第5章 离散时间信号与系统的时域分析

CHAPTER 5

教学目标：

(1) 培养学生的团队合作精神、工匠精神、规矩意识和系统观。

(2) 了解离散信号的定义与时域特性。

(3) 掌握离散信号的各种变换和运算。

(4) 理解建立简单离散系统的数学模型——差分方程，并会求解。

(5) 理解离散系统状态与初始状态(初始条件)的意义和内涵。

(6) 掌握离散系统的零输入响应、零状态响应、全响应、单位脉冲响应的求解方法。

(7) 培养学生具备数学概念、物理概念与工程概念相统一的意识。

学习重点：

(1) 离散时间信号的时域描述与时域特性。

(2) 离散时间系统数学模型的建立。

(3) 离散时间系统的时域分析。

教学难点：

(1) 卷积和的运算。

(2) 离散系统响应(零输入响应、零状态响应、全响应、单位脉冲响应)的时域求解方法。

5.1 离散时间信号及其时域特性

5.1.1 离散时间信号

离散时间信号简称离散信号(discrete signal)，也称为序列，仅在一系列离散的时刻才有定义，记作 $x(n)$或 $y(n)$。它既可以表示按某一规律变化的一组数据，也可以是连续时间信号的样本。

如果 $x(n)$是通过观测得到的一组离散数据，则它可以用集合符号表示，如

$$x(n)=\{\cdots,1.3,2.5,\underset{\uparrow}{3.3},1.9,0,4.1,2,\cdots\} \tag{5-1-1}$$

其中，箭头处为 $n=0$ 时的数据值。

如果对连续时间信号 $x(t)$(简称连续信号)，也称为模拟信号(analog signal)，以采样间隔 T 进行等间隔采样，便得到离散时间信号 $x(n)$

$$x(n)=x(t)\big|_{t=nT}=x(nT),\quad -\infty<n<+\infty \tag{5-1-2}$$

对于不同的 n 值，$x(nT)$是一个有序的数值序列

$$\{\cdots,x(-2T),x(-T),x(0),x(T),x(2T),\cdots\}$$

这里 n 取整数，非整数时无定义。该数值序列就是时域离散信号。在实际中，该数值序列的各个数值按顺序存放在存储器中，此时的 nT 仅代表前后顺序，故采样间隔 T 略去后形成 $x(n)$，称为序列。

因此，对于具体信号而言，$x(n)$既代表序列的第 n 个数值，也等于连续信号 $x(t)$在 nT 时刻的采样值。离散时间信号 $x(n)$随 n 的变化规律，还可以用公式法或图形法表示。若

$$x(n)=\frac{n(n+1)}{2},\quad n=\cdots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots \tag{5-1-3}$$

它的函数值是一个序列 $x(n)=\{\cdots,6,3,1,0,\underset{\uparrow}{0},1,3,6,\cdots\}$，则式(5-1-3)为序列 $x(n)$的公式法表示；其图形法表示如图 5-1-1 所示，不同 n 处每条垂直线的端点为序列 $x(n)$实际的函数值。

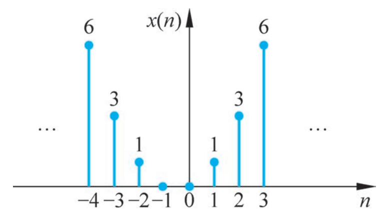

图 5-1-1　离散信号 $x(n)$的波形表示

数字信号(digital signal)与离散时间信号不同，其区别在于，数字信号不仅在一系列离散时刻上有定义，而且定义的信号值是量化的，即数字信号在时间和幅度上的取值均为离散化的。今后所讨论的离散时间信号可以是数字信号，也可以不是，两者在分析方法上并无区别。

5.1.2　离散时间信号的时域运算和变换

视频讲解

对离散时间信号的处理，实质就是对序列进行各种数学变换或数学运算转变为另一序列。在时域中最基本、最简单的变换(自变量运算)有反折、时移以及尺度变换；最基本、最简单的运算(因变量运算)有加法、乘法、数乘、累加和、倒相以及差分运算。这些变换或运算的处理过程可以通过算法用计算机来实现，也可以让序列通过不同的实体电路或系统来实现。同时，在实际中，这些变换或运算更是复杂处理过程的构成基础，因此，有必要介绍它们的基本概念。

1. 反折

将序列 $x(n)$的自变量 n 用$-n$ 替换，生成新序列 $y(n)=x(-n)$，其波形是 $x(n)$以 $n=0$ 为轴的反转波形，参见 5.5 节例 5-21(1)。

2. 时移(时延、平移)

序列 $x(n)$右移或左移 n_0 个序号，生成新序列 $y(n)=x(n\mp n_0)$，右移取“$-$”号，左移取“$+$”号，参见 5.5 节例 5-21(2)、(3)。

3. 尺度

将序列 $x(n)$的自变量 n 用 mn 或$\frac{n}{m}$替换，生成新序列 $y(n)=x(mn)$或 $y(n)=x\left(\frac{n}{m}\right)$称为对 $x(n)$的抽取或插值，也称为尺度变换。它是将原序列样本个数减少或增加的运算，对序列 $x(n)$的 m 倍抽取为 $y(n)=x(mn)$，表示序列 $x(n)$中每隔 $m-1$ 点抽取一样值；对序列 $x(n)$的 m 倍插值为 $y(n)=x\left(\frac{n}{m}\right)$，表示序列 $x(n)$中每两点之间插入 $m-1$ 个零值。需

要指出的是，$y(n)$仅在 mn 或$\dfrac{n}{m}$为整数时才有意义，尺度变换可能会使部分信号丢失或改变，因此，在数字信号处理领域中，将专门研究序列的尺度变换，即序列的抽取或插值理论，参见 5.5 节例 5-21(6)、(7)。

4. 加法

序列的相加，是指两个序列 $x_1(n)$、$x_2(n)$同序号的数值逐项对应相加，而构成一个新的序列 $x(n)=x_1(n)+x_2(n)$，如图 5-1-2 所示。

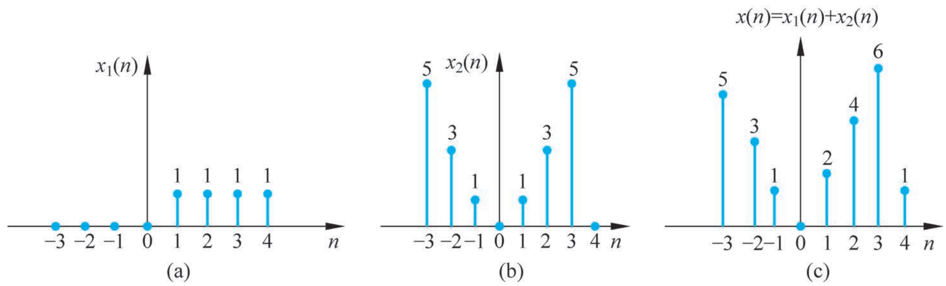

图 5-1-2 序列的加法

5. 乘法

序列的相乘，是指两个序列 $x_1(n)$、$x_2(n)$同序号的数值逐项对应相乘，而构成一个新的序列 $x(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$。

例 5-1 已知序列 $x_1(n)=\{0,0,0,0,\underset{\uparrow}{1},1,1,1\}$、$x_2(n)=\{6,3,1,0,\underset{\uparrow}{0},1,3,6\}$，试求 $x_1(n)\cdot x_2(n)$。

解： $x_1(n)\cdot x_2(n)=\{0,0,0,0,\underset{\uparrow}{0},1,3,6\}$。

6. 数乘

序列的数乘定义为

$$y(n)=kx(n)$$

式中，k 为常数值，因此 $y(n)$是将序列 $x(n)$各序号的数值逐项乘以常数 k 后生成的一个新序列。

7. 累加和

序列的累加和定义为

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}x(i)$$

这是与连续系统中的积分相对应的运算。

例 5-2 已知序列 $x(n)=\{0,0,0,0,\underset{\uparrow}{1},1,1,1\}$，试求 $x(n)$的累加和。

解： $y(n)=\sum\limits_{i=-\infty}^{n}x(i)=\{0,0,0,0,\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$。

8. 倒相

序列的倒相定义为

$$y(n)=-x(n)$$

9. 差分

序列的差分运算分为前向差分和后向差分，一阶后向差分为$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$，一阶前向差分为$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$，参见5.5节例5-21(9)、(10)。

5.1.3 常用的典型离散时间信号

本节介绍的单位样值序列、单位阶跃序列和斜变序列等常用的典型离散时间信号与相应的连续时间信号有一定的对应关系，但也有一些重要差别，在学习时，请读者特别注意比较它们之间的异同点。

1. 单位样值序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\0, & n\neq 0\end{cases} \tag{5-1-4}$$

单位样值序列也可以称为单位采样序列或单位脉冲序列，特点是仅在$n=0$时取值为1，其他均为0。它类似于连续信号的单位冲激函数$\delta(t)$，但不同的是，$\delta(t)$在$t=0$时，取值无穷大，$t\neq 0$时取值为0，对时间t的积分为1。单位样值序列和单位冲激信号如图5-1-3所示。

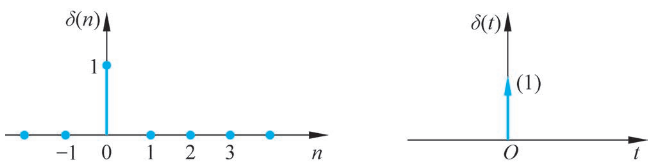

图5-1-3　单位样值序列和单位冲激信号

2. 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\0, & n<0\end{cases} \tag{5-1-5}$$

单位阶跃序列如图5-1-4所示。它类似于模拟信号中的单位阶跃函数$u(t)$。$\delta(n)$与$u(n)$之间的关系如下：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{5-1-6}$$

$$u(n)=\sum_{i=0}^{+\infty}\delta(n-i) \tag{5-1-7}$$

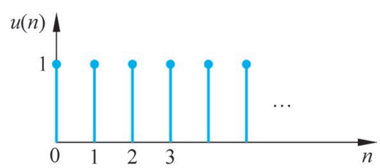

图5-1-4　单位阶跃序列

可见，$\delta(n)$为$u(n)$的一阶后向差分，若令$n-i=m$，代入式(5-1-7)，得到

$$u(n)=\sum_{m=0}^{n}\delta(m) \tag{5-1-8}$$

3. 单位矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\0, & \text{其他}\end{cases} \tag{5-1-9}$$

式中，N称为单位矩形序列的长度。当$N=4$时，$R_4(n)$的波形如图5-1-5所示。单位矩形序列可用单位阶跃序列表示为

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N) \tag{5-1-10}$$

4. 斜变序列

斜变序列是包络为线性变化的序列,其波形如图 5-1-6 所示。斜变序列可表示为

$$x(n)=nu(n) \tag{5-1-11}$$

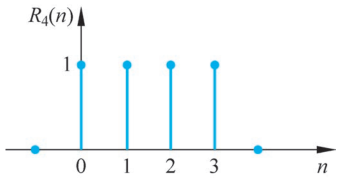

图 5-1-5　单位矩形序列

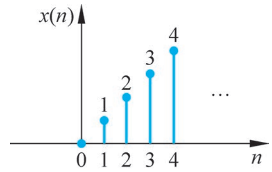

图 5-1-6　斜变序列

5. 实指数序列

$$x(n)=a^n,\quad a\ 为实数 \tag{5-1-12}$$

若$|a|<1$,则$x(n)$的幅度随n的增大而减小,称$x(n)$为收敛序列;若$|a|>1$,则$x(n)$的幅度随n的增大而增大,称$x(n)$为发散序列,其波形如图 5-1-7 所示。

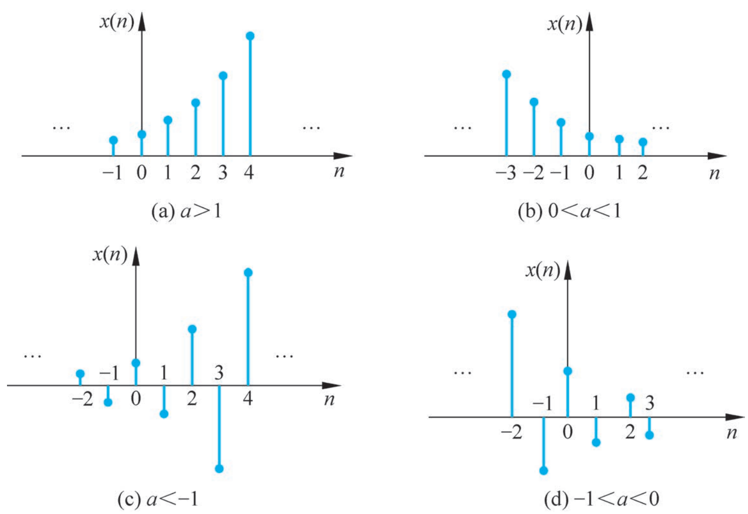

图 5-1-7　实指数序列

6. 正弦序列

若正弦序列变化的速率,或者相邻两个序列值之间变化的弧度数为ω,称为数字域角频率,其单位是弧度,则正弦序列可表示为

$$x(n)=\sin(\omega n) \tag{5-1-13}$$

或

$$x(n)=\cos(\omega n) \tag{5-1-14}$$

如果正弦序列是由模拟信号$x(t)$采样得到的,采样间隔为T,在数值上,序列值与信号采样值相等,那么

$$x(t)=\sin(\Omega t)$$

$$x(t)\big|_{t=nT}=\sin(\Omega nT)$$

$$x(n)=\sin(\omega n)$$

由此得到数字角频率ω与模拟角频率Ω之间的关系为

$$\omega = \Omega \cdot T \tag{5-1-15}$$

式(5-1-15)具有普遍意义，它表示凡是由模拟信号采样得到的序列，模拟角频率 Ω 与序列的数字角频率 ω 呈线性关系。由于采样频率 f_s 与采样周期 T 互为倒数，式(5-1-15)也可以表示为

$$\omega = \frac{\Omega}{f_s} \tag{5-1-16}$$

或

$$\Omega = \omega f_s \tag{5-1-17}$$

7. 虚指数序列

虚指数序列定义为

$$x(n) = e^{j\omega n} \tag{5-1-18}$$

利用欧拉公式可以建立虚指数序列和正弦序列之间的联系：

$$\cos(\omega n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}) \tag{5-1-19}$$

$$\sin(\omega n) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}) \tag{5-1-20}$$

$$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n) \tag{5-1-21}$$

值得注意的有以下两点。

(1) 由于 n 取整数，ω 为数字域频率，则下面等式成立：

$$e^{j\omega n} = e^{j(\omega + 2\pi M)n}, \quad M \text{ 是不为零的整数} \tag{5-1-22}$$

因此，研究离散时间虚指数序列时，信号的数字角频率 ω 只需在一个 2π 间隔内取值即可，也就是说，离散时间虚指数序列对于数字角频率 ω 具有周期性。

(2) 虚指数序列 $e^{j\omega n}$ 还可表示为

$$e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+N)}, \quad N \text{ 是不为零的整数} \tag{5-1-23}$$

若

$$N = \frac{2\pi M}{\omega}, \quad M = 0, \pm 1, \pm 2 \tag{5-1-24}$$

即

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{M}{N} = \text{有理数} \tag{5-1-25}$$

则离散时间虚指数序列对于自变量 n 具有周期性。

这两点结论同样适应于正弦序列。

8. 复指数序列

复指数序列定义为

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega)n} = a^n e^{j\omega n} = a^n \cos(\omega n) + ja^n \sin(\omega n) \tag{5-1-26}$$

其中，$a = e^{\sigma}$，式(5-1-26)表明复指数序列还可以用极坐标形式或实、虚部形式表示。实部、虚部分别是幅度按指数规律变化的正弦序列。$|a|>1$ 为增幅正弦序列，$|a|<1$ 为衰减正弦序列，$|a|=1$ 为等幅正弦序列；$\omega=0$ 时复指数序列变为实指数序列。

以上介绍了 8 种常用典型序列，对任意序列，常用单位采样序列的移位加权和表示，即

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m) \tag{5-1-27}$$

式(5-1-27)中，

$$\delta(n-m)=\begin{cases}1, & n=m\\0, & n\neq m\end{cases} \tag{5-1-28}$$

例如，序列 $x(n)=\{-2,0.5,\underset{\uparrow}{2},1,1.5,0,-1,2,1\}$，就可依据式(5-1-27)表示成

$$x(n)=-2\delta(n+2)+0.5\delta(n+1)+2\delta(n)+\delta(n-1)+1.5\delta(n-2)-\delta(n-4)+2\delta(n-5)+\delta(n-6)$$

这种任意序列的表示方法，在信号分析中是一个很有用的公式。

5.1.4 MATLAB 实现

例 5-3 用 MATLAB 实现单位斜变序列 $x(n)=n, n\in[2,10]$。

解： 编写在区间[2,10]上单位斜变序列的程序如下，执行该程序，绘制的波形如图 5-1-8 所示。

```
n = [2:1:10];
x = n;
stem(n,x,'filled');                    % 绘制阶梯图
xlabel('n');                           % x 轴说明
ylabel('x(n)');                        % y 轴说明
title('Ramp Sequence');                % 图形说明
grid;                                  % 加网格
```

例 5-4 用 MATLAB 画出正弦序列 $x_1(n)=\cos(n\pi/8)$，$x_2(n)=\cos(2n)$的时域波形图，并观察它们的周期性。

解： 用 MATLAB 绘制上述序列的时域波形，编写的程序如下。

```
n = 0:40;
subplot(2,1,1);                        % 选择 2 * 1 个区中的 1 号区
stem(n,cos(n * pi/8),'filled');        % stem 函数绘制阶梯图
title('cos(n * pi/8)');                % 图形说明
subplot(2,1,2);                        % 选择 2 * 1 个区中的 2 号区
stem(n,cos(2 * n),'filled');
title('cos(2 * n)');                   % 图形说明
```

MATLAB 绘制的序列波形如图 5-1-9 所示。由绘制的波形序列图可以明显看出，序列 $x_1(n)=\cos(n\pi/8)$为周期序列，序列 $x_2(n)=\cos(2n)$为非周期序列。分析可知，对序列 $x_1(n)=\cos(n\pi/8)$，其角频率 $\omega=\frac{\pi}{8}$，$\frac{2\pi}{\omega}=16$，故该序列是周期序列，且周期为 16。对序列 $x_2(n)=\cos(2n)$，其角频率 $\omega=2$，$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$(无理数)，故该序列是非周期序列。

例 5-5 用 MATLAB 绘制序列 $x_1(n)=\left(\frac{5}{4}\right)^n u(n)$，$x_2(n)=\left(-\frac{3}{4}\right)^n u(n)$的时域波形图，并观察两序列的时域特性。

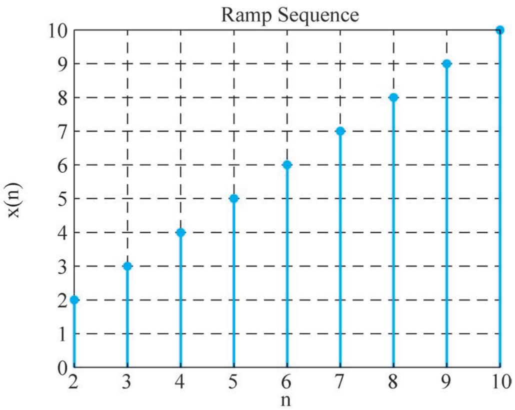

图 5-1-8　单位斜变序列

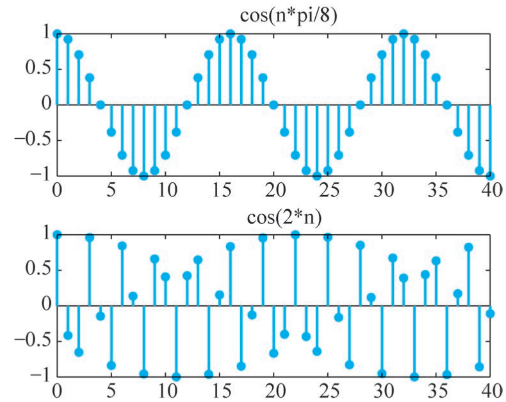

图 5-1-9　不同频率的正弦序列

解： 应用 MATLAB 编写的实现程序如下。

```
n = 0:15;
subplot(2,1,1);
x = (5/4).^n;                              %第一个指数函数
stem(n,x,'filled');xlabel('n');title('x1(n)')
subplot(2,1,2);
x = (-3/4).^n;                             %第二个指数函数
stem(n,x,'filled');xlabel('n');title('x2(n)')
```

绘制的离散实指数序列的波形如图 5-1-10 所示。由程序绘制的序列波形图可以看出，对离散时间实指数序列 $x(n)=a^n$，当 a 的绝对值大于 1 时，序列为发散的序列，当 a 的绝对值小于 1 时，序列为随机收敛的序列。

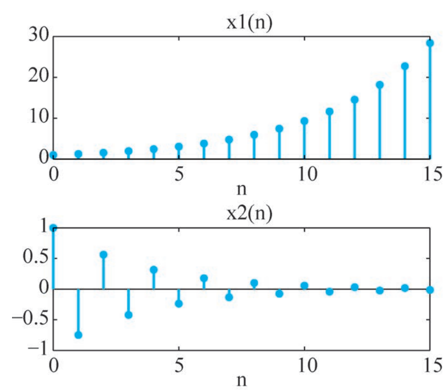

图 5-1-10　离散时间序列的波形图

1. 绘制常用序列

1）单位序列

MATLAB 绘制单位序列 $\delta(n+n_0)$ 的子程序如下，其中 n_0 为 $\delta(n)$ 在时间轴上的位移量，$n_0<0$ 时右移，$n_0>0$ 时左移，n_1 和 n_2 为时间序列的起始和结束时间序号，且 $n_1 \leqslant n_0 \leqslant n_2$。

```
function dwxulie(n1,n2,n0)
n = n1:n2;
k = length(n);
f = zeros(1,k);
f(1,-n0-n1+1) = 1;
stem(n,f,'filled')
axis([n1,n2,0,1.5])
title('单位序列 δ(n)')
```

调用 dwxulie(−5,−5,0)，波形如图 5-1-11 所示。

2）单位阶跃序列

绘制单位阶跃序列 $u(n+n_0)$ 的 MATLAB 子程序（n_0，n_1，n_2 的含义同上）如下。

```
function jyxulie(n1,n2,n0)
n = n1: - n0 - 1;
nn = - n0:n2;
k = length(n);
kk = length(nn);
u = zeros(1,k);
uu = ones(1,kk);
stem(nn,uu,'filled')
hold on
stem(n,u,'filled')
hold off
title('单位阶跃序列')
axis([n1 n2 0 1.5])
```

调用 jyxulie(－3,8,0),波形如图 5-1-12 所示。

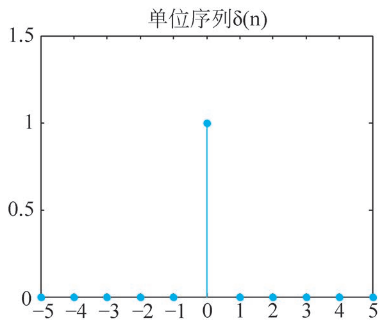

图 5-1-11　单位序列波形

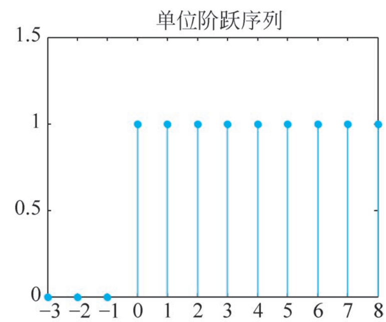

图 5-1-12　单位阶跃序列波形

3）离散时间实指数序列

绘制实指数序列波形的子程序如下。

```
function dszsu(c,a,n1,n2)
%c: 指数序列的幅度
%a: 指数序列的底数
%n1: 绘制序列的起始序号
%n2: 绘制序列的终止序号
n = n1:n2;
x = c * (a.^n);
stem(n,x,'filled')
hold on
plot([n1,n2],[0,0])
hold off
```

4）离散时间虚指数序列

绘制虚指数序列波形的子程序如下。

```
function[ ] = dxzsu(n1,n2,w)
%n1: 绘制波形的虚指数序列的起始时间序号
%n2: 绘制波形的虚指数序列的终止时间序号
%w: 虚指数序列的角频率
k = n1:n2;
f = exp(i * w * k);
Xr = real(f)
Xi = imag(f)
Xa = abs(f)
```

```
Xn = angle(f)
subplot(2,2,1), stem(k,Xr,'filled'),title('实部');
subplot(2,2,3), stem(k,Xi,'filled'),title('虚部');
subplot(2,2,2), stem(k,Xa,'filled'),title('模');
subplot(2,2,4), stem(k,Xn,'filled'),title('相角');
```

5）复指数序列

绘制复指数序列时域波形的子程序如下。

```
function dfzsu(n1,n2,r,w)
%n1: 绘制波形的虚指数序列的起始时间序号
%n2: 绘制波形的虚指数序列的终止时间序号
%w: 虚指数序列的角频率
%r: 指数序列的底数
k = n1:n2;
f = (r * exp(i * w)).^k;
Xr = real(f);
Xi = imag(f);
Xa = abs(f);
Xn = angle(f);
subplot(2,2,1), stem(k,Xr,'filled'),title('实部');
subplot(2,2,3), stem(k,Xi,'filled'),title('虚部');
subplot(2,2,2), stem(k,Xa,'filled'),title('模');
subplot(2,2,4), stem(k,Xn,'filled'),title('相角');
```

调用 dfzsu(0,20,—3,10)，波形如图 5-1-13 所示。

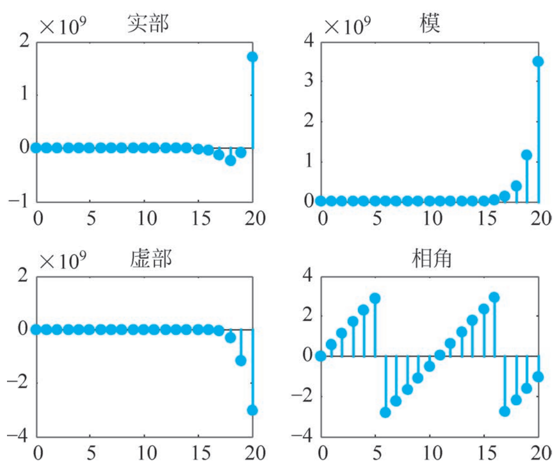

图 5-1-13 复指数序列波形

2. 离散序列的时域运算及时域变换

对于离散序列来说，序列相加、相乘是将两序列对应时间序号的值逐项相加或相乘，平移、反折及倒相变换与连续信号的定义完全相同。但需注意，与连续信号不同的是，在MATLAB 中，离散序列的时域运算和变换不能用符号运算实现，而必须用向量表示的方法，即在 MATLAB 中离散序列的相加、相乘需表示成两个向量的相加、相乘，因而参与运算的两序列向量必须具有相同的维数。

1）离散序列相加及其结果可视化的实现

下面的函数对于相加运算的二序列向量 $\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{f}_2$ 通过补零的方式成为同维数的二序列

向量 s_1、s_2。因而在调用该函数时,要进行相加运算的二序列向量维数可以不同。

```
function [f,n] = lsxj(f1,f2,n1,n2)
n = min(min(n1),min(n2)):max(max(n1),max(n2));
s1 = zeros(1,length(n));
s2 = s1;
s1(find((n >= min(n1))&(n <= max(n1)) == 1)) = f1;
s2(find((n >= min(n2))&(n <= max(n2)) == 1)) = f2;
f = s1 + s2;
stem(n,f,'filled')
axis([(min(min(n1),min(n2)) - 1),(max(max(n1),max(n2)) + 1),(min(f) - 0.5),(max(f) + 0.5)]);
```

2)离散序列相乘及其结果可视化的实现

与相加运算类似,自行编制子函数并举例验证。

3)离散序列反折及 MATLAB 实现

离散序列的反折,即是将表示离散序列的两向量以零时刻的取值为基准点,以纵轴为对称反折,向量的反折可用 MATLAB 中的 fliplr()函数实现。

下面就是用 MATLAB 来实现离散序列反折及其结果可视化的子函数。

```
function [f,n] = lsfz(f1,n1)
f = fliplr(f1);n = - fliplr(n1);
stem(n,f,'filled');
axis([min(n) - 1,max(n) + 1, min(f) - 0.5,max(f) + 0.5]);
```

4)离散序列平移及 MATLAB 实现

离散序列的平移可看作将离散序列的时间序号向量平移,而表示对应时间序号点的序列样值不变,当序列向左移动 n_0 个单位时,所有时间序号向量都减小 n_0 个单位,反之则增加 n_0 个单位。可用下面的子函数来实现。

```
function [f,k] = lsyw(ff,nn,n0)
n = nn + n0;f = ff;
stem(n,f,'filled');
axis([min(n) - 1,max(n) + 1,min(f) - 0.5,max(f) + 0.5]);
```

5)离散序列倒相变换及 MATLAB 实现

离散序列的倒相可看作将表示序列样值的向量取反,而对应的时间序号向量不变得到的离散时间序列。可用下面的子函数来实现。

```
function [f, nk] = lsdx(ff,nn)
f = - ff;
n = nn;
stem(n,f,'filled');
axis([min(n) - 1,max(n) + 1,min(f) - 0.5,max(f) + 0.5]);
```

5.2 离散时间系统及其数学描述

用于传输和处理离散时间信号的系统称为离散时间系统,简称离散系统。其作用是将输入序列 $x(n)$转变为输出序列 $y(n)$,输入、输出序列和离散系统的相互关系如图 5-2-1 所示,即离散系统的功能是完成激励信号 $x(n)$转变为响应信号 $y(n)$的运算,记为

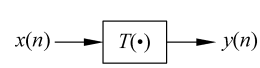

图 5-2-1 离散时间系统

$$y(n)=T[x(n)] \tag{5-2-1}$$

数字计算机、数字通信系统和数字控制系统的主要部分均属于离散系统。随着数字技术和计算机技术的飞速发展，鉴于离散系统在精度、抗干扰能力和可集成化等方面，比连续系统具有更大的优越性，大量原属于连续信号与系统的问题，越来越多地转化成离散信号与系统的问题加以处理。

关于离散信号与系统的分析，在许多方面都与连续信号与系统的分析相类似，两者之间具有一定的平行关系。在系统特性的描述方面，连续系统输入-输出关系的数学模型是微分方程，离散时间系统输入-输出关系的数学模型是差分方程；在系统分析方法方面，连续系统有时域、频域和 s 域分析法，离散系统有时域、频域和 z 域分析法；在系统响应的分解方面，则都可以分解为零输入响应和零状态响应等。

无疑，在进行离散信号与系统的学习时，经常把它与连续信号与系统相对比，这对于其分析方法的理解、掌握和运用是很有帮助的。但应该指出，既然是两类不同的问题，离散信号与系统有自己的特殊性，和连续信号与系统必然存在一些差别，学习时也应该注意这些差别。

5.2.1　离散时间系统的性质

视频讲解

以下讨论线性时不变(LTI)离散系统的主要特性，包括线性(叠加性和齐次性)、时不变性和因果性。

1. 线性

线性包含两个重要的概念，即齐次性和叠加性。系统的齐次性是指当输入信号增加为原来的 a 倍(数乘运算)时，响应 $y(n)$ 也增加为原来的 a 倍，如图 5-2-2 所示；系统的叠加性是指当几个激励信号同时作用于系统时，系统的总响应等于每个激励单独作用所产生的响应之和，如图 5-2-3 所示。

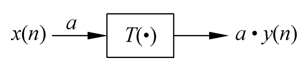

图 5-2-2　线性时不变(LTI)离散系统的齐次性

2. 线性和非线性离散时间系统

同时具有齐次性与叠加性的系统为线性系统，如图 5-2-4 所示；不满足齐次性或叠加性的系统为非线性系统。

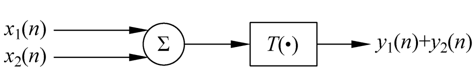

图 5-2-3　线性时不变(LTI)离散系统的叠加性

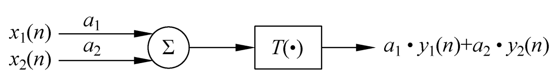

图 5-2-4　线性时不变(LTI)离散系统的线性

3. 时变与时不变离散时间系统

如果一个系统当输入有一个时间上的平移，输出也产生相同的平移，除此之外无其他任何变化，则系统是时不变的；换句话说，当 $y(n)=T[x(n)]$ 时，若有

$$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)] \tag{5-2-2}$$

则系统是时不变的，否则系统是时变的。

系统是否是时变的，其检验方法如下。

令

$$y_1(n)=T[x_1(n)] \tag{5-2-3}$$

$$y_2(n)=T[x_2(n)]=T[x_1(n-n_0)] \tag{5-2-4}$$

考查一下 $y_2(n)$是否等于 $y_1(n-n_0)$？若相等,则系统是时不变的；若不相等,则系统是时变的。

例 5-6 已知系统 $y(n)=T[x(n)]=(n+1)\cdot x(n)$,判断其时变特性。

解：令

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=(n+1)\cdot x_1(n)$$

则

$$y_1(n-n_0)=(n-n_0+1)\cdot x_1(n-n_0)$$

而

$$y_2(n)=T[x_2(n)]=(n+1)\cdot x_2(n)=(n+1)\cdot x_1(n-n_0)$$

因为 $y_2(n)\neq y_1(n-n_0)$,所以该系统是时变的。

4. 因果与非因果系统

在任何时刻系统的输出都只与该时刻以及该时刻以前的输入有关,而与该时刻以后的输入无关,则系统是因果的；如果系统在某时刻的输出与以后的输入有关,则系统为非因果的。

一切物理可实现的连续时间系统都是因果的。对非实时处理的离散时间系统可以实现非因果系统,即先存储、后处理。

例 5-7 已知系统一的输入输出关系为 $y(n)=x(-n)$,系统二的输入输出关系为 $y(n)=x(n)-x(n-1)$,试判断它们的因果特性。

解：系统一在 $n<0$ 时的响应决定于 $n>0$ 以后的输入,所以是非因果系统。

系统二在 n 时刻的响应决定于 n 和 $n-1$ 时刻的输入,所以是因果系统。

5.2.2 离散时间系统的数学模型——差分方程

“兔子数列”与差分方程

【工程案例之三】 “兔子数列”与差分方程

具体内容请扫描二维码查看。

LTI 离散时间系统的输入是离散序列及其延时信号 $x(n),x(n-1),x(n-2),\cdots$,输出是离散序列及其延时信号 $y(n),y(n-1),y(n-2),\cdots$,则输入和输出及其延时、系数乘和相加等线性组合的一般表示如下：

$$\begin{aligned}&a_Ny(n-N)+a_{N-1}y(n-N+1)+\cdots+a_1y(n-1)+y(n)\\&=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_Mx(n-M)\end{aligned}\tag{5-2-5}$$

即

$$y(n)=-\sum_{i=1}^{N}a_iy(n-i)+\sum_{j=0}^{M}b_jx(n-j)\tag{5-2-6}$$

其中,a_i 和 b_j 为常数,$M\leqslant N$,N 为阶数,式(5-2-6)称为后向(或右移序)N 阶常系数线性差分方程,它描述了离散时间系统的输入-输出关系,也称为离散时间系统的数学模型。

差分方程不仅可以用来描述离散时间系统的输入-输出关系,求解微分方程也往往可以借助进行。目前已经知道常系数线性微分方程是 LTI 连续时间系统的数学模型,因此在连续和离散之间可以作某种近似。

例 5-8 对一阶常系数线性微分方程(5-2-7)做变化,近似为差分方程。

$$y'(t)+a_0y(t)=b_0x(t)\tag{5-2-7}$$

解：当 $t=nT$,若时间间隔 T 足够小,$y(t)$代换为 $\dfrac{y(n)+y(n-1)}{2}$,$\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$代换为

$\frac{1}{T}[y(n)-y(n-1)]$，则有

$$\frac{1}{T}[y(n)-y(n-1)]+a_0\frac{y(n)+y(n-1)}{2}=b_0x(n)$$

整理得

$$(a_0T-2)y(n-1)+(2+a_0T)y(n)=2Tb_0x(n) \tag{5-2-8}$$

可见，T 足够小时，式(5-2-7)的一阶常系数线性微分方程近似为式(5-2-8)的一阶常系数线性差分方程，两者在形式上极其相似，且 T 越小，近似程度越好。实际上，利用计算机求解微分方程就是依据这一原理将微分方程近似为差分方程再进行计算的。

以后会逐步看到，不仅微分方程与差分方程在形式上的相似，离散时间信号与系统的分析方法和连续时间信号与系统的分析方法也有着对应的相似关系。

5.2.3　离散时间系统的模拟

连续时间系统可以通过模拟器件，如晶体管、电阻、电容和电感等构成的某种电路来实现，从而完成对连续信号的处理；离散时间系统可用适当的运算单元连接起来加以模拟或实现，从而完成对离散信号的运算处理——数值计算。

1. 基本运算单元

离散时间系统的基本运算单元有延时器、加法器和标量乘法器，如图 5-2-5 所示。它们反映或表示了离散时间系统输入和输出的最基本运算关系，通过基本运算单元构建了有序且更复杂的系统。

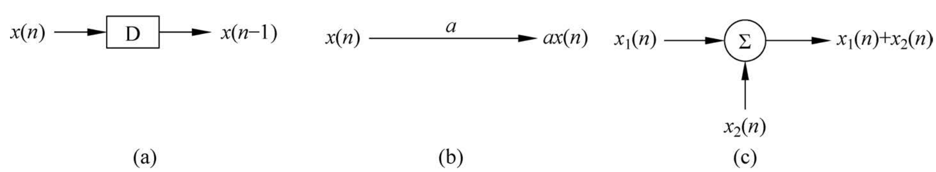

图 5-2-5　离散时间系统的基本运算单元

例 5-9　某离散时间系统由延时器、加法器和标量乘法器组成，其结构如图 5-2-6 所示，求该系统的输入-输出关系，即差分方程。

解： 由图 5-2-6 知加法器输出为 $x(n)+ay(n-1)$，则系统输出为

$$y(n)=x(n)+ay(n-1)$$

即系统的输入-输出关系——差分方程为

$$-ay(n-1)+y(n)=x(n)$$

可见，这是一个一阶离散时间系统。

2. 系统模拟

如何用延时器、加法器和标量乘法器等基本运算单元模拟离散时间系统？例 5-9 表明，若已知系统结构或系统模拟图，则可以唯一地确定系统的输入-输出关系——差分方程。相反，依据离散时间系统的输入-输出关系，即差分方程，也可完成系统模拟，得到系统结构。

例 5-10　已知离散时间系统的差分方程

$$y(n)-\frac{7}{12}y(n-1)+\frac{1}{12}y(n-2)=x(n)-\frac{1}{2}x(n-1)$$

试画出其模拟图。

解：显然，这是一个二阶离散时间系统，由差分方程得

$$y(n)=\frac{7}{12}y(n-1)-\frac{1}{12}y(n-2)+x(n)-\frac{1}{2}x(n-1)$$

注意系统的输入为 $x(n)$，输出为 $y(n)$，得到系统模拟如图 5-2-7 所示。

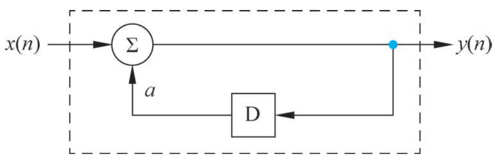

图 5-2-6　某离散时间系统

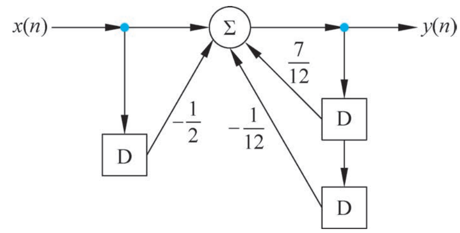

图 5-2-7　某离散时间系统

在实际中，由差分方程完成系统模拟，方法不止一种，模拟图也不唯一。对于一般形式的差分方程

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r),\quad N>M$$

图 5-2-8 给出了 3 种形式的模拟图，图 5-2-8(a)称为直接Ⅰ型，例 5-10 就属于这种形式；直接Ⅰ型模拟图中级联的两部分交换后变形为图 5-2-8(b)；图 5-2-8(b)结构图简化后变形为图 5-2-8(c)结构图，称为直接Ⅱ型。

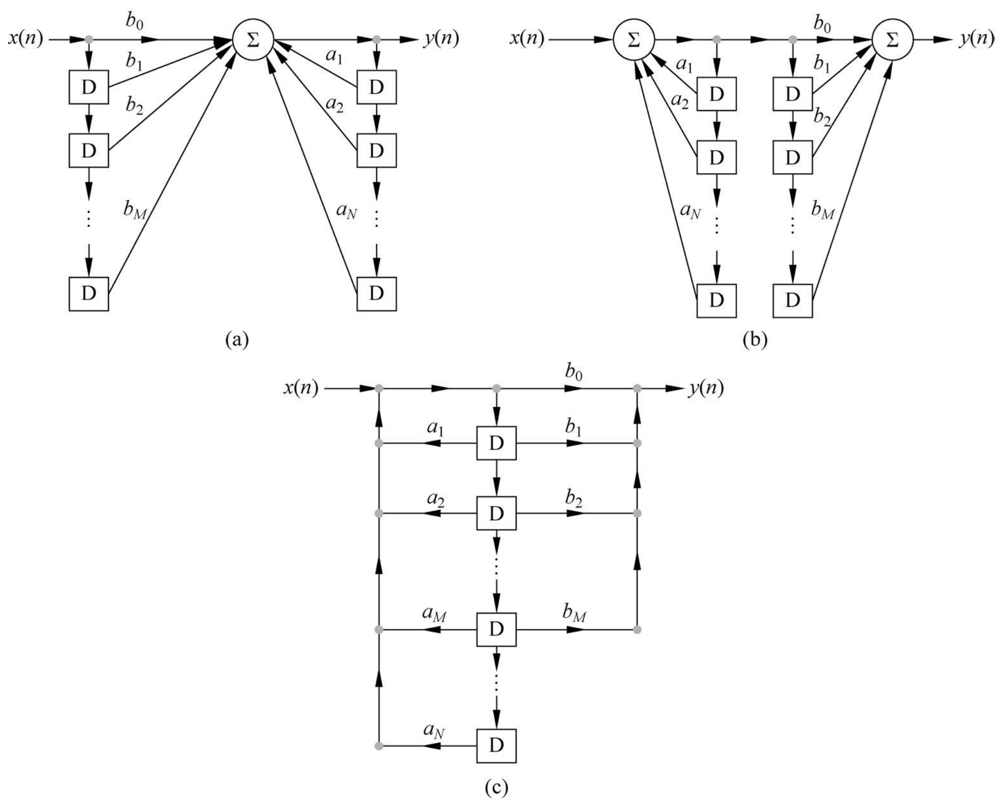

图 5-2-8　离散时间系统的一般结构形式——模拟图

5.3 离散时间系统的响应——时域分析

建立了系统的差分方程后，主要任务之一就是求解这个差分方程，其目的是获得 LTI 离散时间系统的响应。从时域求解常系数线性差分方程的常用方法有递推法、时域经典法、全响应法等，以下将分别详细讨论；变换域求解的方法将在第 6 章介绍；状态变量分析法将在第 7 章介绍。

5.3.1 差分方程的时域求解

1. 递推法

描述 N 阶离散时间 LTI 系统的 N 阶后向常系数差分方程为

$$y(n)=-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)+\sum_{j=0}^{M}b_j x(n-j) \tag{5-3-1}$$

已知 N 个初始状态 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-N)$ 和输入，依据该式可递推求得 $y(n)$。递推法思路清晰，便于编写计算程序，可方便地得到差分方程的数值解，但不易得到解析形式的解。

例 5-11　一阶系统的常系数线性差分方程为 $y(n)-0.5y(n-1)=x(n)$，已知系统初始状态 $y(-1)=1$，输入为 $x(n)=u(n)$，用递推法求解差分方程。

解： 由差分方程得

$$y(n)=0.5y(n-1)+u(n)$$

则

$$\begin{aligned}
y(0)&=0.5y(-1)+u(0)=0.5\times1+1=1.5\\
y(1)&=0.5y(0)+u(1)=0.5\times1.5+1=1.75\\
y(2)&=0.5y(1)+u(2)=0.5\times1.75+1=1.875\\
&\vdots
\end{aligned}$$

2. 时域经典法

如果单输入-单输出的离散时间 LTI 系统的激励为 $x(n)$，响应为 $y(n)$，则描述激励 $x(n)$ 与响应 $y(n)$ 之间关系的 N 阶常系数差分方程的解，由齐次解 $y_{\mathrm{h}}(n)$ 和特解 $y_{\mathrm{p}}(n)$ 两部分组成，即

$$y(n)=y_{\mathrm{h}}(n)+y_{\mathrm{p}}(n) \tag{5-3-2}$$

齐次解的形式由齐次方程的特征根确定，特解的形式由差分方程中激励信号的形式确定。

1) 齐次解 $y_{\mathrm{h}}(n)$

后向 N 阶常系数线性差分方程的齐次方程为

$$\sum_{i=0}^{N}a_i y(n-i)=0 \tag{5-3-3}$$

其特征方程为

$$a_0+a_1\lambda^{-1}+\cdots+a_{N-1}\lambda^{-(N-1)}+a_N\lambda^{-N}=\sum_{i=0}^{N}a_i\lambda^{-i}=0 \tag{5-3-4}$$

或

$$a_0\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + \cdots + a_{N-1}\lambda + a_N = \sum_{i=0}^{N} a_i\lambda^{N-i} = 0 \tag{5-3-5}$$

特征方程的根称为特征根，N 阶差分方程有 N 个特征根 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,N)$，根据特征根的不同情况，齐次解有如下不同的形式。

(1) 特征根为不等的实根，即单根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$，齐次解的通式为

$$y_{\mathrm{h}}(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_N\lambda_N^n = \sum_{i=1}^{N} c_i\lambda_i^n \tag{5-3-6}$$

(2) 特征根 λ 为 N 阶重根，即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_N=\lambda$，齐次解的通式为

$$y_{\mathrm{h}}(n) = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n + \cdots + c_N n^{N-1}\lambda^n = \sum_{i=1}^{N} c_i n^{i-1}\lambda^n \tag{5-3-7}$$

(3) 如果 λ 是特征方程的 r 重特征根，即 r 个重根 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=\lambda$，其余 $N-r$ 个根是单根 $\lambda_j(j=r+1,r+2,\cdots,N)$，齐次解的通式为

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{h}}(n) &= c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n + \cdots + c_r n^{r-1}\lambda^n + c_{r+1}\lambda_{r+1}^n + \cdots + c_N\lambda_N^n \\ &= \sum_{i=1}^{r} c_i n^{i-1}\lambda^n + \sum_{j=r+1}^{N} c_j\lambda_j^n \end{aligned} \tag{5-3-8}$$

(4) 特征方程有共轭复根 $\lambda_1=\alpha+\mathrm{j}\beta=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$，$\lambda_2=\alpha-\mathrm{j}\beta=\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$，齐次解的通式为

$$y_{\mathrm{h}}(n) = c_1\rho^n\cos(n\omega) + c_2\rho^n\sin(n\omega) \tag{5-3-9}$$

式中的待定系数 $c_1,c_2,\cdots,c_N$ 在全解(齐次解+特解)的形式确定后，再由给定的 N 个初始条件来求得。

2) 特解 $y_{\mathrm{p}}(n)$

差分方程特解的形式与激励信号的形式有关。表 5-3-1 列出常用激励信号所对应的特解通式。选定特解后，把它代入原差分方程，求出其中的待定系数 A 或 $A_0,A_1,\cdots,A_N$，就得出方程的特解。

表 5-3-1 常用激励信号所对应的特解通式

激励信号 $x(n)$ 形式	特解 $y_{\mathrm{p}}(n)$ 的通式
$u(n)$	A
a^n(a 不等于差分方程的特征根)	Aa^n
a^n(a 等于差分方程的单特征根)	Ana^n
a^n(a 等于差分方程的 r 重特征根)	$[A_r n^r + A_{r-1}n^{r-1} + \cdots + A_1 n + A_0]a^n$
n^N	$A_N n^N + A_{N-1}n^{N-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$a^n n^N$	$a^n[A_N n^N + A_{N-1}n^{N-1} + \cdots + A_1 n + A_0]$
$\sin(n\omega)$ 或 $\cos(n\omega)$	$A_1\cos(n\omega) + A_2\sin(n\omega)$
$a^n\sin(n\omega)$ 或 $a^n\cos(n\omega)$	$a^n[A_1\cos(n\omega) + A_2\sin(n\omega)]$

3) 完全解 $y(n)=y_{\mathrm{h}}(n)+y_{\mathrm{p}}(n)$

求线性差分方程的完全解，一般步骤如下。

(1) 写出与该差分方程相对应的特征方程，求特征根，并写出其齐次解通式。

(2) 根据原差分方程的激励信号的形式，写出其特解的通式。

(3) 将特解通式代入原差分方程求出待定系数，确定特解形式。

(4) 写出原差分方程的通解的一般形式(即齐次解+特解)。

（5）把初始条件代入，求出齐次解的待定系数值，便可得到差分方程的全解。

例 5-12　描述某离散系统的差分方程为 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$，初始状态 $y(0)=0, y(1)=2$，激励信号 $x(n)=2^n, n\geqslant 0$，求系统的全解 $y(n)$。

解：该差分方程相对应的特征方程为

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

求其特征根为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$，这是两个不等的实根。

齐次解为

$$y_{\mathrm{h}}(n)=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$$

根据激励信号 $x(n)=2^n, n\geqslant 0$，知特解

$$y_{\mathrm{p}}(n)=A(2)^n,\quad n\geqslant 0$$

将特解代入原差分方程求出待定系数，解得 $A=\dfrac{1}{3}$，特解为

$$y_{\mathrm{p}}(n)=\frac{1}{3}(2)^n,\quad n\geqslant 0$$

差分方程的通解

$$y(n)=y_{\mathrm{h}}(n)+y_{\mathrm{p}}(n)=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n+\frac{1}{3}(2)^n,\quad n\geqslant 0$$

代入初始条件

$$y(0)=y_{\mathrm{h}}(0)+y_{\mathrm{p}}(0)=c_1+c_2+\frac{1}{3}=0$$

$$y(1)=y_{\mathrm{h}}(n)+y_{\mathrm{p}}(n)=-c_1-2c_2+\frac{2}{3}=2$$

解得

$$c_1=\frac{2}{3},\quad c_2=-1$$

则差分方程的全解为

$$y(n)=y_{\mathrm{h}}(n)+y_{\mathrm{p}}(n)=\underbrace{\frac{2}{3}(-1)^n-(-2)^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\frac{1}{3}(2)^n}_{\text{强迫响应}},\quad n\geqslant 0$$

差分方程的特解也称为系统的强迫响应，此时不考虑系统的初始状态，其形式及待定系数可依据差分方程由激励信号形式来确定和求解；齐次解也称为系统的自由响应，其形式依据无激励时的齐次方程或特征方程的特征根的情况来确定，其中的待定系数依据差分方程的通解（即齐次解＋特解）由系统的初始状态求解。当 N 阶差分方程的特征根为不等的实根，即单根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ 时，差分方程的全解为

$$y(n)=y_{\mathrm{h}}(n)+y_{\mathrm{p}}(n)=\underbrace{\sum_{i=1}^{N}c_i\lambda_i^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{y_{\mathrm{p}}(n)}_{\text{强迫响应}}\tag{5-3-10}$$

3. 全响应法

离散时间 LTI 系统全响应 $y(n)$ 还可由零输入响应 $y_{\mathrm{zi}}(n)$ 和零状态响应 $y_{\mathrm{zs}}(n)$ 组成，即

视频讲解

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n) \tag{5-3-11}$$

1) 零输入响应 $y_{zi}(n)$

零输入响应是指激励为零时仅由初始状态所引起的响应,此时 N 阶差分方程为 N 阶齐次方程,当特征根为不等的实根,即单根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$ 时,零输入响应为

$$y_{zi}(n)=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n+\cdots+c_N\lambda_N^n=\sum_{i=1}^{N}c_i\lambda_i^n \tag{5-3-12}$$

其中,c_i 为待定系数,直接由 N 个初始状态来确定求解。

2) 零状态响应 $y_{zs}(n)$

零状态响应是指初始状态为零时由输入信号所引起的响应,此时 N 阶差分方程为 N 阶非齐次方程,当特征根为不等的实根,即单根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$ 时,依据零初始状态条件,零状态响应为

$$y_{zs}(n)=\underbrace{\sum_{i=1}^{N}c_{zs}\lambda_i^n}_{\text{齐次解}}+\underbrace{y_p(n)}_{\text{特解}} \tag{5-3-13}$$

其中,待定系数 c_{zs},根据输入形式和零初始状态条件来确定求解。

3) 完全响应

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=\underbrace{\sum_{i=1}^{N}c_{zii}\lambda_i^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{N}c_{zsi}\lambda_i^n+y_p(n)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=y_h(n)+y_p(n)=\underbrace{\sum_{i=1}^{N}c_i\lambda_i^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{y_p(n)}_{\text{强迫响应}}$$

可见,其中

$$\sum_{i=1}^{N}c_i\lambda_i^n=\sum_{i=1}^{N}c_{zii}\lambda_i^n+\sum_{i=1}^{N}c_{zsi}\lambda_i^n \tag{5-3-14}$$

这里,虽然自由响应、零输入响应和零状态响应中的齐次解都具有齐次解的形式,但它们的系数及其解法并不相同,c_{zii} 仅由零输入时的系统初始状态决定,而 c_i 是由激励和系统初始状态共同决定的,c_{zsi} 由激励和零初始状态条件来确定。两种分解方式有明显区别,求解过程中应特别注意区分基本概念、解的形式和求解的条件。

例 5-13 用完全响应法求解例 5-12 中系统的全响应。

分析: 题中给出初始值 $y(0)=0,y(1)=2$,在例 5-12 求解系统全响应时可直接利用此初始值,但若求解系统零状态响应和零输入响应,就需设法分别确定它们各自的初始值。

解: 对于零状态响应初始值,$y(-1)=0,y(-2)=0$,代入原差分方程迭代,得

$$y_{zs}(0)=-3y_{zs}(-1)-2y_{zs}(-2)+x(0)=1$$

$$y_{zs}(1)=-3y_{zs}(0)-2y_{zs}(-1)+x(1)=-1$$

对于零输入响应初始值,$y(0)=y_{zi}(0)+y_{zs}(0),y(1)=y_{zi}(1)+y_{zs}(1)$,可得

$$y_{zi}(0)=y(0)-y_{zs}(0)=-1$$

$$y_{zi}(1)=y(1)-y_{zs}(1)=3$$

(1) 由例 5-12 知,该系统差分方程的特征根为两个不等的实根 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$,零输

入响应为

$$y_{zi}(n)=c_{zi1}(-1)^n+c_{zi2}(-2)^n$$

代入零输入响应初始值，解得

$$c_{zi1}=1,\quad c_{zi2}=-2$$

所以零输入响应为

$$y_{zi}(n)=(-1)^n-2(-2)^n,\quad n\geqslant 0$$

（2）零状态响应

$$y_{zs}(n)=c_{zs1}(-1)^n+c_{zs2}(-2)^n+y_p(n)$$

根据激励信号 $x(n)=2^n$，$n\geqslant0$，特解与例 5-12 相同，知

$$y_p(n)=\frac{1}{3}(2)^n,\quad n\geqslant 0$$

代入上面求出的零初始状态条件：

$$y_{zs}(0)=c_{zs1}+c_{zs2}+\frac{1}{3}=1$$

$$y_{zs}(1)==-c_{zs1}+-2c_{zs2}+\frac{2}{3}=-1$$

解得

$$c_{zs1}=-\frac{1}{3},\quad c_{zs2}=1$$

所以零状态响应为

$$y_{zs}(n)=-\frac{1}{3}(-1)^n+(-2)^n+\frac{1}{3}(2)^n,\quad n\geqslant 0$$

（3）系统的全响应为 $y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$，则有

$$y(n)=\underbrace{(-1)^n-2(-2)^n}_{\text{零输入响应}}\underbrace{-\frac{1}{3}(-1)^n+(-2)^n+\frac{1}{3}(2)^n}_{\text{零状态响应}},\quad n\geqslant 0$$

对比例 5-12 差分方程的全解

$$y(n)=y_h(n)+y_p(n)=\underbrace{\frac{2}{3}(-1)^n-(2)^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\frac{1}{3}(2)^n}_{\text{强迫响应}}$$

可知，两种方法的求解结果相同。

5.3.2　单位样值响应

1. 单位样值响应的定义与作用

如果系统的输入为单位样值信号 $\delta(n)$，初始状态 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-N)$均为零，由 $\delta(n)$产生的系统零状态响应定义为单位样值响应 $h(n)$。单位样值信号 $\delta(n)$和单位样值响应序列 $h(n)$在离散时间系统时域分析中起着十分重要的作用。

在离散时间系统中，激励信号本身是一个离散序列，所以离散激励信号序列中的每个离散量施加于系统，离散系统就输出一个与之相应的响应量，所有响应量叠加起来，便得到系统对任意激励信号的零状态响应，也是一个离散序列。当离散的激励信号序列为

$$x(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}x(i)\delta(n-i) \tag{5-3-15}$$

系统在 $x(n)=\delta(n)$激励作用下，单位样值响应

$$y(n)=T[x(n)]=h(n)$$

由系统的时不变性有

$$\delta(n-i)\rightarrow h(n-i)$$

由齐次性

$$x(i)\delta(n-i)\rightarrow x(i)h(n-i)$$

由叠加性

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}x(i)\delta(n-i)\rightarrow\sum_{i=-\infty}^{+\infty}x(i)h(n-i)$$

故零状态响应

$$y_{zs}(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}x(i)h(n-i) \tag{5-3-16}$$

这种叠加是离散叠加，即为求和运算，而不是积分运算，叠加的过程表现为求卷积和，记作

$$y_{zs}(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}x(i)h(n-i)=x(n)*h(n) \tag{5-3-17}$$

式(5-3-17)表明，系统在任一信号激励下的零状态响应都能够通过单位样值响应与激励信号的卷积和来求解。卷积和的求解方法见 5.4 节。

研究单位样值响应的意义在于单位样值信号是一种基本信号，通过单位样值响应可求解任一信号激励下的零状态响应。此外，通过单位样值响应还可研究系统的性质，它表征了系统本身的传递特性。

2. 单位样值响应的求解

1) 递推法求单位样值响应

欲用时域法求离散系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$，需要先求离散系统的单位样值响应 $h(n)$。通常可用递推法求单位样值响应，方法参见 5.3.1 节递推法求解差分方程，注意在求解过程中，差分方程的右端若只有 $\delta(n)$项时，根据 $\delta(n)$在 $n=0$ 处值为 1，在 $n\geqslant1$ 处值均为零来求出 $h(n)$。

例 5-14 求例 5-11 中一阶系统的单位样值响应。

解： 例 5-11 中一阶系统的差分方程为

$$y(n)-0.5y(n-1)=x(n)$$

则

$$h(n)-0.5h(n-1)=\delta(n)$$

即

$$h(n)=0.5h(n-1)+\delta(n)$$

因为单位样值响应是输入为单位样值信号 $\delta(n)$，初始状态 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-N)$均为零的系统响应，故

$$h(0)=0.5h(-1)+\delta(0)=0.5\times0+1=1$$

$$h(1)=0.5h(0)+\delta(1)=0.5\times1+0=0.5$$

$$h(2)=0.5h(1)+\delta(2)=0.5\times 0.5+0=0.5^2$$
$$\vdots$$

由于递推法不易得出解析形式的解，所以为求得解析形式的解，可采用等效初始条件的零输入响应法。

2）等效初始条件的零输入响应法

当 $n\geqslant 1$ 时，若差分方程的右端为零，则单位样值响应 $h(n)$ 也可按求解零输入响应的方法并依据等效初始条件求出；当 $n\geqslant 1$ 时，若差分方程右端还有移位的信号时，则可进行多步递推，直至方程右端为零，再按求解零输入响应的方法并依据等效初始条件求出 $h(n)$；或分解差分方程右端分别为单个输入情况，求解后再叠加，得出 $h(n)$，参见 5.5 节例 5-27。

5.3.3 MATLAB 实现

例 5-15 已知描述某离散系统的差分方程为

$$2y(n)-2y(n-1)+y(n-2)=x(n)+3x(n-1)+2x(n-2)$$

试用 MATLAB 绘制该系统的单位样值响应的波形。

解： 函数 impz()是 MATLAB 为用户提供的专门用于求离散系统单位样值响应，并绘制其时域波形图的函数。在此题中，可以调用函数 impz()来解决问题。

在调用 impz()时，需要用向量 a 和 b 来对离散系统的差分方程进行表示，a、b 为该离散系统差分方程中 $y(n)$ 和 $x(n)$ 的系数向量，因此 a=[2 −2 1]，b=[1 3 2]。单位样值响应的长度是 n。MATLAB 实现程序如下。

```
a = [2 -2 1];
b = [1 3 2];
n = 30
impz(b,a,n);
```

MATLAB 绘制的系统单位样值响应波形如图 5-3-1 所示。

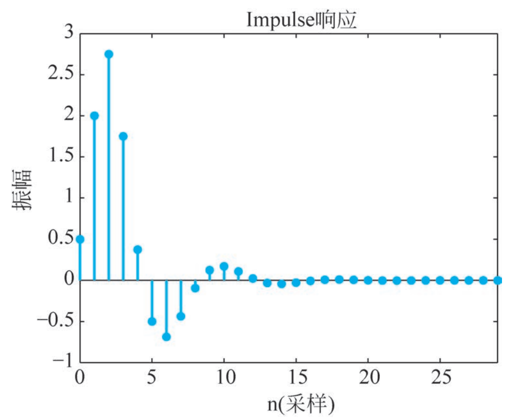

图 5-3-1　离散系统的单位样值响应

5.4 卷积和

LTI 连续时间系统将激励信号分解为一系列冲激函数，分别求出各冲激函数作用于系统的冲激响应，将这些冲激响应相加即得到系统的零状态响应，这一过程称为卷积积分。而在 LTI 离散系统中，使用上述方法同样可以进行系统分析，这一过程称为卷积和。

已知定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的两个序列 $f_1(n)$和 $f_2(n)$，则定义

$$f(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_1(i)f_2(n-i) \tag{5-4-1}$$

为 $f_1(n)$和 $f_2(n)$的卷积和，简称卷积。记为

$$f(n)=f_1(n)*f_2(n) \tag{5-4-2}$$

注意：求和是在虚设的变量 i 下进行的，i 为求和变量，n 为参变量，结果仍为 n 的函数。

在 5.3.2 节中可以看到，离散时间信号卷积和是计算离散时间 LTI 系统零状态响应的有力工具，以下介绍卷积和的性质与计算。

5.4.1 卷积和的性质

1. 卷积和满足交换律、分配律和结合律等代数运算规律

1）交换律

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \tag{5-4-3}$$

从系统的观点解释：一个单位样值响应是 $h(n)$的 LTI 系统对输入信号 $x(n)$所产生的响应，与一个单位样值响应是 $x(n)$的 LTI 系统对输入信号 $h(n)$所产生的响应相同。

2）分配律

$$x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \tag{5-4-4}$$

从系统的观点解释，一个系统由若干 LTI 系统的并联构成，则系统总的单位样值响应等于各子系统单位样值响应之和。

3）结合律

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \tag{5-4-5}$$

从系统的观点解释：一个系统是由若干 LTI 系统级联所构成，则系统总的单位样值响应等于各个 LTI 子系统单位样值响应的卷积和。

2. 卷积和满足时不变性

若

$$x(n) * h(n) = y(n)$$

则

$$x(n-i) * h(n+j) = y(n-i+j) \tag{5-4-6}$$

3. 任意序列与单位样值序列的卷积和，结果仍是该序列本身

$$x(n) * \delta(n) = x(n) \tag{5-4-7}$$

将式(5-4-7)推广，有

$$x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0) \tag{5-4-8}$$

4. 任意序列与单位阶跃序列 $u(n)$的卷积和，结果是该序列的累加和

$$x(n) * u(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} x(i) \tag{5-4-9}$$

5.4.2 卷积和的运算

视频讲解

卷积和的运算方法有很多，基本上可分为解析法、列表法、图解法、竖式法和变换域法等。以下举例对卷积和的运算进行说明，重点介绍解析法、图解法和列表法。

1. 解析法

如果激励信号 $x(n)$和单位样值响应 $h(n)$给定为解析式，系统零状态响应可根据式(5-3-17)的卷积和定义公式，利用离散序列的卷积性质，通过级数求和公式，方便地得出结果。

例 5-16　已知输入序列 $x(n)=\alpha^n u(n)$，$0<\alpha<1$，单位样值响应 $h(n)=u(n)$，求其响应。

解：$y(n)=x(n)*h(n)$

$$=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}x(i)h(n-i)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\alpha^i u(i)u(n-i)=\sum_{i=0}^{n}\alpha^i=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n)$$

注意：确定求和的上、下限具有重要意义。

2. 图解法

用图解法求两序列的卷积和运算，包括信号的反折、位移、相乘、求和 4 个基本步骤。设两个离散函数(序列)为 $x(n)$和 $h(n)$，则其卷积和计算步骤如下。

动画展示

(1) 换元：将 $x(n)$和 $h(n)$中的变量 n 更换成变量 m。

(2) 反折：做出 $h(m)$相对于纵轴的镜像 $h(-m)$。

(3) 位移：将折叠后的 $h(-m)$沿 m 轴平移一个 n 值，得 $h(n-m)$。

(4) 相乘：将移位后的 $h(n-m)$乘以 $x(m)$。

(5) 求和：把 $h(n-m)$和 $x(m)$相乘所得的值相加，即为 n 值下的卷积值。

这里关键是确定参变量 n 在不同区间求和的上、下限。

例 5-17　已知 $x(n)=h(n)=R_4(n)$，用图解法求解 $y(n)=x(n)*h(n)$。

动画展示

解：如图 5-4-1 所示，图 5-4-1(a)为 $x(n)=h(n)=R_4(n)$。

图 5-4-1(b)将 $x(n)$和 $h(n)$更换变量 m，变为 $x(m)=h(m)=R_4(m)$序列。

图 5-4-1(c)将 $h(m)=R_4(m)$反折得到镜像 $h(-m)=R_4(-m)$，即 $h(0-m)=R_4(0-m)$序列。

图 5-4-1(d)将 $h(-m)=R_4(-m)$沿 m 轴平移 $n=1$ 得到 $h(1-m)=R_4(1-m)$序列。

图 5-4-1(e)将 $h(-m)=R_4(-m)$沿 m 轴平移 $n=2$ 得到 $h(2-m)=R_4(2-m)$序列。

在此基础上，将图 5-4-1(b)和图 5-4-1(c)两序列相乘后，各点值相加得到 $y(0)$；图 5-4-1(b)和图 5-4-1(d)两序列相乘后，各点值相加得到 $y(1)$；图 5-4-1(b)和图 5-4-1(e)两序列相乘后，各点值相加得到 $y(2)$；以此类推，最终求得卷积和计算结果 $y(n)$序列，如图 5-4-1(f)所示。

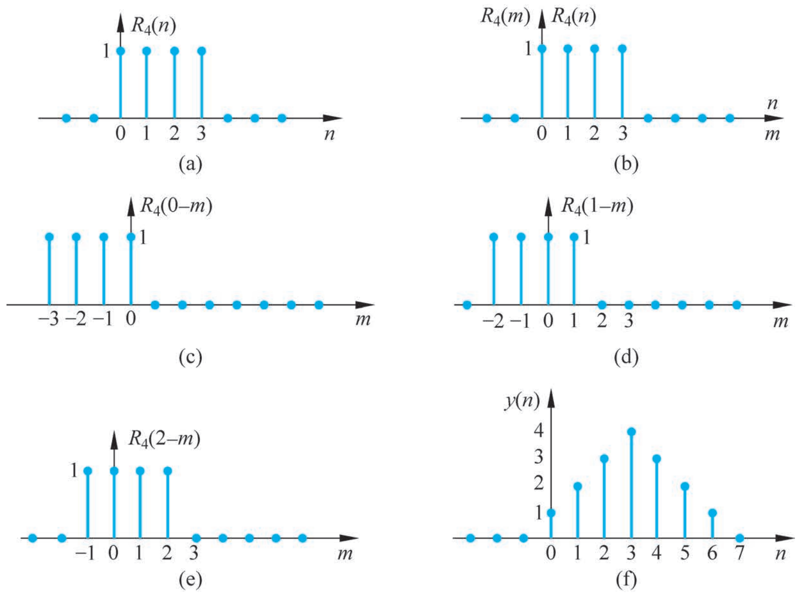

图 5-4-1　图解法计算卷积和的示意图

通过图形确定反折位移信号的区间表示，对于确定卷积和计算的区段及各区段求和的上、下限是很有用的。本题参变量 n 在不同区间求和的上、下限确定如下。

当 $n<0$ 时，

$$y(n)=0$$

当 $0\leqslant n\leqslant 3$ 时，

$$y(n)=\sum_{i=0}^{n}1\times 1=n+1$$

当 $4\leqslant n\leqslant 6$ 时，

$$y(n)=\sum_{i=n-3}^{3}1\times 1=7-n$$

当 $n>6$ 时，

$$y(n)=0$$

3. 列表法

分析卷积和求解过程，可以发现：第一，$x(n)$与 $h(n)$所有的各点都要遍乘一次；第二，在遍乘后，各点相加时，根据 $\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty}x(i)h(n-i)$，参与相加的各点值都是 $x(i)$ 与 $h(n-i)$ 的分量相加。设 $x(n)$ 和 $h(n)$ 都是因果序列，则 $y(n)=\sum\limits_{i=0}^{n}x(i)h(n-i)$，$n\geqslant 0$ 的计算结果如下。

当 $n=0$ 时，

$$y(0)=x(0)h(0)$$

当 $n=1$ 时，

$$y(1)=x(0)h(1)+x(1)h(0)$$

当 $n=2$ 时，

$$y(2)=x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)$$

当 $n=3$ 时，

$$y(2)=x(0)h(3)+x(1)h(2)+x(2)h(1)+x(3)h(0)$$

$$\vdots$$

由此，可以总结为更简便、实用的列表法（对位相乘求和）计算卷积和。以因果序列 $x(n)$和因果系统 $h(n)$为例，如图 5-4-2 所示，这种方法不需要画出序列图形，只要把 $h(n)$ 和 $x(n)$排成一行和一列，行与列交叉点是相应的 $x(n)$与 $h(n)$按普通乘法运算进行相乘，对角斜线上各项就是 $x(i)$与 $h(n-i)$，将位于对角斜线上的中间各项相乘结果再相加就可以得到卷积和序列 $y(n)$。该方法适于两个有限长序列的卷积和计算，对非因果序列同样适用。

例 5-18 用列表法计算 $x(n)=\{1,2,\underset{\uparrow}{0},3,2\}$与 $h(n)=\{1,\underset{\uparrow}{4},2,3\}$的卷积和。

解： 列表计算如图 5-4-3 所示，将位于对角斜线上的中间相乘结果再相加，得

$$y(n)=\{1,6,10,10,20,14,13,6\}$$

$y(n)$的非零数值起始位置在 $n\geqslant -3$。故

$$y(n)=\{1,6,10,\underset{\uparrow}{10},20,14,13,6\}$$

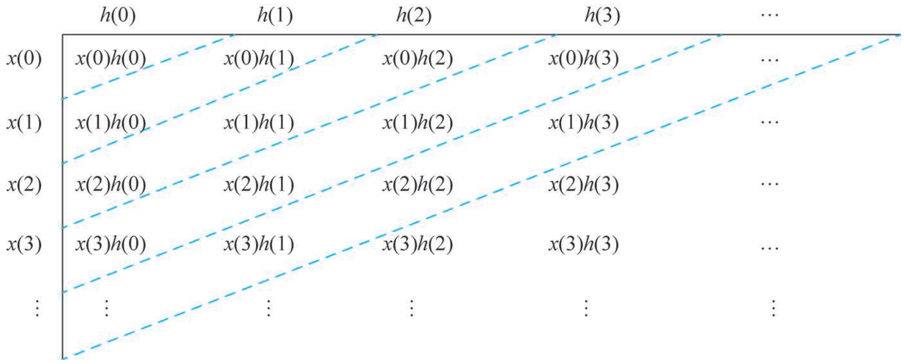

图 5-4-2　列表法计算卷积和的示意图

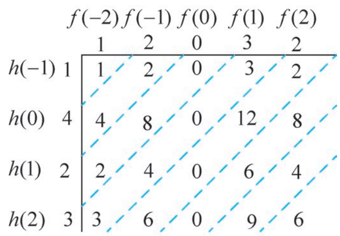

图 5-4-3　列表法计算例 5-18 题卷积和的示意图

解析法通过数学运算能得到闭式解；图解法比较麻烦但非常直观，有利于理解卷积和的计算过程；列表法对有限长序列计算较为方便和有效。

5.4.3　MATLAB 实现

例 5-19　计算 $f_1(n)=u(n)$，$f_2(n)=u(n)-u(n-3)$的卷积和。

解： 调用 conv()函数来解决此问题，相应的 MATLAB 程序如下。

```
% f1: f1(n)样值向量
% n1: f1(n)对应时间向量
% f2: f2(n)样值向量
% n2: f2(n)对应时间向量
% f3: f3(n)样值向量
% n3: f3(n)对应时间向量
n1 = - 5:15;
f1 = [zeros(1,5),ones(1,16)];
subplot(3,1,1)
stem(n1,f1); title('f1(n)')
n2 = n1;
f2 = [zeros(1,5),ones(1,3),zeros(1,13)];
subplot(3,1,2)
stem(n2,f2); title('f2(n)')
n3 = n1(1) + n2(1):n1(end) + n2(end);
f3 = conv(f1,f2);
subplot(3,1,3)
stem(n3,f3); title('f3(n)');
```

MATLAB 程序绘制的序列时域波形如图 5-4-4 所示。

例 5-20　已知某 LTI 离散系统，其单位样值响应 $h(n)=u(n)-u(n-4)$，求该系统在

激励为 $x(n)=u(n)-u(n-3)$ 时的零状态响应 $y(n)$，并绘制其时域波形图。

解：调用 conv()函数来解决此问题，相应的 MATLAB 程序如下。

```
x=[1 1 1 1];
h=[1 1 1];
y=conv(x,h)                         %计算序列 x(n)与 h(n)的卷积和 y
subplot(1,3,1);
stem(0:length(x)-1,x,'filled');title('x(n)');xlabel('n');
subplot(1,3,2);
stem(0:length(h)-1,h,'filled');title('h(n)');xlabel('n');
subplot(1,3,3);
stem(0:length(y)-1,y,'filled');title('x(n)与 h(n)的卷积和 y(n)');xlabel('n');
```

MATLAB 运行结果为

```
y =1    2    3    3    2    1
```

MATLAB 程序绘制的序列时域波形如图 5-4-5 所示。

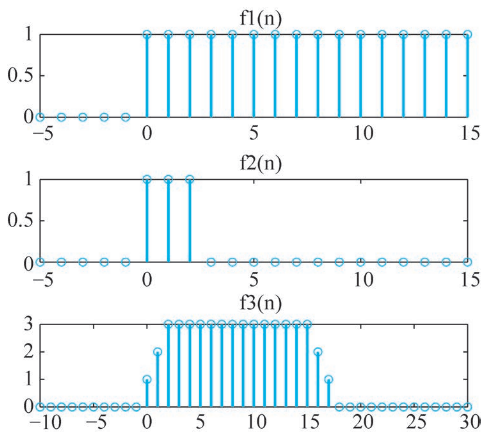

图 5-4-4 序列卷积和图

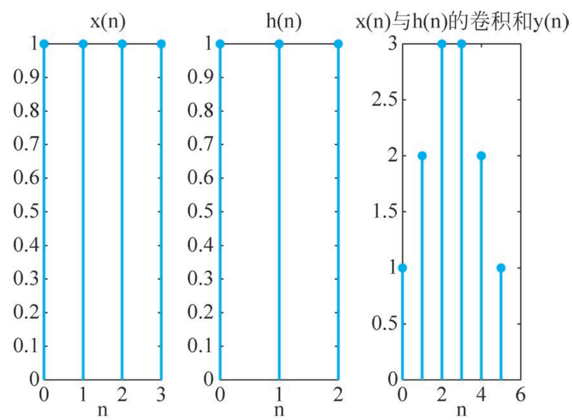

图 5-4-5 离散序列零状态响应卷积图

5.5 典型例题解析

例 5-21 已知 $x(n)=n[u(n)-u(n-7)]$，试分别求下列信号并画出各信号的图形。

(1) $y_1(n)=x(-n)$； (2) $y_2(n)=x(n+1)$；

(3) $y_3(n)=x(n-1)$； (4) $y_4(n)=x(n+1)+x(n-1)$；

(5) $y_5(n)=x(n+1)x(n-1)$； (6) $y_6(n)=x(3n)$；

(7) $y_7(n)=x\left(\dfrac{n}{3}\right)$； (8) $y_8(n)=\sum\limits_{i=-\infty}^{n}x(i)$；

(9) $\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$； (10) $\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$。

解：$x(n)$信号的波形如图 5-5-1(a)，所有待求信号的波形如图 5-5-1(b)～图 5-5-1(k)所示。

式(1)是对 $x(n)$进行反折运算

$$y_1(n)=x(-n)=-n[u(-n)-u(-n-7)]$$

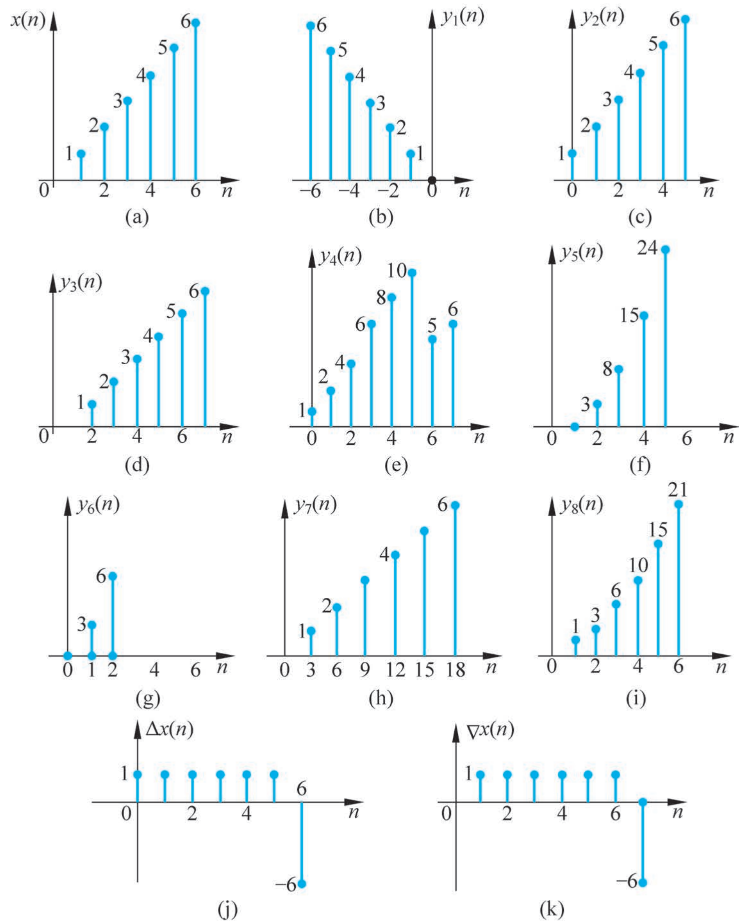

图 5-5-1　所有信号波形图

式(2)、式(3)是对 $x(n)$进行左、右移位运算。将 $x(n)$向前(左)移位一个单位，得

$$y_2(n)=x(n+1)=(n+1)[u(n+1)-u(n-6)]$$

将 $x(n)$向后(右)移位一个单位，得

$$y_3(n)=x(n-1)=(n-1)[u(n-1)-u(n-8)]$$

式(4)是 $y_2(n)$与 $y_3(n)$的相加运算

$$y_4(n)=x(n+1)+x(n-1)=y_2(n)+y_3(n)$$

式(5)是 $y_2(n)$与 $y_3(n)$的相乘运算

$$y_5(n)=x(n+1)\cdot x(n-1)=y_2(n)\cdot y_3(n)$$

式(6)、式(7)是尺度变换，$y_6(n)=x(3n)$将 $x(n)$压缩 3 倍，$y_7(n)=x\left(\frac{n}{3}\right)$将 $x(n)$扩展 3 倍。

式(8)是累加运算

$$y_8(n)=\sum_{i=-\infty}^{n} x(i)$$

式(9)是前向差分

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$$

式(10)是后向差分

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$$

因为 $\Delta x(n-1)=x(n)-x(n-1)$,所以 $\nabla x(n)=\Delta x(n-1)$。

例 5-22 列出图 5-5-2(a)、(b)所示两系统的差分方程,指出其阶数,并判断它们所表示的系统是否相同。

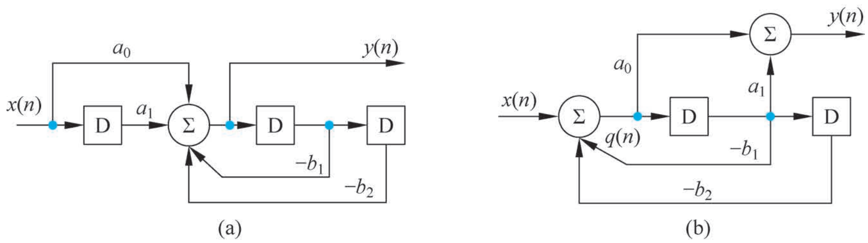

图 5-5-2 系统框图

解: 由图 5-5-2(a)列写差分方程为

$$y(n)=a_0x(n)+a_1x(n-1)-b_1y(n-1)-b_2y(n-2)$$

移项得二阶差分方程

$$y(n)+b_1y(n-1)+b_2y(n-2)=a_0x(n)+a_1x(n-1)$$

由图 5-5-2(b)列写差分方程,其中引用了辅助函数 $q(n)$,得

$$q(n)=x(n)-b_1q(n-1)-b_2q(n-2)$$

$$y(n)=a_0q(n)+a_1q(n-1)$$

由此可知

$$\begin{cases} q(n-1)=x(n-1)-b_1q(n-2)-b_2q(n-3) \\ y(n-1)=a_0q(n-1)+a_1q(n-2) \\ y(n-2)=a_0q(n-2)+a_1q(n-3) \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} y(n)&=a_0[x(n)-b_1q(n-1)-b_2q(n-2)]+a_1[x(n-1)-b_1q(n-2)-b_2q(n-3)] \\ &=a_0x(n)+a_1x(n-1)-b_1[a_0q(n-1)+a_1q(n-2)]- \\ &\quad b_2[a_0q(n-2)+a_1q(n-3)] \\ &=a_0x(n)+a_1x(n-1)-b_1y(n-1)-b_2y(n-2) \end{aligned}$$

整理得

$$y(n)+b_1y(n-1)+b_2y(n-2)=a_0x(n)+a_1x(n-1)$$

可见两图的差分方程相同,它们表示的是同一个二阶离散时间系统。

例 5-23 离散时间系统的差分方程为 $y(n+1)-1.5y(n)+0.5y(n-1)=0.5x(n)$,设未加激励时系统的初始条件 $y(0)=0$、$y(1)=1$,激励 $x(n)=u(n)$。

(1) 求零输入响应 $y_{zi}(n)$,零状态响应 $y_{zs}(n)$及全响应 $y(n)$。

(2) 画出系统方框图。

(3) 比较 $n=0$、1 时全响应的值 $y(0)$、$y(1)$与给定的初始条件有无差别,为什么?

解：(1) 特征方程 $\alpha^2-1.5\alpha+0.5=0$，解出特征根 $\alpha_1=1$、$\alpha_2=0.5$，故得

$$y_{zi}(n)=c_1+c_2 0.5^n$$

代入 $y(0)=0$ 及 $y(1)=1$，求出 $c_1=2$、$c_2=-2$，故

$$y_{zi}(n)=2-2\times 0.5^n,\quad n\geqslant 0$$

传输函数

$$H(z)=\frac{0.5}{z-1.5+0.5z^{-1}}=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0.5}$$

单位样值响应

$$h(n)=(1-0.5^n)u(n)$$

零状态响应

$$y_{zs}(n)=x(n)*h(n)=u(n)*(1-0.5^n)u(n)=(n-1+0.5^n)u(n)$$

全响应

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=n+1-0.5^n,\quad n\geqslant 0$$

(2) 系统框图如图 5-5-3 所示。

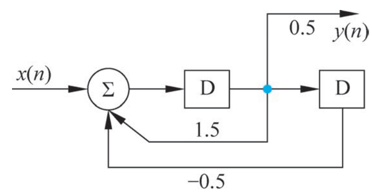

图 5-5-3　系统框图

(3) 求出全响应在 $n=0$、1 时的值分别为 $y(0)=0$、$y(1)=1.5$，与给定的初始条件比较，$y(0)$相同，而 $y(1)$不同。这是由于给定的初始条件是不加激励时的初始值，更确切地说，应该为 $y_{zi}(0)=0$、$y_{zi}(1)=1$。而由激励 $0.5u(n)$产生的零状态响应在 $n=0$、1 时的值分别为 $y_{zs}(0)=0$、$y_{zs}(1)=0.5$。所以全响应

$$y(0)=y_{zi}(0)+y_{zs}(0)=0$$

$$y(1)=y_{zi}(1)+y_{zs}(1)=1.5$$

从系统框图看，$y(n)$是从第一个延时器输出端引出的，在 $n=0$ 时，虽然加上了激励，但不会立即影响输出，即 $y_{zs}(0)=0$，所以 $y(0)=y_{zi}(0)$没有改变。

例 5-24　某系统的输入输出关系可由二阶常系数线性差分方程描述，如果相对于输入 $x(n)=u(n)$的响应为 $y(n)=(2^n+3\times 5^n+10)u(n)$。

(1) 若系统起始为静止的，试确定该系统的二阶差分方程。

(2) 若激励为 $x(n)=2[u(n)-u(n-10)]$，求响应 $y(n)$。

解：(1) $y(n)=(2^n+3\times 5^n+10)u(n)$是在系统起始为静止的条件下，激励为 $u(n)$的响应也就是该系统的单位阶跃响应 $g(n)$。因为

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

所以

$$\begin{aligned}h(n)&=g(n)-g(n-1)\\&=(2^n+3\times 5^n+10)u(n)-(2^{n-1}+3\times 5^{n-1}+10)u(n-1)\\&=0.5\times 2^n u(n)+2.4\times 5^n u(n)+11.1\delta(n)\end{aligned}$$

本系统的传输函数

$$H(z)=0.5\times\frac{z}{z-2}+2.4\times\frac{z}{z-5}+11.1=\frac{14z^2-85z+111}{z^2-7z+10}$$

得出系统的二阶差分方程为

$$y(n)-7y(n-1)+10y(n-2)=14x(n)-85x(n-1)+111x(n-2)$$

(2) 按照线性时不变性质，当激励 $x(n)=2[u(n)-u(n-10)]$时的响应 $y(n)$为

$$\begin{aligned} y(n)&=2[g(n)-g(n-10)] \\ &=2[(2^n+3\times 5^n+10)u(n)-(2^{n-10}+3\times 5^{n-10}+10)u(n-10)] \end{aligned}$$

例 5-25 计算信号 $x_1(n)=2^n u(-n)$和 $x_2(n)=u(n)$的卷积和 $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$。

解：

$$\begin{aligned} y(n)&=x_1(n)*x_2(n) \\ &=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}2^i u(-i)u(n-i) \\ &=\begin{cases}\sum\limits_{i=-\infty}^{n}2^i=2^{n+1}, & n\leqslant 0 \\ \sum\limits_{i=-\infty}^{0}2^i=2, & n>0\end{cases} \end{aligned}$$

例 5-26 设 3 个 LTI 系统级联，如图 5-5-4(a)所示，其中 $h_2(n)=u(n)-u(n-2)$，而总的单位样值响应如图 5-5-4(b)所示。求：

(1) 单位样值响应 $h_1(n)$；

(2) 整个系统对输入的响应。

解：(1) $h_2(n)=u(n)-u(n-2)=\delta(n)+\delta(n-1)$

$$\begin{aligned} h(n)&=h_1(n)*h_2(n)*h_2(n) \\ &=h_1(n)*[\delta(n)+\delta(n-1)]*[\delta(n)+\delta(n-1)] \\ &=[h_1(n)+h_1(n-1)]*[\delta(n)+\delta(n-1)] \\ &=h_1(n)+2h_1(n-1)+h_1(n-2) \end{aligned}$$

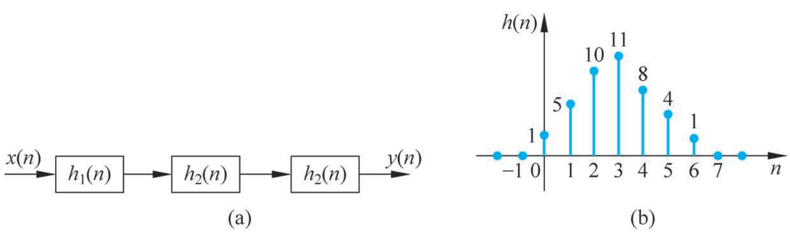

图 5-5-4 例 5-26 图

由于图 5-5-4(b)是因果的，所以当 $n<0$ 时，$h_1(n)=0$。而 $h_1(n)$的其他值可由上式和图 5-5-4(b)的 $h(n)$递推求得如下：

当 $n=0$ 时，

$$1=h_1(0)+2h_1(-1)+h_1(-2)\rightarrow h_1(0)=1$$

当 $n=1$ 时，

$$5=h_1(1)+2h_1(0)+h_1(-1)\rightarrow h_1(1)=3$$

当 $n=2$ 时，

$$10=h_1(2)+2h_1(1)+h_1(0)\rightarrow h_1(2)=3$$

当 $n=3$ 时，

$$11=h_1(3)+2h_1(2)+h_1(1)\rightarrow h_1(3)=2$$

当 $n=4$ 时，

$$8=h_1(4)+2h_1(3)+h_1(2)\rightarrow h_1(4)=1$$

当 $n=5$ 时，

$$4=h_1(5)+2h_1(4)+h_1(3)\rightarrow h_1(5)=0$$

当 $n>5$ 时，

$$h_1(n)=0$$

由此得 $h_1(n)$的波形如图 5-5-5(a)所示。

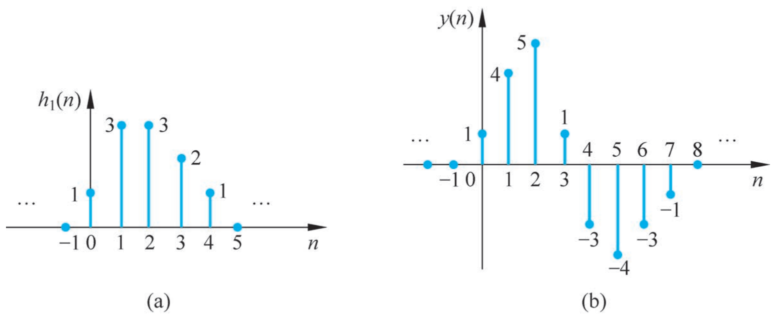

图 5-5-5　$h_1(n)$和系统输出图

(2) $y(n)=x(n)*h(n)=[\delta(n)-\delta(n-1)]*h(n)=h(n)-h(n-1)$

整个系统对此输入的响应如图 5-5-5(b)所示。

例 5-27　因果系统的差分方程为 $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$，求系统的单位样值响应。

解：利用线性叠加原理求 $h(n)$。求得差分方程的齐次解为 $c_1 3^n+c_2 2^n$。由叠加原理，在此先考虑 $x(n)$项引起的响应 $h_1(n)$。边界条件是 $h_1(-1)=0$，$h_1(0)=1$，由此建立一组方程来求系数：

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ \dfrac{1}{3}c_1+\dfrac{1}{2}c_2=0 \end{cases}$$

得

$$c_1=3,\quad c_2=-2$$

所以

$$h_1(n)=3\times 3^n-2\times 2^n=3^{n+1}-2^{n+1},\quad n\geqslant 0$$

再考虑 $-3x(n-2)$项作用引起的响应 $h_2(n)$。根据线性时不变系统特征，可知

$$h_2(n)=-3h_1(n-2)=-3[3^{n-1}-2^{n-1}],\quad n\geqslant 2$$

$h(n)$就是 $h_2(n)$和 $h_1(n)$的和，因此有

$$\begin{aligned} h(n)&=h_1(n)+h_2(n) \\ &=[3^{n+1}-2^{n+1}]u(n)-3[3^{n-1}-2^{n-1}]u(n-2) \\ &=[3^{n+1}-2^{n+1}][\delta(n)+\delta(n-1)+u(n-2)]-3[3^{n-1}-2^{n-1}]u(n-2) \\ &=\delta(n)+5\delta(n-1)+[2\times 3^n-2^{n-1}]u(n-2) \end{aligned}$$

【工程案例之四】 卷积与图像

具体内容请扫描二维码查看。

卷积与图像

5.6 习题

5.6.1 自测题

一、填空题

1. 若序列 $f(n)=\{\underset{\uparrow}{2},3,4,0,5\}$,则 $f(2n)$为________。

2. 若序列 $f(n)=\{2,3,\underset{\uparrow}{4},0,5,6\}$,则 $f(-n-1)$为________。

3. $y(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)*\delta(n-1)=$________。

4. 若已知系统的差分方程为 $2y(n)-y(n-1)-y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$,其单位样值响应 $h(n)=$________。

5. 已知 $y(-1)=0,y(0)=0$,则差分方程 $y(n)+2y(n-1)+y(n-2)=3^n$ 的全响应为________。

6. 若已知系统的差分方程为 $2y(n)-y(n-1)-y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$,其齐次解 $y(n)=$________。

7. 差分方程 $y(n)+2y(n-1)=x(n)-x(n-1)$的齐次解为________。

8. 离散时间系统的基本模拟部件是________、________和________。

9. 若某一因果线性时不变系统为稳定系统,其单位序列响应为 $h(n)$,则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|h(n)|=$________。

二、单项选择题

1. 离散线性时不变系统的单位序列响应 $h(n)$为(　　)。

   A. 对输入为 $\delta(n)$的零状态响应　　B. 输入为 $u(n)$的响应

   C. 系统的自由响应　　D. 系统的强迫响应

2. 序列 $f(n)=\cos\frac{\pi n}{2}[u(n-2)-u(n-5)]$的正确图形是图 5-6-1 中的(　　)。

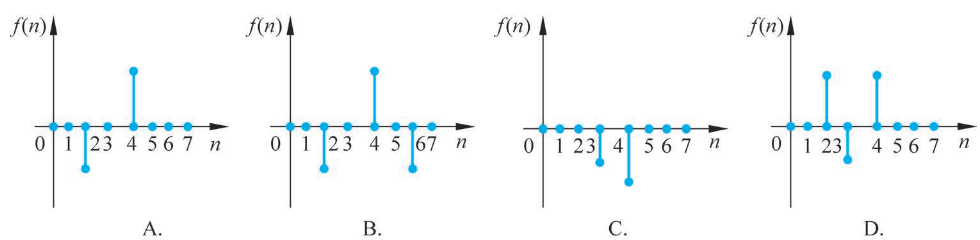

图 5-6-1　题 2 图

3. 已知序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$如图 5-6-2(a)所示,则卷积 $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$的图形为图 5-6-2(b) 中的(　　)。

4. 若某线性非时变离散系统激励为 $f(n)=a^n u(n),a\neq 0$,其单位响应为 $h(n)=b^n u(n)$,

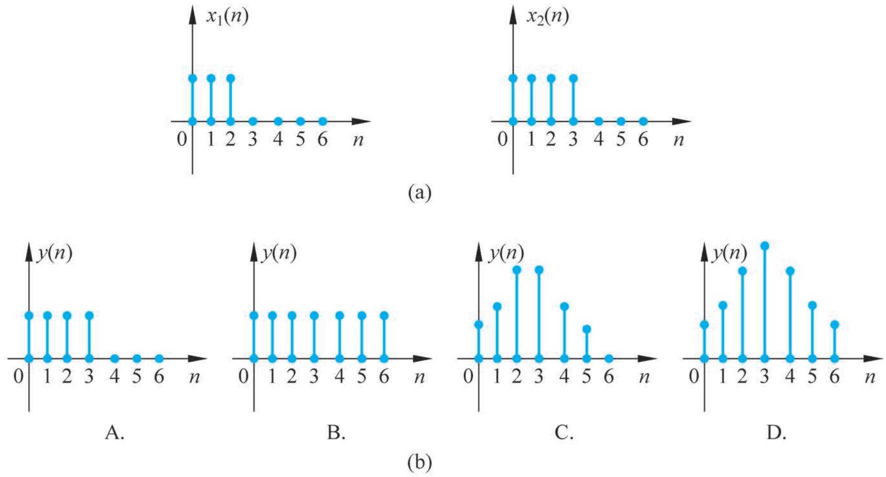

图 5-6-2 题 3 图

$b \neq 0, b \neq a$，则其零状态响应 $y_{zs}(n)$ 为（　　）。

A. $(b-a)^n u(n)$　　　　B. $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}u(n)$

C. $\dfrac{b^n-a^{n-1}}{a-b}u(n)$　　　　D. $\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}u(n)$

5. 下列各式为描述离散时间系统的差分方程，所描述的系统为线性时不变的是（　　）。

A. $y(n)=[f(n)]^2$　　　　B. $y(n)=2f(n)\cos\left(3n+\dfrac{\pi}{3}\right)$

C. $y(n+1)=2f(n)+3$　　　　D. $y(n)=2f(n)$

6. 若 $f_1(n)=\{0,1,2,\underset{\uparrow}{3},1,0\}$，$f_2(n)=\{0,1,\underset{\uparrow}{1},1,0\}$，则 $f_1(n)*f_2(n)=$（　　）。

A. $\{0,1,3,\underset{\uparrow}{5},2,1,0\}$　　　　B. $\{0,1,3,\underset{\uparrow}{6},6,4,1,0\}$

C. $\{0,1,3,6,\underset{\uparrow}{6},4,1,0\}$　　　　D. $\{0,1,3,\underset{\uparrow}{5},4,3,0\}$

7. 某线性非时变离散系统，其单位响应 $h(n)=(0.8)^n u(n)$，则其阶跃响应应为（　　）。

A. $(0.8)^n u(n)$　　　　B. $(1-0.8^n)u(n)$

C. $5[1-(0.8)^{n+1}]u(n)$　　　　D. $5[1-(0.8)^n]u(n)$

8. 差分方程的齐次解为 $y_h(n)=c_1 n\left(\dfrac{1}{8}\right)^n+c_2\left(\dfrac{1}{8}\right)^n$，特解为 $y_p(n)=\dfrac{3}{8}u(n)$，那么系统的稳态响应为（　　）。

A. $y_h(n)$　　　B. $y_p(n)$　　　C. $y_h(n)+y_p(n)$　　　D. $\dfrac{dy_h(n)}{dn}$

9. 已知离散系统的单位序列响应 $h(n)$ 和系统输入 $f(n)$ 如图 5-6-3 所示，$f(n)$ 作用于系统引起的零状态响应为 $y_{zs}(n)$，那么 $y_{zs}(n)$ 序列不为零的点数为（　　）。

A. 3 个　　　B. 4 个　　　C. 5 个　　　D. 6 个

10. 已知序列 $f(n)$ 如图 5-6-4(a)所示，则序列 $f(-n-2)$ 的图形是如图 5-6-4(b)中的（　　）。

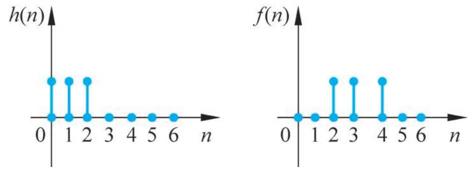

图 5-6-3　题 9 图

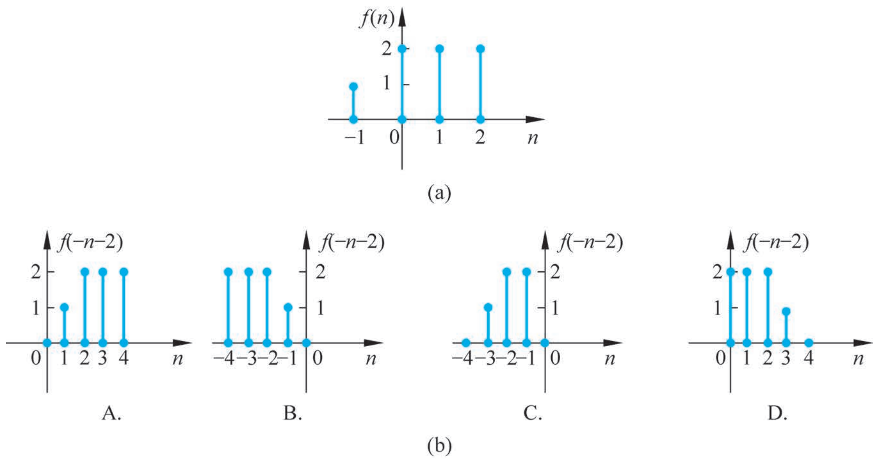

图 5-6-4　题 10 图

11. 有限长序列 $f(n)=3\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$，经过一个单位序列响应为 $h(n)=4\delta(n)-2\delta(n-1)$ 的离散系统，则零状态响应 $y_{zs}(n)$ 为(　　)。

A. $12\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)$

B. $12\delta(n)+2\delta(n-1)$

C. $12\delta(n)+2\delta(n-1)-2\delta(n-3)$

D. $12\delta(n)-\delta(n-1)-2\delta(n-3)$

12. $y(n)=(-2)^n u(n)+\delta(n)+u(n)$ 中，稳态响应分量为(　　)。

A. $(-2)^n u(n)$　　B. $\delta(n)$　　C. $u(n)$　　D. $\delta(n)+u(n)$

13. 离散信号 $f(n)$ 是指(　　)。

A. n 的取值是连续的，而 $f(n)$ 的取值是任意的信号

B. n 的取值是离散的，而 $f(n)$ 的取值是任意的信号

C. n 的取值是连续的，而 $f(n)$ 的取值是连续的信号

D. n 的取值是连续的，而 $f(n)$ 的取值是离散的信号

14. 已知序列 $f(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$，$h(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)$，则 $y(n)=f(n)*h(n)$ 是(　　)。

A. $\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$

B. $\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\delta(n-4)+\delta(n-5)$

C. $\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)+3\delta(n-3)+2\delta(n-4)+\delta(n-5)$

D. $\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)+4\delta(n-3)+3\delta(n-4)+2\delta(n-5)+\delta(n-6)$

15. 与图 5-6-5(a)所示系统等价的系统是图 5-6-5(b)中的(　　)。

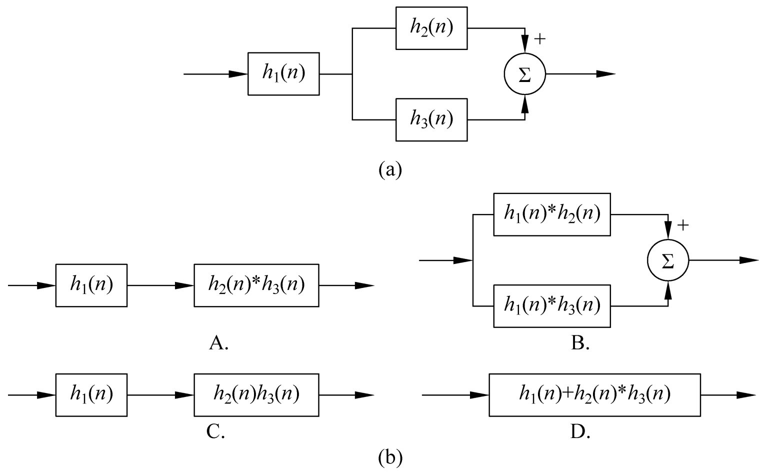

图 5-6-5 题 15 图

5.6.2 基础题、提高题、MATLAB 习题和小结

第 5 章基础题　　第 5 章提高题　　第 5 章 MATLAB 习题　　第 5 章小结