}(2\omega)$$

5. 频移特性

若 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，则

$$f(t)e^{\pm j\omega_0 t}\leftrightarrow F(\omega\mp\omega_0) \tag{3.3-9}$$

证明：$\mathcal{F}[f(t)e^{\pm j\omega_0 t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\pm j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j(\omega\mp\omega_0)t}dt$$

$$=F(\omega\mp\omega_0)$$

式(3.3-9)表明，信号在时域中与因子 $e^{j\omega_0 t}$ 相乘，其频谱右移 ω_0；信号在时域中与因子 $e^{-j\omega_0 t}$ 相乘，其频谱左移 ω_0。

例 3-15 求信号 $f(t)=\cos\omega_0 t$ 的频谱函数 $F(\omega)$。

解：根据欧拉公式，可知

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}) \tag{3.3-10}$$

直流信号的傅里叶变换对

$$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

利用频移性质可得

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}\mathcal{F}[1\cdot e^{j\omega_0 t}]+\frac{1}{2}\mathcal{F}[1\cdot e^{-j\omega_0 t}]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\cdot 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$\cos\omega_0 t$ 信号的频谱如图 3-49 所示。

同样，可以推导得到正弦信号 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2j}\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}]$$

$$=j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$$

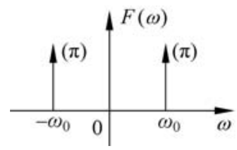


图 3-49 $\cos\omega_0 t$ 的频谱

类似地，利用欧拉公式和频移性质，可得

$$\begin{cases} f(t)\cos\omega_0 t\leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)] \\ f(t)\sin\omega_0 t\leftrightarrow \frac{j}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)] \end{cases} \tag{3.3-11}$$

例 3-16 求图 3-50 所示信号 $f(t)$的频谱函数 $F(\omega)$。

解：从图 3-50 可以看出，信号 $f(t)$的时域表达式为

$$f(t)=\cos\omega_0 t\cdot\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$=G_\tau(t)\cos\omega_0 t$$

因为 $G_\tau(t)\leftrightarrow F_1(\omega)=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，其频谱如图 3-51 所示。

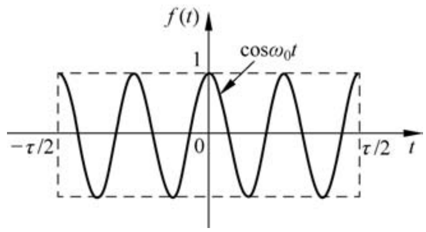


图 3-50　例 3-16 信号波形

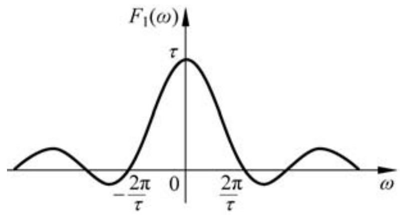


图 3-51　矩形脉冲信号频谱

根据式(3.3-11)可知

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega)=\frac{1}{2}[F_1(\omega+\omega_0)+F_1(\omega-\omega_0)]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\tau\mathrm{Sa}\left[\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\right]+\tau\mathrm{Sa}\left[\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right]\right\}$$

$f(t)$的频谱如图 3-52 所示。

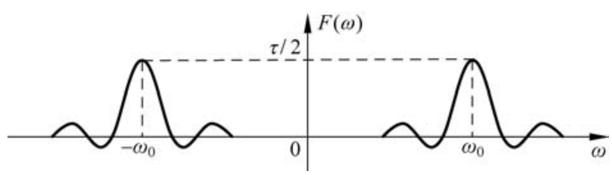


图 3-52　信号的频谱

从图 3-52 中可以看出，时域信号 $f(t)$与信号 $\cos\omega_0 t$ 相乘，频域上是将 $f(t)$的频谱分别向左和向右搬移了 ω_0 个单位，并且振幅降为原来的 1/2。

在通信中把这种信号频谱的搬移过程称为调制。在无线电通信中，为了将信号以电磁波的形式发射出去，必须把低频信号的频谱搬移到较高的发射频率附近，这就需要进行调制。实际做法就是把待传输的信号与 $\cos\omega_0 t$ 或 $\sin\omega_0 t$ 相乘。在接收端，将信号频谱从较高频率搬回到低频，恢复出原信号的过程称为解调。调制解调过程如图 3-53 所示，详细内容将在 3.8 节介绍。

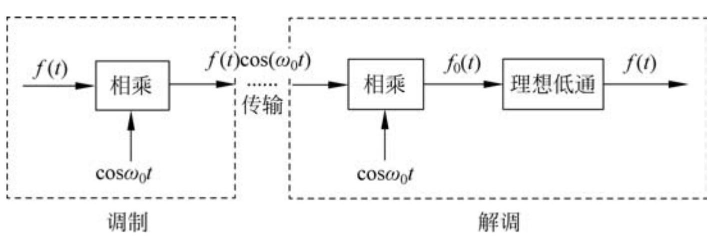


图 3-53　调制解调系统示意图

6. 时域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \leftrightarrow \mathrm{j}\omega F(\omega) \tag{3.3-12}$$

证明：由傅里叶反变换公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

两边同时求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}\omega F(\omega)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

即得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \leftrightarrow \mathrm{j}\omega F(\omega)$。

式(3.3-12)可推广到高阶导数的傅里叶变换

$$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \leftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n F(\omega) \tag{3.3-13}$$

时域微分性质表明，在时域中对信号取 n 次导数，其频谱函数 $F(\omega)$ 将乘以 $(\mathrm{j}\omega)^n$，即时域中的微分运算对应于频域中的代数运算。信号求导后，时域波形会变得陡峭，而在频域，由于其频谱函数变为 $\mathrm{j}\omega F(\omega)$，高频分量会得到增强。

7. 频域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，则

$$-\mathrm{j}tf(t) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \tag{3.3-14}$$

证明：根据傅里叶变换公式

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

与时域微分特性类似，等式两边同时求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}(-\mathrm{j}t)f(t)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

即 $-\mathrm{j}tf(t) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$。

推广到高阶，有 $(-\mathrm{j}t)^n f(t) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$。

对于频域微分特性，常用形式为

$$t^n f(t) \leftrightarrow \mathrm{j}^n\frac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n} \tag{3.3-15}$$

例 3-17 已知 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，求 $(t-1)f(t-1)$ 的傅里叶变换。

解：设 $f_0(t)=tf(t)$。根据频域微分特性，有

$$\mathcal{F}[f_0(t)]=\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}(\omega)}$$

由信号的时域运算，可知

$$(t-1)f(t-1)=f_0(t-1)$$

结合傅里叶变换的时移特性，可得

$$\mathcal{F}[(t-1)f(t-1)]=\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}(\omega)}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$$

例 3-18 计算 $f(t)=t\mathrm{e}^{-at}u(t)$的傅里叶变换 $F(\omega)$。

解：由常用信号的变换对，可知

$$\mathrm{e}^{-at}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$$

利用频域微分特性，可得

$$\mathcal{F}[t\mathrm{e}^{-at}u(t)]=\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}\right]=\frac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^2}$$

8. 时域积分特性

若 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，则

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega} \tag{3.3-16}$$

式中，$F(0)=F(\omega)\big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$。

时域积分特性的证明可参考例 3-23。

特别地，若 $F(0)=0$，则式(3.3-16)可以简写为

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow \frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega} \tag{3.3-17}$$

例 3-19 计算单位阶跃信号 $u(t)$的傅里叶变换。

解：阶跃信号不满足绝对可积条件，无法直接利用傅里叶变换定义式计算其傅里叶变换。由于单位阶跃信号是单位冲激信号的积分，即

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

已知$\mathcal{F}[\delta(t)]=1$，故由积分性质可得

$$\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\cdot 1\cdot\delta(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$$

即

$$u(t)\leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega) \tag{3.3-18}$$

单位阶跃信号的时域波形和振幅图分别如图 3-54 和图 3-55 所示。

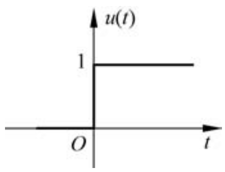


图 3-54 单位阶跃信号时域波形

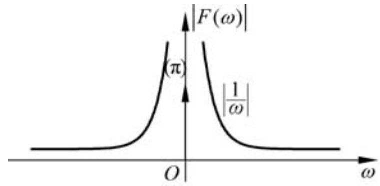


图 3-55 单位阶跃信号的振幅谱

例 3-20 求符号函数 sgn(t)的频谱函数。

解：符号函数的时域表达式为

$$f(t)=\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}+1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

根据阶跃信号与符号函数之间的关系

$$\operatorname{sgn}(t)=2u(t)-1$$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)]&=\mathcal{F}[2u(t)-1]\\&=2\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]-2\pi\delta(\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\end{aligned}$$

也即

$$\operatorname{sgn}(t)\leftrightarrow\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\tag{3.3-19}$$

例 3-21 已知梯形脉冲如图 3-56 所示，求其频谱函数 $F(\omega)$。

解：由分段折线组成的函数波形，可用积分特性来求其频谱函数。因为该函数一次或多次微分后，总会出现阶跃信号或冲激函数，而阶跃和冲激函数的频谱函数是已知的，再利用时域积分特性即可求原信号的频谱函数。

对 $f(t)$进行求导，其导数的波形如图 3-57 所示。

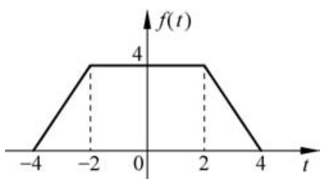


图 3-56 梯形脉冲的时域波形

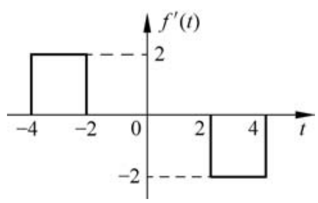


图 3-57 $f(t)$导数的波形

由导数波形可以得到

$$f'(t)=G_2(t+3)-G_2(t-3)$$

其傅里叶变换 $F_1(\omega)$为

$$F_1(\omega)=\mathcal{F}[f'(t)]=4\mathrm{Sa}(\omega)[\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}]=8\mathrm{j}\mathrm{Sa}(\omega)\sin(3\omega)$$

由于 $f'(t)$的面积为 0，即 $F_1(0)=0$，可根据式(3.3-17)计算原信号的变换

$$F(\omega)=\frac{\mathcal{F}[f_1(t)]}{\mathrm{j}\omega}=\frac{8\mathrm{j}\mathrm{Sa}(\omega)\sin(3\omega)}{\mathrm{j}\omega}=24\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{Sa}(3\omega)$$

需要注意的是，例 3-21 采用的这种求解方法不能应用于任意信号，只有当信号先微分再积分后能恢复成原信号时才适用。设信号 $f(t)$ 的导数为 $f'(t)$，因为

$$\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\mathrm{d}\tau=f(\tau)\Big|_{-\infty}^{t}=f(t)-f(-\infty)$$

只有当 $f(-\infty)=0$ 时，$\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)$。如图 3-58(a) 所示信号 $f(t)$，图 3-58(b) 为其导数 $f'(t)$，而 $\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的波形如图 3-58(c) 所示。显然此时 $\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\mathrm{d}\tau\neq f(t)$。

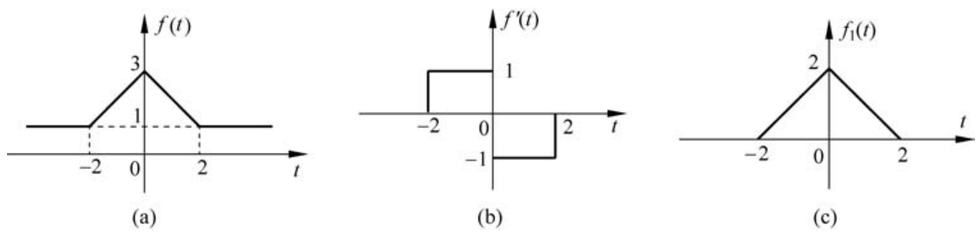


图 3-58 信号 $f(t)$、导数 $f'(t)$ 及其积分波形

因此，求解 $f(t)$ 的傅里叶变换求解时，需先将 $f(t)$ 分解为三角脉冲信号 $f_1(t)$ 和直流信号 $f_2(t)$ 的叠加，如图 3-59 所示。

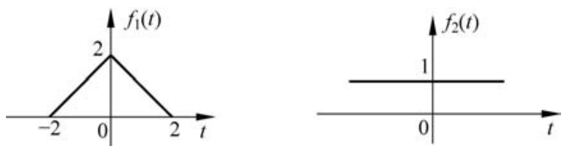


图 3-59 $f(t)$ 的分解示意图

由傅里叶变换的线性特性，可知

$$\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}[f_1(t)]+\mathcal{F}[f_2(t)]$$

$f_1(t)$ 的导数如图 3-58(b) 所示，令其傅里叶变换为 $F_1(\omega)$，则

$$\begin{aligned}F_1(\omega)&=\mathcal{F}[f_1'(t)]=\mathcal{F}[G_2(t+1)-G_2(t-1)]\\&=2\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-2\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\\&=4\mathrm{j}\mathrm{Sa}(\omega)\sin\omega\end{aligned}$$

根据积分性质，得

$$\mathcal{F}[f_1(t)]=\frac{F_1(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F_1(0)\delta(\omega)=4\mathrm{Sa}^2(\omega)$$

又因为

$$f_2(t)=1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

综合以上计算可知信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(t)]=4\mathrm{Sa}^2(\omega)+2\pi\delta(\omega)$$

9．奇偶虚实性

由 3.2.1 节的讨论可知，信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 可以写成实部和虚部之和，即

$$F(\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$$

其中，$R(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$ 是 ω 的偶函数，$X(\omega)=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$ 是 ω 的奇函数，即

$$R(\omega)=R(-\omega) \tag{3.3-20}$$

$$X(\omega)=-X(-\omega) \tag{3.3-21}$$

若 $f(t)$ 为实偶函数，即 $f(t)=f(-t)$，可得

$$X(\omega)=0,\quad F(\omega)=R(\omega)$$

若 $f(t)$ 为实奇函数，即 $f(-t)=-f(t)$，可得

$$R(\omega)=0,\quad F(\omega)=\mathrm{j}X(\omega)$$

可以看出，时域的实偶函数，其频域上也是实偶函数。时域的实奇函数，其频谱函数为虚奇函数。例如，门函数是实偶函数，其傅里叶变换也为实偶函数。例 3-18 中符号函数是实奇函数，其傅里叶变换是虚奇函数。

10．时域卷积定理

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\omega)$，则

$$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega) \tag{3.3-22}$$

证明：
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau\\&=F_2(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\\&=F_1(\omega)F_2(\omega)\end{aligned}$$

式(3.3-22)说明时域中信号的卷积运算对应频域中频谱的相乘运算。

例 3-22 已知 $f_1(t)\leftrightarrow E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，求 $f(t)=f_1(t)*f_1(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$。

解：由卷积定理可得

$$\mathcal{F}[f(t)]=F_1(\omega)\cdot F_1(\omega)=E^2\tau^2\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$f_1(t)$ 和 $f(t)$ 的时域波形和频谱图分别如图 3-60 和图 3-61 所示。

可以看出，利用卷积定理所得到结果与 3.2.2 节中根据傅里叶变换定义式计算结果相同。

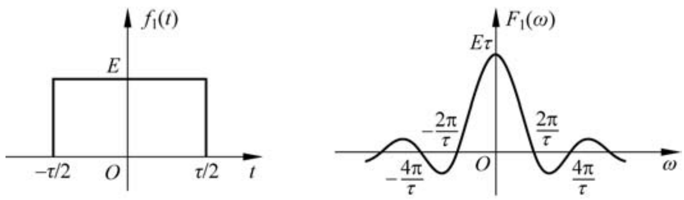


图 3-60　$f_1(t)$的波形和频谱

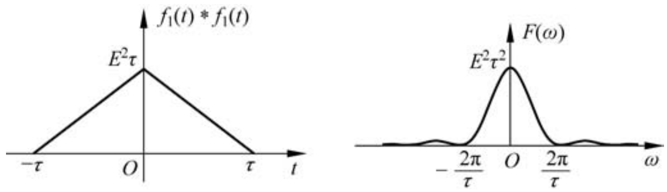


图 3-61　卷积结果的时域波形和频谱

例 3-23　已知 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，求$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的傅里叶变换。

解：由卷积的微积分运算可知

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) * u(t)$$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] &= \mathcal{F}[f(t) * u(t)] = \mathcal{F}[f(t)]\cdot\mathcal{F}[u(t)] \\ &= F(\omega)\cdot\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right] \\ &= \frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)\end{aligned}$$

此例题也证明了时域积分特性。

时域卷积定理提供了另一种求解系统零状态响应的方法。当信号 $f(t)$通过如图 3-62 所示系统时，根据零状态响应的卷积分析法可知，$y_{zs}(t)=f(t) * h(t)$。

设 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，$h(t)\leftrightarrow H(\omega)$，$y_{zs}(t)\leftrightarrow Y_{zs}(\omega)$，由时域卷积定理可知

$$Y_{zs}(\omega)=F(\omega)\cdot H(\omega) \tag{3.3-23}$$

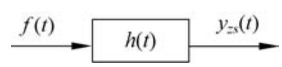


图 3-62　信号经过 LTI 系统示意图

通过时域卷积定理可以将时域卷积转化为频域相乘运算，从而得到零状态响应的频谱函数，再利用傅里叶反变换，即可求得零状态响应的时域表示。在 3.5 节中进行系统的频域分析时，会具体讨论利用频域方法来求解系统的响应。

11. 频域卷积定理

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\omega)$，则

$$f_1(t)\times f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}[F_1(\omega)*F_2(\omega)] \tag{3.3-24}$$

证明：$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\lambda)F_2(\omega-\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega-\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\lambda)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega-\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\lambda)t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t}\mathrm{d}\lambda$$

$$=f_2(t)\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t}\mathrm{d}\lambda=2\pi f_1(t)f_2(t)$$

即

$$f_1(t)\times f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]$$

式(3.3-24)说明时域中两信号相乘，其频谱函数为原两信号频谱的卷积，幅度乘以 $1/2\pi$。

例 3-24 已知 $\cos\omega_0 t\leftrightarrow\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$，求 $\cos(\omega_0 t)u(t)$ 的傅里叶变换。

解：因为 $u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$

由频域卷积定理可知

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)u(t)]\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}+\frac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{\omega}{\mathrm{j}(\omega^2-\omega_0^2)}$$

例 3-25 已知信号 $f_1(t)=100\mathrm{Sa}(100t)$，$f_2(t)=50\mathrm{Sa}(50t)$，画出 $f_1(t)+f_2(t)$、$f_1(t)\cdot f_2(t)$ 和 $f_1(t)*f_2(t)$ 的频谱图。

解：根据对称性，可知

$$F_1(\omega)=\mathcal{F}[100\mathrm{Sa}(100t)]=\pi G_{200}(\omega)$$

$$F_2(\omega)=\mathcal{F}[50\mathrm{Sa}(50t)]=\pi G_{100}(\omega)$$

$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的频谱分别如图 3-63(a)和图 3-63(b)所示。

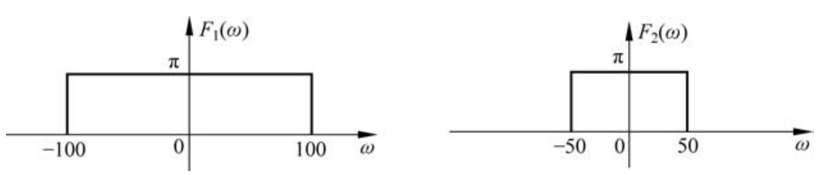


图 3-63　例 3-25 信号的频谱

根据傅里叶变换的线性性质，可知

$$F_3(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)+f_2(t)]=F_1(\omega)+F_2(\omega)$$

根据傅里叶变换的频域卷积定理,可知

$$F_4(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

根据傅里叶变换的时域卷积定理,可知

$$F_5(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

故 $f_1(t)+f_2(t)$、$f_1(t)\cdot f_2(t)$和 $f_1(t)*f_2(t)$的频谱图分别如图 3-64(a)、(b)、(c)所示。

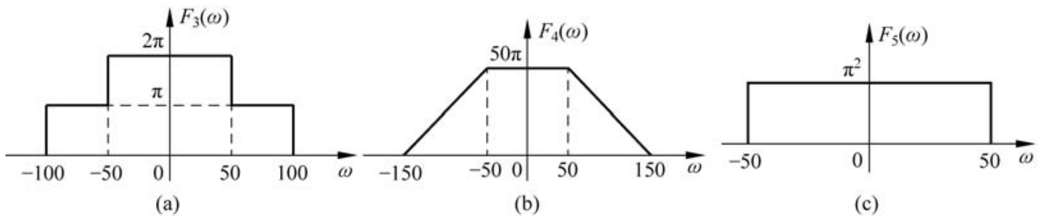


图 3-64　$f_1(t)+f_2(t)$、$f_1(t)\cdot f_2(t)$和 $f_1(t)*f_2(t)$的频谱

合理运用傅里叶变换的相关性质,有助于复杂信号的频谱分析。表 3-2 整理了傅里叶变换的基本性质和定理。

表 3-2　傅里叶变换基本性质

性　　质	时间函数 $f(t)$	频谱函数 $F(\omega)$
线性特性	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$
对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
时移特性	$f(t\pm t_0)$	$F(\omega)e^{\pm j\omega t_0}$
尺度变换特性	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
时域微分特性	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^nF(\omega)$
频移特性	$f(t)e^{\pm j\omega_0t}$	$F(\omega\mp\omega_0)$
时域积分特性	$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$	$\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}F(\omega)$
频域微分特性	$(-jt)^nf(t)$	$\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}$
时域卷积定理	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
频域卷积定理	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

3.4 周期信号的傅里叶变换

3.3 节中利用频移特性推导出了 $\cos\omega_0 t$ 和 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换,即

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0) \tag{3.4-1}$$

$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow \mathrm{j}\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)] \tag{3.4-2}$$

可以看出,正弦信号的傅里叶变换中包含了冲激信号。实际上引入了冲激信号后,能够进行傅里叶变换的信号类型得到了扩展。由 3.1 节分析可知,周期信号可以展开为无穷多个不同频率的正弦信号的叠加,因此周期信号的傅里叶变换中包含有无穷多个冲激信号。

设 $f_T(t)$是周期为 T_1 的周期信号,其复指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

对 $f_T(t)$进行傅里叶变换,有

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f_T(t)]=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n\ \mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}]$$

由傅里叶变换的频移特性,可得

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}]=2\pi\delta(\omega-n\omega_1)$$

结合线性特性,有

$$F(\omega)=F_n\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}]=2\pi F_n\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_1) \tag{3.4-3}$$

式(3.4-3)表明,周期信号的傅里叶变换是无穷个强度为 $2\pi F_n$,出现在频率为 $n\omega_1$ 处的冲激信号的和,其中 F_n 为周期信号复指数形式的谱系数。

例 3-26 求图 3-65 所示周期冲激信号 $\delta_T(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$ 的傅里叶变换。

解:根据式(3.4-3)可知,要计算周期信号的傅里叶变换,需先求解其谱系数 F_n。由傅里叶谱系数公式 $F_n=\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$,计算得到

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}$$

可以看出,周期冲激信号的谱系数是常数,也就是说周期冲激信号的各频率分量的大小是相等的。将谱系数代入式(3.4-3),可得

$$\delta_T(t)\leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_1}\delta(\omega-n\omega_1)=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_1) \tag{3.4-4}$$

周期冲激信号的频谱如图 3-66 所示。

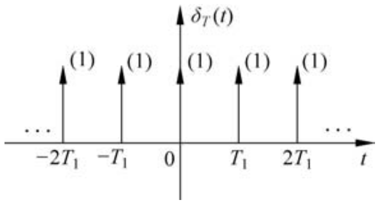


图 3-65　周期冲激信号时域波形

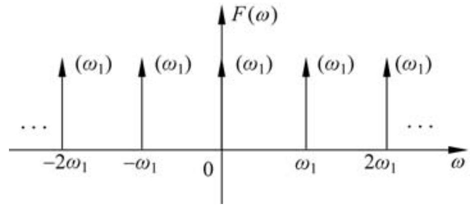


图 3-66　周期冲激信号频谱

可以看出，周期冲激信号的频谱仍是周期冲激信号，冲激的强度和周期都是 ω_1。

例 3-27　求图 3-67 所示周期矩形脉冲信号的傅里叶变换。

解：在 3.1.4 节中计算过该周期矩形信号的谱系数

$$F_n = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)$$

因此该信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}F_T(\omega) &= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega - n\omega_1) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)\delta(\omega - n\omega_1)\\ &= E\tau\omega_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)\delta(\omega - n\omega_1)\end{aligned} \tag{3.4-5}$$

周期矩形脉冲信号傅里叶变换的频谱如图 3-68 所示。

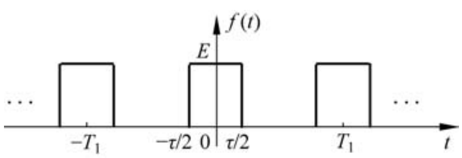


图 3-67　周期矩形脉冲信号时域波形

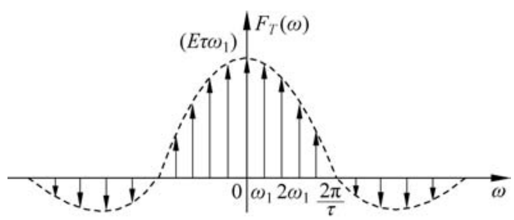


图 3-68　周期矩形脉冲信号的频谱

可以看出，周期矩形脉冲信号的频谱是由间隔为 ω_1 的无穷个冲激信号构成，其强度的包络线形状为抽样信号。

3.5　能量谱和功率谱

信号的频谱反映了信号所包含的频率分量信息。实际中除了频谱，还常常采用能量谱或功率谱来表示信号的能量或功率随频率变化的情况。

1. 能量谱

$f(t)$为实信号时，能量 E 可表示为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{3.5-1}$$

若 $f(t)$ 为能量信号时，能量 $E<\infty$。设信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$，将傅里叶反变换的公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

代入式(3.5-1)，可得

$$\begin{aligned}E&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)F(-\omega)\,\mathrm{d}\omega\end{aligned}\tag{3.5-2}$$

由于 $F(-\omega)=F^*(\omega)$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)F(-\omega)\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

即

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega\tag{3.5-3}$$

式(3.5-3)说明，信号在时域的能量与频域的能量守恒，此式也称为帕斯瓦尔定理。这个定理产生于 Marc-Antoine Parseval 在 1799 年所得到的一个有关级数的定理，随后被应用于傅里叶级数。帕斯瓦尔定理指出，一个信号所含有的能量(功率)恒等于此信号在完备正交函数集中各分量能量(功率)之和，故信号时域的总能量等于频域总能量。

从式(3.5-3)中可以看出，$|F(\omega)|^2$ 反映了信号的能量在频域的分布情况，因此把 $|F(\omega)|^2$ 称为信号的能量谱密度函数，简称能量谱，它表示单位频率的能量，一般记作 $E(\omega)$。即

$$E(\omega)=|F(\omega)|^2\tag{3.5-4}$$

可以看出，信号的能量谱 $E(\omega)$ 只由信号的振幅谱决定，与信号的相位谱无关。因此信号 $f(t)$ 与其时移信号的能量谱是相同的。

例 3-28 试求图 3-69 所示的矩形信号的能量谱密度。

解：由常用信号的傅里叶变换对，可知

$$EG_\tau(t)\leftrightarrow E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据式(3.5-4)，得到

$$E(\omega)=E^2\tau^2\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

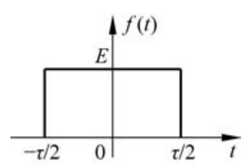


图 3-69 矩形信号时域波形

矩形信号能量谱波形如图 3-70 所示。

若将式(3.5-3)中的 ω 用频率 f 替代，则可得

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|F(f)|^2\,\mathrm{d}f\tag{3.5-5}$$

式(3.5-5)表明，$|F(f)|^2$ 对频率 f 的积分就等于信号的能量，因此能量谱也可用

$E(f)$表示，即 $E(f)=|F(f)|^2$，它表示单位频率的能量，体现了信号能量随频率 f 的变化情况。

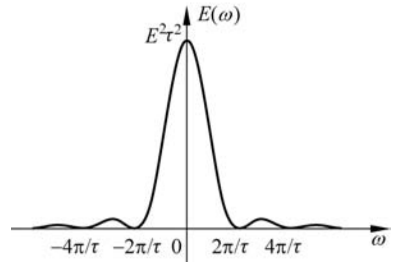


图 3-70　矩形信号能量谱

2. 功率谱

当 $f(t)$为实信号时，功率可表示为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\mathrm{d}t \qquad (3.5\text{-}6)$$

若 $f(t)$为功率信号，其能量为无穷大，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\mathrm{d}t\to\infty$，此时可以从 $f(t)$中截取长度为 T 的有限长信号 $f_T(t)$，一般取$-\frac{T}{2}\sim\frac{T}{2}$，则 $f_T(t)$的能量是有限的，根据式(3.5-3)可知，此信号的能量为

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}f_T{}^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_T(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

当 $T\to\infty$时，信号 $f_T(t)$趋近于原信号 $f(t)$。由信号平均功率计算公式，可知 $f(t)$的平均功率为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}\mathrm{d}\omega \qquad (3.5\text{-}7)$$

从式(3.5-7)的积分式中可以看出，$\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$代表了单位频率的信号功率，即信号的功率谱密度，可以用 $P(\omega)$来表示，即

$$P(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \qquad (3.5\text{-}8)$$

则信号的平均功率为

$$P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P(\omega)\mathrm{d}\omega \qquad (3.5\text{-}9)$$

若频率用 f 来表示，则式(3.5-9)可改写为

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty}P(f)\mathrm{d}f \qquad (3.5\text{-}10)$$

实际工程应用中，周期信号通常为功率信号。代入周期信号的傅里叶级数展开式，可得

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1t+b_n\sin n\omega_1t)\right]^2\mathrm{d}t\\&=a_0^2+\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0t+b_n\sin n\omega_0t)\right]^2\mathrm{d}t\end{aligned} \qquad (3.5\text{-}11)$$

根据三角函数的正交性，可得

$$P=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2 \qquad (3.5\text{-}12)$$

式(3.5-12)说明,周期信号的平均功率等于直流功率和各次谐波平均功率之和。结合之前介绍的三角级数和复指数级数系数之间的关系,式(3.5-12)也可以写为

$$P=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2 \tag{3.5-13}$$

比较式(3.5-10)和式(3.5-13)可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P(f)\mathrm{d}f=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2$$

根据冲激信号的特性,$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2\delta(f-nf_0)\mathrm{d}f$,因此有

$$P(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2\delta(f-nf_0) \tag{3.5-14}$$

显然,周期信号的功率谱是离散等间隔分布的,间隔就是基频 f_0,且只由信号的振幅谱决定,与相位谱无关。

例 3-29 计算图 3-71 所示的周期矩形信号的功率谱密度 $P(f)$。

解:根据傅里叶级数分析可知,该信号的谱系数为

$$F_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\pi nf_1\tau)$$

由式(3.5-14),得

$$\begin{aligned}P(f)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2\delta(f-nf_1)\\&=\frac{E^2\tau^2}{T_1^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}^2(\pi nf_1\tau)\delta(f-nf_1)\end{aligned}$$

其中,$f_1=\dfrac{1}{T_1}$。当 $T_1=5\tau$ 时,周期矩形信号的功率谱如图 3-72 所示。

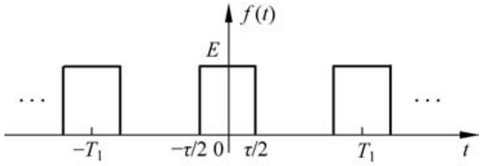


图 3-71 周期矩形信号

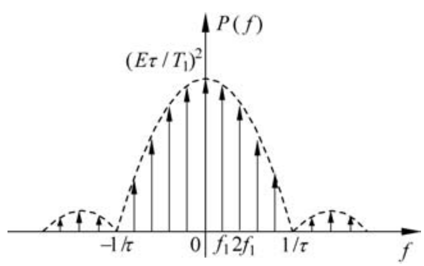


图 3-72 周期矩形信号的功率谱

频谱反映的是信号的振幅和相位随频率的分布情况,它描述了信号的频域特征。而能量谱和功率谱则是反映了信号的能量或功率随频率的变化情况。能量谱和功率谱对于研究信号的能量或功率的分布,决定信号所占有频率等问题有着重要的作用,因此信号的带宽还有以下两种定义方式。

(1) 部分功率包含带宽(百分比带宽)

有时也以集中一定百分比的能量(或功率)的频率范围来定义信号的带宽。设信号的全部能量(或功率)为$\int_{-\infty}^{+\infty} s(f)\mathrm{d}f$,在某频带范围内的能量(或功率)为$\int_{-B}^{B} s(f)\mathrm{d}f$,部分功率包含带宽指该带宽内所占有的能量是整个频谱内总能量的一个百分比,即

$$\int_{-B}^{B} s(f)\mathrm{d}f = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} s(f)\mathrm{d}f \tag{3.5-15}$$

其中,α 为功率百分比,常见取值为 90%、95%、98%等。如 98%功率带宽是指在这个频率范围内的信号功率占总信号功率的 98%。

(2) 等效带宽

等效带宽是指用一个矩形频谱来代替信号的频谱,矩形频谱的振幅为信号频谱中心频率 f_0 处的振幅,如图 3-73 所示。

该矩形谱的能量与信号的能量相同,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(f)\mathrm{d}f = s(f_0)\cdot\Delta f \tag{3.5-16}$$

其中,矩形频谱的宽度 Δf 即为所要计算的信号等效带宽。

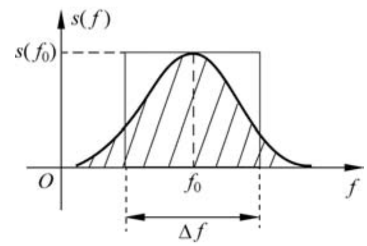


图 3-73　等效带宽示意图

3.6　系统的频域分析

对于 LTI 连续时间系统的分析,信号经过系统的响应求解是一个重要的内容。第 2 章介绍了响应的时域分析法,本节将从频域角度来讨论系统响应的求解,并对系统特性进行分析。

3.6.1　频响函数

1. 频响函数的定义

LTI 连续时间系统的时域分析中,系统的零状态响应由激励信号 $e(t)$和系统单位冲激响应 $h(t)$的卷积决定,即

$$r_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

设激励 $e(t)$的傅里叶变换为 $E(\omega)$,单位冲激响应 $h(t)$的傅里叶变换为 $H(\omega)$。根据傅里叶变换的时域卷积定理,可以得到零状态响应的傅里叶变换为

$$R_{zs}(\omega) = E(\omega)H(\omega) \tag{3.6-1}$$

为书写方便,接下来本节中零状态响应简写为 $r(t)$,其傅里叶变换简写为 $R(\omega)$。由式(3.6-1)可得到

$$H(\omega) = \frac{R(\omega)}{E(\omega)} \tag{3.6-2}$$

通常定义 $H(\omega)$为系统频域响应函数，简称频响函数或系统函数。注意，虽然式(3.6-2)中 $H(\omega)$等于激励和响应的频谱函数之比，实际上频响函数是由系统本身决定，与激励、响应无关。

实际上，由 3.2.1 节傅里叶反变换公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

可知，任意信号可表示为无穷多个复指数信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 的组合，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 是傅里叶变换的基本单元。当频率为 ω_0 的复指数信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 经过冲激响应为$h(t)$的系统时，其零状态响应为

$$\begin{aligned}r(t)&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\cdot H(\omega_0)\end{aligned}\tag{3.6-3}$$

式(3.6-3)表明，激励信号是复指数信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 时，系统零状态响应仍是相同复频率的指数信号，只是振幅变化了 $H(\omega_0)$倍。若信号包含了多个频率的复指数信号，则每一个频率分量都由对应频率的频响函数值进行加权输出，因此可以根据频响函数 $H(\omega)$确定系统对不同频率信号的作用，所以 $H(\omega)$体现了系统的频域特性。

将 $H(\omega)$写成式(3.6-4)所示的极坐标形式

$$H(\omega)=|H(\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\tag{3.6-4}$$

则称其振幅$|H(\omega)|$随频率ω 的变化曲线为系统的幅频特性曲线，相位 $\varphi(\omega)$随频率ω 的变化曲线称为系统的相频特性曲线。幅频特性曲线和相频特性曲线统称为系统的频率特性曲线。

2. 频响函数的物理意义

从频域的角度来看，信号经过系统就是激励信号的傅里叶变换与系统频响函数进行相乘运算，若将激励信号和响应的频谱函数都写成模与幅角的形式，即

$$E(\omega)=|E(\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_e(\omega)}$$

$$R(\omega)=|R(\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_r(\omega)}$$

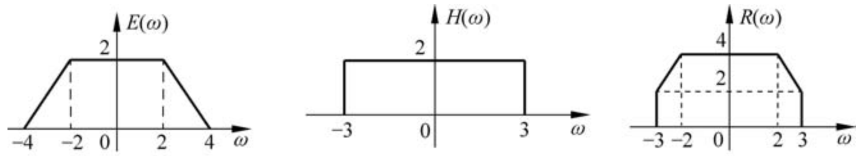
根据式(3.6-1)可以得到

$$|R(\omega)|=|E(\omega)|\cdot|H(\omega)|\tag{3.6-5}$$

$$\varphi_r(\omega)=\varphi_e(\omega)+\varphi_h(\omega)\tag{3.6-6}$$

从式(3.6-5)和式(3.6-6)可以看出，信号经过系统后，激励信号的振幅和相位发生了改变，从而得到了响应信号。响应的振幅是频率ω 处频响函数振幅和激励信号振幅的乘积，响应的相位是频率ω 处频响函数相位和激励信号相位的叠加。同一个信号经过不同系统，由于系统频响函数不同，对其振幅和相位的改变量不同，产生的响应也不同。因此，通过观察系统频响函数的波形，能够了解系统对激励信号的作用。

设激励信号 $e(t)$ 的频谱 $E(\omega)$ 如图 3-74(a)所示，系统的频响函数 $H(\omega)$ 如图 3-74(b)所示，$e(t)$ 经过系统后，信号中频率 $|\omega|<3$ 的部分振幅均变为原来的 2 倍，而频率 $|\omega|>3$ 的部分振幅则全部变为 0，输出信号中只保留了(－3,3)的频率分量，输出频谱 $R(\omega)$ 如图 3-74(c)所示。



(a) 激励频谱　(b) 系统频响函数　(c) 输出信号频谱

图 3-74　系统作用示意图

3. 频响函数的求解

系统频响函数体现了系统自身特性，有时为了分析系统特性，需要从已知的系统结构中获得系统频响函数。由于系统的描述存在多种方式，所以频域函数的求解存在多种方法。

1）系统以微分方程的形式表示

线性时不变系统的数学模型为常系数微分方程，n 阶微分方程的一般形式为

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 r(t)$$

$$= b_m \frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 e(t)$$

要计算系统频响函数，对方程两边同时取傅里叶变换。设 $e(t)\leftrightarrow E(\omega)$，$h(t)\leftrightarrow H(\omega)$，由傅里叶变换的时域微分性质可得

$$[a_n(\mathrm{j}\omega)^n + a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(\mathrm{j}\omega) + a_0]R(\omega)$$

$$= [b_m(\mathrm{j}\omega)^m + b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(\mathrm{j}\omega) + b_0]E(\omega) \tag{3.6-7}$$

故频响函数为

$$H(\omega) = \frac{R(\omega)}{E(\omega)} = \frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m + b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(\mathrm{j}\omega) + b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n + a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(\mathrm{j}\omega) + a_0} \tag{3.6-8}$$

例 3-30　已知某 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r(t) + 5 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t) + 6r(t) = 2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t) + e(t)$$

求该系统的频响函数 $H(\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$。

解：对方程两边取傅里叶变换，得

$$(\mathrm{j}\omega)^2 R(\omega) + 5(\mathrm{j}\omega)R(\omega) + 6R(\omega) = 2(\mathrm{j}\omega)E(\omega) + E(\omega)$$

系统频响函数为

$$H(\omega)=\frac{R(\omega)}{E(\omega)}=\frac{2(\mathrm{j}\omega)+1}{(\mathrm{j}\omega)^2+5(\mathrm{j}\omega)+6}$$

因 $h(t)\leftrightarrow H(\omega)$，可以从频响函数 $H(\omega)$ 入手来计算单位冲激响应 $h(t)$。

将 $H(\omega)$ 分解为

$$H(\omega)=\frac{2(\mathrm{j}\omega)+1}{(\mathrm{j}\omega)^2+5(\mathrm{j}\omega)+6}=\frac{-3}{\mathrm{j}\omega+2}+\frac{5}{\mathrm{j}\omega+3}$$

由 $E\mathrm{e}^{-at}u(t)\leftrightarrow\dfrac{E}{\mathrm{j}\omega+a}$ 可知，单位冲激响应为

$$h(t)=-3\mathrm{e}^{-2t}u(t)+5\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

2）系统以电路模型形式表示

当系统以电路模型给出时，可以先列出系统的微分方程，再利用前面介绍的方法计算系统的频响函数。当然，也可以将电路中的激励、响应和所有元件均用频域形式来表示，就可以得到电路的频域模型，从而建立电路系统的频域方程，从频域上来分析电路。

图 3-75 是关联参考方向下电阻元件的时域模型，其时域伏安关系为

$$v_R(t)=i_R(t)\cdot R$$

对上式两边同时进行傅里叶变换，可得电阻元件的频域伏安关系

$$V_R(\omega)=I_R(\omega)\cdot R \tag{3.6-9}$$

从式(3.6-9)可以看出，电阻元件的频域电压等于电阻值乘以流过它的频域电流，故电阻的频域模型如图 3-76 所示。

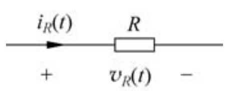


图 3-75　电阻元件的时域模型

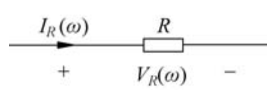


图 3-76　电阻元件的频域伏安关系模型

关联参考方向下电容元件的时域模型如图 3-77 所示，其时域伏安关系为

$$i_C(t)=C\,\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

对上式两边同时进行傅里叶变换，利用时域微分性质可以得到

$$I_C(\omega)=\mathrm{j}\omega C\cdot V_C(\omega) \tag{3.6-10}$$

也可以改写为

$$V_C(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\cdot I_C(\omega) \tag{3.6-11}$$

式(3.6-10)和式(3.6-11)是电容元件伏安关系的频域表示。可以看出，电容的频域电压等于$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$与频域电流的乘积，因此可以将$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$看作广义的阻抗值，称为电容元件的频域容抗。电容元件的频域模型如图 3-78 所示。

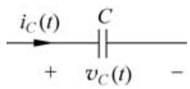


图 3-77　电容元件的时域模型

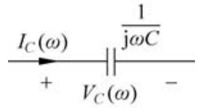


图 3-78　电容元件的频域模型

关联参考方向下电感元件的时域模型如图 3-79 所示，其时域伏安关系为

$$v_L(t)=L\cdot\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

由傅里叶变换的微分性质，可以得到

$$V_L(\omega)=\mathrm{j}\omega L\cdot I_L(\omega)\tag{3.6-12}$$

式(3.6-12)为电感元件伏安关系的频域表示，其中电感元件的频域电压等于频域感抗 $\mathrm{j}\omega L$ 与频域电流的乘积。电感元件的频域模型如图 3-80 所示。

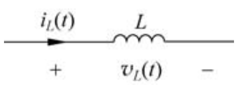


图 3-79　电感元件的时域模型

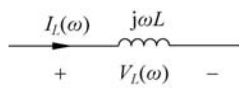


图 3-80　电感元件的频域模型

时域中的 KVL 和 KCL 定律分别为

$$\sum_{i=1}^{n}v_i(t)=0,\quad \sum_{j=1}^{m}i_j(t)=0$$

由傅里叶变换的线性性质可得

$$\sum_{i=1}^{n}V_i(\omega)=0,\quad \sum_{j=1}^{m}I_j(\omega)=0\tag{3.6-13}$$

式(3.6-13)可以看作频域的 KVL 和 KCL 定律。由于电路方程由元件的伏安关系和电路结构共同确定，故结合元件的频域伏安关系以及频域 KVL 和 KCL 定律，即可列出电路的频域方程，从而分析得到电路的频响函数。

例 3-31　图 3-81 所示电路中，$v(t)$是激励，$v_R(t)$是响应，试求该系统的频响函数，并画出频率特性曲线。

解：电路的频域模型如图 3-82 所示。

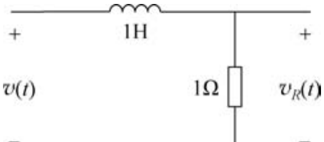


图 3-81　例 3-31 电路图

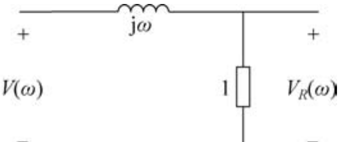


图 3-82　频域电路模型

由电路分压定理可得

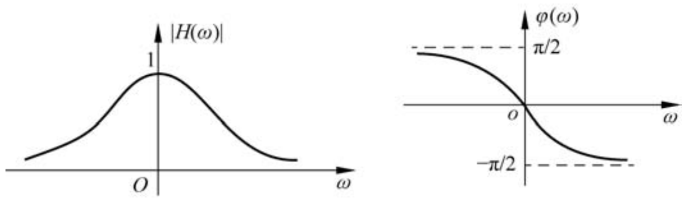
$$H(\omega)=\frac{V_R(\omega)}{V(\omega)}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$$

其幅频谱函数和相位谱函数分别为

$$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan(-\omega)$$

故系统的频率特性曲线如图 3-83 所示。



(a) 幅频特性曲线　　(b) 相频特性曲线

图 3-83　系统频率特性曲线

从图 3-83 中可以看出，当信号经过该系统时，信号的低频部分衰减较小，高频部分衰减较大，通常称此电路具有低通特性。

例 3-32　如图 3-84 所示电路，激励为 $e(t)$，响应为 $r(t)$，求系统函数 $H(\omega)$。

解：电路的频域模型如图 3-85 所示。

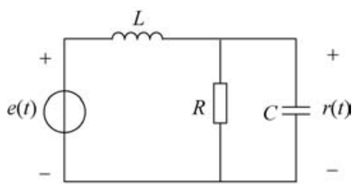


图 3-84　例 3-32 电路图

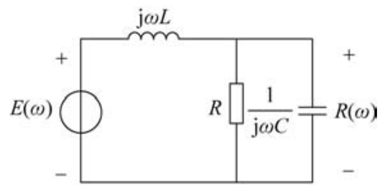


图 3-85　频域电路图

根据基尔霍夫电压定律，可列得电路方程为

$$\mathrm{j}\omega L\left[\frac{R(\omega)}{R}+\frac{R(\omega)}{1/\mathrm{j}\omega C}\right]+R(\omega)=E(\omega)$$

整理得

$$[(\mathrm{j}\omega)^2RLC+\mathrm{j}\omega L+R]R(\omega)=RE(\omega)$$

由系统频响函数的定义，可知

$$H(\omega)=\frac{R(\omega)}{E(\omega)}=\frac{R}{(\mathrm{j}\omega)^2RLC+\mathrm{j}\omega L+R}$$

从上述两个例题可以看出，利用元件伏安关系和基尔霍夫定律的频域表示，将时域电路模型转换成频域模型，有时可以简化系统方程的建立过程。

3.6.2 系统响应的频域求解

LTI 连续时间系统分析的一个重要任务就是求解信号经过系统的响应。根据激励信号的不同特点，有着不同的求解方法。

1. 激励为正弦信号时的响应

当信号经过系统时，系统对其各频率分量进行幅度放大和相移。设系统的激励信号为正弦信号，即

$$e(t)=\sin(\omega_0 t)$$

可以看出，该信号中只包含了 ω_0 一个频率分量。故输出信号中仍然只含有频率 ω_0 的分量，仅是幅度和相位发生了变化。

由傅里叶变换的频移性质，可知信号 $e(t)$ 的频谱函数为

$$E(\omega)=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

若系统的频响函数为

$$H(\omega)=|H(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

则响应的频谱函数为

$$\begin{aligned}R(\omega)&=H(\omega)E(\omega)\\&=\mathrm{j}\pi H(\omega)[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\\&=\mathrm{j}\pi[H(-\omega_0)\delta(\omega+\omega_0)-H(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)]\\&=\mathrm{j}\pi[|H(-\omega_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(-\omega_0)}\delta(\omega+\omega_0)-|H(\omega_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega_0)}\delta(\omega-\omega_0)]\\&=\mathrm{j}\pi|H(\omega_0)|[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(-\omega_0)}\delta(\omega+\omega_0)-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega_0)}\delta(\omega-\omega_0)]\end{aligned}$$

则系统响应为

$$\begin{aligned}r(t)&=\mathcal{F}^{-1}[R(\omega)]\\&=\frac{\mathrm{j}}{2}|H(\omega_0)|[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(\omega_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]\\&=|H(\omega_0)|\frac{1}{2\mathrm{j}}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi(\omega_0))}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi(\omega_0))}]\\&=|H(\omega_0)|\sin[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]\end{aligned}\tag{3.6-14}$$

式(3.6-14)说明当正弦信号作用于线性时不变系统时，系统的零状态响应仍为同频率的正弦信号，仅是幅度放大了$|H(\omega_0)|$倍，相位改变了 $\varphi(\omega_0)$。

由于 $\sin(\omega_0 t)$和 $\cos(\omega_0 t)$之间只相差$\frac{\pi}{2}$的相位，式(3.6-14)也适用于余弦函数，这里就不再重复证明了。

例 3-33 已知系统函数 $H(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+1}$，激励 $e(t)=\cos(2t-45^\circ)$时，求系统的响应 $r(t)$。

解：激励信号的频率为 $\omega=2$，因此需确定系统频响函数 $H(\omega)$ 在频率 2 处的振幅值和相位值。

$$H(\omega)\big|_{\omega=2}=\frac{1}{1+2\mathrm{j}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}63.5^\circ}$$

因此响应为

$$r(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(t-45^\circ-63.5^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t-108.5^\circ)$$

2. 激励为一般周期信号时的响应

当激励 $e(t)$ 为一般周期信号时，可以利用傅里叶级数将周期信号展开为正弦信号的集合，即

$$e(t)=c_0\cos\theta_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\theta_n)$$

当系统频响函数 $H(\omega)=|H(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$ 时，结合式(3.6-14)，利用 LTI 系统的线性特性，可得到此时的零状态响应为

$$r(t)=c_0\,|H(0)|\cos(\theta_0+\varphi_0)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,|H(n\omega_1)|\cos[n\omega_1 t+\theta_n+\varphi(n\omega_1)] \tag{3.6-15}$$

上式表明，当激励中包含有多个频率分量时，系统根据频响函数对每个频率分量分别进行振幅加权和相移。

例 3-34 已知系统的频域特性曲线如图 3-86 所示，当激励 $e(t)=\sin t+\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)$ 时，求系统响应 $r(t)$。

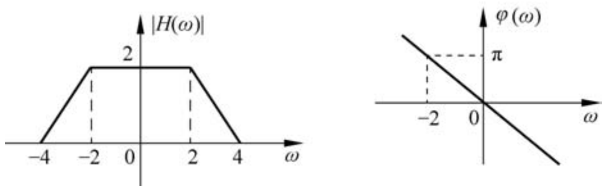


图 3-86 例 3-34 系统频域特性曲线

解：激励中包含 $\omega=1$ 和 $\omega=3$ 两个频率，根据式(3.6-15)可知要求解系统响应，需知道系统频响函数在这两个频率处的振幅和相位。从图中可以看出

$$|H(\omega)|_{\omega=1}=2,\quad \varphi(\omega)|_{\omega=1}=-\frac{\pi}{2}$$

$$|H(\omega)|_{\omega=3}=1,\quad \varphi(\omega)|_{\omega=3}=-\frac{3\pi}{2}$$

则系统响应为

$$r(t)=2\cdot\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+1\cdot\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=2\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)$$

3. 激励为非周期信号时的响应

非周期信号也可以看作不同频率的正弦信号合成。但由于非周期信号的频谱是连续谱，其包含从 $0\sim+\infty$ 的连续频率分量，不可能单独求解每个频率分量的振幅加权倍数和相移量。当系统激励信号为非周期信号时，可利用 $R(\omega)=E(\omega)\cdot H(\omega)$ 先求得响应的傅里叶变换 $R(\omega)$，然后利用反变换得到系统响应的时域表示，即 $r(t)=\mathcal{F}^{-1}[R(\omega)]$。

例 3-35 已知某 LTI 系统的频响函数 $H(\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$，求激励为 $e(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$ 时，系统的零状态响应 $r(t)$。

解：根据常用信号的变换对，可知

$$e(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)\leftrightarrow E(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+3}$$

故可得

$$R(\omega)=E(\omega)H(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}\omega+3}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega+3}$$

则零状态响应为

$$r(t)=(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

例 3-36 已知描述某 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+4r(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+e(t)$$

当激励为 $e(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$ 时，求系统的零状态响应 $r(t)$。

解：对微分方程两边做傅里叶变换，得该系统的频域方程为

$$(\mathrm{j}\omega)^2R(\omega)+5\mathrm{j}\omega R(\omega)+4R(\omega)=\mathrm{j}\omega E(\omega)+E(\omega)$$

整理可得

$$R(\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega+1}{(\mathrm{j}\omega)^2+5\mathrm{j}\omega+4}E(\omega)$$

根据已知条件，激励信号的傅里叶变换为

$$E(\omega)=\mathcal{F}[e(t)]=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$$

可得

$$R(\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega+1}{(\mathrm{j}\omega)^2+5\mathrm{j}\omega+4}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2+5\mathrm{j}\omega+4}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{\mathrm{j}\omega+1}+\frac{-\frac{1}{3}}{\mathrm{j}\omega+4}$$

故零状态响应为

$$r(t)=\frac{1}{3}(e^{-t}-e^{-4t})u(t)$$

从上例可以看出,利用频域分析法可将时域的微分方程转化为频域的代数方程,降低了计算复杂度。

3.6.3 无失真传输

由前面的分析知道,信号经过系统,受到系统频响函数 $H(\omega)$的作用,输入信号的振幅和相位可能会发生改变。若输出信号波形与输入信号波形形状不一样,通常称信号经过系统后发生了失真。信号的失真可分为线性失真和非线性失真。

线性失真是由信号经过线性系统引起,此时输出信号中不产生新的频率分量,仅是信号中各频率分量的振幅或相位发生了相对变化。非线性失真一般由信号经过非线性系统引起,此时信号经过系统会产生新的频率分量。

在信号传输中,有时希望能够无失真传输。无失真是指输入信号经过系统后,所产生的输出与输入相比波形形状相同,只是幅度发生变化,有一定的时延,波形如图 3-87 所示。即输入-输出关系为

$$r(t)=Ke(t-t_0) \tag{3.6-16}$$

式中,K 和 t_0 为常数。

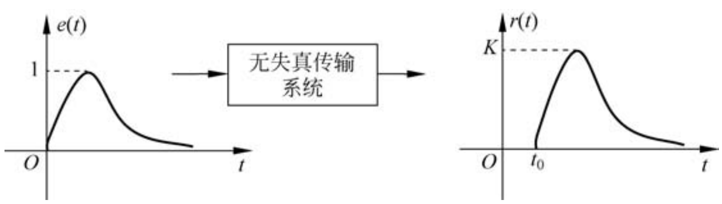


图 3-87 无失真时激励响应关系图

对式(3.6-16)两边做傅里叶变换,设 $e(t)\leftrightarrow E(\omega)$,$r(t)\leftrightarrow R(\omega)$,利用时移性质可得

$$R(\omega)=KE(\omega)e^{-j\omega t_0} \tag{3.6-17}$$

故无失真传输系统的频响函数为

$$H(\omega)=\frac{R(\omega)}{E(\omega)}=Ke^{-j\omega t_0} \tag{3.6-18}$$

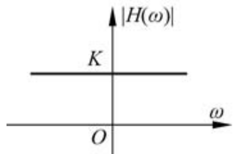
对 $H(\omega)$进行傅里叶反变换,可得系统的单位冲激响应为

$$h(t)=K\delta(t-t_0) \tag{3.6-19}$$

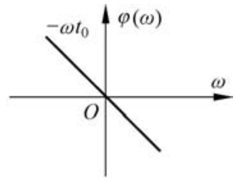
式(3.6-18)和式(3.6-19)分别称为无失真传输系统的频域条件和时域条件。同时从式(3.6-18)可以看出,无失真传输系统的幅频函数和相频函数分别为

$$\begin{aligned}|H(\omega)|&=K\\ \varphi(\omega)&=-\omega t_0\end{aligned} \tag{3.6-20}$$

对应的系统幅频特性曲线和相频特性曲线如图 3-88 所示。



(a) 幅频特性曲线



(b) 相频特性曲线

图 3-88　系统频率特性曲线

从图 3-88 可以看出,无失真传输系统的幅频特性为常数,这意味着系统对输入信号所有频率分量幅度放大相同的倍数;相频特性是斜率为$-t_0$且经过原点的直线,这表明系统对输入信号所有频率分量产生的相移均与频率成正比,此时各频率分量产生相同的延迟时间t_0,移位后各分量的相对位置保持不变。

上述结论也可以通过下面的分析得到。设输入信号为$e(t)=A_1\sin\omega_1 t+A_2\sin\omega_2 t$,系统频响函数$H(\omega)=|H(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$,则系统输出为

$$r(t)=A_1\,|H(\omega_1)|\sin[\omega_1 t-\varphi(\omega_1)]+A_2\,|H(\omega_2)|\sin[\omega_2 t-\varphi(\omega_2)]$$

$$=A_1\,|H(\omega_1)|\sin\omega_1\left[t-\frac{\varphi(\omega_1)}{\omega_1}\right]+A_2\,|H(\omega_2)|\sin\omega_2\left[t-\frac{\varphi(\omega_2)}{\omega_2}\right] \tag{3.6-21}$$

若系统是无失真传输系统,则输出$r(t)=Ke(t-t_0)$,故可得

$$|H(\omega_1)|=|H(\omega_2)|=K$$

$$\frac{\varphi(\omega_1)}{\omega_1}=\frac{\varphi(\omega_2)}{\omega_2}=t_0$$

当信号$e(t)$中包含更多频率分量时,同样可以推导出上述结论。若信号经过系统,各频率分量振幅的加权倍数不同,则输出信号产生幅度失真;若各频率分量的相位改变量不与其频率成正比,则输出信号产生相位失真。

根据无失真传输时系统相频特性曲线可以看出,此时相频特性曲线的斜率为常数,即

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\mathrm{d}(-\omega t_0)}{\mathrm{d}\omega}=-t_0 \tag{3.6-22}$$

令

$$\tau=-\frac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \tag{3.6-23}$$

通常定义τ为群时延或群延时。群时延是通信系统和网络中一项重要特性,是以一组频率分量之间的时延差值来衡量相位失真。信号在传输过程中,若系统对各频率分量时延不同,则产生相位失真,相位失真将导致信号产生码间干扰。无失真传输系统的群时延是与频率无关的常数,即$\tau=t_0$。

例 3-37　如图 3-89 所示电路系统,为使该系统无失真传输信号,求元件R_1、R_2、C_1

和 C_2 的参数需满足的条件。

解：系统的频域电路如图 3-90 所示。

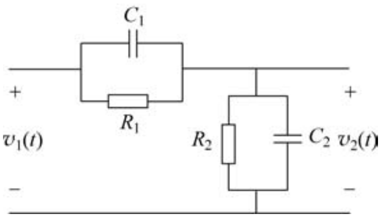


图 3-89　例 3-37 电路系统

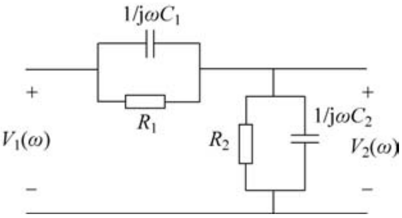


图 3-90　系统频域电路

根据元件的分压关系，可得

$$V_2(\omega)=\frac{R_2//\dfrac{1}{j\omega C_2}}{R_1//\dfrac{1}{j\omega C_1}+R_2//\dfrac{1}{j\omega C_2}}V_1(\omega)$$

系统频响函数为

$$H(\omega)=\frac{V_2(\omega)}{V_1(\omega)}=\frac{\dfrac{R_2}{1+j\omega C_2R_2}}{\dfrac{R_1}{1+j\omega C_1R_1}+\dfrac{R_2}{1+j\omega C_2R_2}}$$

$$=\frac{C_1}{C_1+C_2}\frac{j\omega+\dfrac{1}{R_1C_1}}{j\omega+\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}}$$

根据无失真的频域条件可以看出，当 $\dfrac{1}{R_1C_1}=\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}$，即 $R_1C_1=R_2C_2$ 时，系统可无失真传输信号。

例 3-38　某 LTI 系统的幅频、相频特性曲线如图 3-91 所示，输入信号分别为 $e_1(t)=2\cos 2t+\sin 5t$ 和 $e_2(t)=2\cos 5t+\sin 8t$。

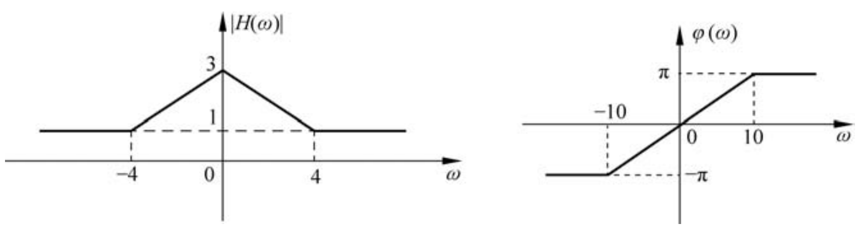


图 3-91　例 3-38 系统频率特性曲线

(1) 分别求 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 经过系统的输出 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$；

(2) 判断 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 经过系统有无失真，若有失真，说明失真的类型。

解：(1) 信号 $e_1(t)$中包含了 $\omega=2$ 和 $\omega=5$ 两个频率分量，$e_2(t)$中包含了 $\omega=5$ 和 $\omega=8$ 两个频率分量，从系统频率特性曲线中可以看出，

$$|H(\omega)|_{\omega=2}=2,\quad \varphi(\omega)|_{\omega=2}=\frac{\pi}{5}$$

$$|H(\omega)|_{\omega=5}=1,\quad \varphi(\omega)|_{\omega=5}=\frac{\pi}{2}$$

$$|H(\omega)|_{\omega=8}=1,\quad \varphi(\omega)|_{\omega=8}=\frac{4\pi}{5}$$

利用频域分析方法可得

$$\begin{aligned} r_1(t)&=2\cdot 2\cos\left(2t+\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)\\ &=4\cos\left[2\left(t+\frac{\pi}{10}\right)\right]+\sin\left[5\left(t+\frac{\pi}{10}\right)\right]\\ r_2(t)&=1\cdot 2\cos\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)+1\cdot\sin\left(8t+\frac{4\pi}{5}\right)\\ &=2\cos\left[5\left(t+\frac{\pi}{10}\right)\right]+\sin\left[8\left(t+\frac{\pi}{10}\right)\right] \end{aligned}$$

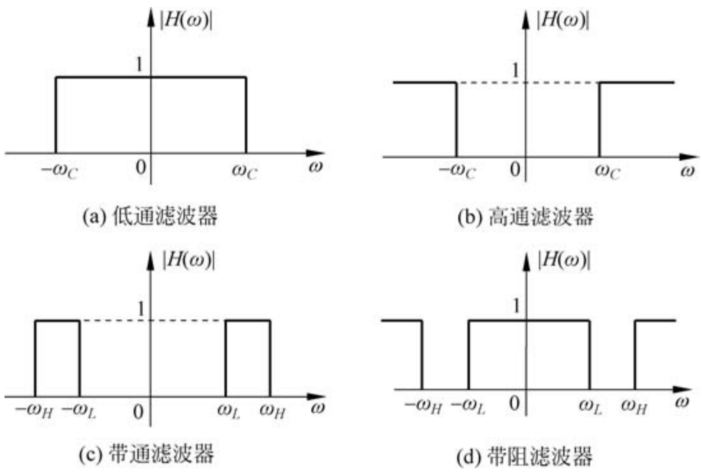
(2) 观察系统频率特性曲线可以看出，系统对 $e_1(t)$中 $\omega=2$ 的频率分量放大了 2 倍，$\omega=5$ 的频率分量放大了 1 倍，频率分量放大的倍数不相同，所以 $e_1(t)$经过系统产生了振幅失真。由于 $\omega=2$ 和 $\omega=5$ 的频率分量的相移均与频率成正比，因此信号 $e_1(t)$经过该系统无相位失真。而系统对 $e_2(t)$所包含的 $\omega=5$ 和 $\omega=8$ 两个频率分量振幅放大了相同的倍数，相移也与频率成正比，因此信号 $e_2(t)$经过系统没有失真。

从图 3-91 中可以看出，例 3-37 中所示的系统不满足无失真传输系统的条件，为失真系统。但信号 $e_2(t)$经过该系统无失真，这是因为 $e_2(t)$包含的两个频率分量经过系统后，放大倍数相同，相移与频率成正比。在实际系统中，想要信号经过系统后无失真，只需要在信号包含的频率范围内，系统的频率特性满足无失真条件即可。此例中，频率满足 $4\leqslant|\omega|\leqslant 10$ 的信号均可无失真传输。

3.6.4 理想低通滤波器

信号经过系统时，有时需要将信号中的某些频率分量保留，同时抑制其他频率分量，这个过程通常称为滤波，而具有这种频率选择功能的系统就称为滤波器。通常按照通过信号的频段范围不同，滤波器可分为低通滤波器(LPF)、高通滤波器(HPF)、带通滤波器(BPF)和带阻滤波器(BSF)。有时为了分析方便，常常将滤波网络的某些性能理想化，这种滤波网络就称为理想滤波器。图 3-92 给出了四种理想滤波器的幅频特性。

一般将信号能通过的频率范围称为通带，信号被抑制的频率范围称为阻带。所以低通滤波器的通带范围为$|\omega|<\omega_C$，阻带为$|\omega|>\omega_C$，ω_C 为截止频率。与低通滤波器刚好相反，信号通过理想高通滤波器，$|\omega|>\omega_C$ 时，信号无失真通过；$|\omega|<\omega_C$ 时，信号被完



(a) 低通滤波器 (b) 高通滤波器

(c) 带通滤波器 (d) 带阻滤波器

图 3-92 理想滤波器的幅频特性

全滤除。带通滤波器能让 $\omega_L<|\omega|<\omega_H$ 范围内的频率分量通过,其余范围的频率分量滤除,带阻滤波器则刚好与之相反,其中 ω_H、ω_L 分别称为上截止频率和下截止频率。本节以理想低通滤波器为例进行分析。

理想低通滤波器的幅频特性和相频特性曲线如图 3-93 所示。

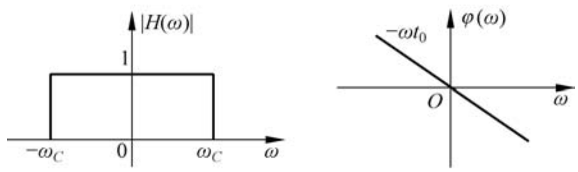


图 3-93 理想低通滤波器的频率特性曲线

从图 3-93 可以看出,理想低通滤波器的振幅谱函数为

$$|H(\omega)|=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_C \\ 0, & |\omega|>\omega_C\end{cases} \tag{3.6-24}$$

相位谱函数为

$$\varphi(\omega)=-\omega t_0 \tag{3.6-25}$$

可以看出,信号通过理想低通滤波器时,在通带范围内,各频率分量的振幅均放大相同的倍数,相移与频率成正比,可以无失真传输;而在阻带范围内,各频率分量振幅均衰减为 0,无法通过。

1. 理想低通滤波器的单位冲激响应

理想低通滤波器的频响函数为

$$H(\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega t_0}, & |\omega|<\omega_C\\ 0, & |\omega|>\omega_C\end{cases}$$

对频响函数 $H(\omega)$进行傅里叶反变换，可得

$$\begin{aligned}h(t)&=\mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_C}^{\omega_C}e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi j(t-t_0)}e^{j\omega(t-t_0)}\Big|_{-\omega_C}^{\omega_C}\\&=\frac{\sin\omega_C(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}=\frac{\omega_C}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_C(t-t_0)]\end{aligned}\tag{3.6-26}$$

也可借助傅里叶变换的性质来计算系统的单位冲激响应，将频响函数写为

$$\begin{aligned}H(\omega)&=e^{-j\omega t_0}[u(\omega+\omega_C)-u(\omega+\omega_C)]\\&=G_{2\omega_C}(\omega)e^{-j\omega t_0}\end{aligned}\tag{3.6-27}$$

根据傅里叶变换的对称性，可知

$$G_{2\omega_C}(\omega)\leftrightarrow\frac{\omega_C}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)$$

结合傅里叶变换的时移性质，可得到

$$G_{2\omega_C}(\omega)e^{-j\omega t_0}\leftrightarrow\frac{\omega_C}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_C(t-t_0)]$$

即理想低通滤波器的单位冲激响应为

$$h(t)=\frac{\omega_C}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_C(t-t_0)]\tag{3.6-28}$$

单位冲激信号经过理想低通滤波器后，波形的变化情况如图 3-94 所示。

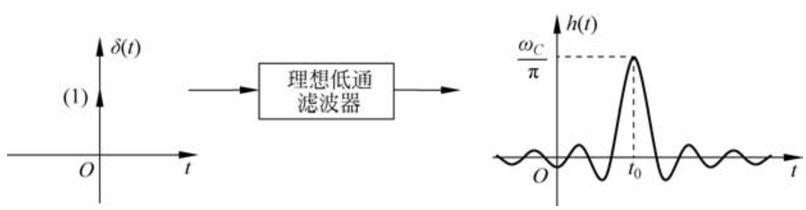


图 3-94　单位冲激信号经过理想低通滤波器

从图 3-94 中可以看出，单位冲激信号经过理想低通滤波器产生了失真。由于 $\delta(t)\leftrightarrow 1$，即单位冲激信号的频带宽度为无穷大，信号经过低通滤波器后，大于 ω_C 的频率分量被完全滤除，所以输出波形与输入波形有很大的不同。

由于冲激信号是在 $t=0$ 时刻加入到系统中，而 $t<0$ 时 $h(t)\neq 0$，可以看出理想低通滤波器为非因果系统。

2. 理想低通滤波器的单位阶跃响应

当单位阶跃信号通过理想低通滤波器时，其输出为

$$g(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{\omega_C}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_C(\tau-t_0)]\mathrm{d}\tau$$

$$\overset{令\lambda=\omega_C(\tau-t_0)}{=}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\omega_C(t-t_0)}\mathrm{Sa}(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{Sa}(\lambda)\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_C(t-t_0)}\mathrm{Sa}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_C(t-t_0)}\mathrm{Sa}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

令 $\mathrm{Si}(y)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{y}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，则

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_C(t-t_0)] \tag{3.6-29}$$

图 3-95 给出了阶跃信号及其经过理想低通滤波器后的波形。

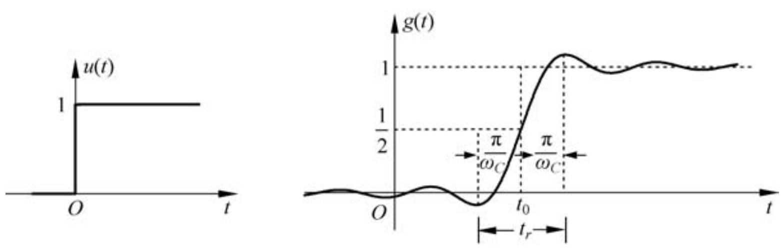


图 3-95 阶跃信号经过理想低通滤波器

由于阶跃信号中高于 ω_C 的频率分量被去除，经过低通滤波器后，函数值的阶跃变化变成了平滑的缓升。阶跃响应的最小值出现在 $t_0-\frac{\pi}{\omega_C}$ 处，最大值出现在 $t_0+\frac{\pi}{\omega_C}$ 处。通常称响应由最小值到最大值经历的时间为上升时间，记为 t_r，则

$$t_r=\frac{2\pi}{\omega_C} \tag{3.6-30}$$

可以看出，上升时间 t_r 与截止频率 ω_C 成反比。截止频率 ω_C 越小，允许通过的高频分量越少，输出信号上升越缓慢，信号失真严重；截止频率 ω_C 越大，允许通过的高频分量越多，输出信号上升速度越快，信号波形越接近于阶跃信号。因此截止频率的选择对输出信号波形有着决定性影响。

例 3-39 已知激励信号 $e(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 如图 3-96(a) 所示，信号经过如图 3-96(b) 所示系统，分别画出信号 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 以及 $r(t)$ 的频谱图。

解：根据图 3-96(b) 可知

$$x_1(t)=e(t)\cdot\cos 10t$$

由傅里叶变换的频移性质，得

$$x_1(t)\leftrightarrow X_1(\omega)=\frac{1}{2}[E(\omega+10)+E(\omega-10)]$$

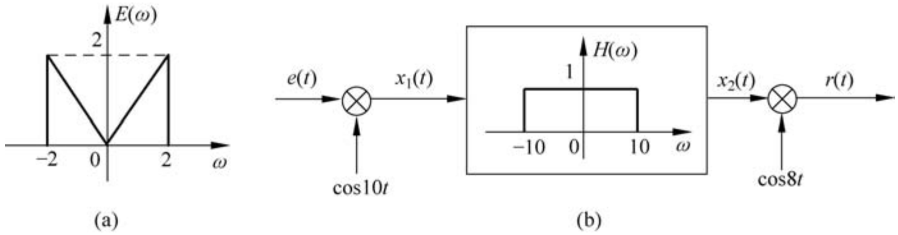


图 3-96　例 3-39 图

所以 $x_1(t)$的频谱 $X_1(\omega)$如图 3-97 所示。

因为 $X_2(\omega)=X_1(\omega)\cdot H(\omega)$，$H(\omega)$为低通滤波器，所以 $x_2(t)$的频谱如图 3-98 所示。

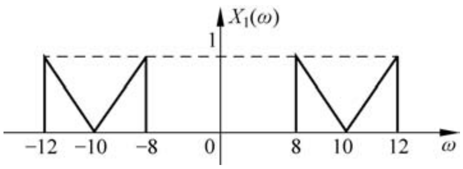


图 3-97　$x_1(t)$的频谱

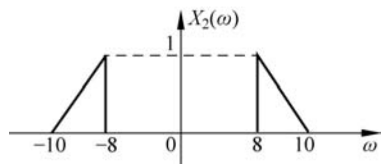


图 3-98　$x_2(t)$的频谱

由于 $r(t)=x_2(t)\cdot\cos 8t$，所以 $R(\omega)=\dfrac{1}{2}[X_2(\omega+8)+X_2(\omega-8)]$，频谱如图 3-99 所示。

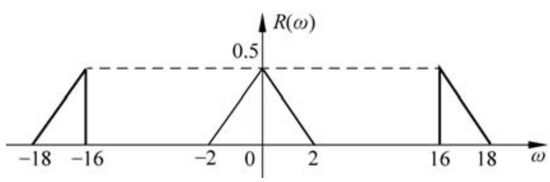


图 3-99　$r(t)$的频谱

3. 系统的物理可实现性

理想低通滤波器是非因果系统，是物理不可实现的。系统的物理可实现性可以根据系统的单位冲激响应和频响函数进行判断。

从时域来说，系统物理可实现的条件是系统满足因果性，即

$$h(t)=0,\quad t<0 \tag{3.6-31}$$

从频域来看，若系统幅频函数$|H(\omega)|$满足平方可积条件，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega<\infty \tag{3.6-32}$$

则系统物理可实现的必要条件为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln|H(\omega)||}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega < \infty \tag{3.6-33}$$

此条件由佩利和维纳证明,因此称为佩利-维纳准则。若系统频响函数不满足此条件,则该系统是物理不可实现的。

对于理想低通滤波器,其幅频函数平方的积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \int_{-\omega_C}^{\omega_C} |H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \int_{-\omega_C}^{\omega_C}\mathrm{d}\omega = 2\omega_C < \infty$$

当频率$|\omega|>\omega_C$时,理想低通滤波器的频响函数$H(\omega)=0$,此时$|\ln|H(\omega)||\to\infty$,故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln|H(\omega)||}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega \to \infty$$

因此理想低通滤波器不满足佩利-维纳准则,为物理不可实现系统。实际上所有理想滤波器由于幅频特性在某个频带内的幅值为零,都是物理不可实现的。

例 3-40 图 3-100 是由电阻和电容组成的两个一阶 RC 电路,已知 $R=1\Omega$,$C=1\mathrm{F}$,$v_S(t)$为激励。分别计算以$v_C(t)$和$v_R(t)$为响应时,系统的频响函数$H(\omega)$,并画出幅频特性曲线。

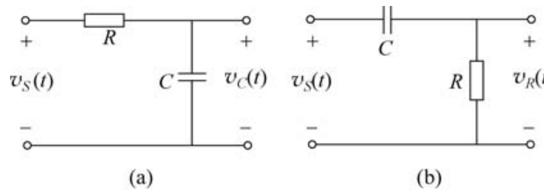


图 3-100 例 3-40 图

解:(1) 以$v_C(t)$为响应时,系统的频域电路模型如图 3-101 所示。

根据元件分压关系,可得到

$$H_1(\omega)=\frac{V_C(\omega)}{V_S(\omega)}=\frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega RC+1}$$

代入元件参数,有

$$H_1(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+1}$$

(2) 以$v_R(t)$为响应时,系统的频域电路模型如图 3-102 所示。

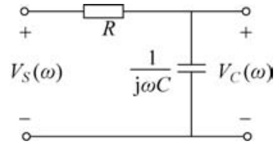


图 3-101 图 3-100(a)的频域模型

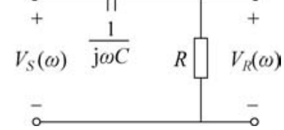


图 3-102 图 3-100(b)的频域模型

此时系统的频响函数为

$$H_2(\omega)=\frac{V_R(\omega)}{V_S(\omega)}=\frac{R}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{\mathrm{j}\omega}{\mathrm{j}\omega+1}$$

两个系统的幅频函数分别为

$$|H_1(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}},\quad |H_2(\omega)|=\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2+1}}$$

对应的幅频特性曲线分别如图 3-103(a)和(b)所示。

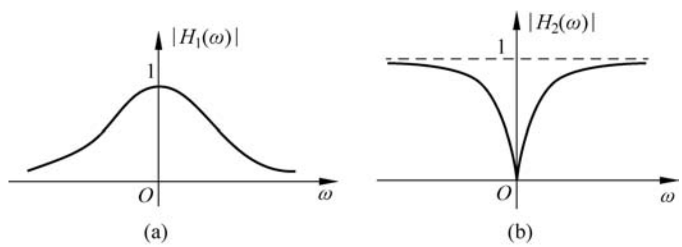


图 3-103　系统频域特性曲线

从图中可以看出,信号经过系统(a)[图 3-103(a)]时,信号中高频分量的衰减比低频分量大,所以该系统具有低通特性,可以作为一个简单的低通滤波器,通常称为 RC 低通滤波器。而信号经过系统(b)[图 3-103(b)]时,信号中低频分量的衰减比高频分量大,所以该系统可以作为一个简单的高通滤波器。

RC 低通滤波器实现比较简单,抗干扰性能强,有较好的低频性能。从其幅频特性曲线中也可以看出,与理想滤波器不同的是:实际滤波器的通带幅度不是常数;阻带幅度相对较小,但不是零;同时,在通带和阻带之间存在一定频率范围的过渡带,如图 3-104 所示。通常在设计滤波器时,要求滤波器的通带幅度尽量接近常数,过渡带的宽度越窄越好,同时通带外的频率成分衰减得越快越好。高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器也存在类似的特性。

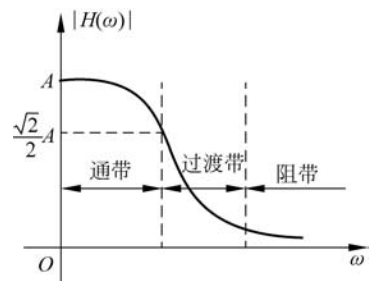


图 3-104　实际滤波器幅频特性曲线示意图

3.7　时域采样定理

在实际工程应用中,有时需要将连续时间信号转换为数字信号,通常称为模/数转换(A/D 转换)。模/数转换通常包括采样、量化和编码,本节重点讨论时域采样的过程和要求。

3.7.1 时域采样

从连续信号中抽取出一系列离散样值的过程称为采样。时域采样的过程可以用如图 3-105 所示的开关来实现。

设原信号 $f(t)$的波形如图 3-106(a)所示,采样信号为 $f_s(t)$。当开关 K 处于位置"1"时,输出信号 $f_s(t)=f(t)$;当开关 K 切换到位置"2"时,$f_s(t)=0$。当开关在位置"1"和"2"之间进行周期性切换时,就可以完成信号的时域采样。采样信号 $f_s(t)$的波形如图 3-106(b)所示。

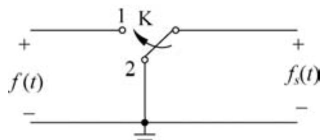


图 3-105　开关示意图

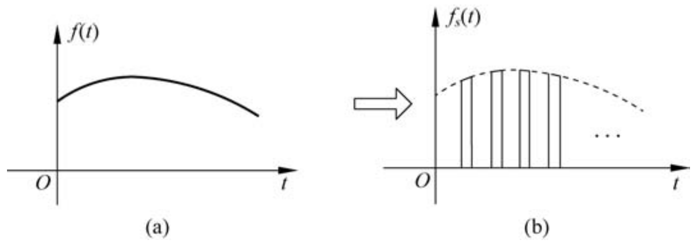


图 3-106　原信号及其时域采样波形

图 3-105 的开关可以用乘法运算来模拟,如图 3-107 所示。信号的采样过程可以看作输入信号 $f(t)$与采样脉冲 $p(t)$相乘的结果,即

$$f_s(t)=f(t)\cdot p(t) \tag{3.7-1}$$

其中,$p(t)$是周期为 T_s 的矩形脉冲信号,也称为开关函数;T_s 称为采样周期,也称为采样间隔,表示多长时间采样一次,$f_s=1/T_s$ 称为采样频率,表示每秒采样的次数;$\omega_s=2\pi/T_s$ 称为采样角频率,有时也简称为采样频率。

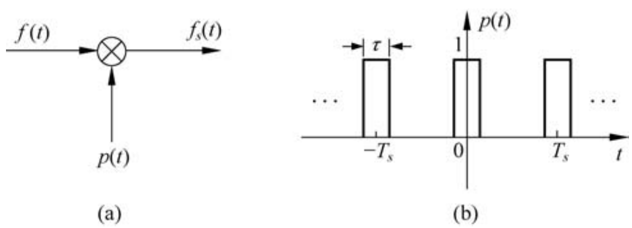


图 3-107　采样过程模型

实际应用中,采样脉冲可以有多种形式,图 3-106 所示的采样方式也称为自然采样。

1. 理想采样

首先考虑一种理想化的采样情况,即采样脉冲为周期冲激信号,即

$$p(t)=\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s) \tag{3.7-2}$$

此时称为理想采样。根据式(3.7-1),采样信号为

$$f_s(t)=f(t)\cdot p(t)=f(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)\tag{3.7-3}$$

周期冲激信号 $p(t)$的频谱函数为

$$P(\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_s)\tag{3.7-4}$$

根据频域卷积定理,采样信号 $f_s(t)$的频谱为

$$F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\omega_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega-n\omega_s)\tag{3.7-5}$$

式(3.7-5)表明,理想采样时,采样信号的频谱 $F_s(\omega)$是原信号频谱 $F(\omega)$以 ω_s 为间隔的周期重复,且振幅乘以$\frac{1}{T_s}$。

设信号 $f(t)$为带限信号,其时域波形如图 3-108(a)所示,图 3-108(b)为其频谱图,最高频率为 ω_m。图 3-108(c)和(d)给出了理想采样脉冲信号的时域波形和频谱图。图 3-108(e)为采样信号的时域波形,图 3-108(f)为采样频率 $\omega_s>2\omega_m$ 时采样信号的频谱。

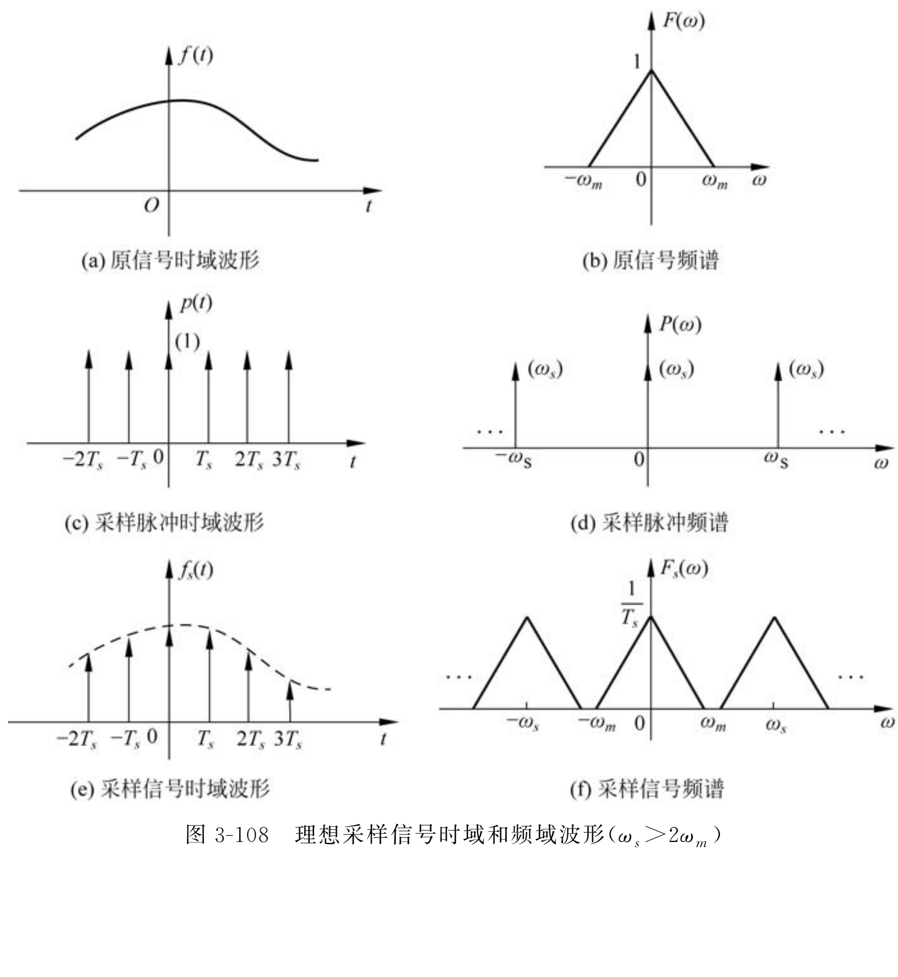


图 3-108　理想采样信号时域和频域波形($\omega_s>2\omega_m$)

图 3-109 和图 3-110 分别给出了当采样频率 $\omega_s=2\omega_m$ 和 $\omega_s<2\omega_m$ 时，采样脉冲和采样信号的频谱图。

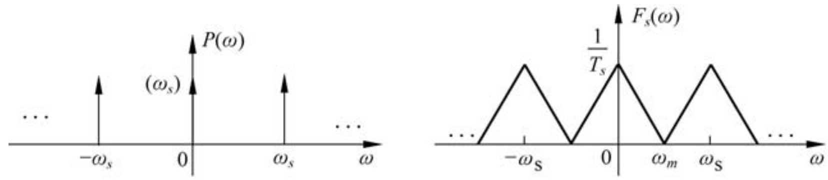


图 3-109 $\omega_s=2\omega_m$ 时采样脉冲和采样信号的频谱

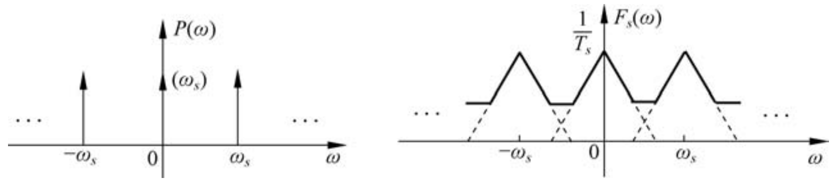


图 3-110 $\omega_s<2\omega_m$ 时采样脉冲和采样信号的频谱

比较图 3-108、图 3-109 和图 3-110 可以看出，当采样频率大于等于信号最高频率的 2 倍时，即 $\omega_s\geqslant 2\omega_m$ 时，理想采样之后信号的频谱是原信号频谱的周期重复，重复周期是 ω_s，频谱幅度是原信号频谱的 $1/T_s$ 倍。当采样频率降低时，采样脉冲间隔变大，采样信号的频谱之间的间隔变小。当 $\omega_s<2\omega_m$ 时，采样信号的频谱会发生混叠。

2. 自然采样

自然采样时，采样脉冲为如图 3-111 所示的周期矩形脉冲。

周期矩形脉冲信号的傅里叶谱系数为

$$F_n=\frac{\tau}{T_s}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$$

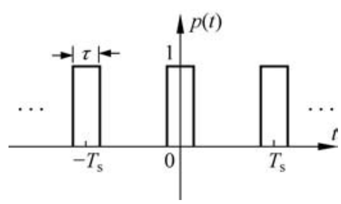


图 3-111 自然采样脉冲

其中，$\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$。由 3.4 节的分析可知，采样脉冲的频谱为

$$P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_s)=\frac{2\pi\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_s) \tag{3.7-6}$$

故采样信号 $f_s(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned}F_s(\omega)&=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)\\&=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\frac{2\pi\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_s)\\&=\frac{\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)F(\omega-n\omega_s)\end{aligned} \tag{3.7-7}$$

图 3-112 给出了原信号、采样脉冲和采样信号的时域波形，以及 $\omega_s > 2\omega_m$ 时各信号所对应的频谱图。

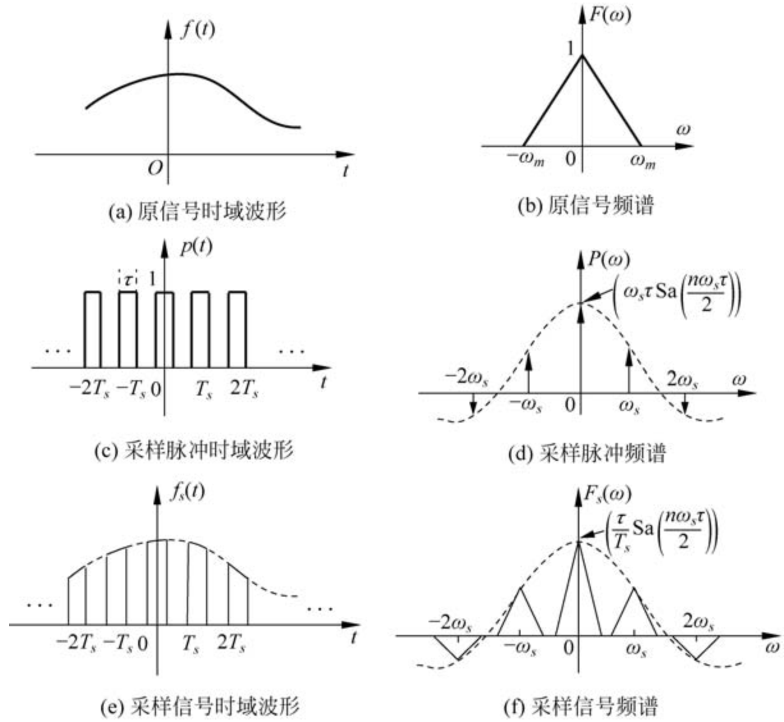


图 3-112　自然采样信号时域和频域波形($\omega_s > 2\omega_m$)

与理想采样类似，当 $\omega_s \geqslant 2\omega_m$ 时，自然采样信号的频谱也是原信号频谱以 ω_s 为间隔进行重复，只是幅度加权系数不再是常数，而是$\frac{\tau}{T_s}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$。当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时，采样信号频谱也会发生混叠。

例 3-41　如图 3-113(a)所示系统，信号 $f(t)$的频谱如图 3-113(b)所示，用 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ 对其进行理想采样，其中 $T = \frac{\pi}{4}$s。

(1) 画出采样信号 $f_s(t)$的频谱图；

(2) 画出输出信号 $y(t)$的频谱图。

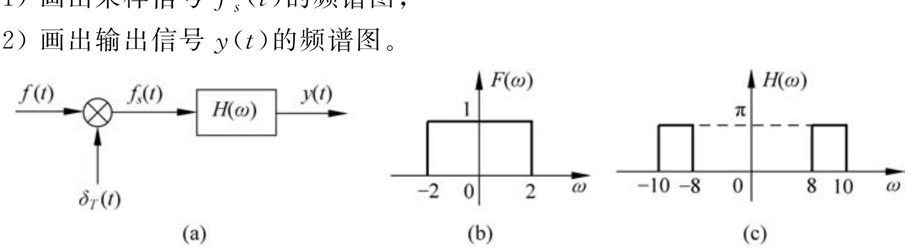


图 3-113　例 3-41 图

解：当采样间隔 $T=\dfrac{\pi}{4}$s 时，采样频率 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}=8$rad/s。理想采样时采样信号的频谱为

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega-n\omega_s)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega-8n)$$

所以采样信号 $f_s(t)$的频谱图如图 3-114 所示。

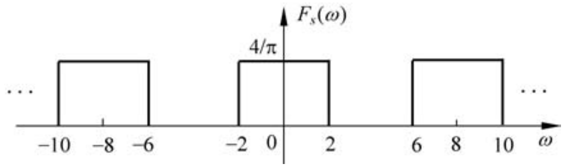


图 3-114 采样信号 $f_s(t)$的频谱

从图 3-113(c)中可以看出，$H(\omega)$为增益是 π 的带通滤波器。信号通过该滤波器，频率 $8<|\omega|<10$ 的部分保留，幅度放大 π 倍，其余频率分量被滤除。因此输出信号 $y(t)$的频谱如图 3-115 所示。

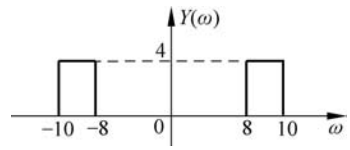


图 3-115 输出信号 $y(t)$的频谱

3.7.2 时域采样定理

通过对理想采样和自然采样两种情况的分析可以看出，当信号 $f(t)$的带宽为 ω_m 时，若采样频率 $\omega_s\geqslant 2\omega_m$，$F_s(\omega)$的基带频谱与各次谐波频谱之间不重叠，基带频谱保留了原信号的全部信息，可以从采样信号 $f_s(t)$中恢复出原信号 $f(t)$。此时只需将信号通过理想低通滤波器即可提取出原信号的频谱 $F(\omega)$，如图 3-116 所示。

图 3-116 所示的恢复过程可以表示为

$$F(\omega)=F_s(\omega)H(\omega)$$

其中，理想低通滤波器的频响函数为

$$H(\omega)=\begin{cases}T_s, & |\omega|<\omega_C\\ 0, & |\omega|>\omega_C\end{cases}\tag{3.7-8}$$

要恢复原信号频谱，低通滤波器的截止频率应满足

$$\omega_m<\omega_C<\omega_s-\omega_m\tag{3.7-9}$$

当 $\omega_s=2\omega_m$ 时，低通滤波器的截止频率 $\omega_C=\omega_m$，如图 3-117 所示。

当 $\omega_s<2\omega_m$ 时，即采样频率较小时，$F_s(\omega)$的基带频谱与谐波频谱相互混叠，无法从采样信号 $f_s(t)$中恢复出原信号 $f(t)$。

早在 1928 年美国工程师奈奎斯特就提出，带宽有限的连续信号 $f(t)$，如果其最高频率为 f_m，当采样间隔小于等于$\dfrac{1}{2f_m}$时，采样后的信号频谱中包含了原信号的全部信息，可以恢复出原信号。这一结论称为时域采样定理，也叫奈奎斯特采样定理。

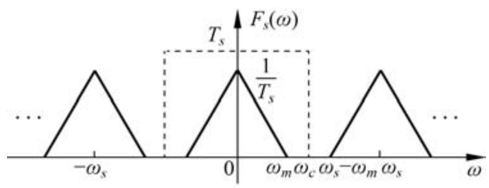


图 3-116　$\omega_s > 2\omega_m$ 时信号恢复示意图

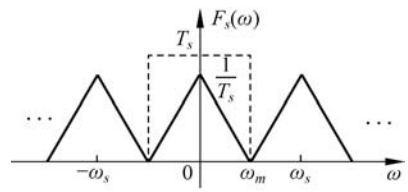


图 3-117　$\omega_s = 2\omega_m$ 时信号恢复示意图

采样定理给出了从采样信号中恢复出原始信号的条件，即采样间隔 T_s 要满足

$$T_s \leqslant \frac{1}{2f_m} \tag{3.7-10}$$

或采样频率满足

$$f_s \geqslant 2f_m \quad \text{或} \quad \omega_s \geqslant 2\omega_m \tag{3.7-11}$$

通常将满足采样定理要求的最低采样频率 $f_s = 2f_m$ 称为奈奎斯特采样频率，把最大允许的采样间隔 $T_s = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}$ 称为奈奎斯特采样间隔。

例 3-42　已知信号 $f(t)$ 的频率范围为 $(-\omega_m, \omega_m)$，对下列信号进行理想采样，计算信号的奈奎斯特采样频率。

(1) $f_1(t) = f(2t)$；(2) $f_2(t) = f^2(t)$；(3) $f_3(t) = f(t) + f\left(\frac{t}{4}\right)$

解：(1) $f_1(t)$ 是对 $f(t)$ 进行时域尺度变换运算的结果，根据傅里叶变换的尺度变换性质，可得到信号 $f_1(t)$ 的频谱函数为

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

信号时域压缩，频谱扩展，因此 $f_1(t)$ 的最高频率为 $2\omega_m$。根据采样定理，可知信号 $f_1(t)$ 的奈奎斯特采样频率 $\omega_s = 4\omega_m$。

(2) 由傅里叶变换的频域卷积定理可知，$f_2(t)$ 的频谱函数为

$$F_2(\omega) = F(\omega) * F(\omega)$$

因此 $f_2(t)$ 的最高频率为 $2\omega_m$。根据采样定理，可知信号 $f_2(t)$ 的奈奎斯特采样频率 $\omega_s = 4\omega_m$。

(3) 由傅里叶变换的线性和尺度变换性质可知，$f_3(t)$ 的频谱函数为

$$F_3(\omega) = F(\omega) + 4F(4\omega)$$

$F(4\omega)$ 的频率范围为 $\left(-\frac{1}{4}\omega_m, \frac{1}{4}\omega_m\right)$。频域信号频谱函数相加，范围取大，因此 $f_3(t)$ 的最高频率为 ω_m。根据采样定理，可知信号 $f_3(t)$ 的奈奎斯特采样频率 $\omega_s = 2\omega_m$。

实际工程中，由于时间有限的信号，其频谱往往是无限范围，此时直接对信号进行采样，会造成频谱混叠，因此需要将信号的频率限定在一定范围内。通常的做法是将信号通过一个低通滤波器，去除信号中的高频分量，然后再对信号进行采样，如图 3-118 所示。

此时的低通滤波器也称为抗混叠滤波器。虽然避免了频谱混叠，但由于损失了高频成分，会带来信号的失真，所以只能在允许一定失真的情况下，近似恢复原始信号。

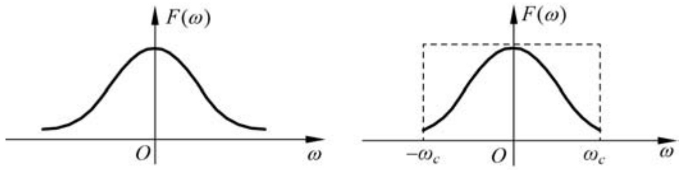


图 3-118 信号通过抗混叠滤波器

由于理想滤波器是物理不可实现的，实际滤波器存在一个过渡带。若采样频率等于信号最高频率的 2 倍，通过滤波器得到的就不仅是原信号的频率成分，如图 3-119 所示。因此在实际工程中，恢复信号时要求采样频率 ω_s 大于信号最高频率 ω_m 的 2 倍，通常采样频率取信号最高频率的 3～5 倍。

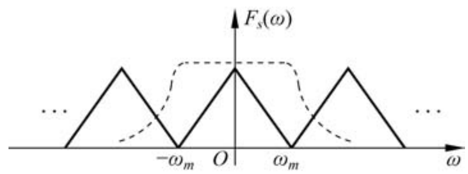


图 3-119 信号通过实际滤波器

3.8 信号调制解调

频域分析方法在实际通信系统中有着广泛的应用。根据 3.3 节中傅里叶变换的频移特性可知，通过信号与 $e^{\pm j\omega_0 t}$ 相乘，可以实现信号频谱的平移。这一特性在通信中的一种重要应用就是调制解调。实际工程信号中往往包含了丰富的低频分量，要将信号以无线电形式进行远距离传输时，一般要求天线长度应大于波长的 1/4，设某信号的频率为 4000Hz，其波长 λ 为 75km，则天线尺度要达到近 20km，显然这是不可行的。但若能将信号搬移到一个较高的频率上，如 100MHz，则只需要 0.75m 长的天线即可。在通信中通常把这种信号频谱的搬移过程称为调制，在接收端将信号频谱从较高频率搬回到低频，恢复出原信号的过程称为解调。

根据调制信号的类型可分为模拟调制和数字调制。本节以幅度调制和频率调制为例，介绍模拟调制系统的基本原理。

3.8.1 幅度调制

幅度调制是由调制信号控制载波信号的幅度，以实现载波幅度随着调制信号做线性变化。实际中常用的载波信号为正弦信号 $\cos\omega_0 t$。

1. 双边带调制

设调制信号为 $f(t)$，则振幅已调信号 $f_s(t)$可表示为

$$f_s(t)=f(t)\cos\omega_0 t \tag{3.8-1}$$

若 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(\omega)$，$f_s(t)$ 的频谱函数为 $F_s(\omega)$，由傅里叶变换的频移性质，可知

$$F_s(\omega)\leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)] \tag{3.8-2}$$

图 3-120 给出了调制过程中信号时域波形和频谱图的变化情况。

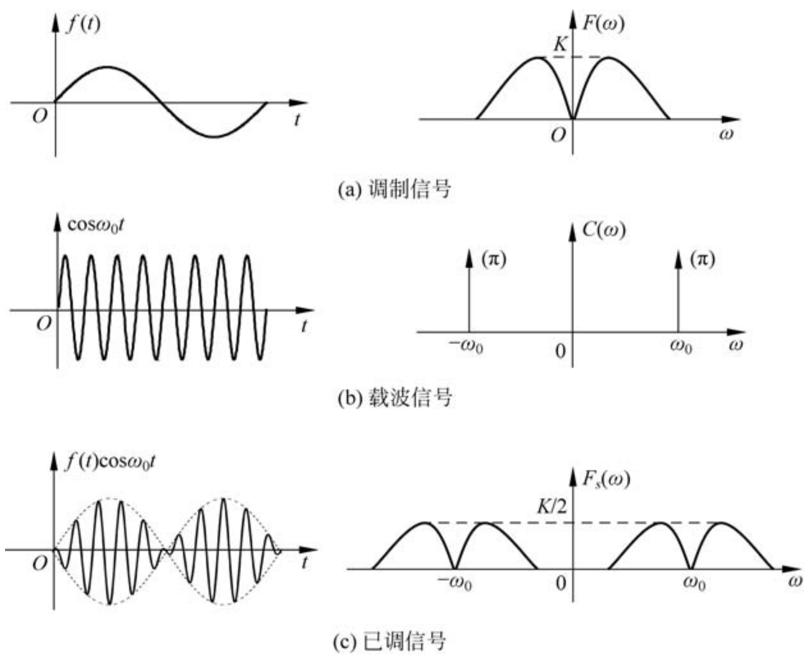


图 3-120　调制过程信号时域波形和频谱

从图中可以看出，已调信号的频谱在频率 $-\omega_0$ 和 ω_0 附近，振幅是调制信号的频谱 $F(\omega)$ 的 1/2。这种调制方法称为双边带调制。

在信号接收端，要从已调信号 $f_s(t)$ 中恢复出原信号 $f(t)$，此时需要将已调信号的频谱搬回到低频处，采用的方法仍然是将信号 $f_s(t)$ 与 $\cos\omega_0 t$ 相乘。

$$\begin{aligned} g(t) &= f_s(t)\cos\omega_0 t = f(t)\cos\omega_0 t\cdot\cos\omega_0 t \\ &= f(t)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos2\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}f(t)\cos2\omega_0 t \end{aligned} \tag{3.8-3}$$

可计算得到 $g(t)$ 的频谱函数为

$$G(\omega)=\frac{1}{2}F(\omega)+\frac{1}{4}[F(\omega+2\omega_0)+F(\omega-2\omega_0)]$$

为还原出信号 $f(t)$，只需要将信号 $g(t)$ 经过增益为 2 的低通滤波器即可，滤波器的截止频率满足 $\omega_m\leqslant\omega_C\leqslant2\omega_0-\omega_m$。接收端解调的模型如图 3-121 所示。

这个解调过程需要在接收端产生与发送端同频同相的本地载波信号，因此这种解调方式称为相干解调。这种解调方式的缺点是对接收机的要求较高，接收机的结构复杂。

2. 调幅

通常为了简化接收机的复杂程度，常采用的方法是在将调制信号 $f(t)$ 叠加一个直流偏量 A_0 后，再与载波 $\cos\omega_0 t$ 相乘，即

$$s(t)=[A_0+f(t)]\cos\omega_0 t \tag{3.8-4}$$

这种调制方法称为常规双边带调制，简称调幅(AM)，其实现模型如图 3-122 所示。

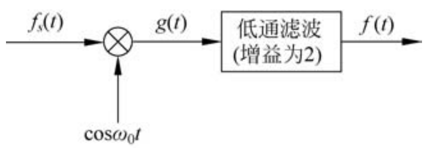


图 3-121　解调模型

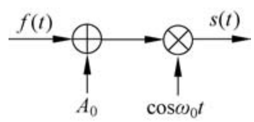


图 3-122　调幅系统模型

设调制信号 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(\omega)$，则调幅信号 $s(t)$ 的频谱函数为

$$S(\omega)=\pi A_0[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)] \tag{3.8-5}$$

调幅过程中信号的时域波形和频谱变化如图 3-123 所示。

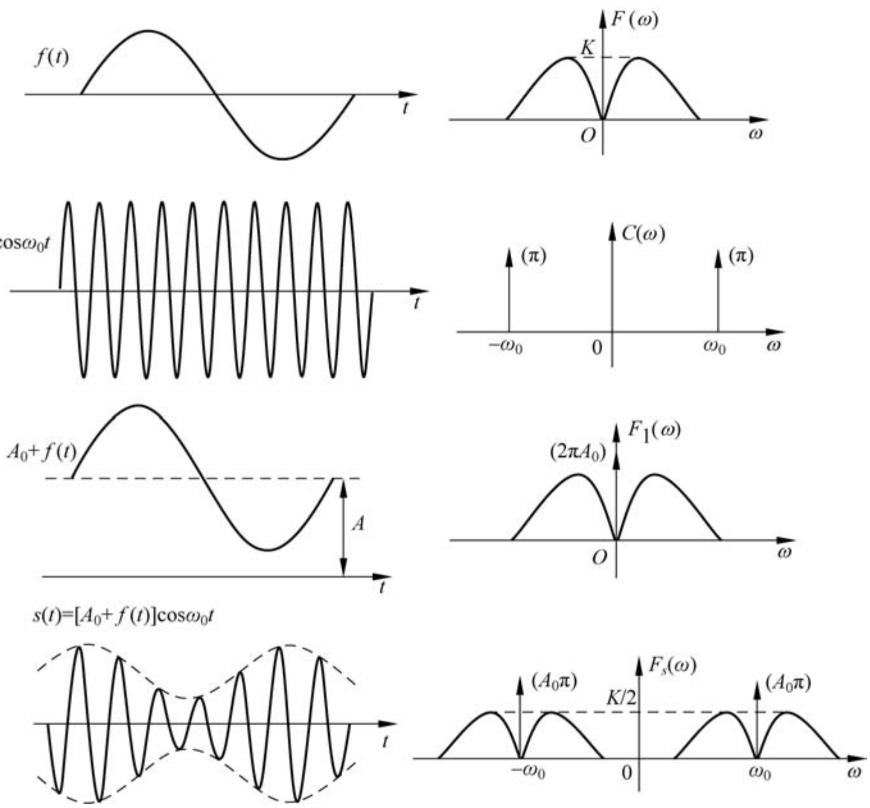


图 3-123　调幅时原信号、载波信号、调幅信号的时域波形

调幅信号的解调也可以使用相干解调，但通常使用包络检波的方法来恢复信号。常见的二极管峰值包络检波器如图 3-124 所示，由二极管和 RC 低通滤波器组成。

当输入信号电压 $v_s(t)$ 大于电容电压 $v_o(t)$ 时，二极管导通，信号通过二极管给电容 C 充电，此时 $v_o(t)$ 随着 $v_s(t)$ 的上升而升高。当 $v_s(t)$ 下降至小于 $v_o(t)$ 时，二极管反向截止，此时电容放电，$v_o(t)$ 下降。当输入信号为调幅信号 $s(t)$ 时，检波器的输出电压 $v_o(t)$ 随着 $s(t)$ 的包络线变化而变化，隔去直流后即可得到原信号 $f(t)$。

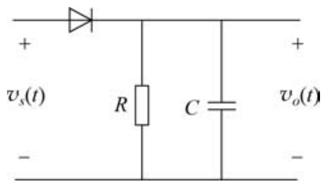


图 3-124　二极管峰值包络检波器

3.8.2　频率调制

频率调制，简称调频或 FM，指的是载波信号的频率随调制信号变化的调制方式。在调制过程中，载波的幅度保持不变。

设正弦载波的表达式为

$$c(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi) \tag{3.8-6}$$

定义 $\phi(t)=\omega_0 t+\varphi$ 为载波的瞬时相位。当载波的初始相位 φ 为随着时间 t 变化的函数时，$\varphi(t)$ 称为瞬时相位偏移，其导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)$ 称为瞬时频率偏移。

频率调制，就是使载波的瞬时频率偏移量随着调制信号 $f(t)$ 的变化而变化，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)=K_F f(t)$$

式中，K_F 为比例系数，称为调频灵敏度。此时相位偏移为 $\varphi(t)=K_F\int f(\tau)\mathrm{d}\tau$。代入式(3.8-6)中可得调频信号

$$f_s(t)=A\cos[\omega_0 t+\varphi(t)]=A\cos[\omega_0 t+K_F\int f(\tau)\mathrm{d}\tau] \tag{3.8-7}$$

当调制信号振幅增强时，已调信号的波形变密集；而当调制信号振幅减弱时，已调信号的波形变稀疏，波形的变化体现了载波信号的频偏变化情况。图 3-125 给出了单频率正弦波调频的示意图。

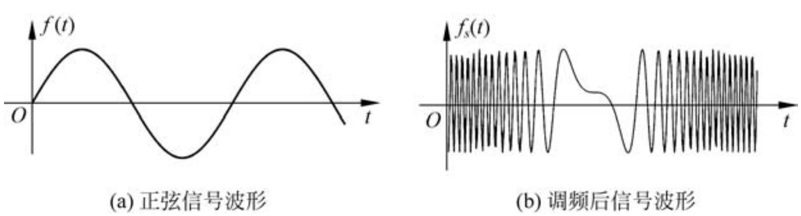


图 3-125　信号调频示意

调频信号的解调分为相干解调和非相干解调，有兴趣的读者可以查看通信相关专业

书籍。信号调制的一个常见应用就是频分复用。频分复用是一种按照频率来划分信道的复用方式。信号的带宽被分成多个互不重叠的子通道,每路信号占用其中一个子通道。在接收端,采用适当的带通滤波器将多路信号分开,恢复出所需要的信号。频分复用实现了多路信号在同一信道内的同时传输,能够有效提高信道的利用率。频分复用主要用于模拟信号的传输,如调频广播、有线电视等,其优点是技术成熟,信道利用率高。频分复用系统的原理如图 3-126 所示。

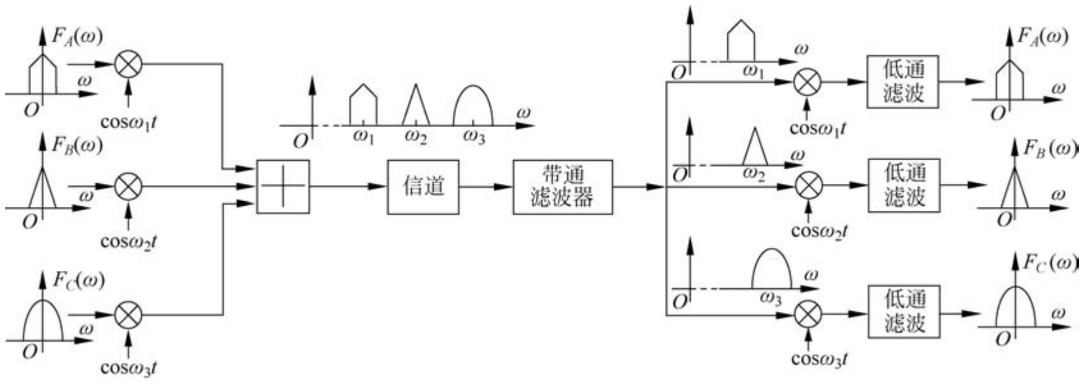


图 3-126 频分复用系统原理图

调制在通信系统中起着重要的作用,它能将调制信号变成适合在信道中传输的已调信号,提高系统传输效率,改善系统的抗噪性能。

习题 3

3-1 求图 3-127 所示周期信号的三角形式的傅里叶级数展开式。

3-2 求图 3-128 所示周期信号的复指数形式的傅里叶级数展开式。

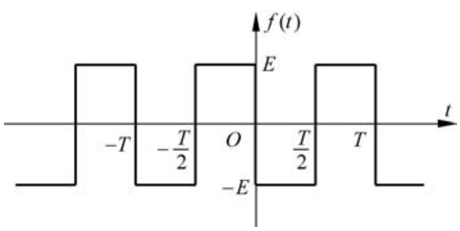


图 3-127 题 3-1 图

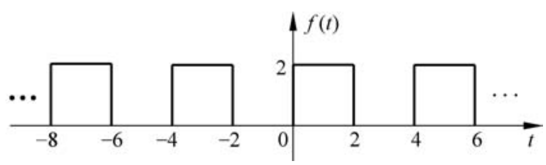


图 3-128 题 3-2 图

3-3 信号 $f(t)=3\sin(2t+\pi/6)+\cos(3t+\pi/3)-\cos(4t+\pi/8)$,画出该信号的三角形式的傅里叶级数频谱图。

3-4 已知周期信号的单边频谱如图 3-129 所示,写出该信号标准三角形式的傅里叶级数展开式。

3-5 画出题 3-4 所示信号的双边频谱图,并写出其复指数形式的傅里叶级数展

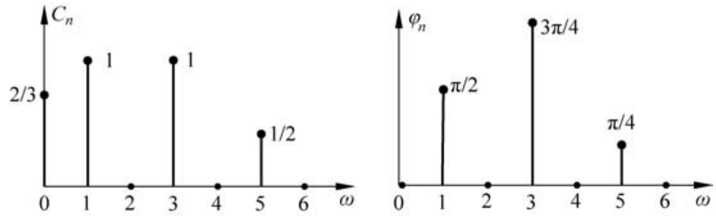


图 3-129　题 3-4 图

开式。

3-6　周期信号 $f(t)$的双边频谱如图 3-106 所示,请写出其三角级数展开式。

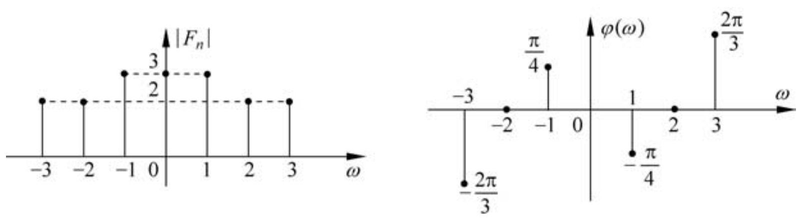


图 3-130　题 3-6 图

3-7　已知周期矩形信号的波形如图 3-131 所示。求:

(1) 当信号 $f_1(t)$的参数为 $\tau=0.5\mu s$,$T=4\mu s$,$E=1V$ 时,该信号的直流分量和谱线间隔;

(2) 当信号 $f_2(t)$的参数为 $\tau=1.5\mu s$,$T=3\mu s$,$E=3V$ 时,该信号的直流分量和谱线间隔;

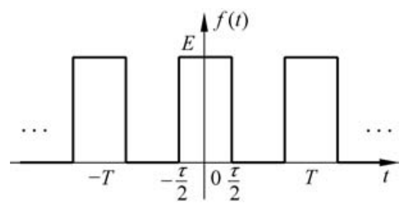


图 3-131　题 3-7 图

3-8　求信号 $f(t)=2u(t+1)-2u(t-3)$的傅里叶变换。

3-9　已知信号的频谱函数为 $F(\omega)=\dfrac{1}{(j\omega)^2+5j\omega+4}$,求原信号 $f(t)$。

3-10　已知 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$,利用相关性质求下列信号的傅里叶变换。

(1) $f_1(t)=f\left(\frac{1}{3}t\right)$;　　(2) $f_2(t)=f(t+3)$;

(3) $f_3(t)=f(3t-4)$;　　(4) $f_4(t)=f(2-2t)$;

(5) $f_5(t)=f(t)\cos t$;　　(6) $f_6(t)=f(t-1)e^{-j\omega_0 t}$;

(7) $f_7(t)=t\dfrac{d}{dt}f(t)$;　　(8) $f_8(t)=(t-3)f(t-3)$。

3-11　求下列信号的傅里叶变换:

(1) $G_2(3t)$;(2) e^{j2t};(3) $\dfrac{\sin 2t}{t}$。

3-12　已知门函数 $EG_{\tau}(t)$ 的频谱函数为 $G(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，求图 3-132 所示信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$。

3-13　求图 3-133 所示信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$，并画出频谱图。

$$f(t)=\begin{cases}\cos\omega_0 t, & |t|<T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$$

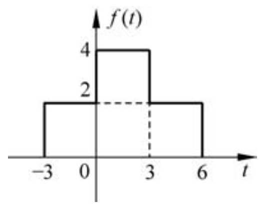


图 3-132　题 3-12 图

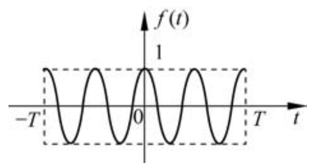


图 3-133　题 3-13 图

3-14　已知信号 $f(t)$ 的波形如图 3-134 所示，求其傅里叶变换 $F(\omega)$。

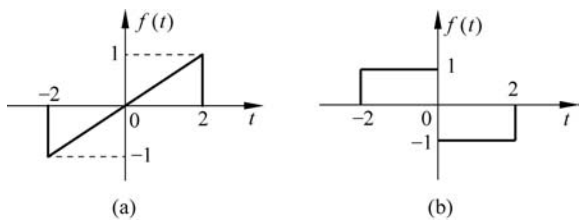


图 3-134　题 3-14 图

3-15　$f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的波形如图 3-135 所示，已知 $\mathcal{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，求 $f_2(t)$ 的频谱函数 $F_2(\omega)$。

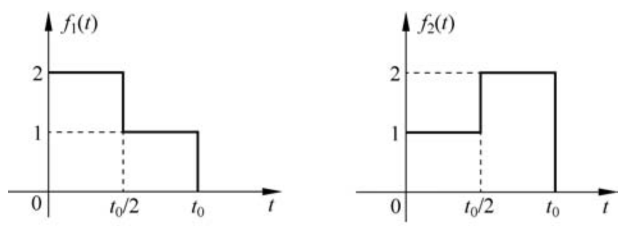


图 3-135　题 3-15 图

3-16　利用傅里叶变换的对称性，求下列信号的傅里叶反变换：

(1) $F(\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$；

(2) $F(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$。

3-17　已知信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 如图 3-136 所示，求信号 $f(t)$。

3-18　已知信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的频谱分别如图 3-137 所示，画出 $f_1(t)+f_2(t)$、$f_1(t)*f_2(t)$、$f_1(t)\cdot f_2(t)$ 的频谱图。

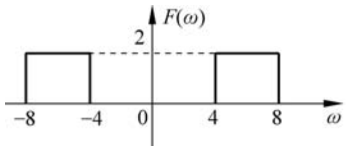


图 3-136　题 3-17 图

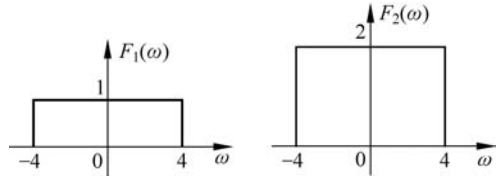


图 3-137　题 3-18 图

3-19　求图 3-138 所示周期信号的傅里叶变换。

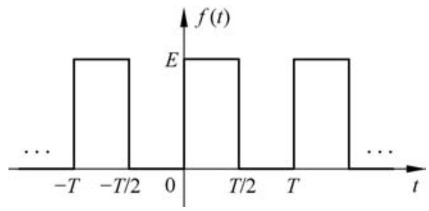


图 3-138　题 3-19 图

3-20　已知 LTI 系统的微分方程如下，其中激励为 $e(t)$，响应为 $r(t)$，求系统频响函数 $H(\omega)$和单位冲激响应 $h(t)$。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+8r(t)=2e(t)$$

3-21　求图 3-139 所示电路系统的频响函数 $H(\omega)$，其中 $v(t)$为输入，$v_1(t)$为输出。

3-22　电路结构如图 3-140 所示，激励信号为 $v(t)$，响应为 $v_R(t)$，求该电路系统的频响函数 $H(\omega)$。

3-23　图 3-141 示电路系统中，激励为 $e(t)$，响应为 $v(t)$，求系统的频响函数 $H(\omega)$和单位冲激响应 $h(t)$。

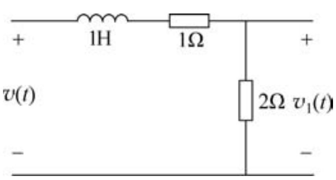


图 3-139　题 3-21 图

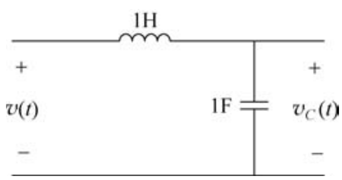


图 3-140　题 3-22 图

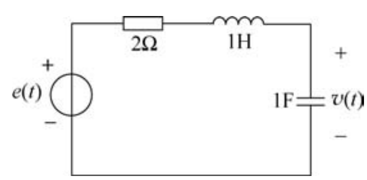


图 3-141　题 3-23 图

3-24　某二阶系统的频响函数为 $H(\omega)=\dfrac{\mathrm{j}\omega+3}{(\mathrm{j}\omega)^2+3\mathrm{j}\omega+2}$，写出该系统的微分方程，并求单位冲激响应 $h(t)$。

3-25　某 LTI 系统的频响函数 $H(\mathrm{j}\omega)=-2\mathrm{j}\omega$，当激励为下列信号时，分别求响应 $y(t)$。

(1) $\sin t$；(2) $\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)$；(3) $2\sin 2t-\cos 3t$

3-26　已知 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+10r(t)=e(t)+e'(t)$$

当激励 $e(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，求系统的零状态响应 $r(t)$。

3-27　如图 3-142(a)所示系统中，已知 $e_1(t)=\cos 2t$，$e_2(t)=\cos 5t$，系统频响函数 $H(\omega)$如图(b)所示，试求 $r(t)$。

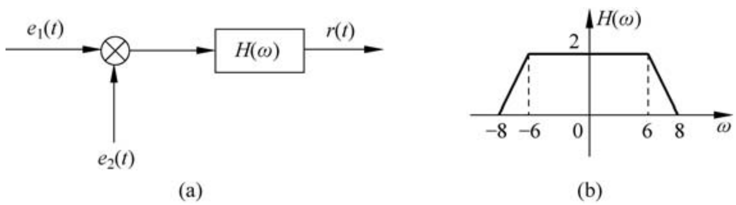


图 3-142　题 3-27 图

3-28　设系统频响函数 $H(\omega)=\dfrac{1-\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega}$，求单位冲激响应 $h(t)$，并计算当激励 $e(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$时的零状态响应 $y(t)$。

3-29　已知 LTI 系统激励为 $e(t)=\sin 2t+\cos 5t$，经过频响函数如图 3-143 所示的系统，求输出 $r(t)$，并判断输出的失真情况。

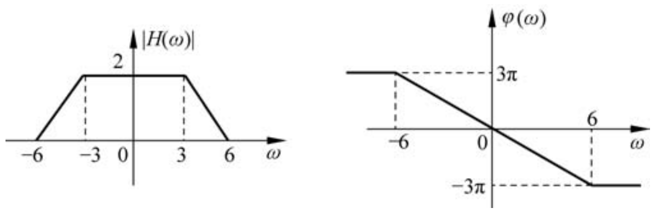


图 3-143　题 3-29 图

3-30　已知某 LTI 系统的频响函数为 $H(\omega)=\begin{cases}2, & |\omega|<4\\ 0, & |\omega|>4\end{cases}$，当激励 $e(t)=\cos\omega_0 t$ 经过该系统时，画出响应 $r(t)$的频谱波形。

3-31　设系统的频响函数为

$$H(\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}, & |\omega|<6\\ 0, & |\omega|>6\end{cases}$$

若系统激励为 $e(t)=\dfrac{\sin 4t}{t}\cos 6t$，求系统响应 $r(t)$。

3-32　已知某信号 $e(t)$的频谱如图 3-144(a)所示，信号经过图(b)所示系统，画出系统 A,B,C,D 各点信号的频谱图。

$$H_1(\omega)=\begin{cases}2, & |\omega|<100\\ 0, & |\omega|>100\end{cases}\qquad H_2(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<50\\ 0, & |\omega|>50\end{cases}$$

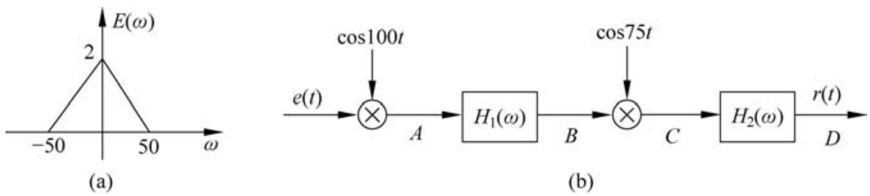


图 3-144　题 3-32 图

3-33　已知某系统如图 3-145(a)所示，其中信号 $e(t)$的频谱如图(b)所示，理想低通滤波器的频响函数如图(c)所示，分别画出 $x(t)$和 $r(t)$的频谱图。

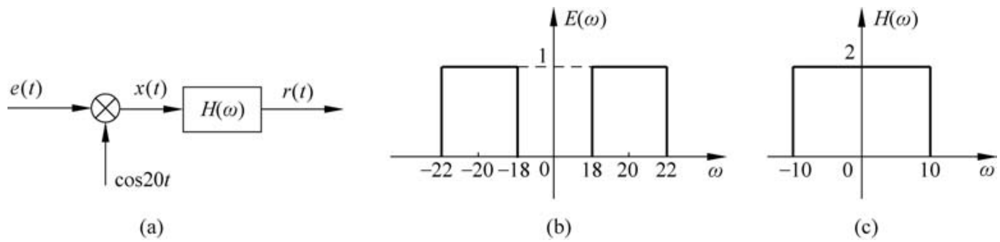


图 3-145　题 3-33 图

3-34　信号经过如图 3-146(a)所示系统，已知信号 $e(t)$的频谱如图(b)所示，$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$。

(1) 当 $T=0.1\text{s}$ 时，画出 $r(t)$的频谱图；

(2) 当 $T=1/3\text{s}$ 时，画出 $r(t)$的频谱图。

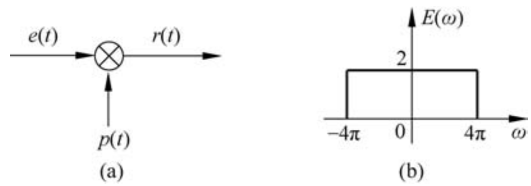


图 3-146　题 3-34 图

3-35　已知信号 $f_1(t)$的最高频率为 50Hz，信号 $f_2(t)$的最高频率为 80Hz，若对下列信号进行时域采样，求奈奎斯特采样频率 f_s。

(1) $f_1^2(t)$；　　(2) $f_1(t)*f_2(t)$；

(3) $f_1(t)+f_1\left(\frac{t}{2}\right)$；　　(4) $f_1(t)\cdot f_2(t)$。

3-36　若对下列信号进行采样，求无失真恢复信号的最小采样频率 ω_s。

(1) $\text{Sa}(50t)$；(2) $\text{Sa}^2(50t)$；(3) $\text{Sa}^5(50t)+\text{Sa}^4(80t)$。