第10章 重积分

重积分针对多元函数，比较典型的是二重积分和三重积分。二重积分是二元函数在空间上的积分，同定积分类似，是某种特定形式的和的极限，本质是求曲顶柱体体积。重积分有着广泛的应用，可以用来计算曲面的面积、平面薄片重心等。三重积分的几何意义和物理意义是不均匀的空间物体的质量。知道重积分的这些意义，有助于理解重积分的概念和应用场景，也就能明确学习重积分的意义了。

10.1 本章目标

本章将用 MATLAB 实现以下操作：

(1) 二重积分的数值计算。

(2) 极坐标下二重积分的数值计算。

(3) 三重积分的数值计算。

(4) 柱面坐标系及球面坐标系下三重积分的数值计算。

10.2 相关命令

本章涉及的 MATLAB 命令如下。

(1) integral2：对二重积分进行数值计算。用法如下：

- q=integral2(fun,xmin,xmax,ymin,ymax)：在平面区域 xmin≤x≤xmax 和 ymin(x)≤y≤ymax(x)上逼近函数 z=fun(x,y)的积分。
- q=integral2(fun,xmin,xmax,ymin,ymax,Name,Value)：指定具有一个或多个 Name,Value 对组参数的其他选项。

(2) integral3：对三重积分进行数值计算。用法如下：

- q=integral3(fun,xmin,xmax,ymin,ymax,zmin,zmax)：在区域 xmin≤x≤xmax、ymin(x)≤y≤ymax(x)和 zmin(x,y)≤z≤zmax(x,y)逼近函数 z=fun(x,y,z)的积分。

- q=integral3(fun,xmin,xmax,ymin,ymax,zmin,zmax,Name,Value)：指定具有一个或多个 Name,Value 对组参数的其他选项。

10.3 二重积分的计算

设函数 $f(x,y)$是有界闭区域 D 上的有界函数。将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域。在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点(ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时，这个和的极限总存在，那么称此极限为函数 $f(x,y)$在闭区域 D 上的**二重积分**，记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中，$f(x,y)$叫作**被积函数**，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 叫作**被积表达式**，$\mathrm{d}\sigma$ 叫作**面积元素**，x 与 y 叫作**积分变量**，D 叫作**积分区域**，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫作**积分和**。

在二重积分的定义中对闭区域 D 的划分是任意的，如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分 D，那么除了包含边界点的一些小闭区域外，其余的小闭区域都是矩形闭区域。设矩形区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_j 和 Δy_k，则 $\Delta\sigma_i=\Delta x_j\cdot\Delta y_k$。因此在直角坐标系中，有时也把面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，而把二重积分记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 叫作直角坐标系中的**面积元素**。

根据上面二重积分直角坐标系中的定义，可以编写近似的用定义方法求解的 MATLAB 函数，具体方法是先获取积分区域 D 在 x 和 y 方向上的最大值、最小值，从而将积分区域扩展成矩形区域$[a,b]\times[c,d]$，判断区域 D 在矩形区域$[a,b]\times[c,d]$中的部分，通过上述二重积分定义式求解。按照定义来计算二重积分对于少部分简单的积分区域和被积函数来说是可行的，因为使用情况较少，具体的计算方法函数代码就不在此呈现。在 MATLAB 中有专门的函数来更方便地实现二重积分。

10.3.1 二重积分的数值计算

首先考虑特殊的矩形区域的二重积分。

计算下面的二重积分问题

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

矩形区域的二重积分的数值解可以直接使用 MATLAB 提供的 integral2()函数直接求出。可以通过以下命令调出 integral2()函数的代码了解具体的计算方法：

```
edit(which('integral2.m'))
```

这里更关注如何使用该函数来实现二重积分的求解。

例 10-1 试求出二重积分

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\sin(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解：

```
f = @(x,y)exp( - x.^2/2. * sin(x.^2 + y));
y = integral2(f, - 2,2, - 1,1)
```

运行程序，得到如下结果：

```
y = 8.1235
```

同时可知，integral2()也可以用于非矩形区域二重积分的计算。

例 10-2 计算函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}(1+x+y)^2}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x$ 所围成的区域上的积分。

解：

创建匿名函数：

```
fun = @(x,y) 1./( sqrt(x + y) .* (1 + x + y).^2 );
```

对 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x$ 限定的三角形区域计算积分：

```
ymax = @(x) 1 - x;
q = integral2(fun,0,1,0,ymax)
```

运行程序，得到如下结果：

```
q = 0.2854
```

10.3.2 直角坐标计算

为了解决更一般的重积分计算问题，接下来使用 int 函数，将二重积分化为二次积分来计算。依据高等数学中的知识有等式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

上式右端的积分是先对 y、后对 x 的二次积分，也常记作

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

这就是把二重积分化为先对 y、后对 x 的二次积分的公式。这样的积分区域是 X **型**的，可用 $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 表示。若积分区域是 Y **型**的则用公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$$

来计算。如果积分区域既是 X 型的又是 Y 型的，则两个不同次序的二次积分相等。

将二重积分化为二次积分时，确定积分限是一个关键。积分限是根据积分区域 D 来确定的，先画出积分区域 D 的图形。假如积分区域是 X 型的，在区间$[a,b]$上任意取定一个 x 值，积分区域上以这个 x 值为横坐标的点在一段直线上，这段直线平行于 y 轴，该线段上点的纵坐标就是先把 x 看作常量而对 y 积分时的下限和上限。再把 x 看作变量而对 x 积分时，积分区间就是$[a,b]$。

例 10-3　计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域。

解：

第一步，绘制积分区域：

```
y1 = 1;
fplot(y1);
hold on;
y2 = @(x)x;
fplot(y2);
hold on;
fimplicit(@(x,y) x - 2);
fill([1,2,2,1],[1,2,1,1],'r');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

运行程序，得到如图 10-1 所示的积分区域。

第二步，确定积分上、下限：

```
fun = @(x)x - 1;
A = fzero(fun,0);
B = 2;
```

第三步，计算积分值：

```
syms x y
I = int(int(x * y,y,y1,y2),x,A,B)
```

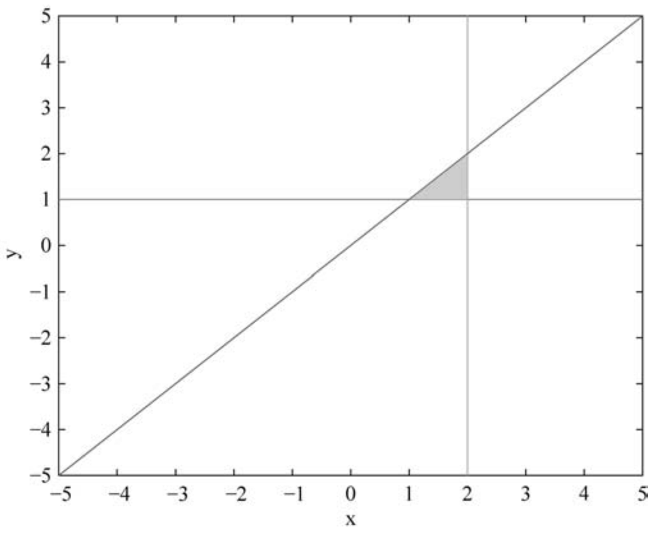

图 10-1　由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的积分区域

运行程序，得到如下结果：

```
I = 9
    -
    8
```

在化二重积分为二次积分时，为了计算方便，需要选择恰当的二次积分的顺序。这时既要考虑积分区域的形状，又要考虑被积函数的特性。

例 10-4　计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域。

解：

第一步，绘制积分区域：

```
syms x y;
fimplicit(y - x + 2);
hold on;
fimplicit(y^2 - x);
xlabel('x');
ylabel('y');
```

运行程序，得到如图 10-2 所示的积分区域。

D 既是 X 型的又是 Y 型的。若利用 X 型的公式计算，则由于在区间 $[0,1]$ 及 $[1,4]$ 上表示 $\varphi_1(x)$ 的式子不同，所以要用经过交点 $(1,-1)$ 且平行于 y 轴的直线 $x=1$ 把区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分，其中

$$D_1=\{(x,y)\mid -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 1\}$$

$$D_2=\{(x,y)\mid x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 4\}$$

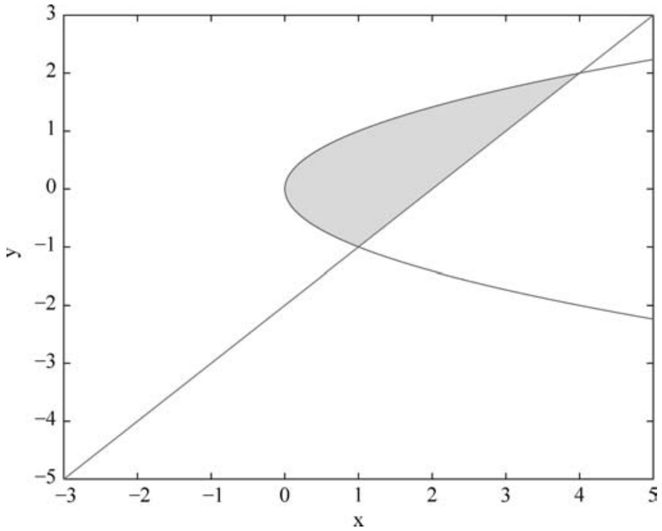

图 10-2　由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的积分区域

而如果 D 是 Y 型的，不用将区域分成两部分计算，是较为简便的。

第二步，确定积分上、下限：

```
A = double(solve((x - 2)^2 - x,0));
```

第三步，计算积分值：

```
y2 = @(x)x - 2;
x1 = @(y)y^2;
x2 = @(y)y + 2;
I = int(int(x * y,x,x1,x2),y,y2(A(1)),y2(A(2)))
```

运行程序，得到如下结果：

$$I = \frac{45}{8}$$

10.3.3　极坐标计算

当二重积分的积分区域 D 的边界曲线用极坐标方程来表示比较方便，且某些被积函数用极坐标变量 ρ、θ 表达比较简单时，就可以考虑用极坐标来计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$。

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

上式就是二重积分的变量从直角坐标变换为极坐标的变换公式，其中 $\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$ 就是极坐标系中的面积元素。

极坐标系中的二重积分，同样可以化为二次积分来计算。设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(x)\leqslant\rho\leqslant\varphi_2(x),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

来表示，其中函数 $\varphi_1(\theta)$、$\varphi_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\varphi_2(\theta)$在区间$[\alpha,\beta]$上连续。极坐标系中的二重积分化为二次积分的公式为

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

例 10-5 计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由圆心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域。

解：

本题如果用直角坐标计算，因为积分 $\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示，所以不容易计算。如果利用极坐标计算，区域 D 可表示为 $0\leqslant\rho\leqslant a$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，且比较利于积分的计算，具体实现代码为：

```
syms rho theta a;
x = rho * cos(theta);
y = rho * sin(theta);
f = exp( - x^2 - y^2);
I = int(int(f * rho,rho,0,a),theta,0,2 * pi)
```

运行程序，得到如下结果：

```
I =  - π(e^-a^2 - 1)
```

10.3.4 二重积分换元法

将二重积分的变量从直角坐标变换为极坐标是二重积分换元法的一种特殊情形。把平面上的点同时用直角坐标(x,y)、极坐标(ρ,θ)表示，它们之间的关系是

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

也可以看成建立了 $\rho O\theta$ 平面和 xOy 平面上的一一对应关系。

一般的二重积分换元法有如下定理：设 $f(x,y)$在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续，若变换

$$T: x=x(u,v), y=y(u,v)$$

将 uOv 平面上的闭区域 D'变为 xOy 平面上的 D，且满足

(1) $x(u,v)$，$y(u,v)$在 D'上具有一阶连续偏导数。

(2) 在 D'上雅可比式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$$

(3) 变换 T：$D'\rightarrow D$ 是一对一的，则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

该公式称为二重积分的**换元公式**。

例 10-6 计算 $\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域。

解：

令 $u=y-x$，$v=y+x$，则 $x=\frac{v-u}{2}$，$y=\frac{v+u}{2}$。

作变换 $x=\frac{v-u}{2}$，$y=\frac{v+u}{2}$，绘制 xOy 平面上的闭区域 D 和 uOv 平面上的对应区域 D'。

第一步，绘制积分区域：

```
syms x y u v;
U = y - x;
V = y + x;
S = solve(u - U,v - V,x,y);
subplot 121;
ezplot(x + y - 2,[ - 1,3]);
hold on;
plot([0,0,3],[3,0,0]);
fill([0,0,2,0],[2,0,0,2],'r');
axis equal tight;
title('原积分区域图');
subplot 122;
ezplot(S.x,[ - 2,2]);
hold on;
ezplot(S.y,[ - 2,2]);
v1 = solve(S.x + S.y - 2,v);
ezplot(v1,[ - 2,2]);
fill([0,2, - 2,0],[0,2,2,0],'r');
axis equal tight;
title('变换后的积分区域图');
```

运行程序，得到如图 10-3 所示的积分区域。

第二步，根据变换后的积分区域计算二重积分：

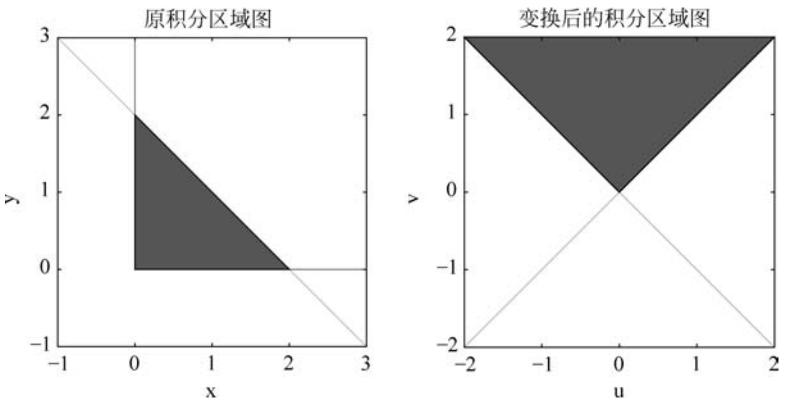

图 10-3　例 10-6 的积分区域

```
f = exp((y - x)/(y + x));
f = subs(f,{x,y},{S.x,S.y});
J = det(jacobian([S.x;S.y],[u,v]));
I = int(int(f * abs(J),u, - v,v),v,0,2)
```

运行程序,得到如下结果:

```
I = e - e^-1
```

10.4　三重积分

设 $f(x,y,z)$是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数。将 Ω 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$$

其中,Δv_i 表示第 i 个小闭区域,也表示它的体积。在每个 Δv_i 上任取一点(ξ_i,η_i,ζ_i),作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i (i=1,2,\cdots,n)$,并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$,如果当各小闭区域直径中的最大值 $\lambda\to 0$ 时,这个和的极限总存在,且与闭区域 Ω 的分法及点(ξ_i,η_i,ζ_i)的取法无关,那么称此极限为函数 $f(x,y,z)$在闭区域 Ω 上的**三重积分**,记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$,即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

其中,$f(x,y,z)$叫作**被积函数**,$\mathrm{d}v$ 叫作**体积元素**,Ω 叫作**积分区域**。

在直角坐标系中,有时也把体积元素 $\mathrm{d}v$ 记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,而把三重积分记作

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中,$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 叫作直角坐标系中的**体积元素**。

当函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域连续时，$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 必存在，也就是函数在闭区域上的三重积分必定存在。三重积分的性质与二重积分的性质相似。

10.4.1 利用直角坐标计算三重积分

下面介绍利用直角坐标计算三重积分。

若平行于 z 轴且穿过闭区域内部的直线与闭区域 Ω 的边界曲面 S 相交不多于两点，可以把 Ω 投影到 xOy 面上。设积分区域可以表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$$

先将 x、y 看作定值，将 $f(x,y,z)$ 只看作 z 的函数，在区间 $[z_1(x,y),z_2(x,y)]$ 上对 z 积分，积分的结果是 x、y 的函数，记为 $F(x,y)$，即

$$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

然后计算 $F(x,y)$ 在闭区域 D_{xy} 上的二重积分

$$\iint\limits_{D_{xy}}F(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma$$

设闭区域

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$$

把这个二重积分化为二次积分，于是有三重积分的计算公式

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

此公式把三重积分化为先对 z、次对 y、最后对 x 的三次积分。其他积分次序的公式也类似。

例 10-7 计算 $\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

解：

第一步，绘制积分区域：

```
[X,Y] = meshgrid(linspace(0,1,30));
mesh(X,Y,1 - X - 2 * Y);
hold on;
mesh(X,Y,zeros(size(X)));
mesh(X,Y,zeros(size(Y)));
hidden off;
view([60,10]);
xlabel('x');
```

```
ylabel('y');
zlabel('z');
```

运行程序,得到如图 10-4 所示的积分区域。

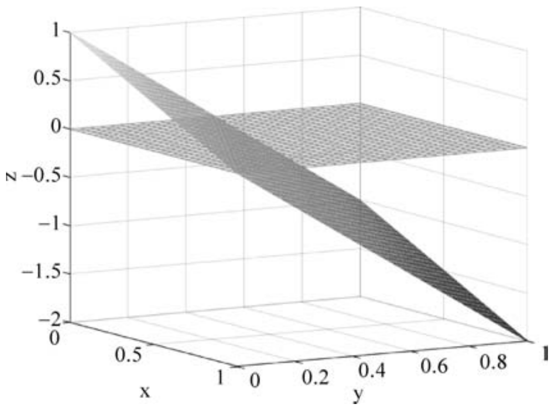

图 10-4　例 10-7 的三重积分区域

第二步,计算三重积分:

```
syms x y z;
I = int(int(int(x,z,0,1 - x - 2 * y),y,0,(1/2) * (1 - x)),x,0,1)
```

运行程序,得到如下结果:

$$I = \frac{1}{48}$$

例 10-8　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中 Ω 由曲面 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$、$x^2+z^2=1$ 和平面 $y=1$ 围成。

解:

第一步,绘制积分区域:

```
[theta,rho] = meshgrid(linspace(0,2 * pi),linspace(0,1 - eps));
[X,Z] = pol2cart(theta,rho);
surf(X, - sqrt(1 - X.^2 - Z.^2),Z);
hold on;
[X1,Y1,Z1] = cylinder(ones(1,20),40);
surf(X1,Z1,Y1);
surf(X,ones(size(X)),Z);
shading flat;
view([ - 100,30]);
```

```
axis equal;
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
```

运行程序，得到如图 10-5 所示的积分区域。

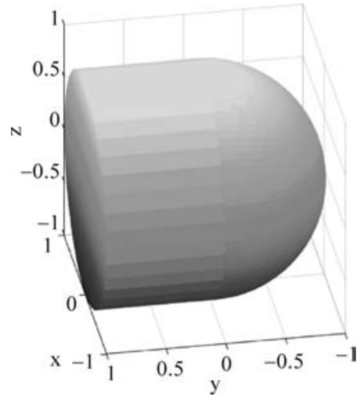

图 10-5 例 10-8 中的积分区域

容易看出，此处积分区域按 y、z、x 的次序三次积分。

第二步，计算三重积分：

```
syms x y z;
I = int(int(int(y * sqrt(1 - x^2),y, - sqrt(1 - x^2 - z^2),1),z, - sqrt(1 - x^2),sqrt(1 - x^2)),
x, - 1,1)
```

运行程序，得到如下结果：

```
I = 28
    --
    45
```

10.4.2 利用柱面坐标计算三重积分

如图 10-6 所示，设 $M(x,y,z)$为空间内一点，并设点 M 在 xOy 面上的投影 P 的极坐标为 ρ、θ，则这样的三个数 ρ、θ、z 就叫作点 M 的柱面坐标，这里规定 ρ、θ、z 的变化范围为

$$0 \leqslant \rho < +\infty$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$
$$-\infty < z < +\infty$$

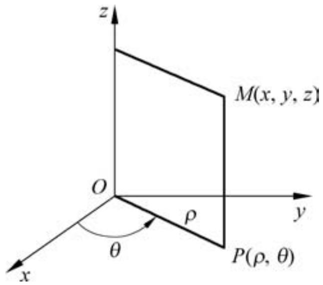

图 10-6　点 M 及其投影 P 在空间中的位置关系示意图

三组坐标面分别为：

$\rho=$常数，即以 z 轴为轴的圆柱面；

$\theta=$常数，即过 z 轴的半平面；

$z=$常数，即与 xOy 面平行的平面。

转换关系为

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

能够得到柱面坐标系中的体积元素为

$$\mathrm{d}v=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

把三重积分的变量从直角坐标变换为柱面坐标的公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

其中，$F(\rho,\theta,z)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$。

转换为柱面坐标系后的三重积分可以根据 ρ、θ、z 在积分区域中的变化范围确定化为三次积分的先后顺序。

例 10-9　利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。

解：

把闭区域投影到 xOy 面上，得半径为 2 的圆形闭区域

$$D_{xy}=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant2,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$$

在 D_{xy} 内任取一点 (ρ,θ)，过此点作平行于 z 轴的直线，此直线通过曲面 $z=x^2+y^2$ 穿入闭区域内，然后通过平面 $z=4$ 穿出 Ω 外。因此闭区域 Ω 可用不等式

$$\rho^2\leqslant z\leqslant4,\ 0\leqslant\rho\leqslant2,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

来表示。

于是编写程序计算：

```
syms rho theta z a
x = rho * cos(theta);
y = rho * sin(theta);
f = z * sqrt(x^2 + y^2);
I = int(int(int(z,z,rho^2,4) * rho,rho,0,2),theta,0,2 * pi)
```

运行程序，得到如下结果：

$$I = \frac{64\pi}{3}$$

10.4.3 利用球面坐标计算三重积分

如图 10-7 所示，设 $M(x,y,z)$ 为空间内的一点，则点 M 也可以用 r、φ、θ 来确定，其中 r 为原点 O 与点 M 之间的距离，φ 为有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向所夹的角，θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的角，这里点 P 为点 M 在 xOy 面上的投影。

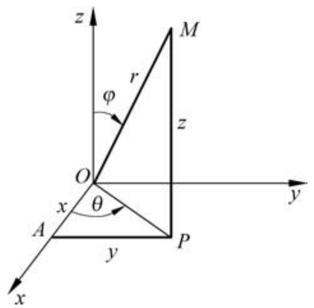

图 10-7　点 M 在空间中的位置示意图

r,φ,θ 叫作点 M 的球面坐标，变化范围是：

$$0\leqslant r<+\infty$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$$

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

三组坐标面分别为：

r＝常数，即以原点为心得到球面；

φ＝常数，即以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面；

θ＝常数，即过 z 轴的半平面。

直角坐标与球面坐标的关系为：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

球面坐标系中的体积元素：

$$\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

有关系式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

其中，$F(r,\varphi,\theta)=f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)$。这就是把三重积分的变量从直角坐标

变换为球面坐标的公式。

例 10-10 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的几何体(如图 10-8 所示)的体积。

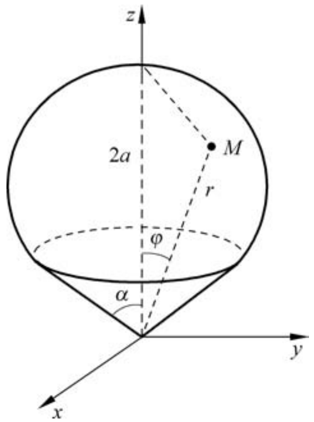

图 10-8 球面与内接锥面所围成的几何体示意图

解:

```
syms rho theta phi a alpha;
x = rho * sin(phi) * cos(theta);
y = rho * sin(phi) * sin(theta);
z = rho * cos(phi);
I = int(int(int(rho^2 * sin(phi),rho,0,2 * a * cos(phi)),phi,0,alpha),theta,0,2 * pi)
```

运行程序,得到如下结果:

$$I = -2\pi a^3\left(\frac{2\cos^4 a}{3}-\frac{2}{3}\right)$$

10.5 拓展内容

利用重积分计算几何图形面积或体积的例子比较多,以下将补充一些重积分应用的案例。

10.5.1 重积分补充案例

例 10-11 计算曲线 $f=x^2$ 与直线 $g=3x$ 所围成区域的面积。

解:

```
syms x y
f = x^2; g = 3 * x;
```

```
figure
fplot(f, [0 3], 'LineWidth', 2); grid on; hold on
fplot(g, [0 3], 'LineWidth', 2)
xlabel('x');
ylabel('y');
axis([0 3 0 9]); xticks(0:3); yticks(0:3:9)
```

运行程序，得到如图 10-9 所示的积分区域。

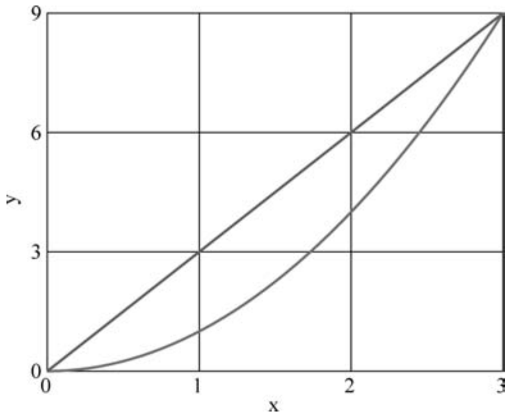

图 10-9　曲线 $f=x^2$ 与直线 $g=3x$ 所围成的区域

```
I1 = int(int(x * y, y, x^2, 3 * x), x, 0, 3)
```

$$I1 = \frac{243}{8}$$

```
I1_appx = double(I1)
```

I1_appx = 30.3750

```
I2 = int(int(x * y, x, y/3, sqrt(y)), y, 0, 9)
```

$$I2 = \frac{243}{8}$$

```
I2_appx = double(I2)
```

I2_appx = 30.3750

例 10-12 计算四分之一圆盘的积分。

解：

```
syms x y
figure
t = linspace(0,pi/2); xt = cos(t); yt = sin(t);
X = [0 xt 0]; Y = [0 yt 0];
fill(X, Y, 'y'); grid on ; hold on
plot(X, Y, 'LineWidth', 2)
plot([-0.5 1.5], [0 0], 'k')
plot([0 0], [-0.5 1.5], 'k')
xlabel('x');
ylabel('y');
xticks(0:1); yticks(0:1)
axis equal;
axis([-0.5 1.5 -0.5 1.5])
```

运行程序，得到如图 10-10 所示的积分区域。

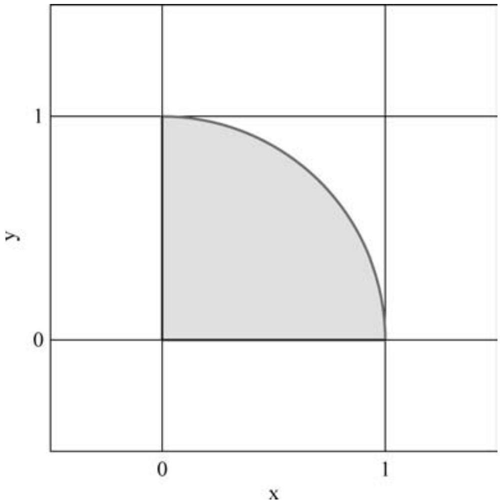

图 10-10 四分之一圆盘的区域

```
I = int(int(x*y, y, 0, sqrt(1-x^2)), x, 0, 1)
```

$$I = \frac{1}{8}$$

```
I_appx = double(I)
```

I_appx = 0.1250

例 10-13　计算以 $y=x^2$、$z=3y$、$z=2+y$ 三面为界的固体的体积。

解：

```
syms x y z
f(x) = x^2;
 % 这是两个平面,它们的交点是 r(x)
plane1 = z == 3 * y;
plane2 = z == 2 + y;
L = solve([plane1 plane2], [y z]);
r(x) = [x L.y L.z];                    % 将这条直线投影到 xOy 平面上:y = 1, x 自由
x_bounds = solve(x^2 == 1, x);         % y_bounds: x^2 <= y <= 1.注意这里的 y 是非负的,且
                                       % 0 <= y <= 1
 % 注意平面 2 在平面 1 之上
V = int(int(2 + y - 3 * y, y, x^2, 1), x, -1, 1)
```

$$V = \frac{16}{15}$$

```
V_appx = double(V)
```

V_appx = 1.0667

```
figure
fsurf(x, y, 2 + y, [-1 1 -0.25 1.25], 'r', 'MeshDensity', 10); hold on   % 平面 z = 2 + y 以上
fsurf(x, y, 3 * y, [-1 1 -0.25 1.25], 'g', 'MeshDensity', 10)            % 平面 z = 3 * y 以下
fsurf(x, x^2, z, [-1.25 1.25 -1 4], 'y', 'MeshDensity', 16)               % 侧面为抛物柱面
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
```

运行程序，得到如图 10-11 所示的几何体。

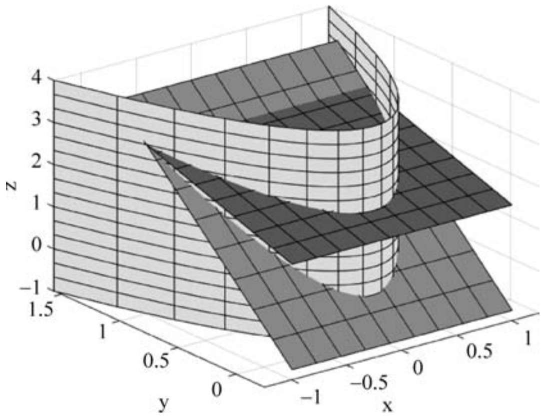

图 10-11　$y=x^2$、$z=3y$、$z=2+y$ 三个面所围成的几何体

```
figure
xs = linspace( - 1,1); ys = xs.^2;
X = [xs xs(1)]; Y = [ys ys(1)];
fill(X,Y,'y'); grid on; hold on
plot(X,Y,'b', 'LineWidth', 2)
plot([ - 1 1], [0 0], 'k')
plot([0 0], [ - 0.5 1.5], 'k')
axis equal; axis([ - 1 1  - 0.5 1.5])
xlabel('x');
ylabel('y');
xticks( - 1:1); yticks(0:1)
```

运行程序,得到如图 10-12 所示的二维积分区域。

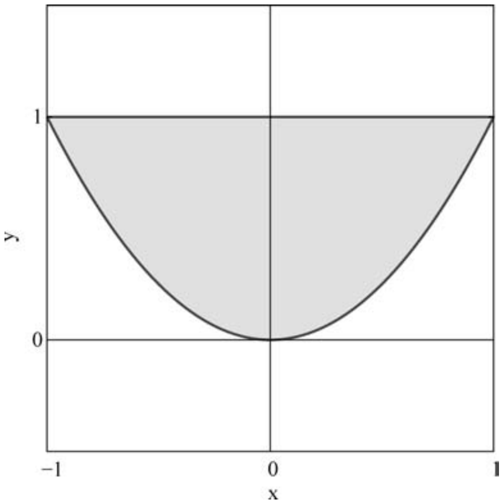

图 10-12　二维积分区域

例 10-14　确定两个椭圆抛物面与圆柱所围几何体的体积。

解:

```
syms r x y z theta
LP = z == 2 * x^2 + y^2; UP = z == 8 - x^2 - 2 * y^2;      % 上、下抛物面
f = rhs(LP); g = rhs(UP); s = sqrt(1 - x^2); s83 = sqrt(8/3);
CC = x^2 + y^2 == 1;                                         % 圆柱
V = int(int(g - f, y, - s, s), x, - 1, 1)
```

$$V = \frac{13\pi}{2}$$

```
V_appx = double(V)
```

V_appx = 20.4204

```
ct = cos(theta); st = sin(theta); xp = r * ct; yp = r * st;
fp = simplify(subs(f, [x y], [xp yp]));
gp = simplify(subs(g, [x y], [xp yp]));
figure
fsurf(xp, yp, gp, [0 s83 0 2 * pi], 'r', 'MeshDensity', 20); hold on   % 抛物面 z = 8 - x^2 -
                                                                         2 * y^2 之上
fsurf(xp, yp, fp, [0 s83 0 2 * pi], 'g', 'MeshDensity', 20)            % 抛物面 z = 2 * x^2 +
                                                                         y^2 之下
fsurf(ct, st, z, [0 2 * pi - 1 8], 'y', 'MeshDensity', 20)             % 圆柱体 x^2 + y^2 = 1
                                                                         的侧面
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
xticks( - 1:1); yticks( - 1:1); zticks(0:4:8)
```

运行程序，得到如图 10-13 所示的几何体。

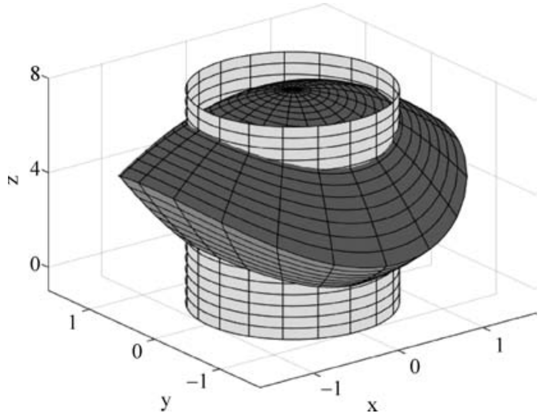

图 10-13　两个椭圆抛物面与圆柱所围的几何体

例 10-15　确定积分 $\int_0^1\int_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 改变积分顺序后的积分上、下限并绘制积分区域。

解：

```
figure
x = linspace(0,1); x = tan(y);
```

```
X = [x 0 0]; Y = [y pi/4 0];
fill(X,Y,'y'); grid on; hold on
plot(X,Y,'b', 'LineWidth', 2)
plot([ - 0.5 1.5], [0 0], 'k')
plot([0 0], [ - 0.5 1.5], 'k')
axis equal; axis([ - 0.5 1.5  - 0.5 1.5])
xlabel('x');
ylabel('y');
xticks(0:1); yticks(0:1)
text(0.5, 0.4, 'y = arctan(x) or x = tan(y)', 'FontSize', 12)
text(0.4, 0.9, 'y = \pi/4', 'FontSize', 12)
text( - 0.25, 0.5, 'x = 0', 'FontSize', 12)
```

运行程序,得到如图 10-14 所示的二维积分区域。

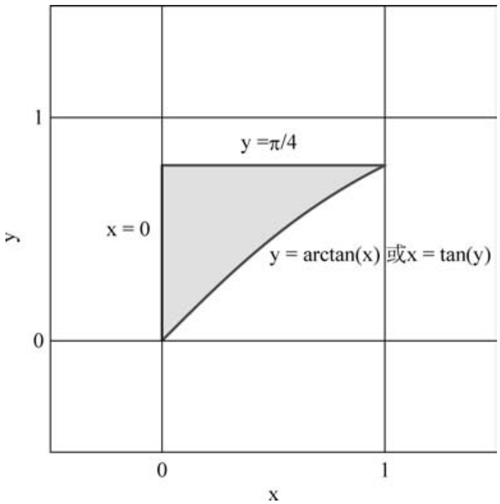

图 10-14　二维积分区域

例 10-16　改变积分 $\int_0^8 \int_{y^{\frac{1}{3}}}^2 e^{x^4} \, dx \, dy$ 的顺序并计算积分。

解:

```
syms x y
I = int(int(exp(x^4), y, 0, x^3), x, 0, 2)
```

$$I = \frac{e^{16}}{4} - \frac{1}{4}$$

```
I_appx = double(I)
```

I_appx = 2.2215e+06

```
figure
xs = linspace(0,2); ys = xs.^3;
X = [xs 2 0]; Y = [ys 0 0];
fill(X,Y,'y'); grid on; hold on
plot(X,Y,'b', 'LineWidth', 2)
plot([-2 4], [0 0], 'k')
plot([0 0], [-1 9], 'k')
axis equal; axis([-2 4 -1 9])
xlabel('x');
ylabel('y');
xticks(0:2:2); yticks(0:2:8)
text(-1.25, 4.6, 'x = y^{1/3} 或 y = x^3', 'FontSize', 12)
text(0.6, -0.5, 'y = 0', 'FontSize', 12)
text(2.5, 3.8, 'x = 2', 'FontSize', 12)
```

运行程序，得到如图 10-15 所示的积分区域。

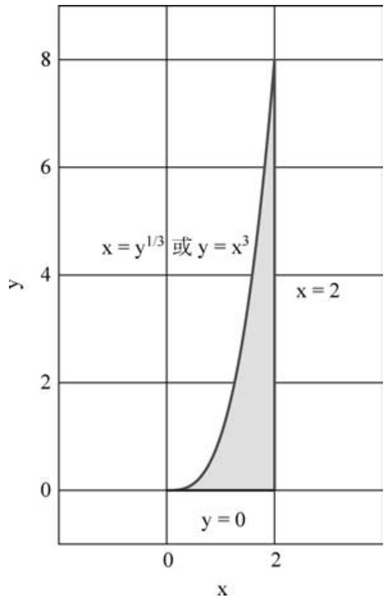

图 10-15　二维积分区域

例 10-17　求平面 $x+y+z=1$ 和曲面 $z=4-x^2-y^2$ 所围几何体的体积。

解：

```
syms r t x y z
plane = x + y + z == 1; paraboloid = z == 4 - x^2 - y^2;
```

```
eq1 = subs(paraboloid, z, 1 - x - y);
eq2 = lhs(eq1) - rhs(eq1) == 0 ;
eq3 = eq2 + 1/4 + 1/4 + 3 ;
c = (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 == 7/2;
xsp = 1/2 + r * cos(t); ysp = 1/2 + r * sin(t);        % 极坐标变换
f = 1 - xsp - ysp;
g = 4 - xsp^2 - ysp^2 ;
V = int(int((g - f) * r, r, 0, sqrt(7/2)), theta, 0, 2 * pi)
```

$$V = \frac{49\pi}{8}$$

```
V_appx = double(V)            % 体积
```

V_appx = 19.2423

```
figure
fsurf(xsp, ysp, g, [0 sqrt(7/2) 0 2 * pi], 'r', 'MeshDensity', 20); hold on   % 抛物面上面
fsurf(xsp, ysp, f, [0 sqrt(7/2) 0 2 * pi], 'g', 'MeshDensity', 10)            % 平面下面
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
axis equal
view( - 40,44)
```

运行程序,得到如图 10-16 所示的积分区域。

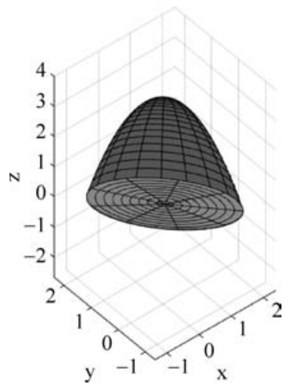

图 10-16　平面 $x+y+z=1$ 和曲面 $z=4-x^2-y^2$ 所围的几何体

10.5.2 四维积分的计算

MATLAB 中的 integral 求积分函数直接支持一维、二维和三维积分。然而，要求解四维和更高阶积分，需要嵌套对求解器的调用。接下来将介绍一个通过使用 integral3 和 integral 的嵌套调用来计算四维球体体积的例子。

已知半径为 r 的四维球体的体积为：

$$V_4(r)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} r^3\sin^2(\theta)\sin(\phi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\xi$$

现在需要计算该球体的数值解。

这是一个四维积分，要实现对它的求解，首先可以为被积函数创建函数句柄 $f(r,\theta,\phi,\xi)$：

```
f = @(r,theta,phi,xi) r.^3 .* sin(theta).^2 .* sin(phi);
```

接下来，创建一个函数句柄，它使用 integral3 计算三个积分：

```
Q = @(r) integral3(@(theta,phi,xi) f(r,theta,phi,xi),0,pi,0,pi,0,2*pi);
```

最后，使用 Q 作为被积函数，用 integral 来对其进行积分。需要为半径 r 选择一个值，此处 $r=2$：

```
I = integral(Q,0,2,'ArrayValued',true)
```

I = 78.9568

得到的确切答案是 $\dfrac{\pi^2 r^4}{2\Gamma(2)}$，然后计算其数值：

```
I_exact = pi^2*2^4/(2*gamma(2))
```

I_exact=78.9568

10.6 上机实践

1. 计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的闭区域。

2. 计算三重积分 $I=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\mathrm{d}y\int_{-2}^{2}(\sin x^2+z^2\cos y)\,\mathrm{d}x$ 的数值解并验证数值解的准确性。

3. 计算三重积分

$$I=\iiint_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}v$$

其中,Ω 由曲面 $z=xy$,$x+y+z=1$ 及 $z=0$ 围成。

4. 计算三重积分

$$I=\iiint_{\Omega} \frac{x^2+y^2}{2}\,\mathrm{d}v$$

其中,Ω 由曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=8$ 围成。