

# 第5章



图的应用非常广泛。现实世界中许多现象都能用某种图形表示,这种图形由一些点和一些连接两点间的连线组成。本章介绍图的基本知识和应用。

## 5.1 图的基本概念

在集合论部分已给出有序对及笛卡儿积的概念,这里给出无序对及无序积的概念。

任意两个元素  $a$  和  $b$  构成的无序对,记作  $(a, b)$ ,这里总有  $(a, b) = (b, a)$ 。

设  $A$  和  $B$  为任意两个集合,无序对的集合  $\{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$  称为集合  $A$  与  $B$  的无序积,记作  $A \& B$ 。无序积与有序积的不同在于  $A \& B = B \& A$ 。

例如,设  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ , 则

$$A \& B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} = B \& A$$

当集合中允许元素重复出现时称之为多重集。

### 5.1.1 图的定义及相关概念

**定义 5.1** 图  $G$  是一个二元组  $(V, E)$ , 即  $G = (V, E)$ 。其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是一个非空集合,称  $V$  中的元素  $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为图的结点或顶点,称  $V$  为  $G$  的顶点集,  $E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V\}$ ,  $E$  中的元素  $e = (v_i, v_j)$  为图的边或弧,称  $E$  为  $G$  的边集。称  $|V|$  和  $|E|$  为图  $G$  的顶点数(阶)和边数。若图  $G$  的顶点数和边数都是有限集,则称  $G$  为有限图;否则为无限图。 $V = \emptyset$  的图称为空图。有  $n$  个顶点的图称为  $n$  阶图。 $E = \emptyset$  的图称为零图。仅有一个顶点的图称为平凡图,否则为非平凡图。

如果没有特殊说明,集合  $V$  和  $E$  都假设是有限的并且假设  $V$  是非空的。

**定义 5.2** 在图  $G = (V, E)$  中,若边  $e = (v_i, v_j)$  是无序对,即  $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$ , 则称  $G$  为无向图,其中  $V$  是一个非空的结点(或顶点)集;  $E$  是无序积  $V \& V$  的多重子集,其元素称为无向边。

在一个图  $G = (V, E)$  中,为了表示  $V$  和  $E$  分别是图  $G$  的结点集和边集,常将  $V$  记作  $V(G)$ , 而将  $E$  记作  $E(G)$ 。

**例 5.1** 在无向图  $G = (V, E)$  中,  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_3), (v_1, v_3), (v_3, v_4)\}$ ,  $G$  的图形如图 5.1 所示。

**定义 5.3** 在图  $G = (V, E)$  中,若边  $e = (v_i, v_j)$  是有序对,即  $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$ , 则称

$G$  为有向图。其中  $V$  是一个非空的结点(或顶点)集;  $E$  是笛卡儿积  $V \times V$  的多重子集,其元素称为有向边,记作  $\langle v_i, v_j \rangle$ 。

**例 5.2** 在有向图  $G=(V, E)$  中,其中  $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $E=\{\langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle\}$ ,  $G$  的图形如图 5.2 所示。

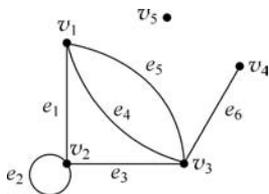


图 5.1 无向图

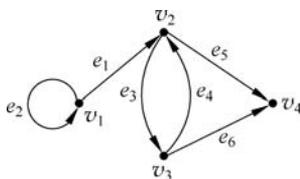


图 5.2 有向图

为了表示方便,常常将边用  $e_i$  来表示。如图 5.1 中,用  $e_1$  表示边  $(v_1, v_2)$ ,  $e_5$  表示边  $(v_1, v_3)$  等。

有向图和无向图统称为图。由于有向图的边也称为弧,由弧构成的集合记为  $E$ 。因此,为了区分有向图和无向图,有向图也记为  $D=(V, E)$ ,而无向图记为  $G=(V, E)$ 。为方便起见,在后面的论述中,有时也用  $G(V, E)$  表示有向图。

**定义 5.4** 在无向图  $G=(V, E)$  中,

(1) 当  $e=(u, v)$  时,称  $u$  和  $v$  是  $e$  的端点,并称  $e$  与  $u$  和  $v$  是关联的。

(2) 若  $u \neq v$ ,则称  $e$  与  $u$  (或  $v$ ) 关联的次数是 1; 若  $u=v$ ,称  $e$  与  $u$  关联的次数为 2; 若  $u$  不是  $e$  的端点,则称  $e$  与  $u$  的关联次数为 0。

没有边关联的顶点称为孤立点。

在图 5.1 中,  $e_1=(v_1, v_2)$ ,  $v_1, v_2$  是  $e_1$  的端点,  $e_1$  与  $v_1, v_2$  的关联次数均为 1;  $v_5$  是孤立点;  $e_2$  是环,  $e_2$  与  $v_2$  关联的次数为 2。

**定义 5.5** 在有向图  $G=(V, E)$  中,

(1) 当  $e=\langle u, v \rangle$  时,  $e$  是一条有向边,则称  $u$  是  $e$  的始点,  $v$  是  $e$  的终点,也称  $u, v$  为  $e$  的端点,并称  $e$  与  $u$  和  $v$  是关联的。

(2) 若  $u \neq v$ ,则称  $e$  与  $u$  (或  $v$ ) 关联的次数是 1; 若  $u=v$ ,称  $e$  与  $u$  关联的次数为 2; 若  $u$  不是  $e$  的端点,则称  $e$  与  $u$  的关联次数为 0。

一条有向边的始点与终点重合,则称此条边为环。

在图 5.2 中,  $e_1=\langle v_1, v_2 \rangle$ ,  $v_1$  是  $e_1$  的始点,  $v_2$  是  $e_1$  的终点;  $e_2=\langle v_1, v_1 \rangle$ ,  $e_2$  称为环。

**定义 5.6** 在无向图  $G=(V, E)$  中,若存在一条边  $e=(u, v)$ ,则称端点  $u, v$  是相邻的。若两条边  $e_1, e_2$  至少有一个公共端点,则称边  $e_1, e_2$  是相邻的。在有向图  $G=(V, E)$  中,若存在一条边  $e=\langle u, v \rangle$ ,则称始点  $u$  邻接到终点  $v$ 。若边  $e_1$  的终点与边  $e_2$  的始点重合,则称边  $e_1, e_2$  是相邻的。

在图 5.1 中,  $e_1=(v_1, v_2)$ , 端点  $v_1, v_2$  是相邻的; 边  $e_1, e_2$  是相邻的。

在图 5.2 中,  $e_1=\langle v_1, v_2 \rangle$ , 始点  $v_1$  邻接到终点  $v_2$ ; 边  $e_1, e_2$  是相邻的。

### 5.1.2 结点的度

**定义 5.7** (1) 设  $G=(V, E)$  为一无向图,  $v \in V$ ,  $v$  关联边的次数之和称为  $v$  的度数,简称

度,记作  $d(v)$ 。

在图 5.1 中,  $d(v_1)=3, d(v_2)=4, d(v_3)=4, d(v_4)=1, d(v_5)=0$ 。

(2) 设  $G=(V, E)$  为一有向图,  $v \in V, v$  作为边的始点的次数之和, 称为  $v$  的出度, 记作  $d^+(v)$ ;  $v$  作为边的终点的次数之和称为  $v$  的入度, 记作  $d^-(v)$ ;  $v$  作为边的端点的次数之和称为  $v$  的度数, 简称度, 记作  $d(v)$ , 显然  $d(v)=d^+(v)+d^-(v)$ 。

在图 5.2 中,  $d^+(v_1)=2, d^-(v_1)=1, d^+(v_2)=d^-(v_2)=2; d^+(v_3)=2, d^-(v_3)=1, d^+(v_4)=0, d^-(v_4)=2$ 。

(3) 称度为 1 的结点为悬挂点, 与悬挂点关联的边称为悬挂边。如图 5.1 中,  $v_4$  是悬挂点,  $e_6$  是悬挂边。

(4) 无向图  $G=(V, E)$  中,

最大度  $\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ , 最小度  $\delta(G)=\min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ 。

(5) 若  $G=(V, E)$  是有向图, 定义

$$\text{最大度 } \Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

$$\text{最小度 } \delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

$$\text{最大出度 } \Delta^+(G) = \max\{d^+(v) \mid v \in V\},$$

$$\text{最大入度 } \Delta^-(G) = \max\{d^-(v) \mid v \in V\},$$

$$\text{最小出度 } \delta^+(G) = \min\{d^+(v) \mid v \in V\},$$

$$\text{最小入度 } \delta^-(G) = \min\{d^-(v) \mid v \in V\}。$$

图 5.2 中,  $\Delta(G)=4, \delta(G)=2, \Delta^+(G)=2, \delta^+(G)=0, \Delta^-(G)=2, \delta^-(G)=1$ 。

**例 5.3** 在图 5.1 中,  $\sum_{v \in V} d(v) = d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 3 + 4 + 4 + 1 + 0 = 12$ , 而该图有 6 条边, 即结点的度之和是边数的 2 倍。事实上这是图的一个重要性质。

**定理 5.1** 设任一图  $G=(V, E)$ , 其中  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 边数  $|E|=m$ , 则

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

这就是图论中著名的握手定理。

**证明** 因为每条边有 2 个端点, 所有顶点的度之和就等于所有以顶点作为端点的次数之和。因此, 所有顶点的度之和等于边数的 2 倍。

若  $d(v)$  为奇数, 则称  $v$  为奇点; 若  $d(v)$  为偶数, 则称  $v$  为偶点。

**推论** 任一图中, 奇点个数为偶数。

**证明** 设  $V_1=\{v \mid v \text{ 为奇点}\}, V_2=\{v \mid v \text{ 为偶点}\}$ , 则  $\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v) = 2m$ , 因为  $\sum_{v \in V_2} d(v)$  是偶数, 所以  $\sum_{v \in V_1} d(v)$  也是偶数, 而  $V_1$  中每个点  $v$  的度  $d(v)$  均为奇数, 因此  $|V_1|$  为偶数。

对有向图, 还有下面的定理。

**定理 5.2** 设有向图  $G=(V, E), V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, |E|=m$ , 则

$$\sum_{i=1}^n d^+(v_i) = \sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m$$

**证明** 因为在有向图中,每条边有 2 个端点,即一个始点和一个终点。所以,同握手定理,所有顶点的入度之和等于出度之和等于边数。

如图 5.2 中,  $|E|=6$ ,

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = d^+(v_1) + d^+(v_2) + d^+(v_3) + d^+(v_4) = 2 + 2 + 2 + 0 = 6$$

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = d^-(v_1) + d^-(v_2) + d^-(v_3) + d^-(v_4) = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$$

设  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是图  $G$  的顶点集,称  $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$  为  $G$  的度序列。

如图 5.1 的度序列为 3,4,4,1,0,图 5.2 的度序列是 3,4,3,2。

**例 5.4** (1) 图  $G$  的度序列为 2,2,3,3,4,则边数  $m$  是多少?

(2) 3,3,2,3; 5,2,3,1,4 能成为图的度序列吗? 为什么?

(3) 图  $G$  有 12 条边,度为 3 的结点有 6 个,其余结点的度均小于 3,图  $G$  中至少有几个结点?

**解**

(1) 由握手定理  $2m = \sum_{v \in V} d(v) = 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 14$ ,所以  $m = 7$ 。

(2) 由于这两个序列中有奇数个是奇点,由握手定理的推论知,它们都不能称为图的度序列。

(3) 由握手定理  $\sum d(v) = 2m = 24$ ,度为 3 的结点有 6 个占去 18 度,还有 6 度由其余结点占有,其余结点的度可为 0,1,2,当均为 2 时所用结点数最少,所以应由 3 个结点占有这 6 度,即图  $G$  中至少有 9 个结点。

### 5.1.3 完全图和补图

**定义 5.8** 在无向图中,如果有多于 1 条的无向边关联同一对顶点,则称这些边为平行边,平行边的条数称为重数。在有向图中,如果有多于 1 条的有向边的始点和终点相同,则称这些边为有向平行边,简称平行边。

**定义 5.9** (1) **简单图**: 既不含平行边也不含环的图。含有平行边的图称为**多重图**。

(2) 设  $G = (V, E)$  是无向简单图,若每一对结点之间都有边相连,则称  $G$  为(无向)**完全图**,具有  $n$  个结点的完全图记作  $K_n$ 。

(3) 设  $G = (V, E)$  为有向简单图,若每对结点间均有一对方向相反的边相连,则称  $G$  为(有向)**完全图**,具有  $n$  个结点的有向完全图记作  $D_n$ 。

**例 5.5** 在图 5.1 中,  $e_4, e_5$  是平行边,在图 5.2 中,  $e_3, e_4$  不是平行边。这两个图都有环,图 5.1 中还有平行边,所以都不是简单图。

**例 5.6** 图 5.3 给出几个完全图的例子。

由完全图的定义可知,无向完全图  $K_n$  的边数为  $|E(K_n)| = \frac{1}{2}n(n-1)$ ,而有向完全图的边数为  $|E(D_n)| = n(n-1)$ 。

图 5.3(a)中各图都是无向完全图,图 5.3(b)中各图都是有向完全图,但它们都是简单图。

**定义 5.10** 设  $G$  为  $n$  阶(无向)简单图,从  $n$  阶完全图  $K_n$  中删去  $G$  的所有边后构成的图称为  $G$  的补图,记作  $\bar{G}$ 。类似地,可定义有向图的补图。

**例 5.7** 图 5.4 中  $\bar{G}$  是  $G$  的补图。

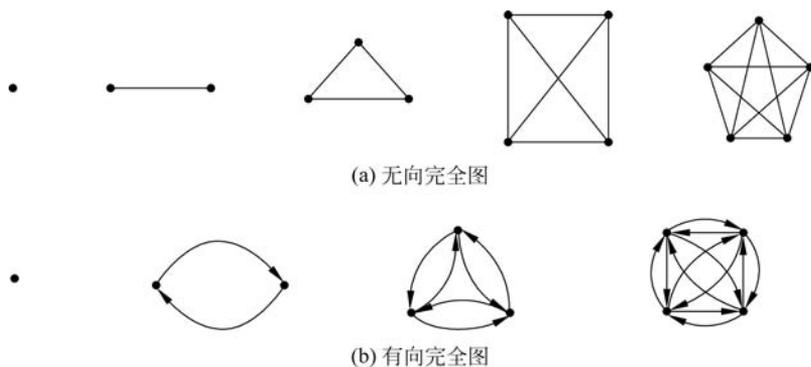


图 5.3 完全图的例子

由补图的定义,显然有如下的结论:

- (1)  $G$  与  $\bar{G}$  互为补图,即  $\overline{\bar{G}} = G$ ;
- (2) 若  $G$  为  $n$  阶图,则  $E(G) \cup E(\bar{G}) = E(K_n)$ ,且  $E(G) \cap E(\bar{G}) = \emptyset$ .

**定义 5.11** 各结点的度均为  $k$  的无向简单图称为  $k$  正则图。

图 5.5 所示的图称为彼得森图,是 3 正则图。

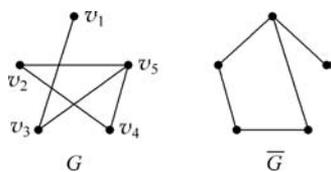


图 5.4 补图

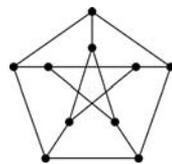


图 5.5 彼得森图

### 5.1.4 子图与图的同构

**定义 5.12** (1) 设  $G = (V, E), G' = (V', E')$  是两个图。若  $V' \subseteq V$  且  $E' \subseteq E$ , 则称  $G'$  是  $G$  的子图。 $G$  是  $G'$  的母图, 记作  $G' \subseteq G$ 。

(2) 若  $V' \subset V$  或  $E' \subset E$ , 则称  $G'$  是  $G$  的真子图。

(3) 若  $V = V'$  且  $E' \subseteq E$ , 则称  $G'$  是  $G$  的生成子图。

(4) 若  $V_1 \subseteq V$  且  $V_1 \neq \emptyset$ , 以  $V_1$  为顶点集, 以图  $G$  中两个端点均在  $V_1$  中的边为边集的子图, 称为由  $V_1$  导出的导出子图, 记作  $G[V_1]$ 。

(5) 设  $E_1 \subseteq E$  且  $E_1 \neq \emptyset$ , 以  $E_1$  为边集, 以  $E_1$  中的边关联的结点为结点集的图  $G$  的子图, 称为由  $E_1$  导出的导出子图, 记作  $G[E_1]$ 。

**例 5.8** 在图 5.6 中,  $G_1, G_2, G_3$  均是  $G$  的真子图, 其中  $G_1$  是  $G$  的生成子图,  $G_2$  是由  $V_2 = \{a, b, c, f\}$  导出的导出子图  $G[V_2]$ ,  $G_3$  是由  $E_3 = \{e_2, e_3, e_4\}$  导出的边导出子图  $G[E_3]$ 。

由于在画图时, 结点的位置和边的几何形状是无关紧要的, 因此表面上完全不同的图形可能表示的是同一个图。为了判断不同图形是否表示同一个图, 在此我们给出图的同构的概念。

**定义 5.13** 设有两个图  $G = (V, E), G_1 = (V_1, E_1)$ , 如果存在双射  $h: V \rightarrow V_1$ , 使得  $(u, v) \in E$  当且仅当  $(f(u), f(v)) \in E_1$  (或者  $\langle u, v \rangle \in E$  当且仅当  $\langle f(u), f(v) \rangle \in E_1$ ), 且它们的重数相同, 则称图  $G$  与  $G_1$  同构, 记作  $G \cong G_1$ 。

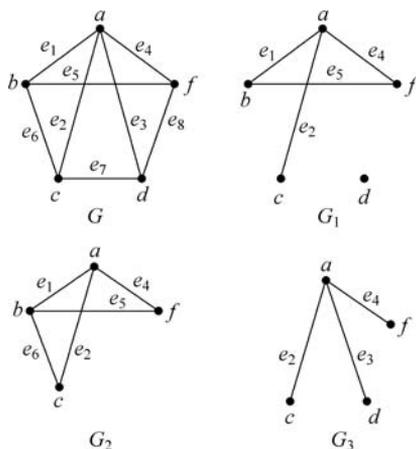


图 5.6 真子图、生成子图与导出子图

定义说明,两个图的结点之间,如果存在双射,而且这种映射保持了结点间的邻接关系和边的重数(在有向图时还保持方向),则两个图是同构的。

例 5.9 图 5.7 中,  $G_1 \cong G_2$ , 其中  $f: V_1 \rightarrow V_2, f(v_i) = u_i (i=1, 2, \dots, 6)$ ;  $G_3 \cong G_4$ , 其中  $h: V_3 \rightarrow V_4, h(v_1) = u_3, h(v_2) = u_4, h(v_3) = u_1, h(v_4) = u_2$ 。

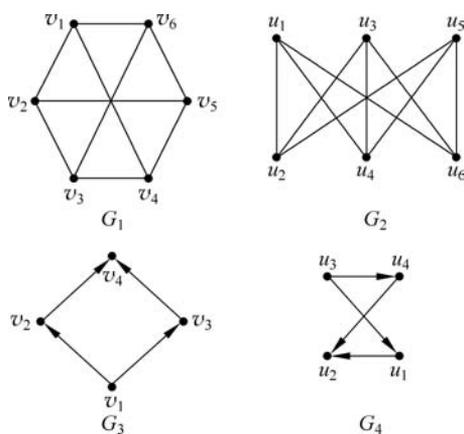


图 5.7 同构图

容易看出,两个图同构的必要条件是:

- (1) 结点数相同;
- (2) 边数相同;
- (3) 度序列相同。

但这不是充分的条件,例如图 5.8 中图  $H_1$  和  $H_2$  虽然满足以上 3 个条件,但不同构。图  $H_1$  中的 4 个 3 度结点与  $H_2$  中的 4 个 3 度结点的相互间的邻接关系显然不相同。

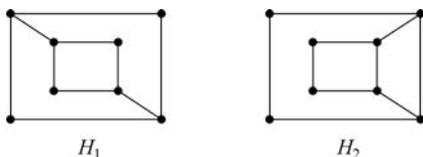


图 5.8 不同构图

## 5.2 图的连通性

### 哥尼斯堡(Konigsberg)七桥问题

18世纪东普鲁士的哥尼斯堡城有一条横贯全城的普雷格尔(Pregel)河,河中有两个小岛,分别为A和B,并有7座桥把两个岛和岸边连接起来,如图5.9(a)所示。当时当地的居民有个有趣的问题:是否存在这样一种走法,从A、B、C、D四个地点的任意点开始,通过每座桥且恰好都经过一次,再回到起点。这个问题就是著名的哥尼斯堡七桥问题。

1736年,瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler)把这个难题化成了这样的问题来看:把两岸和小岛缩成点,桥化为边,于是“七桥问题”就等价于图5.9(b)中所画图形的一笔画问题了,如果能够一笔画成这个图,对应的“七桥问题”也就解决了。

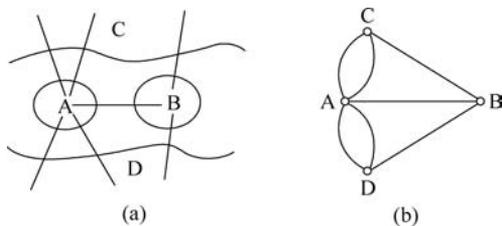


图 5.9 哥尼斯堡七桥问题

经过研究,欧拉发现了一笔画的规律。他认为,能一笔画成的图形必须是连通图。连通图就是指一个图形各部分总是有边相连的,这道题中的图就是连通图。

但是,不是所有的连通图都可以一笔画成的。能否一笔画成是由图的奇、偶点的数目来决定的。那么,什么叫奇、偶点呢?

前面介绍,与奇数(单数)条边相连的点叫作奇点;与偶数(双数)条边相连的点叫作偶点。如图5.10中的①和④为奇点,②和③为偶点。由此,有下面的结论。

(1) 凡是由偶点组成的连通图,一定可以一笔画成。画时可以把任一偶点作为起点,最后一定能以这个点为终点画完此图。例如图5.11中都是偶点,画的线路可以是:①→③→⑤→⑦→②→④→⑥→⑦→①。

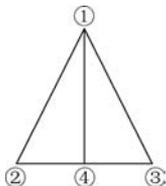


图 5.10 奇点与偶点

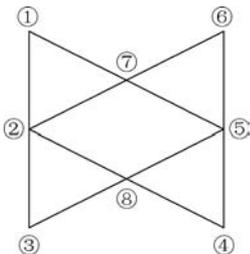


图 5.11 由偶点组成的连通图

(2) 凡是只有两个奇点的连通图(其余都为偶点),一定可以一笔画成。画时必须把一个奇点作为起点,另一个奇点作为终点。例如图5.10中,画的线路是:①→②→③→

①→④。

(3) 其他情况的图都不能一笔画出。

### 5.2.1 通路和回路

**定义 5.14** (1) 设  $G=(V,E)$  是图, 从图中结点  $v_0$  到  $v_n$  的一条通路(路径, Path) 是图的一个点、边的交错序列  $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{n-1}e_nv_n$ , 称  $v_0$  和  $v_n$  是此通路的起点和终点。此通路中边的数目称为此通路的长度。

(2) 当起点和终点重合时, 则称此通路为回路。

(3) 若通路中的所有边互不相同, 则称此通路为简单通路; 此通路中的始点与终点相同时, 称此简单通路为简单回路。

(4) 若通路中的所有结点互不相同, 从而所有边互不相同, 则称此通路为基本通路或初级通路(路径); 若通路中的始点与终点相同时, 称此初级通路为基本回路或初级回路(圈)。

(5) 有边重复出现的通路称为复杂通路, 有边重复出现的回路称为复杂回路。

**说明:**

(1) 回路是通路的特殊情况;

(2) 基本通路(基本回路)一定是简单通路(简单回路), 但反之不然, 因为没有重复的结点一定没有重复的边, 但没有重复的边不一定没有重复的结点;

(3) 有时通路( $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{n-1}e_nv_n$ ) 也可以用边的序列  $e_1e_2\cdots e_n$  来表示。

**例 5.10** 图 5.12(a) 所示图中的通路:

$$\Gamma_1 = v_1e_1v_2e_5v_5e_7v_6$$

$$\Gamma_2 = v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_2e_5v_5e_7v_6$$

$$\Gamma_3 = v_1e_1v_2e_5v_5e_6v_4e_4v_2e_5v_5e_7v_6$$

是否为简单通路、基本通路和复杂通路?

图 5.12(b) 所示图中的回路:

$$\Gamma_1 = v_2e_4v_4e_3v_3e_2v_2$$

$$\Gamma_2 = v_2e_5v_5e_6v_4e_3v_3e_2v_2$$

$$\Gamma_3 = v_2e_4v_4e_3v_3e_2v_2e_5v_5e_6v_4e_3v_3e_2v_2$$

是否为简单回路、基本回路和复杂回路? 并求其长度。

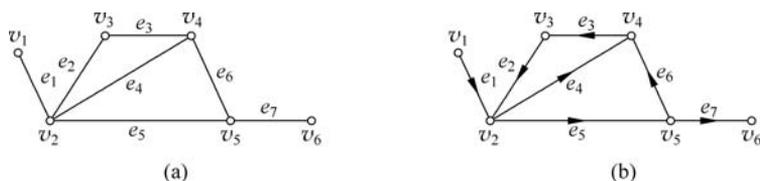


图 5.12 例 5.10 题图

**解** 根据定义 5.14 得通路  $\Gamma_1$  是基本通路, 长度是 3; 通路  $\Gamma_2$  是简单通路, 长度是 6; 通路  $\Gamma_3$  是复杂通路, 长度是 6; 回路  $\Gamma_1$  是基本回路, 长度是 3; 回路  $\Gamma_2$  是基本回路, 长度是 4; 回路  $\Gamma_3$  是复杂回路, 长度是 7。

图中的通路和回路有下面的重要性质。

**定理 5.3** 在一个  $n$  阶图  $G=(V,E)$  中,如果从顶点  $v_i$  到  $v_j$  ( $v_i \neq v_j$ ) 存在通路,则从  $v_i$  到  $v_j$  存在长度不大于  $n-1$  的通路。

**证明** 设  $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{l-1}e_lv_l$  是从  $v_i=v_0$  到  $v_j=v_l$  的一个通路,如果  $l>n-1$ ,因为  $n$  阶图中有  $n$  个顶点,所以在  $v_0, v_1, \dots, v_l$  中一定有 2 个顶点相同。假设顶点  $v_m=v_n$ ,  $m<n$ ,那么  $v_me_mv_{m+1}e_{m+1}\cdots v_ne_n$  是一条回路,删去这条回路,得到  $v_0e_1v_1\cdots v_me_{n+1}\cdots v_{l-1}e_lv_l$  仍然是从  $v_i=v_0$  到  $v_j=v_l$  的一个通路,其长度减少  $n-m$ 。如果它的长度仍大于  $n-1$ ,重复上述过程,直到长度不超过  $n-1$  的通路为止。

**推论** 在一个  $n$  阶图  $G=(V,E)$  中,若从顶点  $v_i$  到  $v_j$  ( $v_i \neq v_j$ ) 存在通路,则从  $v_i$  到  $v_j$  存在长度不大于  $n-1$  的路径。

**证明** 由定理 5.3 可知,从  $v_i$  到  $v_j$  存在长度不大于  $n-1$  的通路。若这个通路已经是路径,则推论成立,否则必存在若干顶点在这条通路上的回路,删除这些回路,就得到  $v_i$  到  $v_j$  存在长度不大于  $n-1$  的路径。

**定理 5.4** 在一个  $n$  阶图  $G=(V,E)$  中,若存在顶点  $v_i$  到自身的回路,则存在  $v_i$  到自身长度小于或等于  $n$  的回路。

证明方法类似于定理 5.3。

**推论** 在一个  $n$  阶图  $G=(V,E)$  中,若存在顶点  $v_i$  到自身的简单回路,则一定存在  $v_i$  到自身长度小于或等于  $n$  的基本回路(圈)。

证明方法类似于定理 5.3 的推论。

**定义 5.15** 在图  $G=(V,E)$  中,从结点  $v_i$  到  $v_j$  的最短通路(一定是路)称为  $v_i$  与  $v_j$  间的短程线,短程线的长度称  $v_i$  到  $v_j$  的距离,记作  $d(v_i, v_j)$ 。若从  $v_i$  到  $v_j$  不存在通路,则记  $d(v_i, v_j)=\infty$ 。

**注意:** 在有向图中,  $d(v_i, v_j)$  不一定等于  $d(v_j, v_i)$ ,但一般有如下性质:

- (1)  $d(v_i, v_j) \geq 0$ ;
- (2)  $d(v_i, v_i) = 0$ ;
- (3)  $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k)$  (通常称为三角不等式)。

## 5.2.2 图的连通性

**定义 5.16** 在一个无向图  $G$  中,若存在从结点  $v_i$  到  $v_j$  的通路(当然也存在从  $v_j$  到  $v_i$  的通路),则称  $v_i$  与  $v_j$  是连通的。规定  $v_i$  到自身是连通的。

在一个有向图  $G$  中,若存在从结点  $v_i$  到  $v_j$  的通路,则称从  $v_i$  到  $v_j$  是可达的。规定  $v_i$  到自身是可达的。

**定义 5.17** 若无向图  $G$  中任意两结点都是连通的,则称图  $G$  是连通图,否则称  $G$  是非连通图或分离图。

显然,无向完全图  $K_n$  ( $n \geq 1$ ) 都是连通图,而顶点数大于或等于 2 的零图均为非连通图。

**定义 5.18** 在无向图  $G$  中,结点之间的连通关系是等价关系。设  $G$  为一无向图,  $R$  是  $V(G)$  中结点之间的连通关系,由  $R$  可将  $V(G)$  划分成  $k$  ( $k \geq 1$ ) 个等价类,记作  $V_1, V_2, \dots, V_k$ ,由它们导出的导出子图  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$  称为  $G$  的连通分支,其个数应为  $\omega(G)$ 。

**例 5.11** 如图 5.13 所示的图  $G_1$  是连通图,  $\omega(G_1) = 1$ ; 图  $G_2$  是一个非连通图,  $\omega(G_2) = 3$ 。

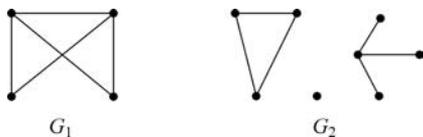


图 5.13 连通图和非连通图

**定义 5.19** (1) 设  $G$  是一有向图, 若略去  $G$  中各有向边的方向后所得无向图是连通的, 则称  $G$  是弱连通的。

(2) 如果  $G$  中任意两点  $v_i$  和  $v_j$  之间,  $v_i$  到  $v_j$  或  $v_j$  到  $v_i$  至少有一个可达, 则称图  $G$  是单向连通的。

(3) 如果  $G$  中任意两结点都互相可达, 则称  $G$  是强连通的。

**例 5.12** 在图 5.14 中,  $G_1$  是弱连通的,  $G_2$  是单向连通的,  $G_3$  是强连通的。

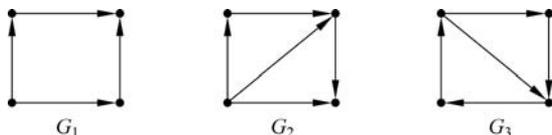


图 5.14 单向连通、弱连通和强连通

**注意:** 强连通一定是单向连通图, 单向连通一定是弱连通图, 但反之不真。

### 5.2.3 无向图的连通度

为了精确地体现连通图的连通程度, 引入顶点连通度和边连通度的概念, 在给出这两个概念之前, 先给出点割集和边割集的概念。

**定义 5.20** 设无向图  $G = (V, E)$ , 若存在  $V' \subset V$  且  $V' \neq \emptyset$ , 使得  $\omega(G - V') > \omega(G)$ , 且对于任意的  $V'' \subset V'$ , 均有  $\omega(G - V'') = \omega(G)$ , 则称  $V'$  是  $G$  的点割集。特别地, 若点割集中只有一个顶点, 即  $V' = \{v\}$ , 则称  $v$  为割点。

**例 5.13** 在图 5.15 中,  $\{v_2, v_7\}$ ,  $\{v_3\}$ ,  $\{v_4\}$  为点割集, 其中  $v_3, v_4$  均为割点。

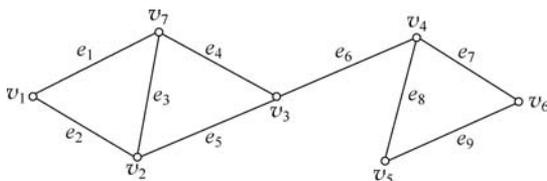


图 5.15 割点

**定义 5.21** 设无向图  $G = (V, E)$ , 若存在  $E' \subseteq E$  且  $E' \neq \emptyset$ , 使得  $\omega(G - E') > \omega(G)$ , 且对于任意的  $E'' \subseteq E'$ , 均有  $\omega(G - E'') = \omega(G)$ , 则称  $E'$  是  $G$  的边割集, 简称割集。特别地, 若边割集中只有一条边  $e$ , 即  $E' = \{e\}$ , 则称  $e$  为割边或桥。

**例 5.14** 在图 5.15 中,  $\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_6\}, \{e_7, e_8\}, \{e_2, e_3, e_4\}$  等都是割集, 其中  $e_6$  是桥。

**定义 5.22** 设  $G=(V, E)$  是一个无向图, 要想从  $G$  中得到一个不连通图或平凡图所需要从  $G$  中去掉的最少顶点数称为  $G$  的**顶点连通度**, 简称**连通度**, 记为  $\chi=\chi(G)$ 。

**说明:** 对于特殊的图, 顶点连通度是已知的。

(1)  $K_1$  平凡图  $\chi(K_1)=0$ ; 有割点的图  $\chi(G)=1$ 。

(2) 不连通的图  $\chi(G)=0$ ; 完全图  $K_p (p \geq 2) \chi(K_p)=p-1$ 。

(3) 若  $G$  连通, 则  $\chi(G) \geq 1$ ; 若  $\chi(G) \geq 1$ , 则  $G$  连通或是非平凡图。

不难看出在图 5.15 中, 图的顶点连通度  $\chi=1$ , 该图是 1 连通图。

**定义 5.23** 设  $G=(V, E)$  是一个无向图, 要想从  $G$  中得到一个不连通图或平凡图所需要从  $G$  中去掉的最少边数称为  $G$  的**边连通度**, 简称**连通度**, 记为  $\lambda=\lambda(G)$ 。

**说明:**

(1) 对于连通图, 边连通度就是割集中最小的那个;

(2) 对于一个图, 割集可以有多个, 但边连通度只有一个;

(3) 对于非平凡图, 割集永远也不能为零(空集), 但边连通度在图不连通时是零。

不难看出在图 5.15 中, 图的边连通度  $\lambda=1$ , 该图是 1 连通图。

顶点连通度  $\chi(G)$ 、边连通度  $\lambda(G)$ 、最小度  $\delta(G)$  之间有以下关系。

**定理 5.5** (Whitney 定理) 对任一图  $G$ , 均有下面的不等式成立。

$$\chi(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

**证明** 先证  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ , 若  $\delta(G)=0$ , 则  $G$  不连通, 从而  $\lambda(G)=0$ 。所以, 这时  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ ; 若  $\delta(G) > 0$ , 不妨设  $\deg v = \delta(G)$ , 从  $G$  中去掉与  $v$  关联的  $\delta(G)$  条边后, 得到图中  $v$  是孤立顶点。所以, 这时  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。因此, 对任何图  $G$  有  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

其次, 证明对任何图  $G$  有  $\chi(G) \leq \lambda(G)$ 。若  $G$  是不连通的或平凡图, 则显然有  $\chi(G) \leq \lambda(G)=0$ ;

现设  $G$  是连通的且非平凡的。若  $G$  有桥  $x$ , 则去掉  $x$  的某个端点就得到一个不连通图或平凡图, 从而  $\chi(G)=1=\lambda(G)$ 。所以, 这时有  $\chi(G) \leq \lambda(G)$ ; 若  $G$  没有桥, 则  $\lambda(G) \geq 2$ 。于是, 从  $G$  中去掉某些  $\lambda(G)$  边得到一个不连通图。这时从  $G$  中去掉  $\lambda(G)$  条边的每一条的某个端点后, 至少去掉了  $\lambda(G)$  条边。于是, 产生了一个不连通图或平凡图, 从而  $\chi(G) \leq \lambda(G)$ 。因此, 对任何  $G$ , 均有  $\chi(G) \leq \lambda(G)$ 。

## 5.3 图的矩阵表示

由图的数学定义可知, 一个图可以用集合来描述; 从前面的例子可以看出, 图也可以用点线图表示, 图的这种图形表示直观明了, 在较简单的情况下有其优越性。但对于较为复杂的图, 这种表示法显示了它的局限性。所以对于结点较多的图常用矩阵来表示, 这样便于用代数知识来研究图的性质, 同时也便于计算机处理。

### 5.3.1 无向图的关联矩阵

定义 5.24 设无向图  $G=(V,E)$ ,  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ 1, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 的关联次数为 } 1 \\ 2, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 的关联次数为 } 2 \end{cases}$$

则称  $(m_{ij})_{n \times m}$  为  $G$  的关联矩阵, 记作  $M(G)$ 。

例 5.15 图 5.16 中图  $G$  的关联矩阵是

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

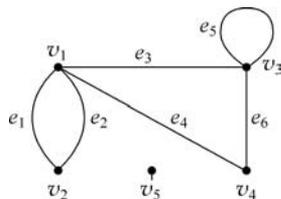


图 5.16 例 5.15 题图

不难看出  $M(G)$  有下列性质:

- (1)  $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 2 (j=1, 2, \dots, m)$ , 即  $M(G)$  每列元素的和为 2, 因为每边恰有两个端点;
- (2)  $\sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i)$  (第  $i$  行元素之和为  $v_i$  的度);
- (3)  $\sum_{j=1}^m m_{ij} = 0$ , 当且仅当  $v_i$  为孤立点;
- (4) 若第  $j$  列与第  $k$  列相同, 则说明  $e_j$  与  $e_k$  为平行边。

### 5.3.2 有向图的关联矩阵

定义 5.25 设  $G=(V,E)$  是无环有向图,  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的起点} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称  $(m_{ij})_{n \times m}$  为  $G$  的关联矩阵, 记作  $M(G)$ 。

例 5.16 图 5.17 中图  $G$  的关联矩阵是

$$M(G) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

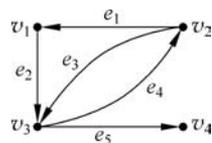


图 5.17 例 5.16 题图

由此可看出  $M(G)$  有如下性质:

- (1)  $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0, j=1, 2, \dots, m$ ;
- (2) 每行中 1 的个数是该点的出度, -1 的个数是该点的入度。

### 5.3.3 有向图的邻接矩阵

**定义 5.26** 设  $G=(V,E)$  是有向图,  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 令

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} k, & \text{从 } v_i \text{ 邻接到 } v_j \text{ 的边有 } k \text{ 条} \\ 0, & \text{没有 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 的边} \end{cases}$$

则称  $(a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$  为  $G$  的邻接矩阵, 记作  $\mathbf{A}(G)$ , 简记  $\mathbf{A}$ 。

**例 5.17** 图 5.18 中图  $G$  的邻接矩阵是

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

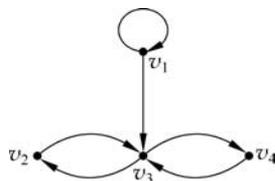


图 5.18 例 5.17 题图

有向图的邻接矩阵具有下列性质:

(1)  $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)} = d^+(v_i), i=1, 2, \dots, n$ , 因而  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)} = \sum_{i=1}^n d^+(v_i) = m$ ;

(2)  $\sum_{i=1}^n a_{ij}^{(l)} = d^-(v_j), j=1, 2, \dots, n$ , 因而  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(l)} = \sum_{j=1}^n d^-(v_j) = m$ ;

(3) 由(1)和(2)不难看出,  $\mathbf{A}(G)$  中所有元素之和是  $G$  中长度为  $l$  的通路(含回路)数, 而  $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$  为  $G$  中长度为  $l$  的回路总数。

如何利用有向图的邻接矩阵计算出有向图中长度为  $l \geq 2$  的通路数和回路数? 有下面的定理及推论。

**定理 5.6** 设  $\mathbf{A}$  为有向图  $G$  的邻接矩阵,  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 则  $\mathbf{A}^l (l \geq 1)$  中元素  $a_{ij}^{(l)}$  为  $v_i$  到  $v_j$  长度为  $l$  的通路数,  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$  为  $G$  中长度为  $l$  的通路(含回路)总数, 其中  $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$  为  $G$  中长度为  $l$  的回路数。

如在图 5.18 中, 计算长度为 2、3、4 的通路数和回路数, 计算  $\mathbf{A}^2$ 、 $\mathbf{A}^3$ 、 $\mathbf{A}^4$  得

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

观察各矩阵发现,  $a_{13}^{(2)}=1, a_{13}^{(3)}=3, a_{13}^{(4)}=3$ , 即  $G$  中  $v_1$  到  $v_3$  长度为 2、3、4 的通路分别为 1 条、3 条、3 条。而  $a_{11}^{(2)}=a_{11}^{(3)}=a_{11}^{(4)}=1$ , 则  $G$  中以  $v_1$  为起点(终点)的长度为 2、3、4 的回路各有一条。由于  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(2)}=10$ , 所以  $G$  中长度为 2 的通路总数为 10, 其中长度为 2 的回路总数为 5。

**推论** 设  $\mathbf{B}_r = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^r (r \geq 1)$ , 则  $\mathbf{B}_r$  中元素  $b_{ij}^{(r)}$  为图  $G$  中  $v_i$  到  $v_j$  长度小于或等于  $r$  的通路数,  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(r)}$  为图  $G$  中长度小于或等于  $r$  的通路(含回路)总数, 其中

$\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(r)}$  为图  $G$  中长度小于或等于  $r$  的回路总数。

例如,与图 5.18 对应的矩阵为

$$B_4 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

对于无向图可类似地定义邻接矩阵,对有向图的邻接矩阵得到的结论,可并行地用到无向图上。

### 5.3.4 有向图的可达矩阵

**定义 5.27** 设  $G=(V,E)$  是有向图,  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } v_j (i \neq j, p_{ii} = 1) \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

则称  $(p_{ij})_{n \times n}$  为  $G$  的可达矩阵, 记作  $P(G)$ , 简记  $P$ 。

**例 5.18** 图 5.19 所示有向图  $G$  的可达矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

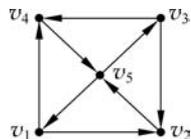


图 5.19 例 5.18 题图

由于任何顶点到自身都是可达的,故可达矩阵对角线上的元素恒为 1。 $v_i$  可达  $v_j$ , 即  $v_i$  到  $v_j$  有通路, 当且仅当  $b_{ij}^{(n-1)} \neq 0 (i \neq j)$ 。因此,  $p(D)$  中非对角线元素确定如下: 当  $b_{ij}^{(n-1)} \neq 0$  时,  $p_{ij} = 1$ , 否则  $p_{ij} = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$ 。所以, 可由有向图的邻接矩阵求可达矩阵。

类似地, 可以定义无向图的邻接矩阵和可达矩阵。

## 5.4 最短路径与关键路径

在现实生活和生产实践中,有许多管理、组织与计划中的优化问题,如在企业管理中,如何制订管理计划和设备购置计划,使收益最大或费用最小;在组织生产中,如何使各工序衔接好,才能使生产任务完成得既快又好;在现有交通网络中,如何使调运的物资数量多且费用最小;等等。这类问题均可借助于图论中最短路径及关键路径知识得以解决。

### 5.4.1 问题的提出

网络图中某两点的最短路径问题广泛应用于各个领域。例如,求交通距离最短,完成各道工序所花时间最少,或费用最省等,都可用求网络最短路径算法得到解决。

**例 5.19** 图 5.20 是一个石油流向的管网示意图,  $v_1$  代表石油开采地,  $v_7$  代表石油汇集站, 箭线旁的数字表示管线的长度, 现在要从  $v_1$  地调运石油到  $v_7$  地, 怎样选择管线可使路径最短?

也可以用点代表城市, 以连接两点的连线表示城市间的道路, 这样便可用图形描述城市

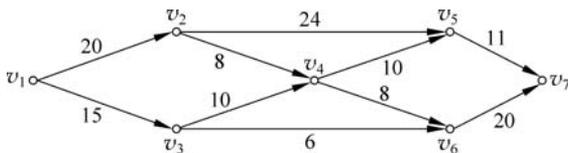


图 5.20 石油流向的管网示意图

间的交通网络。如果连线旁标注城市间道路的距离或单位运价,就可进一步研究从一个城市到另一个城市的路径最短或运费最省的运输方案。

在动态规划中,最短路径问题可由贝尔曼最优化原理及其递推方程求解,在阶段明确情况下,用逆向逐段优化嵌套推进,这是一种反向搜索法;在阶段不明确情况下,可用函数迭代法逐步正向搜索,直到指标函数衰减稳定得解。这些算法都是依据同一个原理建立的。即在网络图中,如果  $v_1 \cdots v_n$  是从  $v_1$  到  $v_n$  的最短路径,则  $v_1 \cdots v_{n-1}$  也必然是从  $v_1$  到  $v_{n-1}$  的最短路径。

那么,如何用图论来分析及求解网络最短路径问题呢?

## 5.4.2 最短路径

**定义 5.28** 图  $G$  是一个三重组  $(V, E, W)$ , 其中  $V$  是结点集合,  $E$  是边的集合,  $W = \{w(e) | e \in E\}$ ,  $w(e)$  是附加在边  $e$  上的实数,称为边  $e$  上的权,图  $G$  称为带权图。

图 5.20 给出一个带权图。

$$\begin{aligned}
 E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} \\
 V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} \\
 &= \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_2, v_5 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \\
 &\quad \langle v_3, v_6 \rangle, \langle v_4, v_5 \rangle, \langle v_4, v_6 \rangle, \langle v_5, v_7 \rangle, \langle v_6, v_7 \rangle\} \\
 w(e_1) &= 20, \quad w(e_2) = 15, \quad w(e_3) = 24, \quad w(e_4) = 8, \quad w(e_5) = 10, \\
 w(e_6) &= 6, \quad w(e_7) = 10, \quad w(e_8) = 8, \quad w(e_9) = 11, \quad w(e_{10}) = 20
 \end{aligned}$$

**定义 5.29** 设带权图  $G = (V, E, W)$  中,边的权也称为边的长度,一条通路的长度指的就是这条通路上各边的长度之和。从结点  $u$  到  $v$  的所有通路中长度最小的通路,称为  $u$  到  $v$  的最短路径。 $u$  到  $v$  的最短路径的长度称为  $u$  到  $v$  的距离。

下面介绍求解两个结点之间最短路径问题的一种简便、有效的算法——Dijkstra 算法。

1959 年狄克斯特拉 (E. W. Dijkstra) 提出了求网络最短路径的标号法,用给结点记标号来逐步形成起点到各点的最短路径及其距离值,这种方法被称为 **Dijkstra 算法**,被公认为目前较好的一种算法。

算法的基本思想是:先给带权图  $G$  的每一个结点一个临时标号 (Temporary Label,  $T$  标号) 或固定标号 (Permanent Label,  $P$  标号)。 $T$  标号表示从始点到这一点的短路长的上界;  $P$  标号则是从始点到这一点的短路长。每一步将某个结点的  $T$  标号改变为  $P$  标号,则最多经过  $n-1$  步算法停止 ( $n$  为  $G$  的结点数)。

最短路径的 Dijkstra 算法:

(1) 给始点  $v_1$  标上  $P$  标号  $p(v_1) = 0$ , 令  $P_0 = \{v_1\}$ ,  $T_0 = V - \{v_1\}$ , 给  $T_0$  中各结点标

上  $T$  标号  $t_0(v_j) = w_{1j}$  ( $j=2, 3, \dots, n$ ), 令  $r=0$ , 转步骤(2)。

(2) 若  $\min_{v_j \in T_r} \{t_r(v_j)\} = t_r(v_k)$ , 则令  $P_{r+1} = P_r \cup \{v_k\}$ ,  $T_{r+1} = T_r - \{v_k\}$ 。若  $T_{r+1} = \emptyset$ , 则结束, 否则转步骤(3)。

(3) 修改  $T_{r+1}$  中各结点  $v_j$  的  $T$  标号:  $T_{r+1}(v_j) = \min\{t_r(v_j), t_r(v_k) + w_{kj}\}$ , 转步骤(2)。

**例 5.20** 求图 5.21(a) 中结点  $v_1$  到  $v_7$  的最短路径。

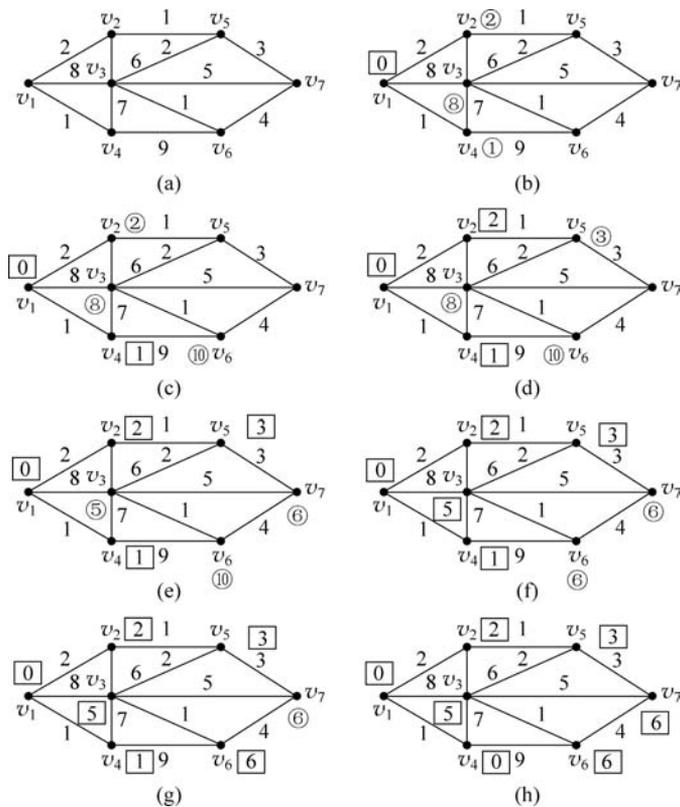


图 5.21 例 5.20 题图

**解** 根据 Dijkstra 算法, 在图 5.21(a) 中用方框表示  $P$  标号, 用圆框表示  $T$  标号, 凡图 5.21 中无标号的点即该点的标号为  $+\infty$  (下同)。

(1)  $p(v_1) = 0$ ,  $P_0 = \{v_1\}$ ,  $T_0 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ,  $T_0$  中各元素的  $T$  标号为  $t_0(v_2) = 2, \dots$ , 如图 5.21(b) 所示。

(2)  $\min_{v_j \in T_0} \{t_0(v_j)\} = t_0(v_4)$ , 将  $v_4$  的标号  $T$  改为  $P$  标号, 且  $P_1 = P_0 \cup \{v_4\} = \{v_1, v_4\}$ 。

$T_1 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7\}$ , 修改  $T_1$  各结点的  $T$  标号为:

$$t_1(v_2) = \min\{t_0(v_2), t_0(v_4) + w_{42}\} = \min\{2, 1 + \infty\} = 2$$

$$t_1(v_3) = \min\{t_0(v_3), t_0(v_4) + w_{43}\} = \min\{8, 1 + 7\} = 8$$

$$t_1(v_6) = \min\{t_0(v_6), t_0(v_4) + w_{46}\} = \min\{+\infty, 1 + 9\} = 10$$

$$t_1(v_7) = t_1(v_5) = \min\{+\infty, 1 + \infty\} = +\infty$$

如图 5.21(c), 依此类推可得各结点的  $P$  标号, 标号过程如图 5.21(a)~(h) 所示, 由

图 5.21(h)可知,  $v_1$  到  $v_7$  的距离为 6,  $v_1$  到  $v_7$  的最短路径为  $v_1 v_2 v_5 v_7$ 。

**例 5.21** 以图 5.20 给出的石油流向的管网示意图为例,  $v_1$  代表石油开采地,  $v_7$  代表石油汇集站, 箭线旁的数字表示管线的长度, 现在要从  $v_1$  地调运石油到  $v_7$  地, 怎样选择管线可使路径最短?

**解**

(1) 给起点  $v_1$  标号  $(0, \lambda)$ , 从  $v_1$  到  $v_1$  的距离  $p(v_1) = 0$ ,  $v_1$  为起点。

(2) 标号的点的集合  $P_0 = \{v_1\}$ , 没有标号的点的集合  $T_0 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ , 边集为

$$A = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in P_0, v_j \in T_0\} = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$$

$$T_{12} = p(v_1) + \omega_{12} = 0 + 20 = 20$$

$$T_{13} = p(v_1) + \omega_{13} = 0 + 15 = 15$$

$$\min\{T_{12}, T_{13}\} = T_{13} = 15$$

给边  $(v_1, v_3)$  的终点  $v_3$  以双标号  $(15, 1)$ 。

(3) 标号的点的集合  $P_1 = \{v_1, v_3\}$ , 没有标号的点的集合  $T_1 = \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ , 边集为

$$A = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in P_1, v_j \in T_1\} = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_3, v_6)\}$$

$$T_{34} = 25, T_{36} = 21$$

$$\min\{T_{34}, T_{36}, T_{12}\} = T_{12} = 20$$

给边  $(v_1, v_2)$  的终点  $v_2$  以双标号  $(20, 1)$ 。

(4) 标号的点的集合  $P_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ , 没有标号的点的集合  $T_2 = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$ , 边集为

$$A = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in I, v_j \in J\} = \{(v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_6)\}$$

$$T_{24} = p(v_2) + \omega_{24} = 20 + 8 = 28$$

$$T_{25} = p(v_2) + \omega_{25} = 20 + 24 = 44$$

$$\min\{T_{24}, T_{25}, T_{34}, T_{36}\} = T_{36} = 21$$

给边  $(v_3, v_6)$  的终点  $v_6$  以双标号  $(21, 3)$ 。

(5) 标号的点的集合  $P_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$ , 没有标号的点的集合  $T_3 = \{v_4, v_5, v_7\}$ , 边集为

$$A = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in P_3, v_j \in T_3\} = \{(v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_6, v_7)\}$$

$$T_{67} = p(v_6) + \omega_{67} = 21 + 20 = 41$$

$$\min\{T_{24}, T_{25}, T_{34}, T_{67}\} = T_{34} = 25$$

给边  $(v_3, v_4)$  的终点  $v_4$  以双标号  $(25, 3)$ 。

(6) 标号的点的集合  $P_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$ , 没有标号的点的集合  $T_4 = \{v_5, v_7\}$ , 边集为

$$A = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in I, v_j \in J\} = \{(v_2, v_5), (v_4, v_5), (v_6, v_7)\}$$

$$T_{45} = p(v_4) + \omega_{45} = 25 + 10 = 35$$

$$\min\{T_{25}, T_{45}, T_{67}\} = T_{45} = 35$$

给边  $(v_4, v_5)$  的终点  $v_5$  以双标号  $(35, 4)$ 。

(7) 标号的点的集合  $P_5 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , 没有标号的点的集合  $T_5 = \{v_7\}$ , 边

集为

$$\begin{aligned} A &= \{(v_i, v_j) \mid v_i \in I, v_j \in J\} = \{(v_5, v_7), (v_6, v_7)\} \\ T_{57} &= p(v_5) + \omega_{57} = 35 + 11 = 46 \\ \min\{T_{57}, T_{67}\} &= T_{67} = 41 \end{aligned}$$

给边  $(v_6, v_7)$  的终点  $v_7$  以双标号  $(41, 6)$ 。

至此,全部顶点都已得到标号,计算结束。得到石油开采地  $v_1$  到汇集点  $v_7$  的最短路径,即  $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6 \rightarrow v_7$ ,由  $v_7$  的第一个标号可知路程长 41。

对于无向图的 Dijkstra 算法求解:无向图中的任一条边  $(v_i, v_j)$  均可用方向相反的两条边  $(v_i, v_j)$  和  $(v_j, v_i)$  来代替。把原来的无向图变为有向图后,即可用上述的 Dijkstra 算法求解。

当然,也可以直接在原来的无向图上用 Dijkstra 算法求解。在无向图上求解与在有向图上求解的区别在于寻找邻点时不同:在无向图上,只要两结点之间有连线,就是邻点。因此,在无向图上的求解和在相应的有向图上求解相比,计算过程中的邻点个数可能增多,边集中的边数也就随着增多。计算结束时,一定是所有结点都得到了标号,且其最优结果不会劣于相应无向图的最优结果。

### 5.4.3 关键路径

在实施一个工程计划时,若将整个工程分成若干工序,有些工序可以同时实施,有些工序必须在完成另一些工序后才能实施,工序之间的次序关系可以用有向图来表示,这种有向图称为计划评审技术(Project Evaluation and Review Technique)图,简称 PERT 图。

**定义 5.30** 设有向图

$$\begin{aligned} G &= \langle V, E \rangle, v \in V \\ v \text{ 的后继元集 } \Gamma^+(v) &= \{x \mid x \in V \wedge \langle v, x \rangle \in E\} \\ v \text{ 的先驱元集 } \Gamma^-(v) &= \{x \mid x \in V \wedge \langle x, v \rangle \in E\} \end{aligned}$$

**定义 5.31** 设  $G = (V, E, w)$  是一个  $n$  阶有向带权图,满足以下条件:

- (1)  $G$  是简单图;
- (2)  $G$  中无回路;
- (3) 有一个入度为 0 的顶点称作始点;有一个出度为 0 的顶点称作终点;
- (4) 通常边  $\langle v_i, v_j \rangle$  的权表示时间,始点记作  $v_1$ ,终点记作  $v_n$ 。

则称  $G$  为 PERT 图。

**定义 5.32 关键路径:**PERT 图中从始点到终点的最长路径。通过求各顶点的最早完成时间来求关键路径。

$v_i$  的最早完成时间  $TE(v_i)$ :从始点  $v_1$  沿最长路径到  $v_i$  所需的时间。

$$\begin{aligned} TE(v_1) &= 0 \\ TE(v_i) &= \max\{TE(v_j) + w_{ji} \mid v_j \in \Gamma^-(v_i)\}, \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

$v_i$  的最晚完成时间  $TL(v_i)$ :在保证终点  $v_n$  的最早完成时间不增加的条件下,从始点  $v_1$  最迟到达  $v_i$  的时间。

$$TL(v_n) = TE(v_n)$$

$$TL(v_i) = \min\{TL(v_j) - w_{ij} \mid v_j \in \Gamma^+(v_i)\}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$v_i \text{ 的缓冲时间 } TS(v_i) = TL(v_i) - TE(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$v_i \text{ 在关键路径上} \Leftrightarrow TS(v_i) = 0$$

因为在关键路径上,任何工序如果耽误了时间  $t$ ,整个工序就耽误了时间  $t$ ,因而在关键路径上各顶点的缓冲时间均为 0。

**例 5.22** 求图 5.22 所示的 PERT 图中各顶点的最早、最晚和缓冲时间以及关键路径。

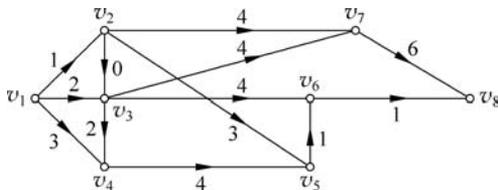


图 5.22 例 5.22 题图

**解** 各点最早完成时间:

$$TE(v_1) = 0$$

$$TE(v_2) = \max\{0+1\} = 1$$

$$TE(v_3) = \max\{0+2, 1+0\} = 2$$

$$TE(v_4) = \max\{0+3, 2+2\} = 4$$

$$TE(v_5) = \max\{1+3, 4+4\} = 8$$

$$TE(v_6) = \max\{2+4, 8+1\} = 9$$

$$TE(v_7) = \max\{1+4, 2+4\} = 6$$

$$TE(v_8) = \max\{9+1, 6+6\} = 12$$

各点最晚完成时间:

$$TL(v_8) = 12$$

$$TL(v_7) = \min\{12-6\} = 6$$

$$TL(v_6) = \min\{12-1\} = 11$$

$$TL(v_5) = \min\{11-1\} = 10$$

$$TL(v_4) = \min\{10-4\} = 6$$

$$TL(v_3) = \min\{6-2, 11-4, 6-4\} = 2$$

$$TL(v_2) = \min\{2-0, 10-3, 6-4\} = 2$$

$$TL(v_1) = \min\{2-1, 2-2, 6-3\} = 0$$

各点缓冲时间:

$$TS(v_1) = 0-0 = 0$$

$$TS(v_2) = 2-1 = 1$$

$$TS(v_3) = 2-2 = 0$$

$$TS(v_4) = 6-4 = 2$$

$$TS(v_5) = 10-8 = 2$$

$$TS(v_6) = 11-9 = 2$$

$$TS(v_7) = 6-6 = 0$$

$$TS(v_8) = 12-12 = 0$$

关键路径:  $v_1v_3v_7v_8$ 。

关键路径通常(但并非总是)是决定项目工期的进度活动序列。它是项目中最长的路径,即使很小的浮动也可能直接影响整个项目的最早完成时间。关键路径的工期决定了整个项目的工期,任何关键路径上的终端元素的延迟在浮动时间为零或负数时将直接影响项目的预期完成时间(例如在关键路径上没有浮动时间)。但特殊情况下,如果总浮动时间大于零,则有可能不会影响项目整体进度。

## 5.5 欧拉图与哈密顿图

本节介绍两种特殊的连通图,一种是具有经过所有边的简单生成回路的图;另一种是具有生成圈的图。

### 5.5.1 欧拉图

欧拉图产生的背景就是前面介绍的哥尼斯堡七桥问题图。在图中是否存在经过每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路? 欧拉在他的论文中论证了这样的回路是不存在的。称具有这种特点的图为欧拉图。

**定义 5.33** 设有向图(无向图) $G=(V, E)$ 是连通的、无孤立点的图。

(1) 若存在这样的通路,经过图中每条边一次且仅一次就可以行遍所有顶点,称此通路为欧拉通路;

(2) 若存在这样的回路,经过图中每条边一次且仅一次就可以行遍所有顶点,称此回路为欧拉回路;具有欧拉回路的图称为欧拉图;

(3) 具有欧拉通路但无欧拉回路的图称为半欧拉图。

规定: 平凡图为欧拉图。

**例 5.23** 判断图 5.23 所示各图中哪些是欧拉图? 哪些是半欧拉图?

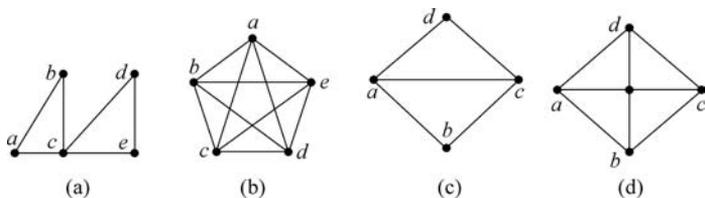


图 5.23 例 5.23 题图

**解** 此例中,图 5.23(a)、图 5.23(b)是欧拉图;图 5.23(c)是半欧拉图;图 5.23(d)中不存在欧拉通路,更不存在欧拉回路。这是因为图 5.23(a)中有欧拉回路( $abcdeca$ )。对于图 5.23(b)、图 5.23(c),读者可做类似的研究。

判断一个图是欧拉图,还是半欧拉图,按定义来判断很复杂,有时甚至是不可能的,因此可由下面的定理来判断。

**定理 5.7(欧拉定理)** 设  $G=(V, E)$  是无孤立点的无向图, $G$  是欧拉图当且仅当  $G$  连通且无奇度顶点。

**证明** 若  $G$  为平凡图, 则定理显然成立。下面讨论非平凡图。

**必要性** 设  $C$  是  $G$  中一条欧拉回路, 则

(1) 图  $G$  是连通的。因为图  $G$  中无孤立点, 所以图  $G$  中的每个结点都有一些边与之关联, 而欧拉回路  $C$  包含了图  $G$  中的每一条边, 回路  $C$  在通过各边的同时必通过图  $G$  中每个顶点。所以图  $G$  中每个结点都在回路  $C$  上。因此, 图  $G$  中任何 2 个顶点, 都可以通过回路  $C$  相互到达, 故图  $G$  是连通的。

(2) 图  $G$  中无奇度顶点。  $\forall v_i \in V, v_i$  在  $C$  上每出现 1 次获 2 度, 所以  $v_i$  为偶度顶点。由  $v_i$  的任意性, 结论为真。

**充分性** 对边数  $m$  作归纳法。

(1)  $m=1$  时,  $G$  为一个环, 则  $G$  为欧拉图。

(2) 设  $m \leq k (k \geq 1)$  时结论为真, 则  $m=k+1$  时证明如下:

① 制造满足归纳假设的若干小欧拉图。由连通及无奇度顶点可知,  $\delta(G) \geq 2$ , 用扩大路径法可得  $G$  中长度  $\geq 3$  的圈  $C_1$ 。删除  $C_1$  上所有的边(不破坏  $G$  中顶点度数的奇偶性)得  $G'$ , 则  $G'$  无奇度顶点, 设它有  $s (s \geq 1)$  个连通分支  $G'_1, G'_2, \dots, G'_s$ , 它们的边数均  $\leq k$ , 因而它们都是小欧拉图。设  $C'_1, C'_2, \dots, C'_s$  是  $G'_1, G'_2, \dots, G'_s$  的欧拉回路。

② 将  $C_1$  上被删除的边还原, 从  $C_1$  上某一顶点出发走出  $G$  的一条欧拉回路  $C$ 。

综上所述, 定理充分性成立。

**推论** 设  $G=(V, E)$  是无孤立点的无向图,  $G$  有欧拉通路当且仅当  $G$  连通且恰有 2 个奇度顶点。

**证明** **必要性** 设  $G$  是  $m$  条边的  $n$  阶无向图, 因为  $G$  中存在欧拉通路(但不存在欧拉回路), 设  $\Gamma = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2} \cdots v_{i_{m-1}}e_{j_m}v_{i_m}$  为  $G$  中一条欧拉通路,  $v_{i_0} \neq v_{i_m}$ 。  $\forall v \in V(G)$ , 若  $v$  不在  $\Gamma$  的端点出现, 显然  $d(v)$  为偶数, 若  $v$  在端点出现过, 则  $d(v)$  为奇数, 因为  $\Gamma$  只有两个端点且不同, 因而  $G$  中只有两个奇度顶点。另外,  $G$  的连通性是显然的。

**充分性**(利用欧拉定理) 设  $u$  和  $v$  为  $G$  中的两个奇度顶点, 令  $G' = G \cup (u, v)$ , 则  $G'$  连通且无奇度顶点, 由欧拉定理知  $G'$  为欧拉图, 因而存在欧拉回路  $C$ , 令  $\Gamma = C - (u, v)$ , 则  $\Gamma$  为  $G$  中的欧拉通路。

**例 5.24** 图  $G$  如图 5.24 所示。图  $G$  是否是欧拉图? 若是, 求其欧拉回路。

由于图  $G$  中 6 个顶点的度都为偶数且图  $G$  连通, 根据欧拉定理可知  $G$  为欧拉图。

在图  $G$  中任意找一简单回路  $C: (1, 2, 3, 1)$ 。还有 7 条边不在该回路中, 边  $(3, 4)$  不在  $C$  中且与回路中的顶点 3 相关联, 由顶点 3 出发经过边  $(3, 4)$  可得到一简单回路  $C': (3, 4, 5, 3)$ , 将  $C'$  并入  $C$  得到了一个新的更长的简单回路  $C: (1, 2, 3, 4, 5, 3, 1)$ 。

此时仍有 4 条边不在回路  $C$  中, 边  $(4, 6)$  不在  $C$  中且与顶点 4 相关联, 由顶点 4 出发经过边  $(4, 6)$  又可得到一个简单回路  $C'': (4, 6, 5, 2, 4)$ 。将  $C''$  并入  $C$  得到一个更长的简单回路  $C: (1, 2, 3, 4, 6, 5, 2, 4, 5, 3, 1)$ 。可以看到,  $G$  中所有的边已全部在  $C$  中了, 故得此回路为  $G$  中的一条欧拉回路。

**定理 5.8** 有向图  $G$  是欧拉图当且仅当  $G$  是弱连通的且每个顶点的入度等于出度。

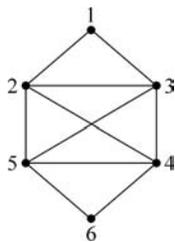


图 5.24 例 5.24 题图

本定理的证明类似于定理 5.7。读者可以自己证明。

**推论** 有向图  $G$  有欧拉通路当且仅当  $G$  是单向连通的且  $G$  中恰有 2 个奇度顶点, 其中一个的入度比出度大 1, 另一个的出度比入度大 1, 而其余顶点的入度都等于出度。

本推论的证明类似于定理 5.7。

定理 5.7 和定理 5.8 提供了欧拉通路与欧拉回路的十分简便的判别准则。

根据定理 5.7 和定理 5.8 再判断例 5.24 中各个图, 哪些图是欧拉图? 哪些图是半欧拉图?

**例 5.25** 欧拉图的应用——一笔画问题。

所谓“一笔画问题”就是画一个图形, 笔不离纸, 每条边只画一次而不许重复地画完该图。“一笔画问题”本质上就是一个无向图是否存在欧拉通路(回路)的问题。如果该图为欧拉图, 则能够一笔画完该图, 并且笔又回到出发点; 如果该图只存在欧拉通路, 则能够一笔画完该图, 但笔回不到出发点; 如果该图中不存在欧拉通路, 则不能一笔画完该图。

**例 5.26** 图 5.25 所示的三个图能否一笔画成? 为什么?

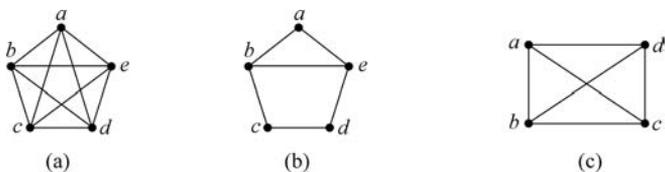


图 5.25 例 5.26 题图

**解** 因为图 5.25(a)和图 5.25(b)中分别有 0 个和 2 个奇数结点, 所以它们分别是欧拉图和存在欧拉通路, 因此能够一笔画成, 并且在图 5.25(a)中笔能回到出发点, 而图 5.25(b)中笔不能回到出发点。图 5.25(c)中有 4 个度为 3 的结点, 所以不存在欧拉通路, 因此不能一笔画成。

**例 5.27** 计算机磁鼓的设计如图 5.26 所示。

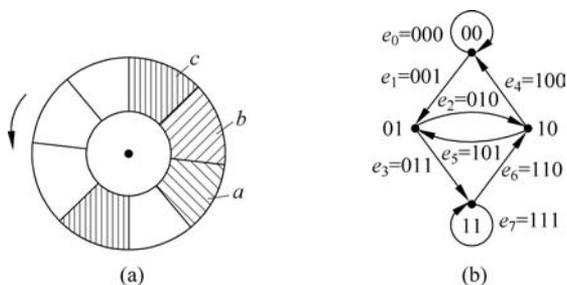


图 5.26 例 5.27 题图

计算机旋转磁鼓的表面被等分成  $2^n$  个部分, 与  $n$  个电刷相接触。绝缘体(空白部分)不通电表示信号 0; 导体(阴影部分)通电表示信号 1。从而  $n$  个电刷上就产生一  $n$  位二进制信号。

问: 鼓轮上的 8 个扇区应如何安排导体或绝缘体, 使鼓轮旋转一周, 触点输出一组不同的二进制信号?

每转一个扇区,信号  $a_1a_2a_3$  变成  $a_2a_3a_4$ ,前者右两位决定了后者左两位。因此,把所有两位二进制数作为结点,从每一个结点  $a_1a_2$  到  $a_2a_3$  引一条有向边表示  $a_1a_2a_3$  这三位二进制数,作出表示所有可能数码变换的有向图,如图 5.26(b)。于是问题转化为在这个有向图上求一条欧拉回路,这个有向图的 4 个结点的度都是出度、入度各为 2,图 5.26(b)中有欧拉回路存在,例如  $(e_0e_1e_2e_5e_3e_7e_6e_4)$  是一欧拉回路,对应于这一回路的德布鲁因序列是 00010111,因此材料应按此序列分布。

用类似的论证,可以证明存在一个  $2^n$  个二进制的循环序列,其中  $2^n$  个由  $n$  位二进制数组成的子序列都互不相同。例如 16 个二进制数的布鲁因序列是 0000101001101111。

此序列称为德布鲁因(De Bruijn)序列。这一应用是由 Good(1946)提出的。

**欧拉图的应用——中国邮递员问题。**

1962 年我国的管梅谷首先提出并研究了如下的问题:邮递员从邮局出发经过他投递的每一条街道,然后返回邮局,邮递员希望找出一条行走距离最短的路线。这个问题被外国人称为中国邮递员问题(Chinese Postman Problem)。

把邮递员的投递区域看作一个连通的带权无向图  $G$ ,其中  $G$  的顶点被看作街道的交叉口和端点,街道被看作边,权被看作街道的长度。解决中国邮递员问题,就是在连通带权无向图中,寻找经过每边至少一次且权和最小的回路。

如果对应的图  $G$  是欧拉图,那么从对应于邮局的顶点出发的任何一条欧拉回路都是符合上述要求的邮递员的最优投递路线。

如果图  $G$  只有两个奇点  $x$  和  $y$ ,则存在一条以  $x$  和  $y$  为端点的欧拉链,因此由这条欧拉链加  $x$  到  $y$  的最短路即是所求的最优投递路线。

如果连通图  $G$  不是欧拉图也不是半欧拉图,由于图  $G$  有偶数个奇点,对于任两个奇点  $x$  和  $y$ ,在  $G$  中必有一条路连接它们。将这条路上的每条边改为二重边得到新图  $H_1$ ,则  $x$  和  $y$  就变为  $H_1$  的偶点,在这条路上的其他顶点的度均增加 2,即奇偶数不变,于是  $H_1$  的奇点个数比  $G$  的奇点个数少 2。对  $H_1$  重复上述过程得  $H_2$ ,再对  $H_2$  重复上述过程得  $H_3, \dots$ ,经若干次后,可将  $G$  中所有顶点变成偶点,从而得到多重欧拉图  $G'$ (在  $G'$  中,若某两点  $u$  和  $v$  之间连接的边数多于 2,则可去掉其中的偶数条多重边,最后剩下连接  $u$  与  $v$  的边仅有 1 条或 2 条,这样得到的图  $G'$  仍是欧拉图)。这个欧拉图  $G'$  的一条欧拉回路就相当于中国邮递员问题的一个可行解,且欧拉回路的长度等于  $G$  的所有边的长度加上由  $G$  到  $G'$  所添加的边的长度之和。但怎样才能使这样的欧拉回路的长度最短呢? 如此得到的图  $G'$  中最短的欧拉回路称为图  $G$  的最优环游。

## 5.5.2 哈密顿图

哈密顿图是由威廉·哈密顿(William Hamilton)爵士于 1856 年在解决关于正十二面体的一个数学游戏时首次提出的。

1856 年哈密顿爵士发明了一种数学游戏:一个人在(实心的)正十二面体的任意 5 个相继的顶点(正十二面体由 12 个相同的正五边形组成,有 20 个顶点和 30 条棱)上插上 5 个大头针,形成一条路,要求另一个人扩展这条路,以形成一条过每个顶点一次且仅一次的圈。

哈密顿爵士在 1859 年将他的正十二面体数学游戏重新叙述为:能否在全球选定的 20 个都会城市(据说有中国三个城市——北京、上海、西安)中,从任一城市出发,进行环球

航行,经过这 20 个城市一次且仅一次(不能去其他城市),然后回到出发点。这就是著名的**环球航行问题**或**周游世界问题**。哈密顿给出了这个问题的肯定的答案,如图 5.27 所示。按照图 5.27 中所给城市的编号行遍,可得所要求的回路,对于一般的连通图  $G$  也可以提出这样的问题,即能否找到一条含图中所有顶点的基本通路或回路。

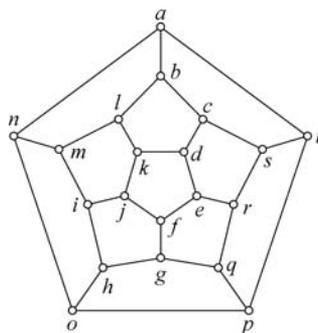


图 5.27 环球航行问题

**定义 5.34** 设有图  $G=(V, E)$  :

- (1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次且仅一次的通路。
- (2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次且仅一次的回路。
- (3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图。
- (4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图。

**说明:**

- (1) 平凡图是哈密顿图。
- (2) 哈密顿通路是基本通路,哈密顿回路是基本回路。
- (3) 环与平行边不影响哈密顿性。
- (4) 哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上。

**例 5.28** 判断图 5.28 中哪些图是哈密顿图? 哪些是半哈密顿图?

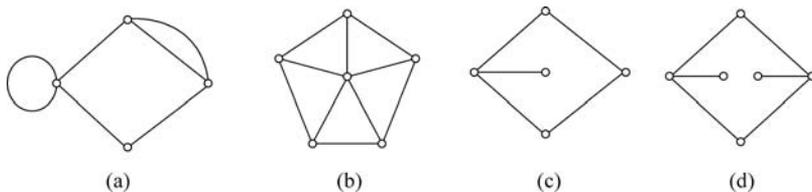


图 5.28 例 5.28 题图

**解** 图 5.28(a)、图 5.28(b)是哈密顿图;图 5.28(c)是半哈密顿图;图 5.28(d)既不是哈密顿图,也不是半哈密顿图。

到目前为止,还没有简明的条件作为判断一个图是否为哈密顿图的充要条件,因此研究哈密顿图要比研究欧拉图难些。下面给出一些哈密顿通路、回路存在的必要条件或充分条件。

**定理 5.9** 设无向图  $G=(V, E)$  是哈密顿图,对于任意  $V_1 \subset V$  且  $V_1 \neq \emptyset$ , 均有

$$p(G - V_1) \leq |V_1|$$

其中  $p(G - V_1)$  是从  $G$  中删除  $V_1$  后所得到的连通分支数。

**证明** 设  $C$  为  $G$  中任意一条哈密顿回路,当  $V_1$  中顶点在  $C$  中均不相邻时,  $p(G - V_1) = |V_1|$  最大,其余情况下均有  $p(G - V_1) < |V_1|$ , 所以有  $p(G - V_1) \leq |V_1|$ 。而  $C$  是  $G$  的生成子图,所以,  $p(G - V_1) \leq p(C - V_1) \leq |V_1|$ 。

**推论** 设无向图  $G=(V, E)$  是半哈密顿图,对于任意的  $V_1 \subset V$  且  $V_1 \neq \emptyset$  均有

$$p(G - V_1) \leq |V_1| + 1$$

**证明** 令  $\Gamma(uv)$  为  $G$  中哈密顿通路,令  $G' = G \cup (u, v)$ , 则  $G'$  为哈密顿图。于是

$$p(G - V_1) = p(G' - V_1 - (u, v)) \leq |V_1| + 1$$

本定理的条件是哈密顿图的必要条件,但不是充分条件。可以利用本定理的必要条件来判定某些图不是哈密顿图。

**例 5.29** 利用定理 5.9 判定图 5.29 中的图不是哈密顿图。

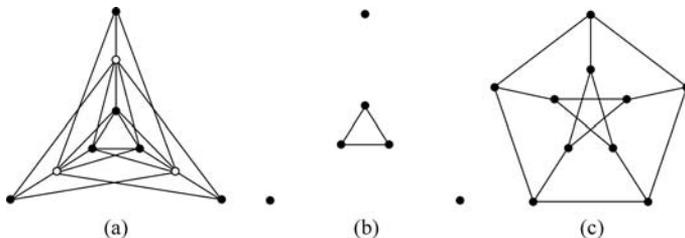


图 5.29 例 5.29 题图

**解** 图 5.29(a)不是哈密顿图。

图 5.29(a)中共有 9 个结点,如果取结点子集  $V_1 = \{3 \text{ 个白点}\}$ ,删除  $V_1$ 。而这时图 5.29(a)的连通分支为  $\omega(G - S) = 4$ ,如图 5.29(b)所示。根据定理 5.9 的逆否命题得图 5.29(a)不是哈密顿图。但要注意,若一个图满足定理 5.9 的条件也不能保证这个图一定是哈密顿图。可以验证彼得森图[如图 5.29(c)所示]满足定理的条件,但它不是哈密顿图。若一个图不满足定理中的条件,则它一定不是哈密顿图。

在彼得森图中存在哈密顿通路不存在哈密顿回路,所以彼得森图是半哈密顿图。

下面给出一些图具有哈密顿回路或通路的一些充分条件。

**定理 5.10** 设  $G$  是  $n$  阶无向简单图,若对于任意不相邻的顶点  $v_i$  和  $v_j$ ,均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1$$

则  $G$  中存在哈密顿通路。

**证明**

(1) 首先证明  $G$  是连通的。假设  $G$  不连通, $G$  至少有两个连通分支,设  $G_1$  和  $G_2$  是顶点数分别为  $n_1$  和  $n_2$  ( $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$ ) 的连通分支,设  $v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$ ,由于  $G$  是简单图,所以,  $d_G(v_1) + d_G(v_2) = d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2) \leq n_1 - 1 + n_2 - 1 \leq n - 2$ 。

这与定理中条件  $d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1$  矛盾,所以  $G$  是连通的。

再证明  $G$  中存在哈密顿通路。

(2) 设  $\Gamma = v_1 v_2 \cdots v_l$  为  $G$  中极大路径,  $l \leq n$ ,若  $l = n$ ,则  $\Gamma$  为  $G$  中经过所有顶点的路径,即为哈密顿通路。

若  $l < n$ ,说明  $G$  中还有在  $\Gamma$  外的顶点,但此时可以证明存在经过  $\Gamma$  上所有顶点的回路。

① 若在  $\Gamma$  上  $v_1$  与  $v_l$  相邻,则  $v_1 v_2 \cdots v_l v_1$  为过  $\Gamma$  上所有顶点的回路。

② 若在  $\Gamma$  上  $v_1$  与  $v_l$  不相邻,假设  $v_1$  在  $\Gamma$  上与  $v_{i_1} = v_2, v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_k}$  相邻( $k$  必大于或等于 2,否则  $d(v_1) + d(v_l) \leq 1 + l - 2 < n - 1$ ),此时  $v_l$  必与  $v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_k}$  相邻的顶点  $v_{i_2-1}, v_{i_3-1}, \dots, v_{i_k-1}$  至少之一相邻(否则  $d(v_l) + d(v_l) \leq k + l - 2 - (k - 1) = l - 1 < n - 1$ )。设  $v_l$  与  $v_{i_r-1}$  ( $2 \leq r \leq k$ ) 相邻,如图 5.30(a)所示,删除边  $(v_{i_r-1}, v_{i_r})$ ,得到回路  $C = v_1 v_{i_1} \cdots v_{i_r-1} v_l v_{i_r} v_{i_r-1} \cdots v_{i_k} \cdots v_{i_2} v_1$ 。

③ 证明存在比  $\Gamma$  更长的路径。

由连通性,可得比  $\Gamma$  更长的路径[如图 5.30(b)所示],对它再扩大路径,重复(2),最后得哈密顿通路。

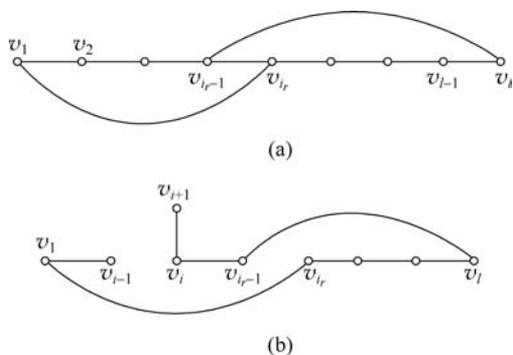


图 5.30 哈密顿通路存在的充分条件

**推论 1** 设  $G$  为  $n(n \geq 3)$  阶无向简单图,若对于  $G$  中任意两个不相邻的顶点  $v_i$  和  $v_j$ , 均有  $d(v_i) + d(v_j) \geq n$ , 则  $G$  中存在哈密顿回路,从而  $G$  为哈密顿图。

**证明** 由定理 5.10 得  $\Gamma = v_1 v_2 \cdots v_n$  为  $G$  中哈密顿通路。

若  $(v_1, v_n) \in E(G)$ , 得证。否则利用推论条件  $d(v_i) + d(v_j) \geq n$  证明存在过  $v_1, v_2, \dots, v_n$  的哈密顿回路。

**推论 2** 设  $G$  为  $n(n \geq 3)$  阶无向简单图,若对任意的  $v \in V(G)$ , 均有  $d(v) \geq \frac{n}{2}$ , 则  $G$  为哈密顿图。

利用推论 1 可证推论 2。

**定理 5.11** 设  $u$  和  $v$  为  $n$  阶无向简单图  $G$  中两个不相邻的顶点,且  $d(u) + d(v) \geq n$ , 则  $G$  为哈密顿图当且仅当  $G \cup (u, v)$  为哈密顿图。

本定理的证明留给读者。

以上定理及推论都是针对无向图的条件,下面讨论有向图中的哈密顿通路。

讨论一类一定含有哈密顿通路(回路)的有向图——竞赛图。

**定义 5.35(竞赛图)** 无向完全图的定向图称为竞赛图。

注:竞赛图中任何两个结点间都有且仅有一条有向边。

**例 5.30** 图 5.31 给出了三个具有 4 个结点的竞赛图。

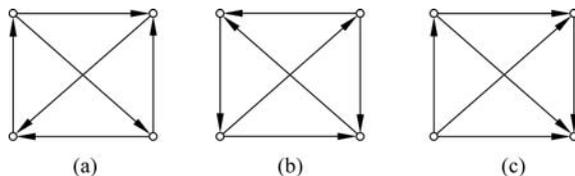


图 5.31 竞赛图

**定理 5.12** 若  $G$  为  $n(n \geq 2)$  阶竞赛图,则  $G$  中具有哈密顿通路。

**证明** 略。

### 哈密顿图应用

(1) 环球航行问题(如图 5.27 所示)。

易知  $abcdefghijklmnopqrsta$  为图 5.27 中的一条哈密顿回路。

**注意:** 此图不满足定理 5.10 推论 1 条件。

(2) 在四分之一国际象棋盘(由  $4 \times 4$  方格组成)上跳马无解(如图 5.32 所示)。

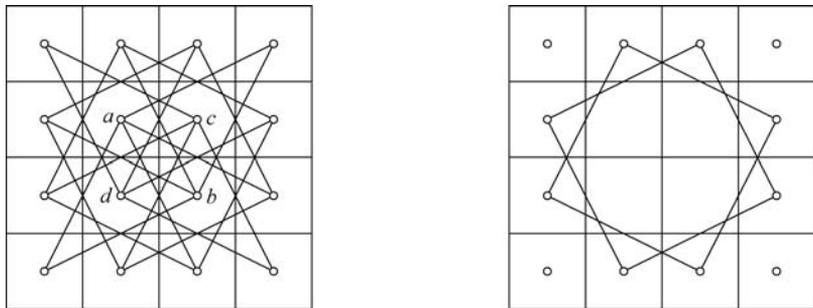


图 5.32 国际象棋盘跳马

令  $V_1 = \{a, b, c, d\}$ , 则  $p(G - V_1) = 6 > 4$ , 由定理 5.9 可知图 5.32 中无哈密顿回路。

(3) 旅行商问题(Traveling Salesman Problem, TSP)是在加权完全无向图中, 求经过每个顶点恰好一次的(边)权和最小的哈密顿圈, 又称之为**最优哈密顿圈**。如果将加权图中的结点看作城市, 加权边看作距离, 旅行商问题就成为找出一条最短路线, 使得旅行商从某个城市出发, 遍历每个城市一次, 最后再回到出发的城市。

若选定出发点, 对  $n$  个城市进行排列, 因第 2 个顶点有  $n-1$  种选择, 第 3 个顶点有  $n-2$  种选择, 依此类推, 共有  $(n-1)!$  条哈密顿圈。考虑一个哈密顿圈可以用相反两个方向来遍历, 因而只需检查  $\frac{1}{2}(n-1)!$  个哈密顿圈, 从中找出权和最小的一个。我们知道

$\frac{1}{2}(n-1)!$  随着  $n$  的增加而增长得极快, 例如有 20 个顶点, 需考虑  $\frac{1}{2} \times 19!$  (约为  $6.08 \times 10^{16}$ ) 条不同的哈密顿圈。要检查每条哈密顿圈用最快的计算机也需大约一年的时间, 才能求出该图中长度最短的一条哈密顿圈。

因为旅行商问题同时具有理论和实践的重要性, 所以已经投入了巨大的努力来设计解决它的有效算法。目前还没有找到一个有效算法。因此, 解决旅行商问题的实际方法是使用近似算法。大家可以通过查阅资料进行学习。

## 5.6 平面图

在一些实际问题中, 常常需要考虑一些图在平面上的画法, 希望图的边与边不相交或尽量少相交。如印制电路板上的布线、线路或交通道路的设计以及地下管道的敷设等。

例如, 一个工厂有 3 个车间和 3 个仓库, 因工作需要, 车间与仓库之间将设专用的车道。为避免发生车祸, 应尽量减少车道的交叉点, 最好是没有交叉点, 这是否可能呢?

如图 5.33(a)所示,  $A, B, C$  是 3 个车间;  $M, N, P$  是 3 座仓库。经过研究表明, 要想建造不相交的道路是不可能的, 但可以使交叉点最少, 如图 5.33(b)所示。此类实际问题涉及平面图的研究。近年来, 由于大规模集成电路的发展, 也促进了平面图的研究。

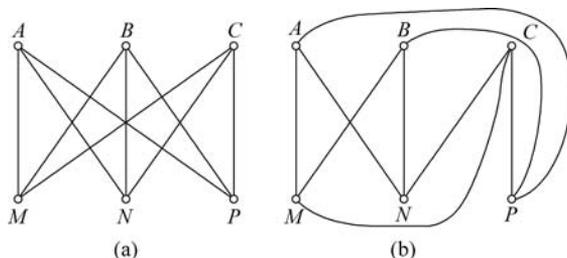


图 5.33 车间和仓库之间的通道

### 5.6.1 平面图的定义

**定义 5.36** 设  $G=(V, E)$  是一无向图。如果能把  $G$  的所有结点和边画在平面上, 使得任何两条边除公共端点外没有其他的交点, 则称  $G$  是一个平面图或称该图能嵌入平面; 否则, 称  $G$  是一个非平面图。

直观上讲, 平面图就是可以画在平面上, 使边除端点外彼此不相交的图。应当注意, 有些图从表面上看, 它的某些边是相交的, 但是不能就此肯定它不是平面图。

例如, 图 5.34(a)是无向完全图  $K_3$ , 它是平面图。图 5.34(b)是无向完全图  $K_4$ , 它表面上看有相交边, 但是把它画成图 5.34(c), 则可以看出它是一个平面图。图 5.34(d)是平面图。图 5.34(e)经改画后得到图 5.34(f), 图 5.34(g)经改画后得到图 5.34(h), 由定义知它们都是平面图。而图 5.34(i)和图 5.34(j)是无向完全图  $K_5$ ,  $K_5$  和图 5.33 中的两个图, 无论怎样调整边的位置, 都不能使任何两边除公共端点外没有其他的交点, 所以它们不是平面图, 它们是两个最基本、最重要的非平面图, 在平面图理论的研究中有非常重要的作用。

设  $G$  是平面图,  $G$  的以无交边的方式画在平面上的图, 称为平面图  $G$  的平面嵌入。如图 5.34 中的(c)、(f)、(h)分别为图(b)、(e)、(g)的平面嵌入。

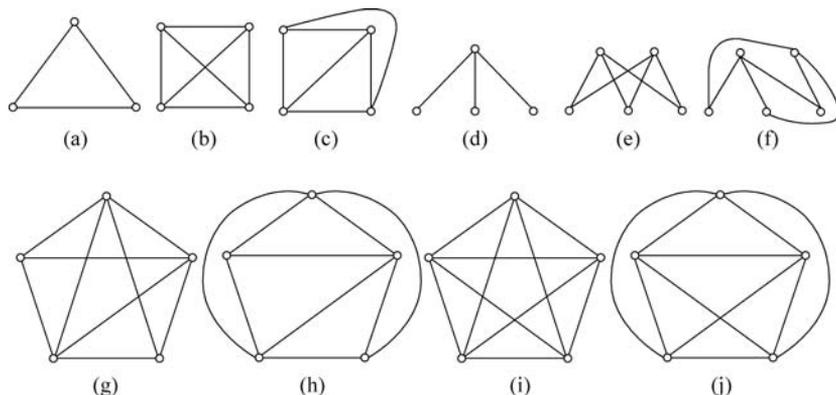


图 5.34 平面图和非平面图示例

关于平面图,以下两个结论是显然的。

**定理 5.13** 若  $G$  是平面图,则  $G$  的任何子图都是平面图。

**定理 5.14** 若  $G$  是非平面图,则  $G$  的任何母图都是非平面图。

**推论** 无向完全图  $K_n (n \geq 5)$  是非平面图。

**定义 5.37** 设  $G=(V, E)$  是平面图。将  $G$  嵌入平面后,由  $G$  的边将  $G$  所在的平面划分为若干区域,每个区域称为  $G$  的一个面。其中面积无限的面称为无限面或外部面,面积有限的面称为有限面或内部面。包围每个面的所有边组成的回路称为该面的边界,边界长度称为该面的次数,面  $R$  的次数记为  $\deg(R)$ 。

**例 5.31** 图 5.34(a) 共有两个面,每个面的次数均为 3。图 5.34(c) 共有 4 个面,每个面的次数均为 3。图 5.34(f) 共有 3 个面,每个面的次数均为 4。图 5.34(h) 共有 6 个面,每个面的次数均为 3。图 5.35 所示平面图  $G$  有 4 个面,  $\deg(R_1)=3, \deg(R_2)=3, R_3$  的边界为  $e_{10}e_7e_8e_9e_{10}, \deg(R_3)=5, R_0$  的边界为  $e_1e_6e_7e_9e_8e_6e_5e_4e_2, \deg(R_0)=9$ 。

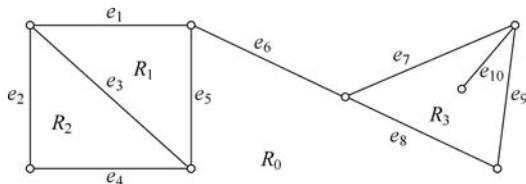


图 5.35 例 5.31 题图

关于面的次数,有下述定理。

**定理 5.15** 在一个有限平面图  $G$  中,所有面的次数之和等于边数的 2 倍,即

$$\sum_{i=1}^r \deg(R_i) = 2m$$

其中,  $r$  为  $G$  的面数,  $m$  为边数。

**证明** 注意到等式的左端表示  $G$  的各个面次数的总和,在计数过程中,  $G$  的每条边或者是两个面的公共边界,为每一个面的次数增加 1; 或者在一个面中作为边界重复计算两次,为该面的次数增加 2。因此在计算面的次数总和时,每条边都恰好计算了两次,故等式成立。

**推论** 在任何平面图中,次数为奇数的面的个数是偶数。

$G$  的不同平面嵌入的面的次数数列可能是不同的。图 5.36 中的  $G_1$  和  $G_2$  是同一个图的平面嵌入,但它们的面的次数数列分别是 3,3,5,5 和 3,3,4,6。

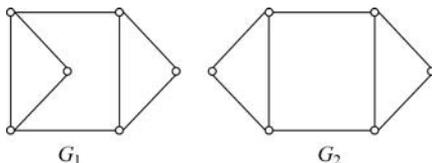


图 5.36 同一个图的平面嵌入

### 5.6.2 欧拉公式

在 1750 年数学家欧拉发现,任何一个凸多面体的顶点数  $n$ ,棱数  $m$  和面数  $r$  之间满足

关系式:

$$n - m + r = 2$$

这就是著名的欧拉公式。更一般地,对任意平面图,欧拉公式依然成立。这就是下面的定理和推论。

**定理 5.16** 设  $G$  为一个连通平面图,它有  $n$  个结点、 $m$  条边和  $r$  个面,则有  $n - m + r = 2$ 。

**证明** 对  $G$  的边数  $m$  进行归纳证明。

当  $m=0$  时,由于  $G$  是连通的,因此  $G$  只能是平凡图。这时,  $n=1, m=0, r=1, n - m + r = 2$  成立。

设  $m=k (k \geq 1)$  时,结论成立,下面证明当  $m=k+1$  时,结论也成立。

易见,一个具有  $k+1$  条边的连通平面图可以由  $k$  条边的连通平面图添加一条边后构成。因为一个含有  $k$  条边的连通平面图上添加一条边后仍为连通图,则有以下三种情况。

(1) 所增边为悬挂边[如图 5.37(a)所示],此时  $G$  的面数不变,结点数增 1,边数增 1,欧拉公式成立。

(2) 所增边为一个环,此时  $G$  的面数增 1[如图 5.37(b)所示],此时边数增 1,但结点数不变,欧拉公式成立。

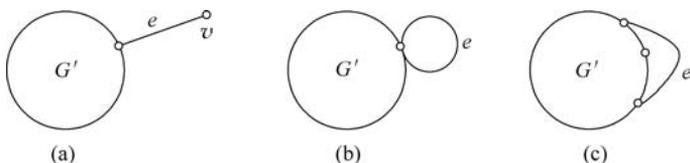


图 5.37 定理 5.16 证明

(3) 在图的任意两个不相邻结点间增加一条边[如图 5.37(c)所示],此时  $G$  的面数增 1,边数增 1,但结点数不变,欧拉公式成立。

**定理 5.17** 设  $G$  是连通的  $(n, m)$  平面图,且每个面的次数至少为  $l (l \geq 3)$ , 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

**证明** 由定理 5.15 知

$$2m = \sum_{i=1}^r \deg(R_i) \geq l \cdot r \quad (r \text{ 为 } G \text{ 的面数})$$

再由欧拉公式

$$n - m + r = 2$$

得

$$r = 2 + m - n \leq \frac{2m}{l}$$

故

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

**推论 1** 平面图  $G$  的平面嵌入的面数与  $G$  的嵌入方法无关。

于是  $G$  的一个平面嵌入的面数,可直接称为平面图  $G$  的面数。

**推论 2** 设  $G$  是有  $n$  个结点 ( $n \geq 3$ ) 和  $m$  条边的简单平面图, 则  $m \leq 3n - 6$ 。

**证明** 不妨设  $G$  是连通的, 否则可在  $G$  的连通分支间加边而得到连通图  $G'$ ,  $G'$  的结点数仍为  $n$ , 边数  $m' \geq m$ , 所以若定理对  $G'$  成立, 则对  $G$  也成立。

由于  $G$  是有  $n$  个结点 ( $n \geq 3$ ) 的简单连通平面图, 所以  $G$  的每一个面至少由 3 条边围成。如果  $G$  中有  $r$  个面, 则面的总次数

$$2m \geq 3r$$

即有

$$r \leq \frac{2m}{3}$$

代入欧拉公式, 可得

$$n - m + \frac{2m}{3} \geq 2$$

从而得到

$$m \leq 3n - 6$$

推论 2 也可直接由定理 5.17 推出, 只需令  $l=3$  即可。

**推论 3** 若有  $n$  个结点 ( $n \geq 3$ ) 的简单连通平面图  $G$  不以  $K_3$  为子图, 则  $m \leq 2n - 4$ 。

**证明** 由于  $G$  是有  $n$  个结点 ( $n \geq 3$ ) 的简单连通平面图, 且  $G$  中不含  $K_3$ , 所以  $G$  的每个面至少由 4 条边围成, 即  $l \geq 4$ , 代入定理 5.16, 立即得

$$m \leq 2n - 4$$

**推论 4** 若  $G$  是一个简单平面图, 则  $G$  至少有一个结点的度小于或等于 5。

**证明** 当  $G$  的结点数小于或等于 6 时, 结论显然成立。当  $G$  的结点数大于或等于 7 时, 设  $G$  的最小度结点的度为  $\delta$ , 若  $\delta > 5$ , 即  $\delta \geq 6$ , 由握手定理知

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6n$$

故

$$m \geq 3n$$

与推论 2 矛盾, 所以图  $G$  中至少有一个结点的度小于或等于 5。

**例 5.32** 证明  $K_5$  不是平面图。

**证明**  $K_5$  的结点数  $n=5$ , 边数  $m=10$ , 若它是平面图, 则由推论 2 得  $m \leq 3n - 6$ , 即  $10 \leq 3 \times 5 - 6$ , 这是一个矛盾不等式, 故  $K_5$  不是平面图。

上面给出的定理 5.16 和推论 2、推论 3、推论 4 都是一个图是平面图的必要条件, 它们可用来判断某个图不是平面图。我们希望找出一个图是平面图的充分必要条件。经过几十年的努力, 波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowski)于 1930 年给出了平面图的一个非常简洁的充分必要条件。下面就来介绍库拉托夫斯基定理。为此先引入同胚的概念。

**定义 5.38** 设  $G$  为一个无向图,  $e=(u, v)$  是  $G$  的一条边, 在  $G$  中删去边  $e$ , 增加新的结点  $w$ , 使  $u, v$  均与  $w$  相邻接, 则称在  $G$  中插入一个 2 度结点; 设  $w$  为  $G$  的一个 2 度结点,  $w$  与  $u, v$  相邻接, 在  $G$  中删去结点  $w$  及与  $w$  相连接的边  $(w, u)$  和  $(w, v)$ , 同时增加新边  $(u, v)$ , 则称在  $G$  中消去一个 2 度结点  $w$ , 如图 5.38 所示。

**定义 5.39** 如果两个无向图  $G_1$  与  $G_2$  同构或通过反复插入或消去 2 度结点是同构的, 则称  $G_1$  与  $G_2$  是同胚的。

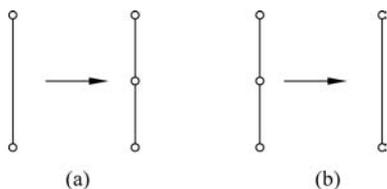


图 5.38 插入和消去 2 度结点

例如,图 5.39 所示的 4 个图是同胚的。

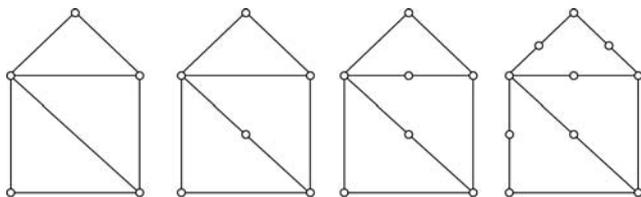


图 5.39 同胚图

**定理 5.18**(库拉托夫斯基定理) 一个无向图是平面图当且仅当它不含有与  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同胚的子图。

库拉托夫斯基定理的必要性容易看出,因为  $K_5$  不是平面图,因此与  $K_5$  同胚的图也不是平面图。一个无向图若是平面图,则它自然不会含有非平面图作为它的子图。

库拉托夫斯基定理的充分性证明较复杂,这里不再引述。有兴趣的读者可参阅邦迪(J. A. Bondy)和默蒂(U. S. R. Murty)的《图论及其应用》。

**例 5.33** 证明图 5.40(a)所示的彼得森图是非平面图。

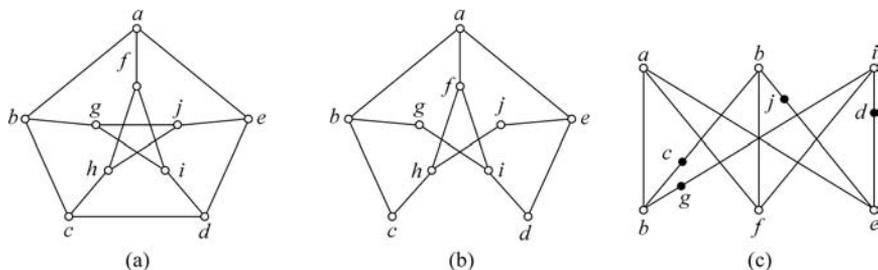


图 5.40 例 5.33 题图

**证明** 在图 5.40(a)所示的彼得森图中同胚于图 5.40(b)、图 5.40(c),由库拉托夫斯基定理知,彼得森图不是平面图。

### 5.6.3 平面图着色

平面图的着色问题最早起源于地图的着色。在一张地图中,若相邻国家着以不同的颜色,那么最少需要多少种颜色呢? 1852 年,英国青年盖思瑞(Guthrie)提出了用 4 种颜色可以对地图着色的猜想(简称四色猜想)。1879 年肯普(Kempe)给出了这个猜想的第一个证明,但到 1890 年希伍德(Hewood)发现肯普的证明是有错误的,然而他指出了肯普的方法虽不能证明地图着色用 4 种颜色就够了,但却可以证明用 5 种颜色就够了,即五色定理成

立。此后四色猜想一直成为图论中的难题。许多人试图证明猜想都没有成功。直到 1976 年美国数学家阿佩尔 (K. Appel) 和哈肯 (W. Haken) 利用计算机分析了近 2000 种图形和 100 万种情况, 花费了 1200 个机时, 进行了 100 多亿个逻辑判断, 证明了四色猜想。从此四色猜想便被称为四色定理。但是, 不依靠计算机而直接给出四色定理的证明, 仍然是数学界一个令人困惑的问题。

为了叙述图形着色的有关定理, 下面先给出对偶图的概念。

**定义 5.40** 给定平面图  $G = (V, E)$ , 其面的集合  $F(G) = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 。若有图  $G^* = (V^*, E^*)$  满足下列条件:

(1) 对于任意一个面  $f_i \in F(G)$ , 其内部有且仅有一个结点  $v_i^* \in V^*$ ;

(2) 对于  $G$  中的面  $f_i$  和  $f_j$  的公共边  $e_k$ , 有且仅有一条边  $e_k^* \in E^*$ , 使得  $e_k^* = (v_i^*, v_j^*)$ , 且  $e_k^*$  与  $e_k$  相交;

(3) 当且仅当  $e_k$  只是一个面  $f_i$  的边界时,  $v_i^*$  存在一个环  $e_k^*$  且  $e_k^*$  与  $e_k$  相交。

则称图  $G^*$  是图  $G$  的对偶图。

例如, 在图 5.41 中,  $G$  的边和结点分别用实线和“ $\circ$ ”表示, 而它的对偶图  $G^*$  的边和结点分别用虚线和“ $\bullet$ ”表示。

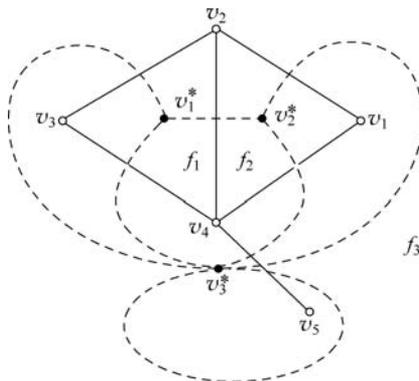


图 5.41 对偶图

对对偶图的定义可以看出, 若  $G^* = (V^*, E^*)$  是平面图  $G = \langle V, E \rangle$  的对偶图, 则  $G$  也是  $G^*$  的对偶图。

**定理 5.19** 一个连通平面图  $G$  的对偶图  $G^*$  也是平面图, 而且有  $m^* = m, n^* = r, r^* = n, \deg_{G^*}(v_i^*) = \deg_G(f_i), f_i \in F(G), v_i^* \in V^*$ , 其中  $n, m, r$  和  $n^*, m^*, r^*$  分别是  $G$  和  $G^*$  的结点数、边数和面数。

**证明** 由定义 5.39 对偶图的构造过程可知,  $G^*$  也是连通的平面图, 且  $n^* = r, m^* = m$  和  $\deg_{G^*}(v_i^*) = \deg_G(f_i)$  显然成立, 下证  $r^* = n$ 。因为  $G$  和  $G^*$  均是连通的平面图, 由欧拉公式有

$$n - m + r = 2, \quad n^* - m^* + r^* = 2$$

由  $n^* = r, m^* = m$  可得  $r^* = n$ 。

**定义 5.41** 若图  $G$  的对偶图  $G^*$  同构于  $G$ , 则称  $G$  是自对偶图。

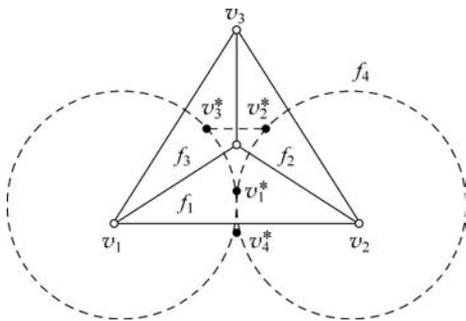


图 5.42 自对偶图

例如, 图 5.42 给出了一个自对偶图。

**定理 5.20** 若平面图  $G = (V, E)$  是自对偶图, 且有  $n$  个结点和  $m$  条边, 则  $m = 2(n - 1)$ 。

**证明** 由欧拉公式知

$$n - m + r = 2$$

由于图  $G = (V, E)$  是自对偶图, 则有  $n = r$ , 从而有

$$2n - m = 2$$

即

$$m = 2(n - 1)$$

从对偶图的定义易知,对于地图的着色问题,可以化为一种等价的对于平面图结点的着色问题。因此,四色问题可归结为证明:对任意平面图一定可以用4种颜色对其结点进行着色,使得相邻结点都有不同颜色。

**定义 5.42** 平面图  $G$  的正常着色,简称着色,是指对  $G$  的每个结点指派一种颜色,使得相邻结点都有不同的颜色。若可用  $n$  种颜色对图  $G$  着色,则称  $G$  是  $n$  可着色的。对图  $G$  着色时,需要的最少颜色数称为  $G$  的着色数,记为  $\chi(G)$ 。

于是,四色定理可简单地叙述如下。

**定理 5.21(四色定理)** 任何简单平面图都是4可着色的。

证明一个简单平面图是5可着色的很容易。

**定理 5.22(五色定理)** 对于任何简单平面图  $G=(V, E)$ , 均有  $\chi(G) \leq 5$ 。

**证明** 只需考虑连通简单平面图  $G$  的情形。对  $|V|$  进行归纳证明。

当  $|V| \leq 5$  时,显然,  $\chi(G) \leq 5$ 。

假设对所有的平面图  $G=(V, E)$ , 当  $|V| \leq k$  时有  $\chi(G) \leq 5$ 。现在考虑图  $G_1=(V_1, E_1)$ ,  $|V_1|=k+1$  的情形。由定理 5.17 的推论 4 可知,存在  $v_0 \in V_1$ , 使得  $\deg(v_0) \leq 5$ 。在图  $G_1$  中删去  $v_0$ , 得图  $G_1 - v_0$ 。由归纳假设知,  $G_1 - v_0$  是5可着色的, 即  $\chi(G_1 - v_0) \leq 5$ 。因此只需证明在  $G_1$  中, 结点  $v_0$  可用5种颜色中的一种着色并与其邻接点的着色都不相同即可。

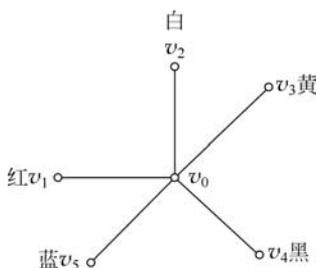


图 5.43 用5种颜色着色

若  $\deg(v_0) < 5$ , 则与  $v_0$  邻接结点数不超过4, 故可用与  $v_0$  的邻接点不同的颜色对  $v_0$  着色, 得到一个最多是五色的图  $G_1$ 。

若  $\deg(v_0) = 5$ , 但与  $v_0$  邻接的结点的着色数不超过4, 这时仍然可用与  $v_0$  的邻接点不同的颜色对  $v_0$  着色, 得到一个最多是五色的图  $G_1$ 。

若  $\deg(v_0) = 5$ , 且与  $v_0$  邻接的5个结点依顺时针排列为  $v_1, v_2, v_3, v_4$  和  $v_5$ , 它们分别着不同的颜色红、白、黄、黑和蓝, 如图 5.43 所示。

考虑由结点集合  $V_{13} = \{v \mid v \in V(G_1 - v_0) \wedge v \text{ 着红色或黄色}\}$  所诱导的  $G_1 - v_0$  的子图  $G_{13}$ 。若  $v_1, v_3$  属于  $G_{13}$  的不同连通分支, 如图 5.44 所示。则将  $v_1$  所在的连通分支中的红色与黄色对调, 这样并不影响  $G_1 - v_0$  的正常着色, 然后将  $v_0$  涂上红色即可得到  $G_1$  的一种五着色。

若  $v_1$  和  $v_3$  属于  $G_{13}$  的同一个连通分支, 则由结点集  $V_{13} \cup \{v_0\}$  所诱导的  $G_1$  的子图  $\langle V_{13} \cup \{v_0\}, E'_{13} \rangle$  中含有一个圈  $C$ , 而  $v_2$  和  $v_4$  不能同时在该圈的内部或外部, 即  $v_2$  与  $v_4$  不是邻接点, 如图 5.45 所示。于是, 考虑由结点  $V_{24} = \{v \mid v \in V(G_1 - v_0) \wedge v \text{ 着白色或黑色}\}$  所诱导子图  $G_{24}$ , 由于圈  $C$  的存在,  $G_{24}$  至少有两个连通分支, 一个在  $C$  的内部, 一个在  $C$  的外部(否则图  $G_1$  中将有边相交, 与图  $G_1$  是平面图的假设矛盾), 则  $v_2$  和  $v_4$  必属于  $G_{24}$  的不同连通分支, 作与上面类似的调整, 又可得到  $G_1$  的一种五着色。故  $\chi(G) \leq 5$ 。由归纳原理, 定理得证。

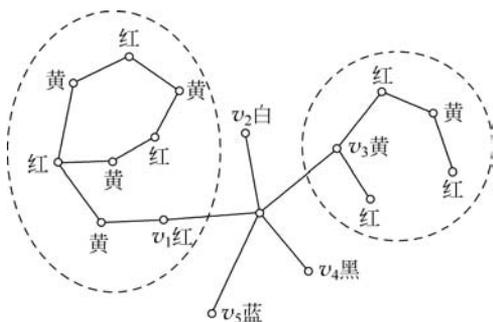


图 5.44  $v_1, v_3$  属于  $G_{13}$  的不同连通分支

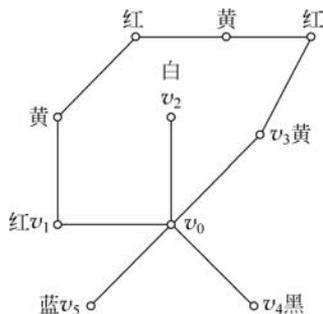


图 5.45  $v_1, v_3$  属于  $G_{13}$  的一个连通分支

### 习题 5

1. 写出图 5.46 中各图的度数列, 对有向图还要写出出度列和入度列。

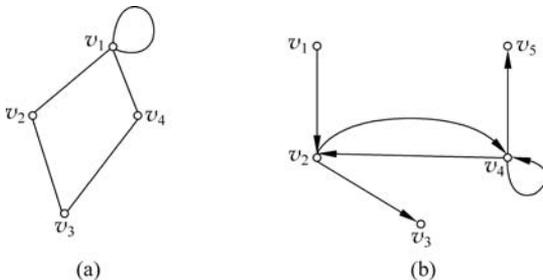


图 5.46 习题 1 图

2. 下列各组数中, 哪些能构成无向图的度数列? 哪些能构成无向简单图的度数列?

- (1) 1, 1, 1, 2, 3; (2) 2, 2, 2, 2, 2; (3) 3, 3, 3, 3; (4) 1, 2, 3, 4, 5; (5) 1, 3, 3, 3.

3. 设无向图中有 6 条边, 3 度与 5 度顶点各 1 个, 其余的都是 2 度顶点。问: 该图有几个顶点?

4. 设图  $G$  中有 9 个结点, 每个结点的度不是 5 就是 6。试证明:  $G$  中至少有 5 个 6 度结点或至少有 6 个 5 度结点。

5. 写出如图 5.47 所示相对于完全图的补图。

6. 在图 5.48 中,  $G_1$  与  $G_2$  同构吗? 为什么?

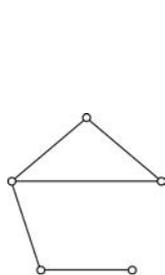


图 5.47 习题 5 图

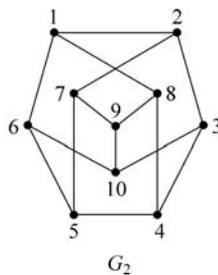
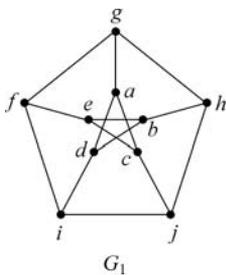


图 5.48 习题 6 图

7. 在图 5.49 所示的 4 个图中, 哪几个是强连通图? 哪几个是单向连通图? 哪几个是连通图(弱连通图)?

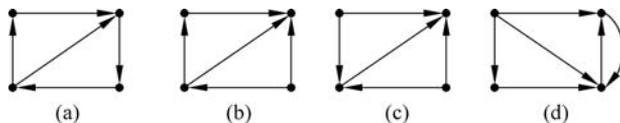


图 5.49 习题 7 图

8. 如图 5.50 所示,  $G$  中长度为 4 的路有几条? 其中有几条回路? 写出  $G$  的可达矩阵。

9. 在图 5.51 所示的图中, 指出割点和割边。

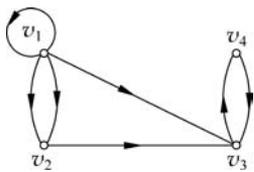


图 5.50 习题 8 图

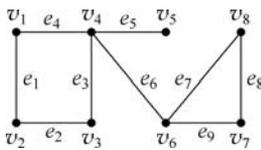


图 5.51 习题 9 图

10. 有向图  $G$  如图 5.52 所示。

(1) 写出图  $G$  的邻接矩阵  $A$ 。

(2)  $G$  中长度为 3 的通路有多少条? 其中有几条为回路?

(3) 利用图  $G$  的邻接矩阵  $A$  的布尔运算求该图的可达矩阵  $P$ , 并根据  $P$  来判断该图是否为强连通图和单向连通图。

11. 设无向图  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , 邻接矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1)  $\deg(v_1)$  和  $\deg(v_2)$  分别是多少?

(2) 图  $G$  是否为完全图?

(3) 从  $v_1$  到  $v_2$  长为 3 的路有多少条?

(4) 借助图解表示法写出从  $v_1$  到  $v_2$  长为 3 的每一条路。

12. 证明图 5.53 所示的图不是哈密顿图。

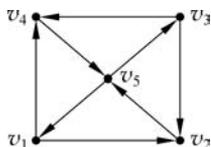


图 5.52 习题 10 图

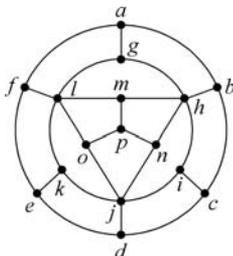


图 5.53 习题 12 图

13. 设有  $a, b, c, d, e, f, g$  7 个人, 他们分别会讲的语言如下:  $a$  会讲英语;  $b$  会讲汉语和英语;  $c$  会讲英语、西班牙语和俄语;  $d$  会讲日语和汉语;  $e$  会讲德语和西班牙语;  $f$  会讲法语、日语和俄语;  $g$  会讲法语和德语。能否将这 7 个人的座位安排在圆桌旁, 使得每个人均能与他身边的人交谈?

14. 求图 5.54 中  $v_1$  到其余各点的最短路径。

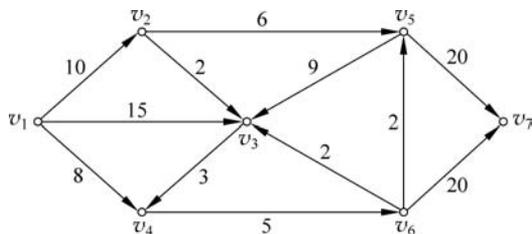


图 5.54 习题 14 图

15. 问: 图 5.55 中的两个图, 各需要几笔画出(笔不离纸, 每条边均不能重复画)?

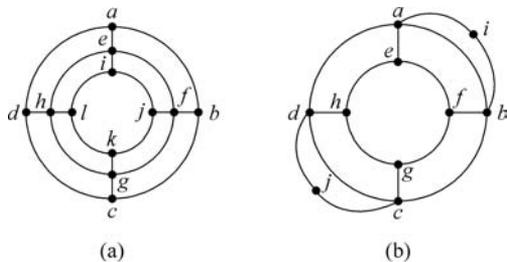


图 5.55 习题 15 图

16. 11 个学生打算几天都在一张圆桌上共进午餐, 并且希望每次午餐时每个学生两旁所坐的人都不相同。问: 这 11 个人共进午餐最多能有多少天?

17. 写出图 5.56 的关联矩阵和邻接矩阵。

18. 图 5.57 是有向图。

(1) 求出它的邻接矩阵  $A$  和可达矩阵  $P$ 。

(2) 求出  $A^2, A^3, A^4$ 。

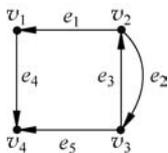


图 5.56 习题 17 图

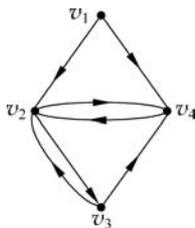


图 5.57 习题 18 图

19. 求图 5.58 的带权图中最优投递路线, 邮局在  $D$  点。

20. 某次会议有 20 个人参加, 其中每人至少有 10 个朋友, 这 20 人围成一圆桌吃饭, 要想使每人的相邻两位都是他的朋友是否可能?

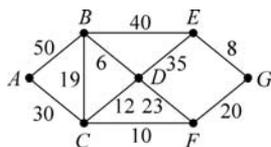


图 5.58 习题 19 图

21. 图 5.59(a)和图 5.59(b)所示的平面图各有几个面? 写出它们各面的边界及次数。



习题答案

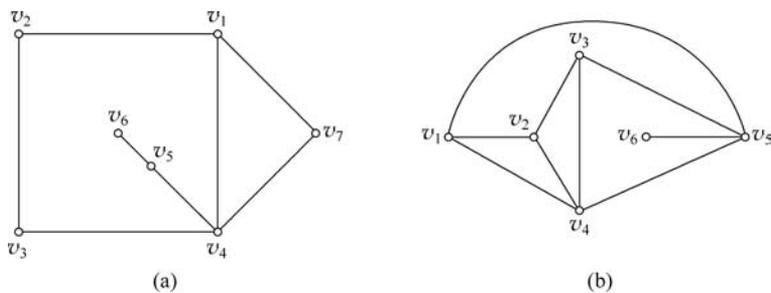


图 5.59 习题 21 图

22. 一只蚂蚁可否从立方体的一个顶点出发,沿着棱爬行,爬过每一个顶点一次且仅一次,最后回到原出发点? 利用图作解释。

23. 分别画出满足下列条件的无向图。

- (1) 既是欧拉图又是哈密顿图;
- (2) 是欧拉图,不是哈密顿图;
- (3) 不是欧拉图,是哈密顿图;
- (4) 既不是欧拉图又不是哈密顿图。