第 3 章 谓词逻辑

原子命题是命题逻辑中最基本的组成单元，不能对它再作进一步的分解，但同时也无法反映出某些原子命题的共同特征和相互关系。

例如，用 p 表示命题“小李是大学生”，用 q 表示命题“小王是大学生”，在命题逻辑的范畴中它们是两个独立的原子命题，p 和 q 之间没有任何关系。但是，命题“小李是大学生”和“小王是大学生”之间有相同的结构和内在的联系，它们都具有相同的谓语（及宾语）“是大学生”，不同的只是主语，它们都描述了“是大学生”这样一个共同的特性，而使用原子命题表示时并没有能将这一共性刻画出来。

再如著名的**苏格拉底三段论**：

凡是人都是要死的。

苏格拉底是人。

所以苏格拉底是要死的。

这个推理显然是正确的。但是，如用 p、q、r 分别表示上面 3 个命题，由于 $p \wedge q \Rightarrow r$ 不是重言式，因此它不是正确的推理。也就是说，当 p 和 q 都为真时，得不出 r 一定为真。其

根本原因在于命题逻辑不能将命题 p、q、r 之间的内在联系反映出来。

为了克服命题逻辑的局限性,引入了谓词和量词对原子命题和命题间的相互关系做进一步的剖析,从而产生了**谓词逻辑**。谓词逻辑也称**一阶逻辑**(**first-order logic**),它同命题逻辑一样,是数理逻辑中最基础的内容。

从历史上讲,德国数学家、逻辑学家和哲学家弗雷格(Friedrich Ludwig Gottlob Frege,1848—1925)于1879年出版了著作《概念文字:一种模仿算术语言构造的纯思维的形式语言》(*Begriffsschrift,a Formal Language of Pure Thought Modeled upon that of Arithmetic*),提出了一整套相对完备的谓词逻辑演算与推理理论,奠定了谓词逻辑的基础。该著作在当时被誉为"可能是有史以来最重要的一部逻辑著作(perhaps the most important single work ever written in logic)"。

谓词逻辑可用于软件系统的建模和程序正确性及可终止性的证明。

3.1 谓词与量词

3.1.1 谓词

在谓词逻辑中,一般将原子命题分解为个体词和谓词两个部分。

定义 3.1 **个体词**(**individual**)是一个命题里表示思维对象的词,表示独立存在的具体或抽象的客体。简单地讲,个体词表示各种事物,相当于汉语中的名词。具体的、确定的个体词称为**个体常项**,一般用 a、b、c 表示;抽象的、不确定的个体词称为**个体变项**,一般用 x、y、z 表示。个体变项的取值范围称作**个体域**或**论域**(**domain of the discourse**,有时也简写为 **domain**),宇宙间一切事物组成的个体域称为**全总个体域**(**universal domain of individuals**)。

注:本书在提及论域时,如未特别说明,指的都是全总个体域。

定义 3.2 在命题中,表示个体词性质或相互关系的词称作**谓词**(**predicate**)。

可以这样来理解谓词:

如果命题里只有一个个体词,这时表示该个体词性质或属性的词便称为谓词。这是一元(目)谓词,以 $P(x)$、$Q(x)$等表示。

如果在命题里的个体词多于一个,那么表示这几个个体词间关系的词称为谓词。这是多元(目)谓词,有 n 个个体的谓词 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称 **n 元(目)谓词**,以 $P(x,y)$、$Q(x,y)$、$R(x,y,z)$等表示。

用谓词表示命题,必须包括个体词和谓词两个部分。例如,在"小李是大学生"中,"小李"和"大学生"都是个体词,"是大学生"是谓词;在"9 大于 4"中,"9"和"4"都是个体词,"大于"是谓词。

准确地讲,谓词 $P(x)$、$Q(x,y)$等是命题形式而不是命题。因为不仅没有指定谓词符号 P、Q 的含义,而且个体词 x、y 也是个体变项,而不代表某个具体的事物,从而无法

确定 $P(x)$、$Q(x,y)$的真值[①]。仅当赋予谓词确定含义，并且个体词取定为个体常项时，命题形式才化为命题。如 $P(x)$表示"x 是素数"，那么 $P(7)$是命题，真值为 T；$Q(x,y)$表示"x 等于 y"，那么 $Q(4,5)$是命题，取值为 F。因此有时谓词也称为**命题函数**(**propositional function**)。

有时将 $P(3)$、$Q(2,3)$这样不包含个体变项的谓词称为**零元谓词**。当赋予谓词确定含义时，零元谓词为命题。因而可将命题看成特殊的谓词。

【例 3.1】 将下列命题在一阶逻辑中用零元谓词符号化，并讨论(a)和(b)的真值。

(a) 8 是素数。

(b) 如果 3 大于 4，则 2 大于 6。

(c) 小明共修了 21 个学分，而小红共修了 15 个学分。

解：

(a) 设一元谓词 $P(x)$为"x 是素数"，则"8 是素数"可符号化为零元谓词 $P(8)$，真值为假。

(b) 设二元谓词 $G(x,y)$为"x 大于 y"，那么"如果 3 大于 4，则 2 大于 6"符号化为零元谓词 $G(3,4)\Rightarrow G(2,6)$，由于 $G(3,4)$为假，所以该命题为真。

(c) 设二元谓词 $S(x,y)$为"x 共修了 y 个学分"，则"小明共修了 21 个学分，而小红共修了 15 个学分"符号化为零元谓词 S(小明,21)$\wedge S$(小红,15)。

3.1.2 量词

用来表示个体数量的词是**量词**(**quantification**)，给谓词加上量词称作谓词的**量化**。量词可看作对个体词所加的限制、约束的词，但不是对数量(一个、二个、三个等)的具体描述，而是讨论两个最通用的数量限制词。

定义 3.3 符号 $\forall$ 称作**全称量词**(**universal quantification**)，读作"所有的 x""任意 x"或"一切 x"，含义相当于自然语言中的"任意的""所有的""一切的""每一个""凡"等。$(\forall x)P(x)$意指对论域 D 中的所有个体都具有性质 P。命题$(\forall x)P(x)$当且仅当对论域中的所有 x 来说 $P(x)$均为真时方为真，此时称 $P(x)$被**全称量化**。

定义 3.4 符号 $\exists$ 称作**存在量词**(**existential quantification**)，读作"存在 x"，含义相当于自然语言中的"某个""存在""有的""至少有一个""有些"等。$(\exists x)P(x)$意指论域 D 中至少有一个个体具有性质 P，此时称 $P(x)$被**存在量化**。

【例 3.2】 假设个体 x 的论域是全总个体域，"一切事物都是运动的"可以形式化描述为$(\forall x)$(x 是运动的)。若以 $P(x)$表示"x 是运动的"，那么这句话可以写成$(\forall x)(P(x))$，或者简写成$(\forall x)P(x)$或$\forall xP(x)$。

【例 3.3】 假设个体 x 的论域是全总个体域，"有的事物是水果"可以形式化描述为$(\exists x)$(x 是水果)。若以 $Q(x)$表示"x 是水果"，那么这句话就可写成$(\exists x)(Q(x))$，或者简写成$(\exists x)Q(x)$或$\exists xQ(x)$。

假设 D 为论域，则有：$(\forall x)P(x)$为真当且仅当$\{x\mid x\in D, P(x)\text{为真}\}=D$；$(\exists x)$

---

① 类似于函数形式 $f(x,y)$并不是任何一个确定的值。

$P(x)$为真当且仅当$\{x \mid x \in D, P(x)为真\} \neq \varnothing$。

习　题　3.1

3.1　将下列命题用零元谓词表示。

(a) 天安门位于北京。

(b) 小李不是教师，而是运动员。

(c) 苗苗非常聪明和美丽。

(d) π 和 e 都是无理数。

(e) 俞伯牙和钟子期是好朋友。

(f) α 属于集合 A 或者集合 B。

(g) 乐乐既熟悉 C++ 语言，又熟悉 Java 语言。

(h) 鱼我所欲也，熊掌亦我所欲也。

(i) 若 3 大于 2 且 4 大于 3，则 4 大于 2。

3.2　令论域为正整数集合，谓词 Odd(x)表示"x 是奇数"，Even(x)表示"x 是偶数"，Prime(x)表示"x 是素数"，Equal(x，y)表示"$x=y$"，Greater(x，y)表示"$x>y$"。将以下各式译为汉语，并判断其真值。

(a) Prime(6)。

(b) $(\forall x)\sim \mathrm{Odd}(x)$。

(c) $(\exists x)\mathrm{Greater}(5,x)$。

(d) $(\forall x)(\exists y)(\mathrm{Greater}(y,x) \wedge \mathrm{Prime}(y))$。

(e) $(\exists x)(\exists y)(\mathrm{Equal}(x,y+2) \wedge \mathrm{Prime}(x) \wedge \mathrm{Prime}(y))$。

(f) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((\mathrm{Equal}(z,x+y) \wedge \mathrm{Odd}(x) \wedge \mathrm{Odd}(y)) \Rightarrow \mathrm{Even}(z))$。

3.2　谓词公式及分类

与命题逻辑类似，可以对谓词逻辑中的公式进行定义和分类。

定义 3.5　谓词逻辑中的**谓词公式**(**well formed formula，wff**)递归地定义为：

(1) 个体常项、个体变项、个体词的函数和原子谓词公式(不含联结词的谓词)是谓词公式。

(2) 如果 A 是谓词公式，则$\sim A$ 也是谓词公式。

(3) 如果 A 和 B 是谓词公式，则由逻辑联结词联结 A 和 B 构成的符号串也是谓词公式，如$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \Rightarrow B)$、$(A \Leftrightarrow B)$等。

(4) 若 A 是谓词公式，且 A 中无$\forall x$ 及$\exists x$ 出现，则$(\forall x)A(x)$、$(\exists x)A(x)$也是谓词公式。

(5) 只有有限次地应用(1)～(4)构成的符号串才是谓词公式。

在不引起混淆的情况下，谓词公式也称为**合式公式**，简称**公式**。

【例 3.4】　$\sim p$、$\sim P(x,y) \wedge Q(x)$、$(\forall x)(F(x) \Rightarrow G(x))$、$(\exists x)(A(x) \Rightarrow (\forall y)F$

$(x,y))$都是合式公式,而$(\exists x)(\forall x)F(x)$不是合式公式。

类似于命题逻辑中对命题公式进行的真值指派,可以对谓词公式赋予不同的解释。

定义 3.6 谓词公式的一个**解释**(**interpretation**)由下面 4 部分组成:

(1) 非空的论域 D。

(2) D 中一部分特定元素的具体取值。

(3) D 上一些特定的函数的具体含义。

(4) D 上一些特定的谓词的具体含义。

注:

(a) 解释规定了相应的个体常项、个体变项、函数符号及谓词符号的具体意义以及个体变项的取值范围。

(b) 如果两个解释的 4 个组成部分中至少有一部分不同,则这两个解释是不同的。

(c) 一个公式可以用不同的解释给定含义,一个解释也可以对应多个不同的公式。

【例 3.5】 谓词公式$(\exists x)P(f(x),2)$的解释 1 为:论域 D 是正整数集合,2 是一个特定的整数,函数 $f(x)=4x$,谓词 $P(x,y)$表示 $x<y$。那么在解释 1 下该命题是假命题。

解释 2 为:论域 D 为实数集,2 是一个特定的实数,函数 $f(x)=x^2$,谓词 $P(x,y)$表示 $x=y$。那么在解释 2 下该命题是真命题。

类似于命题逻辑,也可以对谓词逻辑中的公式进行分类。

定义 3.7 设 A 为一个谓词公式,若 A 在任何解释下真值均为真,则称 A 为**普遍有效的公式**或**逻辑有效式**(**logically valid formula**)。若 A 在任何解释下真值均为假,则称 A 为**不可满足**(**unsatisfiable**)**式**或**矛盾式**;若至少存在一个解释使 A 为真,则称 A 为**可满足**(**satisfiable**)**式**。

注:逻辑有效式一定是可满足式,反之不然。

【例 3.6】 $(\forall x)(P(x)\vee\sim P(x))$和$(\forall x)P(x)\Rightarrow P(y)$都是逻辑有效式。$(\forall x)(P(x)\wedge\sim P(x))$和$(\forall x)P(x)\wedge(\exists y)\sim P(y)$都是不可满足式。例 3.5 中的谓词公式是非逻辑有效的可满足式。

谓词逻辑的判定问题指的是任一谓词公式的逻辑有效性的判定问题。若说谓词逻辑是可判定的,就要求给出一个可行的方法,使得对任一谓词公式都能判定其是否是逻辑有效的。

在命题逻辑中,一个公式是否是重言式是很容易验证,至少可以使用真值表列出该公式在所有真值指派下的真值。但是对于谓词逻辑的判定问题,情况大相径庭,对此有如下重要结论。

定理 3.1 (**丘奇-图灵定理**)谓词逻辑是**不可判定的**(**undecidable**)。即,对任一谓词公式而言,没有一个可行的方法判定它是否是逻辑有效的。

注:但是谓词逻辑的某些子类是可判定的,下面就主要介绍这些可判定的子类。

定义 3.8 设命题公式 A_0 含命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,用 n 个谓词公式 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 分别处处代换 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,所得公式 A 称为 A_0 的**代换实例**。

【例 3.7】 $P(y)\Rightarrow Q(z)$和$(\forall x)P(x)\Rightarrow(\exists x)Q(x)$都是命题公式 $p\Rightarrow q$ 的代换

实例。

定理 3.2 命题公式中的重言式的代换实例都是逻辑有效式，在谓词公式中可仍称为重言式；命题公式中的矛盾式的代换实例都是矛盾式。

证明：设命题公式 A_0 含命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，若 A_0 为重言式，则不论 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的真值如何，A_0 的真值总为 T。而对于谓词公式 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，无论在何种解释下，它们的真值也都是或者为 T 或者为 F，故用 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 分别处处代换 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 后，所得的代换实例的真值也总为 T。

同理可证明，矛盾式的代换实例仍为矛盾式。 □

【例 3.8】 判断以下公式的类型。

(a) $(\forall x)P(x)\Rightarrow(\exists x)P(x)$。

(b) $(\forall x)P(x)\Rightarrow((\forall x)(\exists y)Q(x,y)\Rightarrow(\forall x)P(x))$。

(c) $\sim(P(x,y)\Rightarrow Q(x,y))\wedge Q(x,y)$。

(d) $(\forall x)(\exists y)Q(x,y)\Rightarrow(\exists x)(\forall y)Q(x,y)$。

解：

(a) 是逻辑有效式，意指如果论域 D 中所有个体都具有性质 P，则一定至少有一个个体具有性质 P。

(b) 是逻辑有效式，是命题逻辑中重言式 $p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$ 的代换实例。

(c) 是不可满足式，是命题逻辑中矛盾式 $\sim(p\Rightarrow q)\wedge q$ 的代换实例。

(d) 既不是逻辑有效式也不是不可满足式，而是可满足式。假设论域是正整数集合，当谓词 $Q(x,y)$ 表示“$x=y$”时，$(\forall x)(\exists y)Q(x,y)$ 为真，$(\exists x)(\forall y)Q(x,y)$ 为假，蕴涵式为假；当谓词 $Q(x,y)$ 表示“$x\leqslant y$”时，$(\forall x)(\exists y)Q(x,y)$ 为真，$(\exists x)(\forall y)Q(x,y)$ 为真，蕴涵式为真。

定义 3.9 设 A 为谓词公式，B 为 A 中的一个连续的符号串，且 B 为谓词公式，则称 B 为 A 的**子公式**(**sub formula**)。

定义 3.10 设 A 为谓词公式，$(\forall x)P(x)$ 或 $(\exists x)P(x)$ 为公式 A 的子公式，此时紧跟在 $\forall$、$\exists$ 之后的 x 称为量词的**指导变项**或**作用变项**，$P(x)$ 称为相应量词的**作用域**或**辖域**(**scope**)，即量词的约束范围。在辖域中 x 的一切出现均称为**约束出现**(**bounded occurrence**)，受指导变项的约束。所有约束出现的变项称为**约束变项**(**bounded variable**)；在 A 中除了约束变项之外的变项均称为**自由变项**(**free variable**)，不受指导变项的约束。

注：若谓词公式中不含有任何自由变项，则该公式即为命题，有时也称之为**闭式**(**closed**)。

【例 3.9】

(a) $(\forall x)R(x,y)$ 中，$R(x,y)$ 是 $(\forall x)$ 的辖域，$R(x,y)$ 中的 x 是约束变项，y 是自由变项。

(b) $(\forall x)P(x)\vee Q(x,y)$ 中，$P(x)$ 是 $(\forall x)$ 的辖域，$P(x)$ 中的 x 是约束变项，$Q(x,y)$ 中的 x 和 y 是自由变项。

(c) $(\exists x)((\forall y)P(x,y))$ 中，$P(x,y)$ 是 $(\forall y)$ 的辖域，$(\forall y)P(x,y)$ 是 $(\exists x)$ 的辖域，$P(x,y)$ 中的 x 和 y 都是约束变项。

(d) $(\forall x)((\exists y)L(x,y)\Rightarrow(\forall y)H(x,y))$中$(\forall x)$的辖域是$((\exists y)L(x,y)\Rightarrow(\forall y)H(x,y))$，$(\exists y)$的辖域是$L(x,y)$，$(\forall y)$的辖域是$H(x,y)$。$L(x,y)$和$H(x,y)$中的$x$都受$(\forall x)$约束；$L(x,y)$中的$y$受$(\exists y)$约束，$H(x,y)$中的$y$受$(\forall y)$约束，这两者是不同的。

习　题　3.2

3.3　给定解释I为：论域$D=\mathbb{Z}$，$f(x,y)=x+y$，谓词$F(x,y)$表示$x=y$，$a=2$。求下列各公式在解释I下的真值。

(a) $(\exists x)F(f(x,x),a)$。

(b) $(\forall x)F(f(x,a),x)$。

(c) $(\forall x)(\forall y)(F(f(x,a),y)\Rightarrow F(f(y,a),x))$。

(d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)F(f(x,y),z)$。

(e) $(\exists x)(\forall y)(\forall z)F(f(y,z),x)$。

(f) $(\forall x)(\exists y)F(f(x,y),x)$。

(g) $(\forall x)(\exists y)F(f(x,y),y)$。

(h) $(\exists x)(\forall y)F(f(x,y),x)$。

(i) $(\exists x)(\forall y)F(f(x,y),y)$。

3.4　讨论公式$(\exists x)(\forall y)P(x,y)$在下列解释下的真值。

(a) $D=\{$所有实数$\}$，谓词$P(x,y)$表示$xy=0$。

(b) $D=\{$所有实数$\}$，谓词$P(x,y)$表示$xy=1$。

(c) $D=\{$所有正实数$\}$，谓词$P(x,y)$表示$xy=1$。

3.5　给出解释I，使得在解释I下$(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$和$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$具有不同的真值。

3.6　指出下列公式的辖域、自由变项和约束变项。

(a) $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\wedge(\exists x)R(x)$。

(b) $(\exists x)(\forall y)(P(x)\Rightarrow R(x,y))$。

(c) $(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(D(y)\Rightarrow L(x,y)))$。

(d) $(\forall x)(F(x)\Rightarrow G(y))\Rightarrow(\exists y)(H(x)\wedge L(x,y,z))$。

(e) $(\forall x)P(x,y,z)\vee((\exists u)Q(x,u)\Rightarrow(\exists w)Q(y,w))$。

3.3　自然语言形式化

命题逻辑表达问题的能力仅限于联结词的使用。与之相比，谓词逻辑由于变项、谓词、量词的引入而具有更强的表达问题能力，已成为描述计算机所处理的知识的有力工具。

其中首要的工作就是问题本身的形式化描述。类似命题逻辑，将一个用自然语言描述的命题表示成谓词公式的形式，称为谓词逻辑中的自然语言形式化。

自然语言形式化的基本方法如下：

(1) 将问题分解成一些原子命题和逻辑联结符。

(2) 分解出各个原子命题的个体词、谓词和量词。

(3) 按照谓词公式的表示规则将自然语言的语句翻译为谓词公式。

【例 3.10】 将下列语句翻译为谓词公式，论域使用全总个体域。

(a) 所有的素数都是整数。

(b) 有的素数是奇数。

(c) 并非所有整数都是素数。

(d) 没有奇数是偶数。

(e) 所有的素数或者是奇数，或者等于2。

(f) 存在一个奇数，比所有整数都大。

(g) 存在唯一的偶素数。

(h) 至多有一个偶素数。

(i) **哥德巴赫猜想(Goldbach's Conjecture)**：每一个大于2的偶数都可以表示为两个素数的和。

解：令谓词 $P(x)$ 表示"x 是整数"，$Q(x)$ 表示"x 是奇数"，$R(x)$ 表示"x 是偶数"，$S(x)$ 表示"x 是素数"，$E(x,y)$ 表示"$x=y$"，$G(x,y)$ 表示"$x>y$"。

(a) 这句话可以形式化为 $(\forall x)(S(x)\Rightarrow P(x))$。

需注意的是这句话不能形式化为 $(\forall x)(S(x)\wedge P(x))$，这个公式的意思是说，对宇宙间所有的事物 x 而言，x 既是素数又是整数。

一般地讲，"所有的 A 是 B""是 A 的都是 B""一切 A 都是 B"这类语句的形式描述只能使用 $\Rightarrow$ 而不能使用 $\wedge$。

(b) 这句话的形式化描述应为 $(\exists x)(S(x)\wedge Q(x))$。

需注意的是这句话不能形式化为 $(\exists x)(S(x)\Rightarrow Q(x))$。一般地讲，"有的 A 是 B"这类语句的形式化描述只能使用 $\wedge$ 而不能使用 $\Rightarrow$。

(c) 这句话可以形式化为 $\sim(\forall x)(P(x)\Rightarrow S(x))$；也可以把这句话理解为"有的整数不是素数"，这时应形式化为 $(\exists x)(P(x)\wedge\sim S(x))$。它们都是正确的，其理由将在3.4节中阐述。

(d) 这句话可以形式化为 $\sim(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$；也可以把这句话理解为"所有的奇数都不是偶数"或者"所有的偶数都不是奇数"，这时应形式化为 $(\forall x)(Q(x)\Rightarrow\sim R(x))$ 或者 $(\forall x)(R(x)\Rightarrow\sim Q(x))$，它们都是正确的。

(e) 这句话可以形式化为 $(\forall x)(S(x)\Rightarrow(E(x,2)\vee Q(x)))$。

(f) 这句话的含义是"存在个体 x，它是奇数；而且，对于任意个体 y，如果它是整数，那么一定有 $y<x$"，因此可以形式化为 $(\exists x)(Q(x)\wedge(\forall y)(P(y)\Rightarrow G(x,y)))$。

(g) 这句话的含义是"存在个体 x，它既是偶数又是素数；而且，如果还有个体 y 也是既是偶数又是素数，那么一定有 $x=y$"，因此可以形式化为 $(\exists x)(S(x)\wedge R(x)\wedge(\forall y)(S(y)\wedge R(y)\Rightarrow E(x,y)))$。

(h) 这句话和(g)的区别在于允许不存在偶素数，因此在形式化后也是不同的，应该

表示为$(\forall x)(S(x)\wedge R(x)\Rightarrow(\forall y)(S(y)\wedge R(y)\Rightarrow E(x,y)))$。这句话也可以理解为“不存在不相等的两个个体，它们都既是偶数又是素数”，可形式化为$\sim(\exists x)(\exists y)(S(x)\wedge R(x)\wedge S(y)\wedge R(y)\wedge\sim E(x,y))$。

(i) 形式化为$(\forall x)(R(x)\wedge G(x,2)\Rightarrow(\exists y)(\exists z)(S(y)\wedge S(z)\wedge E(x,y+z)))$。

【例 3.11】 假设论域是整数集，将下列语句翻译为谓词公式，并判断其真值。

(a) 至少存在一个偶数，且至少存在一个奇数。

(b) 至少有一个整数既是偶数又是奇数。

(c) 对于任一个整数而言，它或者是偶数，或者是奇数。

(d) 或者所有整数都是偶数，或者所有整数都是奇数。

(e) 对于任一整数而言，都存在比它小的整数。

(f) 存在一个整数，满足任何整数都大于它。

解：令谓词$P(x)$表示“x 是奇数”，$Q(x)$表示“x 是偶数”，$G(x,y)$表示“$x>y$”。

(a) 这句话可以形式化为$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$，是真命题。

(b) 这句话可以形式化为$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$，是假命题。

(c) 这句话可以形式化为$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$，是真命题。

(d) 这句话可以形式化为$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$，是假命题。

(e) 这句话可以形式化为$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$，是真命题。

(f) 这句话可以形式化为$(\exists y)(\forall x)G(x,y)$，是假命题。

上述例子说明$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$和$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$、$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$和$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$、$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$和$(\exists y)(\forall x)G(x,y)$含义不同。这些都是容易混淆的，应注意加以区别。

【例 3.12】 假设论域是全总个体域，将下列语句翻译为谓词公式。

(a) 没有人可以永生不死。

(b) 天下乌鸦一般黑。

(c) 金子一定闪光，但闪光的不一定是金子。

(d) 所有的大学生都会说英语，有一些大学生会说法语。

解：

(a) 设$P(x)$表示“x 是人”，$Q(x)$表示“x 会死”。原语句可表示成$\sim(\exists x)(P(x)\wedge\sim Q(x))$。

(b) 设$F(x)$表示“x 是乌鸦”，$G(x,y)$表示“x 与 y 一般黑”。原语句可表示成$(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y)\Rightarrow G(x,y))$或者$\sim(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\sim G(x,y))$，后者意为不存在个体 x、y 都是乌鸦但不一般黑，这两句话含义是相同的。

(c) 设$G(x)$表示“x 是金子”，$L(x)$表示“x 会闪光”，原语句可表示成$(\forall x)(G(x)\Rightarrow L(x))\wedge(\exists x)(L(x)\wedge\sim G(x))$。

(d) 设$S(x)$表示“x 是大学生”，$E(x)$表示“x 会说英语”，$F(x)$表示“x 会说法语”，原语句可表示成$(\forall x)(S(x)\Rightarrow E(x))\wedge(\exists x)(S(x)\wedge F(x))$。

如果引入二元谓词$C(x,y)$表示“x 可以说 y 这种语言”，那么原句子也可以表示为$(\forall x)(S(x)\Rightarrow C(x,\text{英语}))\wedge(\exists x)(S(x)\wedge C(x,\text{法语}))$。

【例 3.13】 假设论域是实数集,将下列语句翻译为谓词公式。

(a) 函数 $f(x)$趋近 a 时的极限值是 b。

(b) 函数 $f(x)$在点 a 处不存在极限值。

(c) 函数 $f(x)$在点 a 处连续。

(d) 任意两个实数之间都存在一个有理数。

解:

(a) 原语句可表示成

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon>0 \Rightarrow (\exists \delta)(\delta>0 \wedge (\forall x)(|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon)))$$

(b) 原语句可表示成

$$(\forall L)(\exists \varepsilon)(\varepsilon>0 \wedge (\forall \delta)(\delta>0 \Rightarrow (\exists x)(|x-a|<\delta \wedge |f(x)-L| \geqslant \varepsilon)))$$

(c) 原语句可表示成

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon>0 \Rightarrow (\exists \delta)(\delta>0 \wedge (\forall x)(|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon)))$$

(d) 设 $P(x)$表示"x 是有理数",则原语句可表示成

$$(\forall x)(\forall y)((x>y) \Rightarrow (\exists z)(P(z) \wedge (x>z) \wedge (z>y)))$$

此例中采用了易于理解的谓词表示形式。

总结上述各例,可以得到以下规律:

(a)"所有的 A 是 B""是 A 的都是 B""一切 A 都是 B"应形式化为$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$。

(b)"有的 A 是 B"应形式化为$(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$。

(c)"所有的 A 都不是 B""是 A 的都不是 B""一切 A 都不是 B"应形式化为$(\forall x)(A(x) \Rightarrow \sim B(x))$或者$\sim(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$。

(d)"有的 A 不是 B"应形式化为$(\exists x)(A(x) \wedge \sim B(x))$或者$\sim(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$。

(e)"只有一个 A"应形式化为$(\exists x)(A(x) \wedge (\forall y)(A(y) \Rightarrow \mathrm{Equal}(x,y)))$。

(f)"若存在 A 则唯一"应形式化为$(\forall x)(A(x) \Rightarrow (\forall y)(A(y) \Rightarrow \mathrm{Equal}(x,y)))$;有时也使用符号$\exists !$ 表示量词"存在且唯一"。

(g)"所有的 A 和 B 都具有关系 C"应形式化为$(\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y) \Rightarrow C(x,y))$。

(h)"任何一个 A 都存在一个 B 与之对应满足性质 C"应形式化为$(\forall x)(A(x) \Rightarrow (\exists y)(B(y) \wedge C(x,y)))$。

习 题 3.3

3.7 令论域为正整数集合,谓词 Odd(x)表示"x 是奇数",Even(x)表示"x 是偶数",Prime(x)表示"x 是素数",Equal(x,y)表示"$x=y$",Greater(x,y)表示"$x>y$"。利用谓词公式翻译下列命题。

(a) 有不是奇数的素数。

(b) 存在奇数 x、y 和偶数 z 使得 x 与 y 的和大于 x 与 z 的和。

(c) 对于任意的正整数 x、y，存在正整数 z 使得 $x+z=y$。
(d) 存在大于 10 000 的偶数。
(e) 存在介于 2 和 6 之间的正整数。
(f) 只存在唯一的奇数 1。
(g) 没有最大的素数。

3.8 将下列命题用谓词表示出来，使用全总个体域。
(a) 人都生活在地球上。
(b) 有的人长着金色头发。
(c) 并不是所有的实数都能表示成分数。
(d) 没有能表示成分数的无理数。
(e) 任意的偶数 x 与 y 都有大于 1 的公因子。
(f) 存在奇数 x 与 y，它们没有大于 1 的公因子。
(g) 只有一个北京。
(h) 任何金属都可以溶解在某种液体中。
(i) 有一种液体可以溶解任何金属。
(j) 尽管有些人是勤奋的，但并非所有人都勤奋。

3.4 谓词逻辑的等值演算

如例 3.12(b)所示，有些语句的形式化表述可能不止一种，但它们的含义都是相同的。因此需在谓词逻辑中也引入“等值”的概念。

定义 3.11 设 A 和 B 是两个谓词公式，若 $A\Leftrightarrow B$ 是逻辑有效式，则称 A 与 B **等值**，记作 $A\equiv B$。

注：类似于命题逻辑，两个谓词公式 A 和 B 等值当且仅当在任何解释下 A 和 B 的真值都相同。

相比命题逻辑，量词和谓词的引入使得谓词演算应用广泛。特别是在计算机科学、人工智能等领域，谓词逻辑是表示知识、实现推理的有力工具。

类似于命题逻辑，谓词逻辑的等值演算仍是以基本等值式为基础，应用等值演算规则逐步推演。

谓词逻辑中的基本等值式主要分为两类：其一是从命题公式移植来的等值式，即命题逻辑中基本等值式的代换实例，如$(\forall x)F(x)\Rightarrow(\exists y)G(y)\equiv\sim(\forall x)F(x)\vee(\exists y)G(y)$和$\sim((\forall x)F(x)\vee(\exists y)G(y))\equiv\sim(\forall x)F(x)\wedge\sim(\exists y)G(y)$等；另一类是谓词逻辑特有的等值式，与量词有关。

定理 3.3 **(消去量词等值式)**设论域 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是有限集合，则有

(a) $(\forall x)A(x)\equiv A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_m)$。

(b) $(\exists x)A(x)\equiv A(a_1)\vee A(a_2)\vee\cdots\vee A(a_m)$。

注：这一组等值式表明，对于有限论域而言，全称量词与合取式相对应，存在量词则对应于析取式。

【例 3.14】 设论域 $D=\{a,b,c\}$，消去下面公式中的量词。

(a) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$。

(b) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(y))$。

(c) $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$。

解：

(a) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\equiv(P(a)\vee Q(a))\wedge(P(b)\vee Q(b))\wedge(P(c)\vee Q(c))$

(b) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(y))$

$\equiv(\forall x)(\sim P(x)\vee(\exists y)Q(y))$

$\equiv(\sim P(a)\vee(\exists y)Q(y))\wedge(\sim P(b)\vee(\exists y)Q(y))\wedge(\sim P(c)\vee(\exists y)Q(y))$

$\equiv(\sim P(a)\wedge\sim P(b)\wedge\sim P(c))\vee(\exists y)Q(y)$ （分配律）

$\equiv(\sim P(a)\wedge\sim P(b)\wedge\sim P(c))\vee(Q(a)\vee Q(b)\vee Q(c))$

(c) $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$

$\equiv(\exists x)(R(x,a)\wedge R(x,b)\wedge R(x,c))$

$\equiv(R(a,a)\wedge R(a,b)\wedge R(a,c))\vee(R(b,a)\wedge R(b,b)\wedge R(b,c))\vee(R(c,a)\wedge R(c,b)\wedge R(c,c))$

或者

$(\exists x)(\forall y)R(x,y)$

$\equiv((\forall y)R(a,y))\vee((\forall y)R(b,y))\vee((\forall y)R(c,,y))$

$\equiv(R(a,a)\wedge R(a,b)\wedge R(a,c))\vee(R(b,a)\wedge R(b,b)\wedge R(b,c))\vee(R(c,a)\wedge R(c,b)\wedge R(c,c))$

定理 3.4 **（量词否定等值式/德摩根律）**设 $A(x)$是含 x 自由出现的公式，则有

(a) $\sim(\forall x)A(x)\equiv(\exists x)\sim A(x)$。

(b) $\sim(\exists x)A(x)\equiv(\forall x)\sim A(x)$。

即，“不是论域中所有个体都具有性质 A”和“论域中至少存在一个个体不具有性质 A”二者含义是完全相同的，“论域中不存在具有性质 A 的个体”和“论域中所有个体都不具有性质 A”二者含义也是完全相同的。

当论域 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是有限集合时，有

$$\sim(A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_m))\equiv\sim(\forall x)A(x)\equiv(\exists x)\sim A(x)$$
$$\equiv\sim A(a_1)\vee\sim A(a_2)\vee\cdots\vee\sim A(a_m)$$
$$\sim(A(a_1)\vee A(a_2)\vee\cdots\vee A(a_m))\equiv\sim(\exists x)A(x)\equiv(\forall x)\sim A(x)$$
$$\equiv\sim A(a_1)\wedge\sim A(a_2)\wedge\cdots\wedge\sim A(a_m)$$

即是命题逻辑中德摩根律的表现形式。

定理 3.5 **（量词辖域收缩与扩张等值式）**设 $A(x)$是含 x 自由出现的公式，谓词公式 B 中不含 x 的出现，则有

(a) $(\forall x)(A(x)\vee B)\equiv(\forall x)A(x)\vee B$。

(b) $(\exists x)(A(x)\vee B)\equiv(\exists x)A(x)\vee B$。

(c) $(\forall x)(A(x)\wedge B)\equiv(\forall x)A(x)\wedge B$。

(d) $(\exists x)(A(x)\wedge B)\equiv(\exists x)A(x)\wedge B$。

证明：仅证明(a)，余者类似。

假设在某一解释 I 下，$(\forall x)(A(x)\vee B)$ 为真，于是对任一 $x\in D$ 有 $A(x)\vee B$ 为真。

如果 B 为真，则 $(\forall x)A(x)\vee B$ 为真。

如果 B 为假，则对于任一 $x\in D$ 有 $A(x)$ 为真，于是 $(\forall x)A(x)$ 为真，从而 $(\forall x)A(x)\vee B$ 为真。

假设在某一解释 I 下，$(\forall x)(A(x)\vee B)$ 为假，于是存在 $x\in D$ 使得 $A(x)\vee B$ 为假，则 B 和 $A(x)$ 取值都为假。这表明 B 和 $(\forall x)A(x)$ 都为假，即 $(\forall x)A(x)\vee B$ 为假。

□

定理 3.6 （**量词分配等值式**）设 $A(x)$ 和 $B(x)$ 是含 x 自由出现的谓词公式，则有

(a) $(\forall x)(A(x)\wedge B(x))\equiv(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$。

(b) $(\exists x)(A(x)\vee B(x))\equiv(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$。

证明：仅证明(a)，即 $\forall$ 对 $\wedge$ 的分配律。假设在某一解释 I 下 $(\forall x)(A(x)\wedge B(x))$ 为真。于是对任一 $x\in D$ 有 $A(x)\wedge B(x)$ 为真，即 $A(x)$ 为真且 $B(x)$ 也为真，从而 $(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$ 为真。

反过来，如果 $(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$ 在一某解释 I 下为真，则 $(\forall x)A(x)$ 和 $(\forall x)B(x)$ 均为真，于是对任一 $x\in D$ 有 $A(x)$ 和 $B(x)$ 均为真，即 $(\forall x)(A(x)\wedge B(x))$ 为真。

$\exists$ 对 $\vee$ 的分配律可类似地证明。　□

注：

(a) 以上两等值式的成立，实际上也反映了全称量词 $\forall$ 与合取 $\wedge$ 的对应，存在量词 $\exists$ 与析取 $\vee$ 的对应，以及合取 $\wedge$、析取 $\vee$ 这两种运算都满足交换律和结合律。

(b) $\forall$ 对 $\vee$ 不满足分配律，$\exists$ 对 $\wedge$ 不满足分配律。即 $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$ 与 $(\forall x)(A(x)\vee B(x))$ 不等值，$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$ 与 $(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$ 不等值(可参看例 3.11)。

定理 3.7　设 $A(x,y)$ 是含 x、y 自由出现的谓词公式，则有

(a) $(\forall x)(\forall y)A(x,y)\equiv(\forall y)(\forall x)A(x,y)$。

(b) $(\exists x)(\exists y)A(x,y)\equiv(\exists y)(\exists x)A(x,y)$。

这组等值式的证明将在 3.6 节中作为例题给出(例 3.24)。

注：这组等值式表明，相同量词与排列的次序无关，但是不同量词不能随意更换次序，即 $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$ 与 $(\exists y)(\forall x)A(x,y)$ 不等值(可参看例 3.11)。

定义 3.12　在仅含有联结词 $\sim$、$\wedge$、$\vee$ 的谓词公式 A 中，将 $\vee$ 换成 $\wedge$，将 $\wedge$ 换成 $\vee$，将全称量词 $\forall$ 换成存在量词 $\exists$，将存在量词 $\exists$ 换成全称量词 $\forall$，若包含 F 和 T 也相互取代，所得谓词公式称为 A 的**对偶式(dual)**，记作 A^*。

谓词逻辑中的对偶可看作命题逻辑中对偶的扩展，依然满足如下结论。

定理 3.8 （**对偶原理**）设 A 和 B 为两个仅含有联结词 $\sim$、$\wedge$、$\vee$ 的谓词公式，若 $A\equiv B$，则 $A^*\equiv B^*$。

例如，由 $(\forall x)(A(x)\wedge B(x))\equiv(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$ 可得 $(\exists x)(A(x)\vee$

$B(x))\equiv(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$，由$\sim(\forall x)A(x)\equiv(\exists x)\sim A(x)$可得$\sim(\exists x)P(x)\equiv(\forall x)\sim P(x)$。

谓词逻辑包括定理3.9～定理3.11给出的3条等值演算规则。

定理3.9 （置换规则）设$\Phi(A)$是含谓词公式A的公式，$\Phi(B)$是用谓词公式B取代$\Phi(A)$中的A(不一定是每一处)之后得到的谓词公式，若$A\equiv B$，则$\Phi(A)\equiv\Phi(B)$。

谓词逻辑中的置换规则与命题逻辑中的置换规则形式上完全相同，只是在这里A和B是谓词公式。

同一个个体变项符号，在例3.9(b)的公式$(\forall x)P(x)\vee Q(x,y)$中的符号$x$既有约束出现又有自由出现，而在例3.9(d)的公式$(\forall x)((\exists y)L(x,y)\Rightarrow(\forall y)H(x,y))$中的符号$y$被不同的量词所约束，这就容易引起概念上的混淆。为避免这种情况，引入了下面的代替规则和换名规则，使得同一个个体变项符号在一个公式中只呈现一种形式，要么为约束出现，要么为自由出现；同时使不同的量词所约束的个体变项不同名，便于计算机处理。

定理3.10 （代替规则）将谓词公式A中某个自由出现的个体变项的所有自由出现改成A中未曾出现的某个个体变项符号，其余部分不变，记所得谓词公式为A'，则$A\equiv A'$。

定理3.11 （换名规则）将谓词公式A中某量词的指导变项及其在辖域内的所有约束出现改成该量词辖域内未曾出现的某个个体变项符号，其余部分不变，记所得谓词公式为A'，则$A\equiv A'$。

定理3.10和定理3.11即$(\forall x)A(x)\equiv(\forall y)A(y)$，$(\exists x)A(x)\equiv(\exists y)A(y)$。这是不难理解的，因为在同一论域$D$上，“对一切个体$x$，$x$具有性质$P$”同“对一切个体$y$，$y$具有性质$P$”这两者除变项$x$和$y$的区别外并无差异，从而$(\forall x)A(x)$与$(\forall y)A(y)$有相同的真值。

表3.1对代替规则和换名规则进行了比较。

表3.1 代替规则和换名规则的比较

比较项	代 替 规 则	换 名 规 则
使用对象	任一谓词公式	任一谓词公式
改名对象	自由变项	指导变项及其在辖域内的所有约束出现
改名方式	对公式中出现的所有同名的自由变项进行改名	对指导变项及其量词辖域中出现的约束变项处处进行改名
改名限制	公式中未曾出现的某个个体变项符号	新的变项符号应是该量词辖域内未曾出现的
改名结果	与原公式等值	与原公式等值

【例3.15】 将公式$(\forall x)F(x,y,z)\Rightarrow(\exists y)G(x,y,z)$化为与之等值的公式，使其没有既是约束出现又是自由出现的个体变项符号。

解：$(\forall x)F(x,y,z)\Rightarrow(\exists y)G(x,y,z)$

$\equiv(\forall u)F(u,y,z)\Rightarrow(\exists y)G(x,y,z)$ （换名规则）

$\equiv(\forall u)F(u,y,z)\Rightarrow(\exists v)G(x,v,z)$　　（换名规则）

或者

$(\forall x)F(x,y,z)\Rightarrow(\exists y)G(x,y,z)$

$\equiv(\forall x)F(x,u,z)\Rightarrow(\exists y)G(x,y,z)$　　（代替规则）

$\equiv(\forall x)F(x,u,z)\Rightarrow(\exists y)G(v,y,z)$　　（代替规则）

使用这两类基本等值式和上述3条规则，可以进行谓词逻辑的等值演算。

【例3.16】　证明以下等值式成立。

(a) $(\forall x)(\forall y)(A(x)\vee B(y))\equiv(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$。

(b) $(\exists x)(A(x)\Rightarrow B(x))\equiv(\forall x)A(x)\Rightarrow(\exists x)B(x)$。

(c) $(\forall x)(\exists y)(P(x)\Rightarrow Q(y))\equiv(\exists y)(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(y))$。

解：

(a) $(\forall x)(\forall y)(A(x)\vee B(y))$

$\equiv(\forall x)(A(x)\vee(\forall y)B(y))$　　（量词辖域收缩等值式）

$\equiv(\forall x)A(x)\vee(\forall y)B(y)$　　（量词辖域收缩等值式）

$\equiv(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$　　（换名规则）

(b) $(\exists x)(A(x)\Rightarrow B(x))$

$\equiv(\exists x)(\sim A(x)\vee B(x))$　　（置换规则）

$\equiv(\exists x)\sim A(x)\vee(\exists x)B(x)$　　（量词分配等值式）

$\equiv\sim(\forall x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$　　（德摩根律）

$\equiv(\forall x)A(x)\Rightarrow(\exists x)B(x)$　　（置换规则）

(c) $(\forall x)(\exists y)(P(x)\Rightarrow Q(y))\equiv(\forall x)(\exists y)(\sim P(x)\vee Q(y))$

$\equiv(\forall x)\sim P(x)\vee(\exists y)Q(y)$

$(\exists y)(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(y))\equiv(\exists y)(\forall x)(\sim P(x)\vee Q(y))$

$\equiv(\forall x)\sim P(x)\vee(\exists y)Q(y)$

即$(\forall x)(\exists y)(P(x)\Rightarrow Q(y))$和$(\exists y)(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(y))$都与同一个谓词公式等值。

下面证明例3.12(b)的两种形式化描述等值。

【例3.17】　设$F(x)$表示“x是乌鸦”，$G(x,y)$表示“x与y一般黑”。“天下乌鸦一般黑”可表示成$(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y)\Rightarrow G(x,y))$或者$\sim(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\sim G(x,y))$，后一种形式意为不存在个体$x$和$y$都是乌鸦但不一般黑，下面证明这两个命题公式是等值的：

$$
\begin{aligned}
&\sim(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\sim G(x,y))\\
&\equiv(\forall x)\sim(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\sim G(x,y))\\
&\equiv(\forall x)(\forall y)\sim(F(x)\wedge F(y)\wedge\sim G(x,y))\\
&\equiv(\forall x)(\forall y)(\sim(F(x)\wedge F(y))\vee G(x,y))\\
&\equiv(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y)\Rightarrow G(x,y))
\end{aligned}
$$

习 题 3.4

3.9 判断下列公式的类型,若是逻辑有效式,则给出证明,否则举出反例。

(a) $(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\exists y)G(y))$。

(b) $(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\forall x)(\exists y)H(x,y) \Rightarrow (\forall x)P(x))$。

(c) $\sim((\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x)) \wedge (\exists x)B(x)$。

(d) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$。

3.10 设论域为$\{a,b,c\}$,试消去下列谓词公式中的量词。

(a) $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$。

(b) $(\exists x)(P(x) \vee (\forall y)Q(y))$。

(c) $(\forall y)(\exists x)H(x,y)$。

3.11 将下列公式化为与之等值的公式,使其没有既是约束出现又是自由出现的个体变项符号。

(a) $(\forall x)P(x,y) \vee (\exists y)Q(x,y,z)$。

(b) $(\forall x)(P(x,y) \vee (\exists y)Q(x,y,z))$。

(c) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \Rightarrow R(x,y)) \Leftrightarrow L(x,y)$。

(d) $((\exists x)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)Q(x,y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)R(x,y)$。

3.12 设$A(x)$是含x自由出现的公式,谓词公式B中不含x的出现,证明下列等值式。

(a) $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B) \equiv (\exists x)A(x) \Rightarrow B$。

(b) $(\exists x)(A(x) \Rightarrow B) \equiv (\forall x)A(x) \Rightarrow B$。

(c) $(\forall x)(B \Rightarrow A(x)) \equiv B \Rightarrow (\forall x)A(x)$。

(d) $(\exists x)(B \Rightarrow A(x)) \equiv B \Rightarrow (\exists x)A(x)$。

3.13 证明下列等值式。

(a) $(\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \equiv (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$。

(b) $\sim(\exists x)(M(x) \wedge F(x)) \equiv (\forall x)(M(x) \Rightarrow \sim F(x))$。

(c) $(\forall x)(\forall y)(P(x) \Rightarrow Q(y)) \equiv (\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall y)Q(y)$。

(d) $((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \wedge (\exists x)R(x)) \vee ((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \wedge (\exists x)S(x)) \equiv (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\exists x)(R(x) \vee S(x))$。

3.5 前束范式

在命题逻辑中,讨论过命题公式的规范的、标准的形式,即范式。在谓词逻辑中,谓词公式也有与之相对应的范式。

定义 3.13 设A为谓词公式,如果满足以下条件:

(1) 所有量词都位于该公式的最左边。

(2) 所有量词前都不含否定词。

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端。

则称 A 为**前束范式**(**prenex formal form**)。

前束范式的一般形式为

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nM(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中,$Q_i(1\leqslant i\leqslant n)$为$\forall$或$\exists$,$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_n$ 称为**前束**(**prenex**);M 为不含量词的公式,称作公式的**基式**或**母式**(**matrix**)。

【例 3.18】 $(\forall x)(\forall y)\sim(P(x)\Rightarrow Q(y))$、$(\forall x)(\exists y)R(x,y)$、$S(x,y)$都是前束范式,而$\sim(\forall x)R(x,y)$和$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$都不是前束范式。

下面给出求前束范式的基本方法。

(1) 消去谓词公式中的联结词$\Rightarrow$和$\Leftrightarrow$。

(2) 将谓词公式中的否定词$\sim$右移。

(3) 将谓词公式中的量词左移(使用量词分配等值式、量词辖域收缩与扩张等值式),必要时将变项改名。

【例 3.19】 求$(\forall x)P(x,y)\Leftrightarrow\sim(\forall y)Q(x,y)$的前束范式。

解:$(\forall x)P(x,y)\Leftrightarrow\sim(\forall y)Q(x,y)$

$\equiv((\forall x)P(x,y)\Rightarrow\sim(\forall y)Q(x,y))\wedge(\sim(\forall y)Q(x,y)\Rightarrow(\forall x)P(x,y))$

(消去联结词$\Leftrightarrow$)

$\equiv(\sim(\forall x)P(x,y)\vee\sim(\forall y)Q(x,y))\wedge(\sim\sim(\forall y)Q(x,y)\vee(\forall x)P(x,y))$

(消去联结词$\Rightarrow$)

$\equiv(\sim(\forall z)P(z,y)\vee\sim(\forall u)Q(x,u))\wedge(\sim\sim(\forall v)Q(x,v)\vee(\forall w)P(w,y))$

(换名规则)

$\equiv((\exists z)\sim P(z,y)\vee(\exists u)\sim Q(x,u))\wedge((\forall v)Q(x,v)\vee(\forall w)P(w,y))$

($\sim$右移)

$\equiv(\exists z)(\sim P(z,y)\vee\sim Q(x,z))\wedge((\forall v)Q(x,v)\vee(\forall w)P(w,y))$

(量词分配等值式)

$\equiv(\exists z)(\sim P(z,y)\vee\sim Q(x,z))\wedge(\forall v)(\forall w)(Q(x,v)\vee P(w,y))$

(量词左移)

$\equiv(\exists z)(\forall v)(\forall w)((\sim P(z,y)\vee\sim Q(x,z))\wedge(Q(x,v)\vee P(w,y)))$

(量词左移)

$\equiv(\exists z)(\forall v)(\forall w)S(x,y,z,v,w)$

注:使用以上步骤,可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值性,所以得到的前束形式与原公式是等值的。这里的 $S(x,y,z,v,w)$便是原公式的母式。

由于前束中对量词的次序排列没有约束,如$(\forall v)(\forall w)$也可以写成$(\forall w)(\forall v)$,并且对母式没有明确的限制,自然其前束范式并不唯一。例如,例 3.19 的前束范式也可以是

$$(\exists z)(\forall w)(\forall v)(S(x,y,z,v,w)\wedge P)$$

其中 P 可以是任一不含量词的逻辑有效式。

事实上,有如下结论。

定理 3.12 (**前束范式存在定理**)任一谓词公式都存在与之等值的前束范式,但其前

束范式并不唯一。

【例 3.20】 求下列公式的前束范式。

(a) $(\forall x)F(x) \land \sim(\exists x)G(x)$。

(b) $(\exists x)F(x) \land \sim(\forall x)G(x)$。

(c) $(\forall x)P(x,y) \Rightarrow ((\exists y)Q(x,y) \Rightarrow (\forall z)R(x,z))$。

解：

(a) $(\forall x)F(x) \land \sim(\exists x)G(x)$

$\equiv(\forall x)F(x) \land (\forall x)\sim G(x)$

$\equiv(\forall x)(F(x) \land \sim G(x))$ （量词分配等值式）

(b) $(\exists x)F(x) \land \sim(\forall x)G(x)$

$\equiv(\exists x)F(x) \land (\exists x)\sim G(x)$

$\equiv(\exists x)F(x) \land (\exists y)\sim G(y)$ （换名规则）

$\equiv(\exists x)(\exists y)(F(x) \land \sim G(y))$ （量词辖域扩张等值式）

(c) $(\forall x)P(x,y) \Rightarrow ((\exists y)Q(x,y) \Rightarrow (\forall z)R(x,z))$

$\equiv\sim(\forall x)P(x,y) \lor (\sim(\exists y)Q(x,y) \lor (\forall z)R(x,z))$

$\equiv(\exists x)\sim P(x,y) \lor ((\forall y)\sim Q(x,y) \lor (\forall z)R(x,z))$

$\equiv(\exists x)\sim P(x,y) \lor (\forall y)(\forall z)(\sim Q(x,y) \lor R(x,z))$ （量词辖域扩张等值式）

$\equiv(\exists u)\sim P(u,v) \lor (\forall y)(\forall z)(\sim Q(x,y) \lor R(x,z))$ （代替规则、换名规则）

$\equiv(\exists u)(\forall y)(\forall z)(\sim P(u,v) \lor \sim Q(x,y) \lor R(x,z))$ （量词辖域扩张等值式）

习　题　3.5

3.14 将下列公式化为等值的前束范式。

(a) $(\forall x)F(x) \Rightarrow (\exists x)G(x)$。

(b) $(\exists x)F(x) \Rightarrow (\forall x)G(x)$。

(c) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x,y))$。

(d) $((\forall x)F(x,y) \Rightarrow (\exists y)G(y)) \Rightarrow (\forall x)H(x,y)$。

3.6　谓词逻辑的推理

与命题逻辑的推理相同，谓词逻辑的推理也是从某些给定的前提出发，根据一些基本的推理规则推导出相应结论的过程。因而，谓词逻辑推理的形式与命题逻辑推理的形式是一致的。

在谓词逻辑中，从前提 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 出发推出结论 C 的推理形式结构，依然采用如下的蕴涵式形式：

$$(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \Rightarrow C$$

若上式为逻辑有效式，则称推理正确，称 C 为前提 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 的逻辑结论或有效结论；否则称推理不正确。于是，在谓词逻辑中判断推理是否正确便归结为判断蕴涵式是否

为逻辑有效式的问题。

由于在谓词逻辑中不能使用真值表法，又不存在判别 $A \Rightarrow B$ 是否逻辑有效的一般方法，从而使用基本推理公式及推理规则是谓词逻辑的基本推理演算方法。

除命题逻辑中基本推理公式的代换实例外，还有一些谓词逻辑特有的、与量词相关的推理公式。

定理 3.13　（**基本推理公式**）以下蕴涵式都是逻辑有效式。

(a) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$。

(b) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$。

(c) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x))$。

(d) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x))$。

(e) $((\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$。

(f) $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)Q(x))$。

(g) $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)Q(x))$。

(h) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \Rightarrow R(x))$。

(i) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$。

至此，可以总结一下。两个量词的公式有下列 8 种情况：$(\forall x)(\forall y)P(x,y)$、$(\forall y)(\forall x)P(x,y)$、$(\exists x)(\forall y)P(x,y)$、$(\exists y)(\forall x)P(x,y)$、$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$、$(\forall y)(\exists x)P(x,y)$、$(\exists x)(\exists y)P(x,y)$、$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$。

它们之间的等价关系与蕴涵关系如下(可参看图 3.1)。

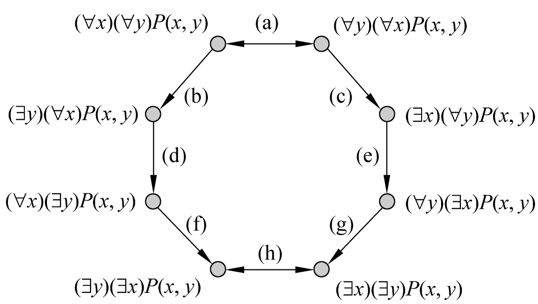

图 3.1　定理 3.14 用图

定理 3.14　以下谓词公式都是逻辑有效式。

(a) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$。

(b) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$。

(c) $(\forall y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$。

(d) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$。

(e) $(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$。

(f) $(\forall y)(\exists x)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$。

(g) $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,y)$。

(h) $(\exists y)(\exists x)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,y)$。

在图 3.1 中未出现的有向边表示两者之间没有必然联系。

例如,假设论域 D 限定为正整数集合,解释1中谓词 $P(x,y)$ 表示 $x=y$,解释2中谓词 $P(x,y)$ 表示 $xy=y$,解释3中谓词 $P(x,y)$ 表示 $x\geqslant y$,解释4中谓词 $P(x,y)$ 表示 $x\leqslant y$。

在解释1下命题 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ 为真,命题 $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ 为假,命题 $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$ 为真。

在解释2下命题 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ 为假,命题 $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ 为真,命题 $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$ 为真。

在解释3下命题 $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$ 为真,命题 $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ 为假。

在解释4下命题 $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$ 为假,命题 $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ 为真。

而谓词逻辑使用的推理规则除命题逻辑的推理演算中用到的6条基本推理规则外,还包括4条有关量词的消去和引入规则。

(a) **全称量词消去规则**,也称作**全称举例规则**(**Universal Specification,US**):

$$(\forall x)P(x)\Rightarrow P(y) \quad \text{或} \quad (\forall x)P(x)\Rightarrow P(a)$$

其中 y 是论域中任一个体。该规则意为,如果所有的 $x\in D$ 都具有性质 P,那么 D 中任一个体 y 或特定个体 a 必定具有性质 P。

使用该规则的条件如下:

(1) 第一式中,取代 x 的 y 应为任意的不在 $P(x)$ 中约束出现的个体变项。

(2) 第二式中,a 为任意个体常项。

(3) 用 y 或 a 取代 $P(x)$ 中自由出现的 x 时,必须对 x 的所有自由出现进行取代。

(b) **全称量词引入规则**,也称作**全称推广规则**(**Universal Generalization,UG**):

$$P(y)\Rightarrow(\forall x)P(x)$$

其中 y 是论域中任一个体。该规则意为,如果任一个体 $y\in D$ 都具有性质 P,那么 D 中所有个体 x 都具有性质 P。

使用该规则的条件如下:

(1) 无论 $P(y)$ 中自由出现的个体变项 y 取何值,$P(y)$ 应该均为真。

(2) 取代自由出现的 y 的 x 不能在 $P(y)$ 中约束出现。

(c) **存在量词消去规则**,也称作**存在举例规则**(**Existential Specification,ES**):

$$(\exists x)P(x)\Rightarrow P(a)$$

其中 a 是论域中的一个个体常项。该规则意为,如果论域 D 中存在某个体具有性质 P,那么必有特定个体 a 具有该性质 P。

使用该规则的条件如下:

(1) a 是使 P 为真的特定的个体常项。

(2) a 不在 $P(x)$ 中出现。

(3) $P(x)$ 中没有其他自由出现的个体变项。

(4) a 是在推导过程中未曾使用过的。

(d) **存在量词引入规则**,也称作**存在推广规则**(**Existential Generalization,EG**):

$$P(a)\Rightarrow(\exists x)P(x)$$

其中 a 是论域中一个体常项。该规则意为,如果有个体常项 a 具有性质 P,那么 $(\exists x)P(x)$ 必为真。