

第5章

导行电磁波

第4章研究了电磁波在无界空间的传播特性以及在两种不同媒质交界面处的反射与折射问题。本章要研究电磁波在有界空间内的传播情况,即导波系统中的传播。

导波系统是可以引导电磁波在其中传播的传输结构,被引导传输的电磁波称为导行电磁波,导波系统也称为传输线。工程中常见的传输线有双线传输线、同轴线、矩形波导、圆波导、带线、微带线、介质波导等,如图5-1所示。这些传输线特性各异,分别适用于不同的场合。金属波导和同轴线完全将电磁波封闭在金属管中,没有电磁辐射效应,其余几种在传输过程中均存在一定的电磁辐射。随着频率升高,双线的辐射效应显著增强,因此双线适用于传输100MHz以下频率较低的电磁波。带线和微带线主要用于分米波段和厘米波段。金属波导常用于传输厘米波及毫米波。光纤用于传输光波。

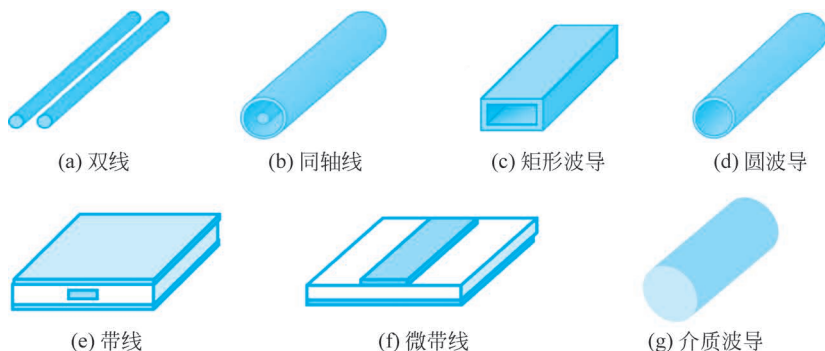


图 5-1 工程中常见的传输线

5.1 导行电磁波的场模式及分析方法

5.1.1 导行电磁波的场模式

场模式是指能够单独在波导传输线中存在的电磁场结构。波导中导行电磁波的求解以及波的传播特性与导行电磁波的模式密切相关,因此在介绍导行电磁波的分析方法及传播特性之前,先对导行电磁波的场模式进行分类,再根据不同的传播场模式介绍其分析和计算方法。

可依据导行电磁波电场方向、磁场方向和传播方向将其划分为 TEM 模、TE 模和 TM 模(或称 TEM 波、TE 波和 TM 波)。假设导行电磁波的传播方向是 z 方向,即纵向方向。TEM 模是指电场方向、磁场方向都与传播方向垂直,即 $E_z = 0, H_z = 0$ 。TE 模是指只有电场方向与传播方向垂直,而磁场有传播方向上的分量,即 $E_z = 0, H_z \neq 0$ 。TM 模是指只有磁场方向与传播方向垂直,而电场有传播方向上的分量,即 $E_z \neq 0, H_z = 0$ 。

按导行波有无电磁场的纵向分量(即 z 分量)对其进行分类,便于分析,更重要的还在于上述所有模式合在一起构成传输线中电磁波的一组完备解,即传输线中存在的任何电磁波都可以表示为一个或多个模式的线性组合。对模式划分完后,下面的问题是对波导中的各个模式展开研究。

前面提到的几种传输线并非都能传输三种模式的导行电磁波。例如,双导线、同轴

线和带状线可以传输 TEM 模,而空心波导这类单导体结构只能传输 TE 模或者 TM 模式。这是因为 TEM 模的磁场只有横向分量,因此闭合的磁力线一定在传输线的横截面内,如图 5-2(a)所示。根据修正的安培环路定律,这些在横截面内的闭合磁力线必然是由垂直于横截面的纵向传导电流 J_z 或者纵向位移电流 $J_{dz} = \partial D_z / \partial t = \partial (\epsilon E_z) / \partial t$ 产生的。由于纵向电场分量 $E_z = 0$,故纵向位移电流 $J_{dz} = 0$ 。又因为空心金属矩形波导管内充填的是各向同性的、线性的、均匀无耗媒质,没有承载自由电子的导体,不能形成传导电流,故传导电流 $J_z = 0$ 。由于上面两部分纵向电流均为零,横截面内的闭合磁力线必然不存在,即磁场的全部分量为零,相应电场的全部分量也为零,所以 TEM 模在空心的金属矩形波导管内不能存在。但是,若空心金属矩形波导管内中间有纵向导体,形成了双导体结构,如图 5-2(b)所示,则自由电子可以沿纵向导体运动形成传导电流 J_z ($J_z \neq 0$)。根据安培环路定律,纵向传导电流 J_z 可以在横截面内产生闭合磁场,进而产生相应的横向电场。因此可以推出,单导体结构的传输线不能传输 TEM 模,但双导体或者多导体传输线结构如平行双线、同轴线、带线等,可以传输 TEM 模式。

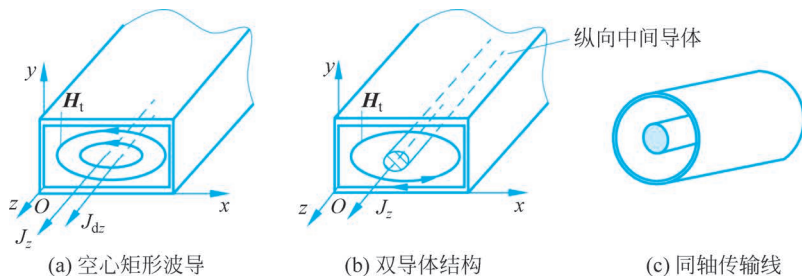


图 5-2 传输线中的 TEM 模

下面研究不同模式的导行电磁波的分析方法。

5.1.2 传输线中 TE 模和 TM 模的分析方法

下面以金属矩形波导为例研究传输线中 TE 模和 TM 模的一般分析方法——纵向场法。

矩形波导的结构如图 5-3 所示,它的横截面形状是矩形,其宽边长度是 a ,窄边长度是 b ,波导沿纵轴方向向两头无限延伸,横截面的坐标轴为 (x, y) ,轴向坐标轴为 z ,横截面的几何形状、尺寸和媒质参数沿轴向坐标轴 z 保持均匀不变。矩形波导周围的壁面材料用金属制成。由于周围的金属壁面材料具有屏蔽作用,矩形波导内的电磁场只能在波导的内部空间存在和传播。

为了分析简单起见,假定:

- (1) 波导壁的金属材料是理想导体,即波导壁的 $\sigma = \infty$;
- (2) 波导内填充的媒质是均匀、线性、各向同性的无耗媒质,即波导内部空间媒质的参数 ϵ, μ 为实常数,且 $\sigma = 0$;
- (3) 波导内无源,即 $\mathbf{J} = 0, \rho = 0$;
- (4) 波导内的电磁场为时谐电磁场,角频率为 ω 。

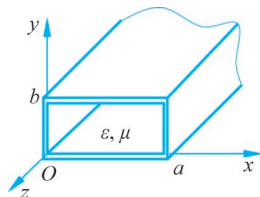


图 5-3 矩形波导及其坐标系

(5) 波导是均匀的,即波导中各横截面的几何形状、几何尺寸和媒质参数都完全相同,且在 z 轴方向无限长。这样,电磁波在里面传输时不会产生反射。

可以与第 4 章介绍平面电磁波的传播特性进行类比,来研究电磁波沿均匀矩形波导中的传播特性。沿着 $+z$ 轴方向传播的均匀平面电磁波的电磁场表达式是 $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 e^{-jkz}$, 传播因子是 e^{-jkz} 。因此,如果无限长均匀波导内的导行电磁波沿 $+z$ 轴方向传播,则可以将其电场强度的表达式写成类似的形式,即

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{e}(x, y) e^{-\gamma z} \quad (5-1)$$

式中

$$\mathbf{e}(x, y) = e_x(x, y) \hat{\mathbf{x}} + e_y(x, y) \hat{\mathbf{y}} + e_z(x, y) \hat{\mathbf{z}} \quad (5-2)$$

$\mathbf{e}(x, y)$ 是与横向坐标 (x, y) 有关的矢量函数,其不随 z 变化,它反映了电场在波导横截面内的分布状态,称为电场的横向分布函数。 $e^{-\gamma z}$ 表示场沿波导纵向的传播规律,称为传播因子。 γ 是波导中的电磁波沿波导轴向传播的传播常数,其物理意义与平面电磁波的传播常数意义相同。一般情况下,它是一个复数,可以反映导行电磁波在波导内的传输状态,将在 5.2 节中讨论。

同理,波导内传播的电磁波其磁场的表达式可写为

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{h}(x, y) e^{-\gamma z} \quad (5-3)$$

式中

$$\mathbf{h}(x, y) = h_x(x, y) \hat{\mathbf{x}} + h_y(x, y) \hat{\mathbf{y}} + h_z(x, y) \hat{\mathbf{z}} \quad (5-4)$$

式中: $\mathbf{h}(x, y)$ 为磁场的横向分布函数。

如果均匀波导内的导行电磁波沿 $-z$ 方向传播,只需将上述式中的 $e^{-\gamma z}$ 改写成 $e^{\gamma z}$ 即可。由于两者的性质相同,仅传播方向相反,并不影响对传播规律的分析。因此,在下面的讨论中,只分析向 $+z$ 方向传播的导行电磁波。

同时,电场 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 和磁场 $\mathbf{H}(x, y, z)$ 的表达式还可以写成矢量的一般形式:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z) \hat{\mathbf{x}} + E_y(x, y, z) \hat{\mathbf{y}} + E_z(x, y, z) \hat{\mathbf{z}} \quad (5-5a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = H_x(x, y, z) \hat{\mathbf{x}} + H_y(x, y, z) \hat{\mathbf{y}} + H_z(x, y, z) \hat{\mathbf{z}} \quad (5-5b)$$

对比式(5-5)与式(5-1)~式(5-4)中表达式的对应项,可以得出

$$E_x(x, y, z) = e_x(x, y) e^{-\gamma z}, \quad H_x(x, y, z) = h_x(x, y) e^{-\gamma z} \quad (5-6a)$$

$$E_y(x, y, z) = e_y(x, y) e^{-\gamma z}, \quad H_y(x, y, z) = h_y(x, y) e^{-\gamma z} \quad (5-6b)$$

$$E_z(x, y, z) = e_z(x, y) e^{-\gamma z}, \quad H_z(x, y, z) = h_z(x, y) e^{-\gamma z} \quad (5-6c)$$

下面将利用这些表达式及其相互关系,使用纵向场法来求解波导中的电场和磁场分布,进而分析波导中电磁波的传播规律。

由式(5-5)可知,波导中的电磁场有六个极化分量,分别是 $\mathbf{E}_x$ 、 $\mathbf{E}_y$ 、 $\mathbf{E}_z$ 、 $\mathbf{H}_x$ 、 $\mathbf{H}_y$ 、 $\mathbf{H}_z$ 。其中, $\mathbf{E}_z$ 和 $\mathbf{H}_z$ 的方向与波导的纵向或轴向坐标 z 平行,称为纵向场分量。 $\mathbf{E}_x$ 、 $\mathbf{E}_y$ 、 $\mathbf{H}_x$ 、 $\mathbf{H}_y$ 的方向与横向坐标 x 或 y 平行,与波导的轴向或纵向坐标 z 垂直,称为横向场分量。

纵向场法的基本思路:第一步求出波导中电磁场的纵向场分量 $\mathbf{E}_z$ 和 $\mathbf{H}_z$; 第二步由

已求得的纵向场分量 E_z 和 H_z , 求出波导中电磁场的横向场分量 E_x 、 E_y 、 H_x 、 H_y , 从而得到波导中电磁场的全部场分量的解。下面先研究第一步, 如何得到关于纵向场分量 E_z 和 H_z 应满足的方程, 从而求出波导中电磁场的纵向场分量 E_z 和 H_z 。

电磁场在任何存在的区域必须满足麦克斯韦方程组加该区域的边界条件, 或者满足波动方程加边界条件。因此, 对于上述所研究的矩形波导中的电磁场 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 、 $\mathbf{H}(x, y, z)$ 应当满足无源理想媒质的波动方程, 即亥姆霍兹方程, 及矩形波导壁面为理想导体表面的边界条件。

$$\nabla^2 \mathbf{E}(x, y, z) + k^2 \mathbf{E}(x, y, z) = 0 \quad (5-7a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(x, y, z) + k^2 \mathbf{H}(x, y, z) = 0 \quad (5-7b)$$

式(5-7)为矩形波导中电磁场满足的亥姆霍兹方程, 其中 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 、 $\mathbf{H}(x, y, z)$ 分别是波导内电场和磁场的复振幅矢量, $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 。由于 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 和 $\mathbf{H}(x, y, z)$ 所满足的方程形式及解法完全相同, 并且 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 和 $\mathbf{H}(x, y, z)$ 相互不独立, 可利用麦克斯韦方程组从其中一个求出另一个。因此下面的求解和分析主要是对电场 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 进行, 所得结果可以类推到磁场 $\mathbf{H}(x, y, z)$ 。

将式(5-1)代入式(5-7a), 可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}(x, y) e^{-\gamma z} + k^2 \mathbf{e}(x, y) e^{-\gamma z} = 0 \quad (5-8)$$

将上式展开, 可以整理成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathbf{e}(x, y) e^{-\gamma z} + (k^2 + \gamma^2) \mathbf{e}(x, y) e^{-\gamma z} = 0 \quad (5-9)$$

令

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (5-10)$$

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2 \quad (5-11)$$

∇_t^2 称为横向拉普拉斯算子, 仅对横向坐标 (x, y) 作用。 k_c 为截止波数, 是一个本征常数, 它的意义及其求解将在后面讨论。由式(5-11)可知, 如果求出 k_c , 即可求出 γ 。基于上述表示, 式(5-9) 可写成

$$\nabla_t^2 \mathbf{e}(x, y) e^{-\gamma z} + k_c^2 \mathbf{e}(x, y) e^{-\gamma z} = 0$$

即

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}(x, y, z) + k_c^2 \mathbf{E}(x, y, z) = 0 \quad (5-12a)$$

式(5-12a)是波导中电场所满足的方程。同理, 波导中磁场应满足的方程具有相同的形式, 即

$$\nabla_t^2 \mathbf{H}(x, y, z) + k_c^2 \mathbf{H}(x, y, z) = 0 \quad (5-12b)$$

式(5-12a)、式(5-12b)是关于电场和磁场的矢量方程, 该方程能成立, 其每个场分量都应满足形式相同的标量方程。因此, 纵向场分量 $E_z(x, y, z)$ 和 $H_z(x, y, z)$ 所应满足的方程为

$$\nabla_t^2 E_z(x, y, z) + k_c^2 E_z(x, y, z) = 0 \quad (5-13a)$$

$$\nabla_t^2 H_z(x, y, z) + k_c^2 H_z(x, y, z) = 0 \quad (5-13b)$$

式(5-13a)、式(5-13b)是关于纵向场分量 E_z 和 H_z 所应满足的方程, 对其进行求解, 可以得到波导中电磁场的纵向场分量 E_z 和 H_z , 具体的求解过程将在本节最后详细介绍。

现在研究第二步, 已知波导内电磁场的纵向场分量 $E_z(x, y, z)$ 和 $H_z(x, y, z)$ 后, 如何求出其余的全部横向分量。

从麦克斯韦方程组出发。将麦克斯韦方程组中的两个旋度方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$$

展开成六个标量方程, 即

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \quad (5-14a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (5-14b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (5-14c)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x \quad (5-14d)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \quad (5-14e)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \quad (5-14f)$$

由式(5-6)知, 波导内电磁场的各个分量 E_x 、 E_y 、 E_z 、 H_x 、 H_y 、 H_z 都有因子 $e^{-\gamma z}$, 因此上述展开式中, 它们对 z 的偏导数 $\partial/\partial z$ 都可用 $-\gamma$ 代替, 这样就可以写成

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad (5-15a)$$

$$-\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (5-15b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (5-15c)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\epsilon E_x \quad (5-15d)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \quad (5-15e)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \quad (5-15f)$$

通过观察可以发现, 式(5-15a)和式(5-15e)是关于 E_y 、 H_x 的线性代数方程组, 式(5-15b)和式(5-15d)是关于 E_x 、 H_y 的线性代数方程组。联立解上述方程组, 可得到横向场分量 E_x 、 E_y 、 H_x 、 H_y 的解, 即

$$E_x = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (5-16a)$$

$$E_y = \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (5-16b)$$

$$H_x = \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (5-16c)$$

$$H_y = -\frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (5-16d)$$

从式(5-16)可以看出,如果纵向场分量 E_z 和 H_z 已知,那么可以通过纵向分量求出横向场分量 E_x 、 E_y 、 H_x 、 H_y 。

此外,若定义电场和磁场的横向场矢量分别为

$$\mathbf{E}_t(x, y, z) = E_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + E_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} \quad (5-17a)$$

$$\mathbf{H}_t(x, y, z) = H_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + H_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} \quad (5-17b)$$

横向哈密顿算子为

$$\nabla_t = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} \quad (5-18)$$

则式(5-16)还可以整理写成更一般的形式,即

$$\mathbf{E}_t = -\frac{1}{k_c^2} (\gamma \nabla_t E_z - j\omega\mu \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t H_z) \quad (5-19a)$$

$$\mathbf{H}_t = -\frac{1}{k_c^2} (\gamma \nabla_t H_z + j\omega\epsilon \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z) \quad (5-19b)$$

至此从方法上完成了纵向场法的第二步,即通过波导内电磁场的纵向分量求出波导内电磁场的横向分量。须指出一点,式(5-19)虽然是从矩形金属波导的具体情况应用纵向场法推导出来的,但方法和结论也适用于横截面形状不为矩形的其他结构形式的均匀波导,例如横截面形状为圆形的均匀圆柱形波导,横截面形状为由两个同心圆构成的均匀同轴传输线等。不过在用于其他结构形式的微波传输线时,横向拉普拉斯算子 ∇_t^2 、横向哈密顿算子 ∇_t 和横向场矢量 $\mathbf{E}_t$ 、 $\mathbf{H}_t$ 应取合适的正交柱坐标系下的形式,如对圆波导,应取圆柱坐标系下的对应形式。

5.1.3 传输线中 TEM 模的分析方法

TEM 模的纵向场分量 $E_z = 0$, $H_z = 0$, 因此 TEM 模只有横向分量,场分量可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{E}_t(x, y, z) = E_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + E_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} \\ &= e_x(x, y)e^{-\gamma z}\hat{\mathbf{x}} + e_y(x, y)e^{-\gamma z}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{e}_t(x, y)e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (5-20a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, y, z) &= \mathbf{H}_t(x, y, z) = H_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + H_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} \\ &= h_x(x, y)e^{-\gamma z}\hat{\mathbf{x}} + h_y(x, y)e^{-\gamma z}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{h}_t(x, y)e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (5-20b)$$

由于 $E_z = 0$, $H_z = 0$, 纵向场为 0, 不能用纵向场分量来求解横向场分量 $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$ 。而由

式(5-16)可知,在 $E_z=0, H_z=0$ 的条件下,横向场分量 $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ 有非零解的条件为

$$k_c^2 = 0 \quad (5-21)$$

将 $E_z=0, H_z=0$ 和 $k_c^2=0$ 代入式(5-12a)和式(5-12b),得横向场分量 $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ 所满足的方程为

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t(x, y, z) = 0 \quad (5-22a)$$

$$\nabla_t^2 \mathbf{H}_t(x, y, z) = 0 \quad (5-22b)$$

再将式(5-20a)代入式(5-22a),式(5-20b)代入式(5-22b),得 TEM 模横向分布函数满足的方程为

$$\nabla^2 \mathbf{e}_t(x, y) = 0 \quad (5-23a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{h}_t(x, y) = 0 \quad (5-23b)$$

这与无源区中二维静态场所满足的拉普拉斯方程的形式完全相同。因此从数学上讲,求解导波系统中 TEM 模横向分布函数 $\mathbf{e}_t(x, y)$ 和 $\mathbf{h}_t(x, y)$ 与求解该系统中二维静态场是同一个数学问题。这就告诉我们,凡是能存在二维静态场(电场、磁场可同时存在)的装置,其中一定可以存在 TEM 模;不能存在二维静态场的装置,则不能存在 TEM 模。无限长的空心金属矩形波导管内不能建立静态场,所以它也就不能传输 TEM 模。

接下来将对均匀矩形金属波导中的 TE 模和 TM 模进行数学求解,再对其传播的物理特性进行分析。

5.2 矩形波导

5.2.1 矩形波导中 TE 模的求解

为分析矩形波导中的导行波,取如图 5-3 矩形波导及其坐标系所示的直角坐标系,波导宽边内尺寸为 a 、窄边内尺寸为 b ,波导内壁为理想导体,波导内填充了均匀、线性、各向同性的理想介质。

对于 TE 模,根据定义有 $E_z=0, H_z \neq 0$ 。按纵向场法思路,因为 $E_z=0$ 为已知,故只要解出 $H_z(x, y, z)$,再将其代入式(5-16)求出波导中的 E_x, E_y 和 H_x, H_y 分量即可。在直角坐标系下, $H_z(x, y, z)$ 满足的方程(5-13b)可写成

$$\frac{\partial^2 H_z(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z(x, y, z)}{\partial y^2} + k_c^2 H_z(x, y, z) = 0 \quad (5-24)$$

由式(5-6c)知, $H_z(x, y, z) = h_z(x, y)e^{-\gamma z}$, 这里 $h_z(x, y)$ 的具体表达形式未知。应用分离变量法进行求解, $h_z(x, y)$ 的形式如下:

$$h_z(x, y) = X(x)Y(y) \quad (5-25)$$

即

$$H_z(x, y, z) = X(x)Y(y)e^{-\gamma z} \quad (5-26)$$

注意: $X(x)$ 只是 x 的函数, $Y(y)$ 只是 y 的函数。把式(5-26)代入式(5-24),整理可得

$$Y(y)e^{-\gamma z} \frac{d^2}{dx^2} X(x) + X(x)e^{-\gamma z} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = -k_c^2 X(x)Y(y)e^{-\gamma z}$$

两边同除以 $X(x)Y(y)e^{-\gamma z}$, 可得

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = -k_c^2 \quad (5-27)$$

由于 $X(x)$ 只是 x 的函数, $Y(y)$ 只是 y 的函数, k_c 又是待定常数, 故上式成立的条件是左边两项均应为常数。令

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -k_x^2 \quad (5-28)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = -k_y^2 \quad (5-29)$$

式中: k_x, k_y 均为待定常数。

不难看出, k_x, k_y, k_c 满足关系式

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad (5-30)$$

式(5-28)、式(5-29)的通解为

$$\begin{cases} X(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \\ Y(y) = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \end{cases} \quad (5-31)$$

式中: k_x, k_y, A, B, C, D 均为待定常数。

将式(5-31)代入式(5-26), 可得

$$H_z = [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)][C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)]e^{-\gamma z} \quad (5-32)$$

下面根据矩形波导壁的边界条件来确定这几个待定常数。由于波导壁为理想导体, 波导内电磁场必须满足四个波导壁上切向电场为零的边界条件: 在 $x=0$ 和 $x=a$ 的面上, 电场的切向分量 $E_y=0$; 在 $y=0$ 和 $y=b$ 的面上, 电场的切向分量 $E_x=0$ 。根据式(5-16)及上述四个波导壁上切向电场为零的边界条件, 可得

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0,a} = 0, \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0 \quad (5-33)$$

将式(5-32)代入式(5-33), 可得

$$k_x = \frac{m\pi}{a} (m=0, 1, 2, \dots) \quad k_y = \frac{n\pi}{b} (n=0, 1, 2, \dots) \quad (m, n \text{ 不能同时为 } 0)$$

$$B=0, \quad D=0$$

令 $H_0=AC$, 矩形波导内 TE 模式导行电磁波的电场和磁场各场分量分别为

$$E_x = j \frac{\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (5-34a)$$

$$E_y = -j \frac{\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (5-34b)$$

$$E_z = 0 \quad (5-34c)$$

$$H_x = \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (5-34d)$$

$$H_y = \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (5-34e)$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (5-34f)$$

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (5-35)$$

由式(5-11)可得

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \quad (5-36)$$

式(5-34)是矩形金属波导中 TE 模的场解, H_0 是由激励源决定的磁场复振幅。从式中可以看出,在横截面上沿 x 和 y 方向的场呈驻波分布, m 、 n 是正整数, m 和 n 的值分别表示沿 x 、 y 方向的半驻波个数,也称为模阶数。理论上,它们可以取 $0 \sim \infty$ 中任意一个正整数值,当 m 、 n 取某一对具体的正整数值代入式(5-33)时,就得到一个具体的电磁场的表达式(对应一个场结构),即一个 TE 模式,可称为 TE_{mn} 模。例如:当 $m=1$, $n=0$ 时,称为 TE_{10} 模;当 $m=1$, $n=1$ 时,称为 TE_{11} 模。 m 、 n 不同,就得到不同的 TE 模式。对 TE 模应注意以下三个方面:

(1) 由波动方程解的性质可知,每个 TE_{mn} 模式都是独立地满足波动方程和波导的边界条件,因此每个 TE_{mn} 模式都可在波导中独立存在,构成一个完整的电磁场结构。

(2) 由于 m 、 n 的取值范围为 $0 \sim \infty$,矩形波导中满足波动方程和边界条件的 TE 模可有无穷多个。但是 m 、 n 不能同时为零,否则将会得到电场各分量均为零的情况,故在矩形波导中不存在 TE_{00} 。

(3) 每个 TE_{mn} 模都有自己的截止波数和传播常数,可分别记为 $k_{c_{mn}}$ 和 γ_{mn} 。

5.2.2 矩形波导中 TM 模的求解

TM 模依照与 TE 模相同的求解思路进行求解。根据定义,此时 $E_z \neq 0$, $H_z = 0$ 。按纵向场法,只要解出 $E_z(x, y, z)$,再将其代入式(5-16),即求出波导中的 E_x 、 E_y 和 H_x 、 H_y 分量。在直角坐标系下, $E_z(x, y, z)$ 满足的式(5-13a)可写成

$$\frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x, y, z)}{\partial y^2} + k_c^2 E_z(x, y, z) = 0 \quad (5-37)$$

由式(5-6)可知, $E_z(x, y, z) = e_z(x, y)e^{-\gamma z}$, 这里 $e_z(x, y)$ 的具体形式未知。同样,可应用 5.2.1 节中介绍的分离变量法,求得其通解为

$$E_z = [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)][C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)]e^{-\gamma z} \quad (5-38)$$

然后,根据波导壁电场切向分量等于 0 的边界条件

$$E_z|_{y=0,b} = 0, \quad E_z|_{x=0,a} = 0 \quad (5-39)$$

可推出

$$k_x = \frac{m\pi}{a} (m=1,2,3,\cdots), \quad k_y = \frac{n\pi}{b} (n=1,2,3,\cdots), \quad A=0, \quad C=0$$

令 $E_0=BD$, 根据式(5-16)可得到矩形金属波导中 TM 模式各场分量确定解的数学表达式为

$$E_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (5-40a)$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (5-40b)$$

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (5-40c)$$

$$H_x = j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (5-40d)$$

$$H_y = -j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (5-40e)$$

$$H_z = 0 \quad (5-40f)$$

式中

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (5-41)$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \quad (5-42)$$

式(5-40)是矩形金属波导中 TM 模的场解, E_0 是由激励源决定的电场复振幅。从式中可以看出, 在横截面上沿 x 和 y 方向的场呈驻波分布, m 、 n 是正整数, m 和 n 的值分别表示沿 x 、 y 方向的半驻波个数, 也称为模阶数。理论上, 它们可以取 $0 \sim \infty$ 中任意一个正整数值。当 m 、 n 取某一对具体的正整数值, 代入式(5-39)时, 就得到一个具体的 TM 模式, 称为 TM_{mn} 模, 如 TM_{11} 、 TM_{12} 等。对 TM 模应注意以下三方面:

(1) 由波动方程解的数学性质可知, 每个 TM_{mn} 模都独立地满足波动方程和波导的边界条件, 都可在波导中独立存在, 构成一个完整的电磁场结构。

(2) 由于 m 、 n 的取值范围为 $0 \sim \infty$, 矩形波导中满足波动方程和边界条件的 TM 模式有无穷多个。但是, m 和 n 均不能为零, 否则将出现磁场的各个分量均为零的情况, 故在矩形波导中不存在 TM_{m0} 和 TM_{0n} 模。

(3) 每个 TM_{mn} 模都有自己的截止波数和传播常数, 也可分别记为 k_{cmn} 和 γ_{mn} 。

5.2.3 矩形波导中 TE 模和 TM 模的传输条件与特性

由 5.2.2 节内容可知, TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模都是矩形波导内可以独立存在的模式, 但并不意味着所有模式都一定能在指定的波导内传输。下面讨论 TE 模和 TM 模的传输条件及传输特性。

1. 模式的传输与截止条件

对于 TE 和 TM 模式, $k_c \neq 0$, 由式(5-41)可以看出, k_c 值只与波导横截面尺寸 a 、 b

和 m, n 的取值有关, 与频率和填充的介质无关。因此, 对于矩形波导来说, 尺寸 a, b 一定, m, n 给定, 则该模式的 k_{cmn} 也就为一确定值。例如, 对于 TE_{10} 模式, $k_{c10} = \pi/a$, 为一常数。

下面讨论 γ 随相移常数 k 的变化情况, 及其对应的 TE 模和 TM 模的传输特性与截止特性。

当 $k < k_c$ 时, 有

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \alpha \quad (5-43)$$

式中: α 为实数, $\alpha > 0$ 。

矩形波导中该模式的电场强度和磁场强度可以表示为

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{e}(x, y) e^{-\alpha z} \quad (5-44a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{h}(x, y) e^{-\alpha z} \quad (5-44b)$$

从式(5-44)中可看出, 此时矩形波导中的电场、磁场的幅值沿 $+z$ 轴方向指数规律减小, 相位沿 $+z$ 轴没有变化。根据波动的概念, 此时电磁场沿 $+z$ 轴方向上并没有波动传播, 只是幅度沿 $+z$ 轴方向指数规律减小。把这种只有幅值减小而没有相位的滞后且不传输的波称为凋落波。此时, 该模式对矩形波导呈截止状态。

当 $k > k_c$ 时, 有

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{-(k^2 - k_c^2)} = j\beta \quad (5-45)$$

式中: $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$ 为相移常数, 是实数, 此时, γ 为纯虚数。

矩形波导中该模式电场、磁场的表达式可以表示为

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{e}(x, y) e^{-j\beta z} \quad (5-46a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{h}(x, y) e^{-j\beta z} \quad (5-46b)$$

当 $\beta \neq 0$ 时, 该 TE 模和 TM 模的电磁场沿 $+z$ 轴方向相位连续滞后, 电磁波沿波导传输, 此时该模式对矩形波导呈传输状态。

通过上述两种情况可以看出, $k = k_c$ 是传输状态和截止状态的临界情况, 是某种 TE 模或者 TM 模能否传输的分界线。

在实际工程中往往知道的是电磁波的工作频率 f 或者工作波长 λ , 因此接下来将研究导行电磁波的工作频率和波长的变化对模式传输的影响, 即通过 f 或者 λ 来判断某种模式在波导内是传输还是截止。

对于某一 TE_{mn} 模式或 TM_{mn} 模式, 一定存在一个特定频率 f_c , 在该频率点上, $2\pi f_c \sqrt{\mu\epsilon} = k_c$ 。 f_c 为该模式的截止频率, 相应的波长称为该模式截止波长, 以 λ_c 表示。可以求得矩形波导中 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模式的截止频率为

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (5-47)$$

根据截止频率与截止波数之间的关系可推出, 当 $f > f_c$ 时, 对应的 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模式可以在该矩形波导内传输。也就是对于某一 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模而言, 若要让其在给定的

波导内能够传输,其工作频率必须高于该模式的截止频率,此时的波导相当于一个高通滤波器。

同理,对于某一 TE_{mn} 模式或 TM_{mn} 模式,一定存在一个特定波长 λ_c ,在该频率点上可推出截止波长的表示式为

$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (5-48)$$

当 $\lambda < \lambda_c$ 时,对应的 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模式可以在该矩形波导内传输。

【例 5-1】 有一理想金属矩形波导,宽边尺寸 $a = 22.86\text{mm}$,窄边尺寸 $b = 10.16\text{mm}$,矩形波导中间的介质是空气,如果工作频率 $f = 6000\text{MHz}$,该矩形波导能否传输 TE_{10} 模?如果矩形波导中间的介质不是空气,而是 $\epsilon_r = 2, \mu_r = 2$ 的介质,情况又如何?

解: 由式(5-48)可得对应的 TE_{10} 模的截止波长为

$$\lambda_{c10} = \frac{2\pi}{k_{c10}} = 2a = 4.572(\text{cm})$$

当工作频率 $f = 6000\text{MHz}$ 时,空气介质自由空间的波长为

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^{10}}{6000 \times 10^6} = 5(\text{cm})$$

比较上述 λ 和 λ_{c10} ,有 $\lambda > \lambda_{c10}$ 。根据式(5-48)可知,当工作频率 $f = 6000\text{MHz}$ 时,该矩形波导不能传输 TE_{10} 模。

如果矩形波导中间介质的 $\epsilon_r = 2, \mu_r = 2$,这时, TE_{10} 模的截止波长为

$$\lambda_{c10} = \frac{2\pi}{k_{c10}} = 2a = 4.572(\text{cm})$$

相应介质中电磁波的波长 λ 为

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\mu_r\epsilon_r}} \cdot \frac{1}{f} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \cdot \frac{1}{f} = 2.5(\text{cm})$$

比较此时的 λ 和 λ_{c10} ,有 $\lambda < \lambda_{c10}$ 。根据式(5-48)可知,在充填介质 $\epsilon_r = 2, \mu_r = 2$ 的情况下,此矩形波导能够传输 TE_{10} 模。

从此例可以看到,如果某一给定频率的电磁波不能在尺寸一定的波导中以某种模式传播,就可以在该波导中填充 ϵ_r, μ_r 更大的媒质,使得该模式可以传播。这种方法在微波工程中常被采用。

2. TE 模和 TM 模的传输参数

1) 相速度

波导中某一 TE 模或 TM 模的相速度是指该波型的等相位面沿波导轴向移动的速度。相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (5-49)$$

由式(5-45)得该模式的相移常数为

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (5-50)$$

式中： $v=1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 为波在相应介质中的速度； λ 为相应介质中的波长； λ_c 为该模式的截止波长。将该式代入(5-49)，则波导中该模式的 TE 波和 TM 波的相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (5-51)$$

由式(5-51)可知，波导中电磁波沿着轴线方向的相速度大于相应介质中的速度。相速度不仅与波型有关，而且与波长(或频率)有关，即相速度是频率的函数，随频率的变化而变化，这种现象称为色散。因此，传输 TE 模式和 TM 模式的波导是色散传输系统。应当注意，波导中的色散并不是波导中所填充的介质(一般是线性媒质)造成的，而是波导本身的特性(边界条件)所造成的，它与有耗媒质中电磁波的色散原因有本质上的区别。

当信号以 TE 波、TM 波在波导中传输，由于色散的存在，信号随传播距离的增加失真会变得越来越严重。如果要减小信号的失真，要想办法应当尽量缩短信号在波导中的传播距离。对于要求高保真传输信号的地方，应当选用同轴线等非色散传输线。

2) 群速度

相速度实际是针对幅度、相位和频率均未受到调制的单频行波而言的，这种波不载有任何信息。若要使波载有信息，则必须对波的幅度、相位或频率进行调制，调制后的波就不再是单频的，而是含有多频率成分。这种由多个频率成分构成的“波群”的速度称为群速度。群速度实际上指的是一群角频率 ω 、相移常数 β 都非常相近的波在传播过程中所表现出的“共同”速度，这个速度代表信息的传播速度。如图 5-4 所示的调幅波，包络线所代表的即是载波所携带的信息，包络运动速度就是信号的传递速度，也就是群速度。

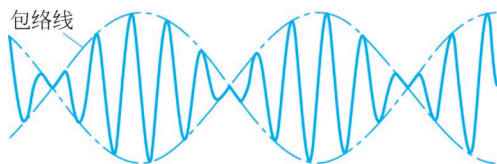


图 5-4 调幅波示意图

传输线中信号传递的群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (5-52)$$

由式(5-52)可知，作为信号传递速度的群速度总小于相同无界介质中同频率 TEM 平面波的相速度。注意，群速度只有在频带很窄时才有意义。

将式(5-51)与式(5-52)相乘，可得

$$v_p \cdot v_g = v^2 \quad (5-53)$$

3) 能速度

能速是电磁波能量在波导中的传播速度，波导传输的功率等于单位时间内通过波导横截面的电磁能量，所以导行波所传输的功率 P 应等于单位长波导中储存的平均能量

W 与能速度 v_e 之积,即

$$P = v_e W$$

据此可以推出能速度为

$$v_e = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (5-54)$$

与式(5-52)比较可知,导行波的能量传输速度等于群速,与信号传递的群速度相等,直接从物理意义上看,这两者也应该是统一的。

4) 波导波长

矩形波导中,在波的传播方向上某 TE 或 TM 模的波型相位相差 2π 等相位面间的距离称为该波型的波导波长,以 λ_g 表示。由于波的传播常数是沿波传播方向传播一个单位距离相位的变化量,所以波导中某 TE 或 TM 模的波导波长为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (5-55)$$

式中: λ 为相应介质中的波长; λ_c 为该模式的截止波长。

显然,波导中波导波长总是大于相应介质中均匀平面波的波长。考虑到 $v_p = \frac{\omega}{\beta}$,波导波长又可表示为

$$\lambda_g = \frac{v_p}{f} \quad (5-56)$$

式中: f 为信号的振荡频率。

5) 波阻抗

如果将矩形波导的电场横向矢量和磁场横向矢量分别表示为

$$\mathbf{E}_t(x, y, z) = E_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + E_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} = E_t(x, y, z)\hat{\mathbf{e}}_t$$

$$\mathbf{H}_t(x, y, z) = H_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + H_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} = H_t(x, y, z)\hat{\mathbf{h}}_t$$

式中: $\hat{\mathbf{e}}_t, \hat{\mathbf{h}}_t$ 分别为横向电场矢量和横向磁场矢量的单位矢量; E_t, H_t 分别为横向电场矢量和横向磁场矢量的复振幅。

波导中 TE、TM 模的波阻抗为

$$Z = \frac{E_t}{H_t} \quad (5-57)$$

对矩形波导,式(5-57)还可以写为

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (5-58)$$

下面根据定义分别来得出波导 TE、TM 模的波阻抗。

对于 TE 模,将 $H_z \neq 0, E_z = 0$ 代入式(5-16)可得

$$E_x = -\frac{1}{k_c^2} \cdot j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{1}{k_c^2} \cdot \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

将以上两式代入式(5-58),得 TE 模的波阻抗为

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (5-59)$$

对于传输型 TE 模, $\gamma = j\beta$, 则有

$$Z_{\text{TE}} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda_g}{\lambda} \quad (5-60)$$

若波导中填充的是空气介质, 则有

$$Z_{\text{TE}} = \eta_0 \frac{\lambda_g}{\lambda} \quad (5-61)$$

式中: η_0 为自由空间的波阻抗, 且有

$$\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi = 376.7(\Omega)$$

对于 TM 模, 将 $E_z \neq 0, H_z = 0$ 代入式(5-16)可得

$$E_x = -\frac{1}{k_c^2} \cdot \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad H_y = -\frac{1}{k_c^2} \cdot j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

将以上两式代入式(5-58), 得 TM 模的波阻抗为

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \quad (5-62)$$

对于传输型 TM 波($\gamma = j\beta$), 则有

$$Z_{\text{TM}} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_g} \quad (5-63)$$

若波导中填充的是空气介质, 则有

$$Z_{\text{TM}} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \eta_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad (5-64)$$

由式(5-59)和式(5-62)可以看出, 波导中的波阻抗取决于工作频率、介质的特性及波导的截面形状和尺寸, 与坐标无关。这就是说, 在波导的所有截面上波阻抗都是一样的。

5.2.4 矩形波导中的主模和高次模

由上面的分析可知, 矩形波导中的 TE 模和 TM 模具有相同的截止波数表示式, 因而它们的截止波长和截止频率具有相同的表示式。阶数为 m, n 的 TE 模和 TM 模的截止波长、截止频率分别为

$$(f_c)_{mn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (5-65)$$

$$(\lambda_c)_{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (5-66)$$

由上式可见: 截止波长与波导横截面尺寸 a, b 和模阶数 m, n 有关; 截止频率与波导截面尺寸、模阶数及介质的电磁参数有关。

前面已指出,每一对 $m、n$ 值都对应着波导中的一个模,每个模独立地满足波动方程和波导的边界条件,因此每个模式都可在波导中独立存在。除了前边对 m 和 n 取值的限定以外, $m、n$ 可取任意正整数,因此,满足矩形波导波动方程和边界条件的解有无穷多个,包括无穷多个 TE_{mn} 模和无穷多个 TM_{mn} 模。且同一矩形波导中模阶数(即 m 和 n)相同的 TE 模和 TM 模的截止波长、截止频率均相同,即

$$(\lambda_c)_{\text{TE}_{mn}} = (\lambda_c)_{\text{TM}_{mn}}, \quad (f_c)_{\text{TE}_{mn}} = (f_c)_{\text{TM}_{mn}}$$

这种不同模式具有相同截止波长、相同截止频率的现象称为模式的“简并”现象。矩形波导中的模式一般具有 TE_{mn} 模式和 TM_{mn} 模式的二重简并。但 TE_{m0} 模和 TE_{0n} 模没有简并,因为不存在 TM_{m0} 模和 TM_{0n} 模。

从上面的分析可知,当波导截面尺寸 $a、b$ 一定时,模阶数 $m、n$ 不同的模式其截止波长(或截止频率)也不同。波导中具有最长截止波长(或最低的截止频率)的模式称为最低次模(或最低阶模),其他的模式则称为高次模(或高阶模)。一般情况下,矩形波导的宽边尺寸为 a ,窄边尺寸为 b ,且 $a > b$ (一般情况如此),故矩形波导中的最低次 TE 模是 TE_{10} 模,最低次 TM 模是 TM_{11} 模。又从式(5-66)可知, $(\lambda_c)_{\text{TE}_{10}} > (\lambda_c)_{\text{TM}_{11}}$,故 TE_{10} 模是矩形波导中所有模式中的最低次模,最低次模又称为主模,所以 TE_{10} 模是矩形波导的主模。

为了说明矩形波导中截止波长的分布情况,下面以一个矩形波导为例来具体进行计算。表 5-1 以从大到小的排列方式给出了 $a = 7.2\text{cm}, b = 3.4\text{cm}$ 的矩形波导中的前几个截止波长值及其对应的模式名称。

表 5-1 $a = 7.2\text{cm}, b = 3.4\text{cm}$ 的矩形波导的截止波长

模式	TE_{10}	TE_{20}	TE_{30}	TE_{01}	TE_{02}	TE_{11} TM_{11}	TE_{21} TM_{21}	TE_{31} TM_{31}	TE_{22} TM_{22}
截止波长/cm	14.40	7.20	4.80	6.80	3.40	6.16	4.95	3.93	2.80

为了便于观察,将计算的数据绘成如图 5-5 所示的截止波长分布图。图中阴影区为截止区,当电磁波波长 λ 在此区域内时,该电磁波不能以任何模式在该波导内传输。当电磁波波长 λ 为 $7.2 \sim 14.4\text{cm}$ 时,波导只能以 TE_{10} 模传输该电磁波,此区域为仅有主模存在的单模工作区。当电磁波波长 $\lambda < 7.2\text{cm}$ 时,波导中将出现高次模,波导将处于可传输多种模式的工作状态。因此,为了使波导中只有一个模式,工作频率应落在单模工作区并以此 TE_{10} 模传输电磁波。

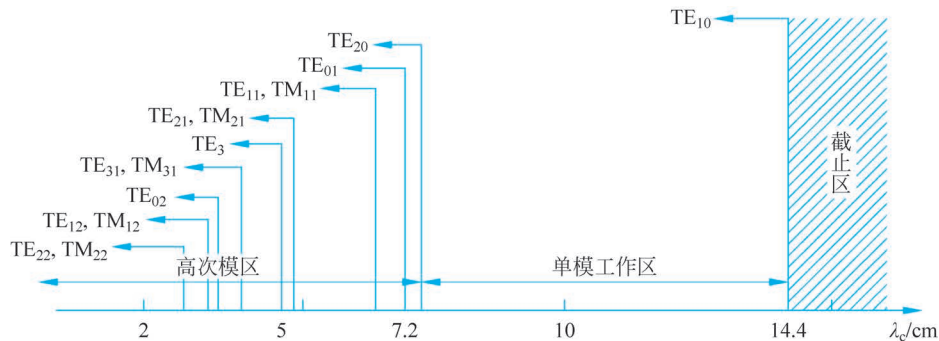


图 5-5 $a = 7.2\text{cm}, b = 3.4\text{cm}$ 的矩形波导截止波长分布



动画

5.3 矩形波导中 TE_{10} 模



当传输线工作时,一般选择主模作为工作模式, TE_{10} 模是矩形波导的主模,下面对 TE_{10} 模进行详细介绍。

5.3.1 TE_{10} 模的场强表达式和传输特性参数

令 $m=1, n=0$, 由式(5-34)可得传输型 TE_{10} 模的各场分量为

$$E_y = -j \frac{\omega \mu a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \quad (5-67a)$$

$$H_x = \frac{j\beta_{10} a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \quad (5-67b)$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \quad (5-67c)$$

$$E_x = E_z = H_y = 0 \quad (5-67d)$$

TE_{10} 模的各项传输特性参数如下:

$$\text{截止波数: } k_c = \frac{\pi}{a} \quad (5-68)$$

$$\text{截止频率: } f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (5-69)$$

$$\text{截止波长: } \lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{k_c} = 2a \quad (5-70)$$

$$\text{相移常数: } \beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (5-71)$$

$$\text{相速度: } v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (5-72)$$

$$\text{群速度: } v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = v \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2 \mu \epsilon f^2}} \quad (5-73)$$

$$\text{能速度: } v_e = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (5-74)$$

$$\text{波导波长: } \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (5-75)$$

$$\text{模式阻抗: } Z_{TE_{10}} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda_g}{\lambda} \quad (5-76)$$

式中: $v=1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 为与传输线填充介质相同的无界介质中同频率 TEM 平面波的相速度;
 λ 为相同无界介质中同频率 TEM 平面波的波长。

5.3.2 矩形波导中 TE_{10} 模的场结构

场结构就是传输线中电场和磁场的分布情况。对场结构予以重视是因为它在实用上具有重要意义,在解决传输线的激励耦合以及其他一些实际问题时都需要了解场结构。为了能形象和直观地了解场结构,可利用电力线和磁力线来描绘它。电力线或磁力线上某点的切线方向表示该点处电场矢量或磁场矢量的方向,电力线或磁力线的疏密程度表示该处电场矢量或磁场矢量的强弱。由电磁场理论可知,传输线中电力线和磁力线遵循的规律:①电力线发自正电荷、止于负电荷,也可以环绕时变磁场构成闭合曲线,电力线互不相交,传输线内部的导体表面上(假设为理想导体)电场切向分量为零,电力线与导体表面垂直;②磁力线总是闭合曲线,它围绕着载流导体或者围绕着时变电场,磁力线互不相交,传输线内部的导体表面上磁场的法向分量为零,磁力线与导体表面平行;③电力线与磁力线相互正交。

对于矩形波导而言,给定了 TE_{10} 模式的场分量表示式,就可以绘出该模式的电力线和磁力线,即场结构图。下面研究 TE_{10} 模的场结构。

为便于绘出 TE_{10} 模的场结构图,先要得到 TE_{10} 模的瞬时表示式。根据时谐电磁场瞬时表示式和复数表示式的关系,可得到 TE_{10} 模的各分量的瞬时表示式为

$$E_y = \frac{\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta_{10}z) \quad (5-77a)$$

$$H_x = -\frac{\beta_{10}a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta_{10}z) \quad (5-77b)$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta_{10}z) \quad (5-77c)$$

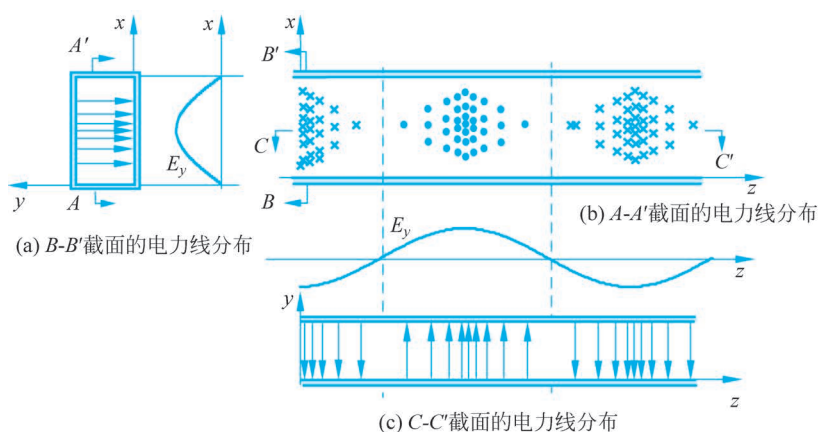
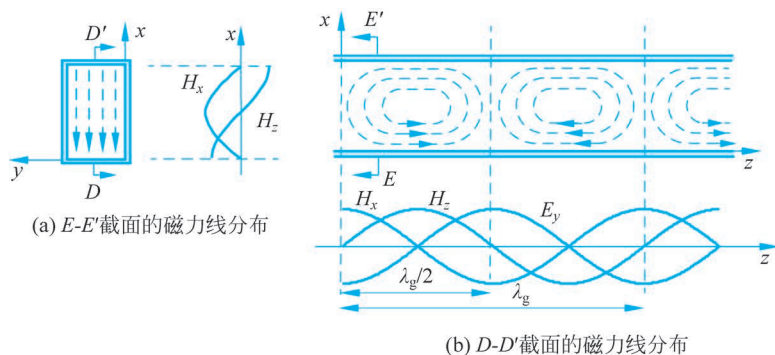
$$E_x = E_z = H_y = 0 \quad (5-77d)$$

下面根据 TE_{10} 模的各分量表达式和前边所述传输线中电力线和磁力线遵循的规律就可以绘出 TE_{10} 模的场结构图。

TE_{10} 模的电场只有 E_y 分量,所以电力线是一些平行于 y 轴的直线。电场强度只与 x 有关,与 y 无关,沿 a 边(即宽边)电场按正弦规律变化。在 $x=0$ 及 $x=a$ 处, $E_y=0$,在波导宽壁中线上($x=a/2$ 处)的电场最强。沿 b 边(即窄边),电场无变化。若以电力线的疏密来表示电场的强弱,则电场在横截面上的分布如图 5-6(a)所示。由此可以看出:越接近波导的窄壁,电场越弱,在 $x=0$ 及 $x=a$ 的波导窄壁表面处有 $E_y=0$ 。再来看电场在波导纵向的分布,由式(5-77a)可知, E_y 沿 z 轴呈正弦分布,相应的电场结构如图 5-6(c)所示。图 5-6(b)是 TE_{10} 模电场在 xz 平面上的分布图,“ $\cdot$ ”表示电力线指向 $\hat{y}$ 的正方向,“ $\times$ ”表示电力线指向 $\hat{y}$ 的负方向,其密度代表电场强度值。

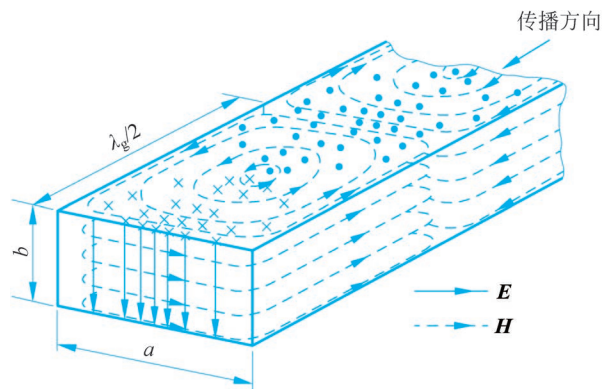
TE_{10} 模的磁场有 H_x 和 H_z 两个分量,因此总的磁场与波导宽边平行,由于磁力线是闭合曲线,这些闭合曲线必位于与波导宽边平行的 xOz 平面中,如图 5-7 所示。

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \hat{x}H_x + \hat{z}H_z \\ &= -\hat{x}\frac{\beta a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(\omega t_0 - \beta z) + \hat{z}H_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t_0 - \beta z) \end{aligned}$$


 图 5-6 矩形波导 TE_{10} 模的电场分布

 图 5-7 矩形波导 TE_{10} 模的磁场分布

由图 5-7 及式(5-77)可以看出, TE_{10} 模的横向电场 E_y 与横向磁场 H_x 在波导宽边上都是正弦分布, 而纵向磁场 H_z 则沿宽边为余弦分布。在 z 轴方向上, 三者均呈简谐分布, E_y 与 $-H_x$ 同相, 两者都与 H_z 有 90° 相位差, 这说明矩形波导中的导行波沿 z 轴方向是行波、沿横向呈驻波分布。

为了得到一个完整的立体概念, 图 5-8 显示出了某一时刻 TE_{10} 模电磁场结构的三维结构图。


 图 5-8 矩形波导 TE_{10} 模的电磁场结构

以上是 $t=t_0$ 时绘制的场结构的静止图像, 随时间的增加, 图 5-8 中所绘的整个波导场结构保持其形状不变, 以相速度 v_p 向 $+z$ 方向运动。

5.3.3 矩形波导中 TE_{10} 模的壁面电流

在上面的分析中, 还没有涉及波导管壁上的电流。事实上, 当波导中有导行电磁波时, 它必将在波导管内壁上产生感应的高频传导电流。实际的波导管虽非理想导体做成, 但波导管内壁都是良导体(如铜或镀银的铜管)。由于在微波波段, 场对良导体的穿透深度非常小($1\mu\text{m}$ 左右), 因此可以认为管壁上的这种电流是面电流。另外, 在波导内, 电场的变化将产生位移电流。这两种电流之和保证了全电流的连续性。

波导内壁上高频电流的分布完全取决于波导内部的磁场结构, 可用理想导体的边界条件 $\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$ 来确定波导壁上电流的大小及方向, $\mathbf{J}_s$ 为波导内壁上的面电流密度, $\mathbf{H}$ 为波导内壁处的磁场强度, $\hat{\mathbf{n}}$ 为波导内表面的法向单位矢量。将 TE_{10} 模磁场表达式代入 $\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$, 可得到 TE_{10} 模在波导管四个壁上的感应面电流密度, 即

$$\mathbf{J}_s|_{x=0} = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}|_{x=0} = -\hat{\mathbf{y}} H_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$\mathbf{J}_s|_{x=a} = (-\hat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{H}|_{x=a} = -\hat{\mathbf{y}} H_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$\mathbf{J}_s|_{y=0} = \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}|_{y=0} = \hat{\mathbf{x}} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta z) + \hat{\mathbf{z}} \frac{\beta a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s|_{y=b} &= (-\hat{\mathbf{y}}) \times \mathbf{H}|_{y=b} \\ &= \hat{\mathbf{x}} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta z) - \hat{\mathbf{z}} \frac{\beta_{10} a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

由这些电流的表达式结合波导内表面的磁场, 可画出如图 5-9 所示 $t=t_0$ 时刻矩形波导管内壁上的面电流密度分布图。

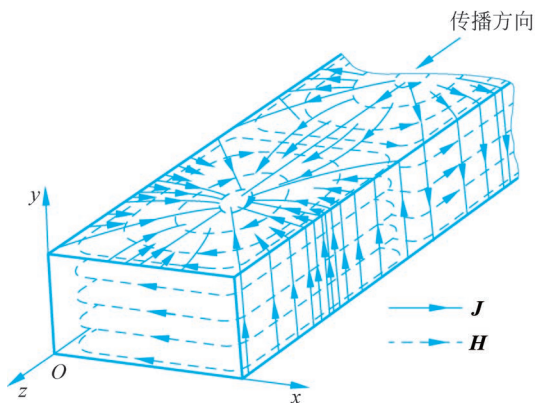


图 5-9 矩形波导传输 TE_{10} 模时的管壁电流分布

研究波导管壁电流的分布具有实际意义。例如, 计算波导功率损耗时就需要知道波导管壁上的电流分布。在实用中, 波导常是几节连接起来, 有时需要在波导壁上开缝或开孔, 以测量波导内的功率与传输特性等。这些接头与槽孔所在位置不应该破坏管壁电

流的通路,如果开的缝切断了电流线,改变了均匀波导的边界条件,势必使波导中的场发生改变,严重破坏原来波导内的电磁场分布,引起辐射(功率从缝中漏出去)和反射(功率从缝所在处反射回去)等,影响功率的有效传输。为使辐射和反射都尽量小,就应该使缝尽量不切断电流线,因此缝必须顺着电流线方向开,并尽量窄些,这种不切断高频电流的缝就是无辐射缝。从图 5-9 给出的矩形波导 TE_{10} 模电流分布可见,在宽壁中线上开纵向窄缝或在窄壁开横向窄缝都不会切断电流线,因而这些缝都是无辐射缝。图 5-10 中绘出了这两种无辐射缝。波导宽壁中央的纵向窄槽可被制成驻波测量线,进行波导中各种微波参数的测量。

在另一种情况下,往往需要强辐射缝,例如在波导壁上开缝做成裂缝天线,或在两平行波导的公共边上开缝实现所需要的能量耦合。此时,开缝的目的是使高频电磁能量从波导中大量辐射出来,或者是使外部电磁能量通过缝顺利进入波导中,因此这样的缝应该切断管壁电流,是强辐射缝。开强辐射缝的原则是垂直电流线开缝,故意切断高频电流的通路。这时,流经该处的被切断的管壁电流通过缝隙中的位移电流而继续流通,位移电流表现为垂直于缝隙的强电场,它与平行于缝隙的磁场一起形成指向波导壁外的强电磁辐射。图 5-11 示出的是矩形波导 TE_{10} 模的强辐射缝。

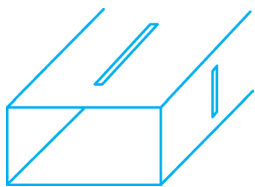


图 5-10 矩形波导传输 TE_{10} 模时的无辐射缝

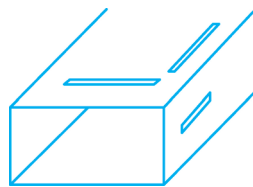


图 5-11 矩形波导传输 TE_{10} 模时的强辐射缝

5.3.4 TE_{10} 模的传输功率

传输功率一般是指通过波导横截面的平均功率。它是平均坡印廷矢量 $\mathbf{S}_{av}$ 在波导横截面上的积分,即

$$\begin{aligned} P &= \iint_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \iint_S \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z) \times (\hat{x}H_x + \hat{y}H_y + \hat{z}H_z)^* \right] \cdot \hat{z} ds \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2} \left[\int_0^a \int_0^b [(E_x H_y^* - E_y H_x^*)] dx dy \right] \end{aligned} \quad (5-78)$$

将式(5-77)代入式(5-78),即可得出矩形波导以 TE_{10} 模单模工作时传输的功率为

$$P = \frac{ab}{480\pi} E_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2} \quad (5-79)$$

由式(5-77)可知,矩形波导传输 TE_{10} 模时波导宽壁中线上($x=a/2$ 处)的电场最强,其幅值为 $E_0 = (\omega\mu a / \pi) H_0$ 。波导中通过的功率越大, E_0 值也越大,当 E_0 值大到某个值 E_{br} 时,该处会发生电击穿现象,该处的空气被强电场电离成为等离子体。这不仅

会在局部产生高热而损坏波导内壁,而且由于电离形成的等离子体是电的良好导体,会使波导在击穿处“短路”,波在该处被强烈反射,以致影响微波大功率设备的安全运行。这种高频击穿现象是大功率微波设备的一个严重问题,必须设法防止。

设空气的击穿电场强度为 E_{br} ,当 $E_0 = E_{br}$ 时,波导发生击穿,由式(5-79)可知,矩形波导以 TE_{10} 模工作,在行波状态下可以通过的最大功率(即功率容量)为

$$P_{br} = \frac{ab}{480\pi} E_{br}^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (5-80)$$

由式(5-80)可以看出,波导的功率容量与波导截面尺寸有关,尺寸越大,功率容量就越大。同时还可以看出,波导的传输功率大小与频率有关,频率越高,传输功率越大,而当频率接近截止频率时,传输功率趋近于零。图 5-12 示出了功率容量 P_{br} 与 λ/λ_c 的关系曲线。由图可见,当 $\lambda/\lambda_c = 1$ 时 $P_{br} = 0$; 当 $\lambda/\lambda_c > 0.9$ 时, P_{br} 急剧下降; 当 $\lambda/\lambda_c < 0.5$ 时,可能出现高次模。因此,当要求 TE_{10} 模单模传输时,应使 $0.5 < \lambda/\lambda_c < 0.9$, 即工作波长应选择在 $a < \lambda < 1.8a$, 即 $0.56\lambda < a < \lambda$ 。

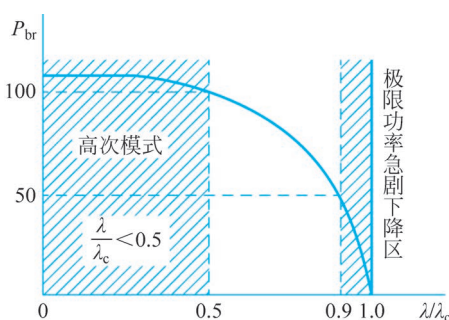


图 5-12 极限功率容量 P_{br} 与 λ/λ_c 的关系曲线

计算尺寸为 $a = 72.1\text{mm}$, $b = 34.04\text{mm}$ 的空气矩形波导在 $\lambda = 91\text{mm}$ 时的功率容量。因空气的击穿场强 $E_{br} = 30\text{kV/cm}$, 故有

$$P_{br} = \frac{1}{480\pi} \times 7.214 \times 10^{-2} \times 3.404 \times 10^{-2} \times 9 \times 10^{12} \times \sqrt{1 - \left(\frac{9.1}{14.4}\right)^2} \approx 11300(\text{kW})$$

矩形波导的功率容量是很大的,所以在需要传输大功率的地方都使用矩形波导。

需要指出的是,式(5-80)是在行波状态下得到的。但实际应用中波导终端不可能完全匹配,总存在一定的反射,这将使波导的功率容量降低。事实上,波导的击穿功率还与其他因素有关,如波导内表面不干净,有毛刺或出现不均匀性,都会使波导的功率容量降低。为保证波导安全工作,通常把波导允许的传输功率取为

$$P = \left(\frac{1}{3} \sim \frac{1}{5}\right) P_{br} \quad (5-81)$$

5.4 圆波导中的导行波

在实际工作中除了矩形波导,也常用圆波导。圆波导具有损耗较小和双极化特性,常用于要求双极化的天线馈线中,也用作远距离波导通信及作各种微波谐振腔。圆波导中导行波的分析方法与矩形波导中导行波的分析方法一样,但应采用如图 5-13 所示的圆柱坐标系 (ρ, ϕ, z) ,使得边界条件的表示式以及场的求解、场的表示式最简单。圆波导也是空心金属波导管,其中只能传输 TE 模和 TM 模或这两种模式叠加而成的波。设规则金属圆波导是内半径为 a 的无限长圆柱形直波导,波导内壁为理想导体,波导内填充的

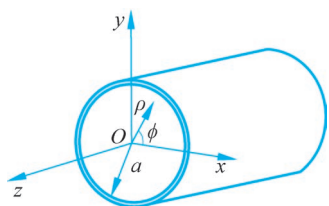


图 5-13 圆波导及其圆柱坐标系

是媒质参数为 ϵ 、 μ 的均匀、线性、各向同性的理想介质。

在圆柱坐标 (ρ, ϕ, z) 下,圆波导中电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{H}$ 的基本表达式为

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \mathbf{e}(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \quad (5-82a)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \phi, z) = \mathbf{h}(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \quad (5-82b)$$

$$\mathbf{e}(\rho, \phi) = e_\rho(\rho, \phi) \hat{\rho} + e_\phi(\rho, \phi) \hat{\phi} + e_z(\rho, \phi) \hat{z} \quad (5-83a)$$

$$\mathbf{h}(\rho, \phi) = h_\rho(\rho, \phi) \hat{\rho} + h_\phi(\rho, \phi) \hat{\phi} + h_z(\rho, \phi) \hat{z} \quad (5-83b)$$

分别是电场和磁场的横向分布函数,它们只与横截面坐标 (ρ, ϕ) 有关的矢量,表示场在波导横截面内的分布状态。

另外,作为一般场的分量形式,在圆柱坐标下电场和磁场的表达式还可以写为

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = E_\rho(\rho, \phi, z) \hat{\rho} + E_\phi(\rho, \phi, z) \hat{\phi} + E_z(\rho, \phi, z) \hat{z} \quad (5-84a)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \phi, z) = H_\rho(\rho, \phi, z) \hat{\rho} + H_\phi(\rho, \phi, z) \hat{\phi} + H_z(\rho, \phi, z) \hat{z} \quad (5-84b)$$

对比式(5-83a)和式(5-84a)以及式(5-83b)和式(5-84b)中表达式的对应项,可得:

$$E_\rho(\rho, \phi, z) = e_\rho(\rho, \phi) e^{-\gamma z}, \quad H_\rho(\rho, \phi, z) = h_\rho(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \quad (5-85a)$$

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = e_\phi(\rho, \phi) e^{-\gamma z}, \quad H_\phi(\rho, \phi, z) = h_\phi(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \quad (5-85b)$$

$$E_z(\rho, \phi, z) = e_z(\rho, \phi) e^{-\gamma z}, \quad H_z(\rho, \phi, z) = h_z(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \quad (5-85c)$$

与矩形波导一样,这些表达式可以用来求解圆波导中的电场和磁场分布,进而分析圆波导中电磁波的传播规律。圆波导的分析方法与矩形波导一样,利用纵向场法来求解各场分量。即先求解纵向场分量波动方程,再利用圆柱坐标系下用 E_z 和 H_z 表示的纵向场分量的表示式,并结合边界条件确定各场分量。

圆波导中的电磁场有六个分量,分别为 E_ρ 、 E_ϕ 、 E_z 、 H_ρ 、 H_ϕ 、 H_z 。在圆柱坐标 (ρ, ϕ, z) 下,电磁场的纵向场分量 E_z 和 H_z 所满足的式(5-13a)和式(5-13b)可转化为

$$\nabla_t^2 E_z(\rho, \phi, z) + k_c^2 E_z(\rho, \phi, z) = 0 \quad (5-86a)$$

$$\nabla_t^2 H_z(\rho, \phi, z) + k_c^2 H_z(\rho, \phi, z) = 0 \quad (5-86b)$$

具体可展开为

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + k_c^2 E_z = 0 \quad (5-87a)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k_c^2 H_z = 0 \quad (5-87b)$$

根据纵向场法,可由场的纵向分量求出横向分量 E_ρ 、 E_ϕ 、 H_ρ 、 H_ϕ ,即

$$E_\rho = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\rho \partial \phi} \right) \quad (5-88a)$$

$$E_\phi = \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\rho \partial \phi} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \quad (5-88b)$$

$$H_\rho = \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\rho \partial \phi} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \quad (5-88c)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \gamma \frac{\partial H_z}{\rho \partial \phi} \right) \quad (5-88d)$$

下面应用分离变量法求圆波导中 TE 模和 TM 模的表示式,再研究其他的问题。

5.4.1 圆波导中的 TE 型波

对于 TE 型波, $E_z=0$, 只需要求解 H_z 。应用分离变量法, 设

$$H_z(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)e^{-\gamma z} \quad (5-89)$$

式中: $R(\rho)$ 只是 ρ 的函数; $\Phi(\phi)$ 只是 ϕ 的函数。

将上式代入式(5-87b), 并展开, 得到

$$\Phi \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\Phi}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{R}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k_c^2 R \Phi = 0 \quad (5-90)$$

将上式两端都乘以 $\rho^2/R\Phi$, 将 R 和 Φ 分别移到等号两边, 则式(5-90)可整理为

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{\partial R}{\partial \rho} + k_c^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \quad (5-91)$$

由于 $R(\rho)$ 只是 ρ 的函数, Φ 只是 ϕ 的函数, 要式(5-91)成立, 就要求等式两边等于一个共同的常数。令此常数为 m^2 , 则得到

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = m^2 \quad (5-92)$$

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{\partial R}{\partial \rho} + k_c^2 \rho^2 = m^2 \quad (5-93)$$

式(5-92)的解可写为

$$\Phi(\phi) = C \cos(m\phi + \phi_0) \quad (5-94)$$

式中: 为了满足场量沿 ϕ 方向具有单值性, m 应为整数, 即 $m=0, 1, 2, \dots$; C, ϕ_0 为常数, ϕ_0 与极化面有关, 在理想的圆波导中, 极化面取决于源激励的极化情况。

式(5-93)可写成

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \left(k_c^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (5-95)$$

这是贝塞尔方程, 它的解是贝塞尔函数 $J_m(k_c \rho)$ 。限于篇幅, 关于贝塞尔函数的详尽求解与介绍此处从略, 读者可参考有关数学、物理方程方面的书籍。图 5-14(a)、图 5-14(b)示意了前几阶贝塞尔函数及其导函数的变化曲线。

综上所述可得

$$H_z = H_0 J_m(k_c \rho) \cos(m\phi + \phi_0) e^{-\gamma z} \quad (5-96)$$

将式(5-96)代入式(5-88)可以得到横向场分量表示式为

$$E_\rho = H_0 \frac{j\omega\mu m}{k_c^2 \rho} J_m(k_c \rho) \sin(m\phi + \phi_0) e^{-\gamma z} \quad (5-97a)$$

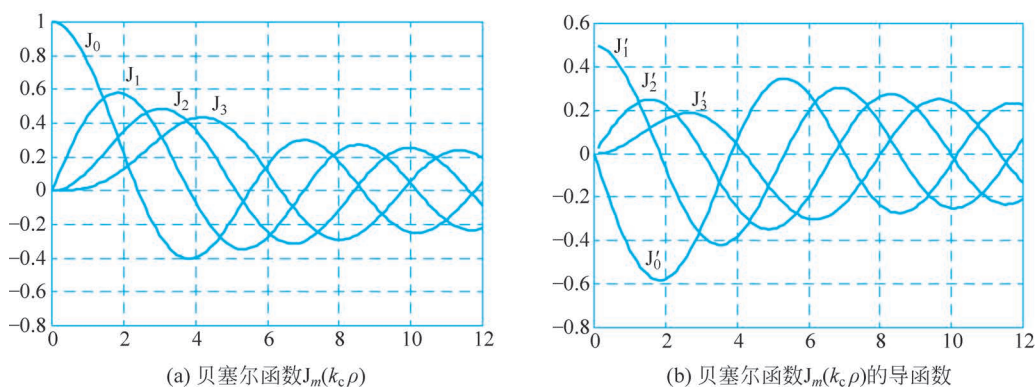


图 5-14 贝塞尔函数与贝塞尔函数的导函数

$$E_\phi = H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c} J'_m(k_c \rho) \cos(m\phi + \phi_0) e^{-\gamma z} \quad (5-97b)$$

$$H_\rho = -H_0 \frac{\gamma}{k_c} J'_m(k_c \rho) \cos(m\phi + \phi_0) e^{-\gamma z} \quad (5-97c)$$

$$H_\phi = H_0 \frac{\gamma m}{k_c^2 \rho} J_m(k_c \rho) \sin(m\phi + \phi_0) e^{-\gamma z} \quad (5-97d)$$

式中: $J'_m(k_c \rho)$ 为第 m 阶贝塞尔函数的导数。

根据边界条件,在 $\rho = a$ 处,电场的切向分量为零,即 $E_\phi = 0$,由此得关于 k_c 的方程为

$$J'_m(k_c a) = 0$$

设 μ_{mn} 为 m 阶贝塞尔函数导函数的第 n 个根的值,对应上述方程有

$$k_c a = \mu_{mn} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

即

$$k_c = \frac{\mu_{mn}}{a} \quad (5-98)$$

圆波导中 TE 型波的截止波长为

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}} \quad (5-99)$$

可以求得圆波导中 TE 型波的场分量表示为

$$E_\rho = H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c^2 \rho} J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a} \rho\right) \sin(m\phi + \phi_0) e^{-\gamma z} \quad (5-100a)$$

$$E_\phi = H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c} J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a} \rho\right) \cos(m\phi + \phi_0) e^{-\gamma z} \quad (5-100b)$$

$$E_z = 0 \quad (5-100c)$$

$$H_\rho = -H_0 \frac{\gamma}{k_c} J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a} \rho\right) \cos(m\phi + \phi_0) e^{-\gamma z} \quad (5-100d)$$

$$H_\phi = H_0 \frac{\gamma m}{k_c^2 \rho} J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} \rho \right) \sin(m\phi + \phi_0) e^{-\gamma z} \quad (5-100e)$$

$$H_z = H_0 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} \rho \right) \cos(m\phi + \phi_0) e^{-\gamma z} \quad (5-100f)$$

式中

$$\gamma = j\beta = j \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_{mn}}{a} \right)^2} \quad (5-101)$$

对于传输型 TE 型波,有

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a} \right)^2 - k^2}$$

式(5-100)是金属圆波导中 TE 模的场解,其中, m 、 n 是正整数,当 m 、 n 取某一对具体的正整数值时,就得到一个具体的 TE 模式,称为 TE_{mn} 模或 H_{mn} 模,如 TE_{11} 模等。与金属矩形波导一样,每个 TE_{mn} 模都独立地满足波动方程和圆波导的边界条件,因此每个 TE_{mn} 模式都可在圆波导中独立存在,每个 TE_{mn} 模式都构成一个完整的电磁场结构。根据 m 和 n 的取值范围,圆波导中的 TE 模可有无穷多个,每个 TE_{mn} 模都有自己的截止波数和传播常数。表 5-2 列出了 m 阶贝塞尔函数导数的一些根值及其对应的 H_{mn} 模的截止波长值。

表 5-2 圆波导中的 TE_{mn} 或 H_{mn} 模的截止波长

模式	TE_{11}	TE_{21}	TE_{01}	TE_{31}	TE_{12}	TE_{22}	TE_{02}	TE_{13}
μ_{mn}	1.84	3.054	3.832	4.201	5.332	6.705	7.016	8.536
λ_c	$3.41a$	$2.06a$	$1.64a$	$1.50a$	$1.18a$	$0.94a$	$0.90a$	$0.74a$

5.4.2 圆波导中的 TM 型波

对于 TM 型波, $H_z=0$,只需要求解 E_z 。同样应用分离变量法和边界条件可以求得圆波导中 TM 波的场分量分别为

$$E_\rho = -E_0 \frac{\gamma}{k_c^2} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} \rho \right) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (5-102a)$$

$$E_\phi = E_0 \frac{\gamma m}{k_c^2 \rho} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} \rho \right) \sin m\phi e^{-\gamma z} \quad (5-102b)$$

$$E_z = E_0 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} \rho \right) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (5-102c)$$

$$H_\rho = -E_0 \frac{j\omega\epsilon m}{k_c^2 \rho} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} \rho \right) \sin m\phi e^{-\gamma z} \quad (5-102d)$$

$$H_\phi = -E_0 \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} \rho \right) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (5-102e)$$

$$H_z = 0 \quad (5-102f)$$

式中: v_{mn} 为第 m 阶贝塞尔函数第 n 个根的值, 而

$$k_c = \frac{v_{mn}}{a}, \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2 - k^2} \quad (5-103)$$

对于传输型 TE 型波, 有

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{k^2 - \left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2} \quad (5-104)$$

由此可见, 圆波导中的 TM 波型也有无穷多个, 用 TM_{mn} 或 E_{mn} 模表示。每个 TM_{mn} 模都独立地满足波动方程和圆波导的边界条件, 可在圆波导中可独立存在, 可构成一个完整的电磁场结构。每个 TM_{mn} 模都有自己的截止波数和传播常数。表 5-3 列出了 m 阶贝塞尔函数导数的一些根值及其对应的 TM_{mn} 模的截止波长值。

表 5-3 圆波导中 TM_{mn} 模的截止波长

模式	TM_{01}	TM_{11}	TM_{21}	TM_{02}	TM_{12}	TM_{22}	TM_{03}	TM_{13}
v_{mn}	2.045	3.832	5.135	5.520	7.016	8.417	8.650	10.173
λ_c	$2.62a$	$1.64a$	$1.22a$	$1.14a$	$0.90a$	$0.75a$	$0.72a$	$0.62a$

5.4.3 圆波导中导行波的一般特性和尺寸选择

由场分量的分析结果可以得出, 除 TE_{m0} 模和 TM_{m0} 模不存在, 圆波导中可以存在无穷多个 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模。其中, 阶数 m 表示场沿 ϕ 方向分布的整驻波数, $m=0$ 表示场沿 ϕ 方向无变化; 场沿 ρ 方向按贝塞尔函数或其导数变化, 阶数 n 表示场沿 ρ 方向出现零点的次数, 也就是场量变化的半驻波个数。

根据各种模的截止波长值按大小排列, 即可画出如图 5-15 所示的圆波导各模式截止波长分布图。可以看出, 圆波导中截止波长最长的是 TE_{11} 模, 故圆波导中的主模是 TE_{11} 模。

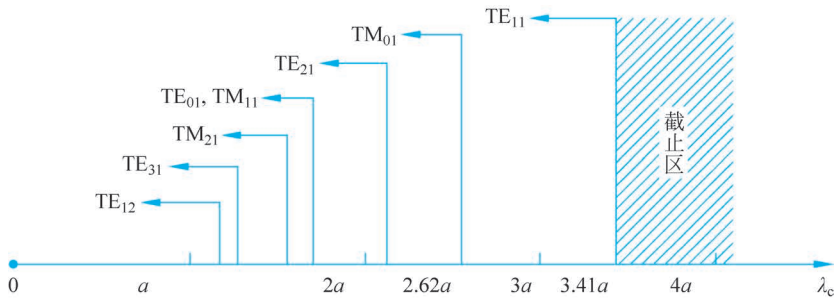


图 5-15 圆波导截止波长分布

关于圆波导中波的其他传输特性, 与矩形波导完全相似, 这里不再赘述。

在圆波导中如采用 TE_{11} 模传输电磁能量, 应使 $\lambda < (\lambda_c)_{TE_{11}} = 3.41a$, 于是得到 $a > \lambda/3.41$ 。与 TE_{11} 模相邻的高次模是 TM_{01} 模, $(\lambda_c)_{TM_{01}} = 2.62a$, 为抑制它, 应选择 $\lambda > 2.62a$, 因此又可得到 $a < \lambda/2.62$ 。由此得到以 TE_{11} 模单模工作的圆波导的半径 a 应满足

$$\lambda/3.41 < a < \lambda/2.62$$

对于以主模 TE_{11} 工作的圆波导,一般选择

$$a = \lambda/3 \quad (5-105)$$

如果选用 TM_{01} 模工作,则应使

$$\lambda < (\lambda_c)_{TM_{01}} = 2.62a, \quad \lambda > (\lambda_c)_{TE_{21}} = 2.06a$$

因此得到

$$\lambda/2.62 < a < \lambda/2.06 \quad (5-106)$$

需要指出的是,当圆波导以 TM_{01} 模工作时, TE_{11} 模也会出现,为保证只有 TM_{01} 模,此时需采取其他措施消除 TE_{11} 模。

5.4.4 圆波导中常用的三种模式

1. 主模 TE_{11} 模

圆波导中的主模是 TE_{11} 模,其截止波长 $(\lambda_c)_{TE_{11}} = 3.41a$,最长,当工作波长 λ 为 $(2.62 \sim 3.41)a$ 时,圆波导只能以 TE_{11} 模单模工作。 TE_{11} 模有 5 个场分量,根据这 5 个场分量即可绘出 TE_{11} 模的场结构,如图 5-16 所示。

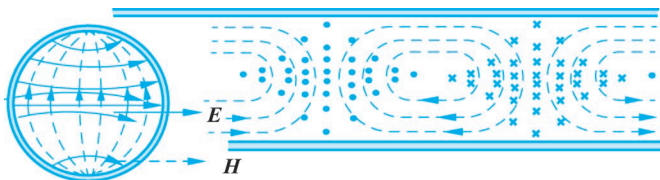


图 5-16 圆波导中的 TE_{11} 模的电磁场结构

由图 5-15 可见, TE_{11} 模的场结构与矩形波导中主模 TE_{10} 模的场结构相似,因此它们之间的模式转换是很方便的。矩形波导至圆波导激励器通常称为矩—圆过渡段,其结构如图 5-17 所示。图 5-17 所示结构的横截面从内尺寸为 a 、 b 的矩形逐渐圆滑渐变到内半径为 a 的圆。由于矩形波导横截面上 TE_{10} 模的电力线形状及分布与圆波导中 TE_{11} 模横截面上电力线形状及分布相近,由矩形波导传过来进入激励器矩形波导口的 TE_{10} 模,经过激励器之后就很容易在圆波导中激励起圆波导的 TE_{11} 模,只要矩至圆过渡段足够长,使内尺寸从矩形到圆的变化不剧烈,该激励器的不均匀性引起的反射就很小。该激励器也称为矩形波导 TE_{10} 模至圆波导 TE_{11} 模的模式变换器。

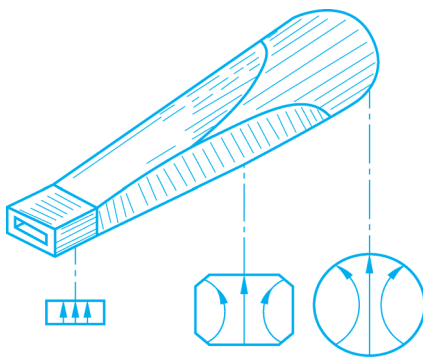


图 5-17 矩形波导—圆波导激励器

(由矩形波导的 TE_{10} 模均匀过渡到圆波导的 TE_{11} 模)

虽然 TE_{11} 模是圆波导的主模,但 TE_{11} 模有极化简并现象,这是 TE_{11} 模的一个基本缺点。极化简并是指对应于同一对 m 、 n 值(即对应于同一个 TE_{mn} 模或 TM_{mn} 模)有两种场分布,这两种场的场结构完全相同,唯一的差别是极化面相互旋转了 90° 。圆波导中

除了 TE_{0n} 模和 TM_{0n} 模以外的模都存在极化简并。极化简并的存在,表明圆波导中传输这些模时极化面是不固定的。在理想的圆波导中,极化面只取决于激励情况。但在实际波导中,由于波导机械加工的公差,波导截面形状不可能保证是正圆,这就会引起传输模极化面旋转,产生极化简并模。一般情况下这种现象对传输是不利的,但在某些场合需利用这种特性构成特殊用途的波导元件。由于圆波导加工时总有一定的椭圆度,这就会使 TE_{11} 模的极化面旋转,分裂成极化简并波,如图 5-18 所示。此外,又由于圆波导中 TE_{11} 模的单模工作频带比矩形波导中 TE_{10} 模的单模工作频带窄,在实际远距离微波能量传输时采用矩形波导的 TE_{10} 模。

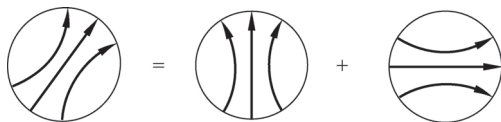


图 5-18 任意极化的 TE_{11} 模分解成两个相互正交的 TE_{11} 模

TE_{11} 模一般应用在特殊情况中,例如,当要求传输圆极化波时,采用 TE_{11} 模比较方便。另外, TE_{11} 模还可用于铁氧体环形器、极化衰减器、极化变换器中。

2. TE_{01} 模

TE_{01} 模是圆波导中的高次模, $m=0, n=1$,该模式有六个场分量,其中 $E_z = E_\rho = H_\phi = 0$,故该模式仅有 H_z, H_ρ, E_ϕ 三个场分量。其截止波长为

$$\lambda_c = \frac{2\pi b}{3.832} = 1.64a \quad (5-107)$$

TE_{01} 模的场结构如图 5-19 所示,场呈轴对称分布。由于 $m=0$,场沿 ϕ 方向没有变化。电场只有 E_ϕ 分量,故电力线只在波导横截面上分布,并且围绕交变磁场纵向分量成闭合曲线。

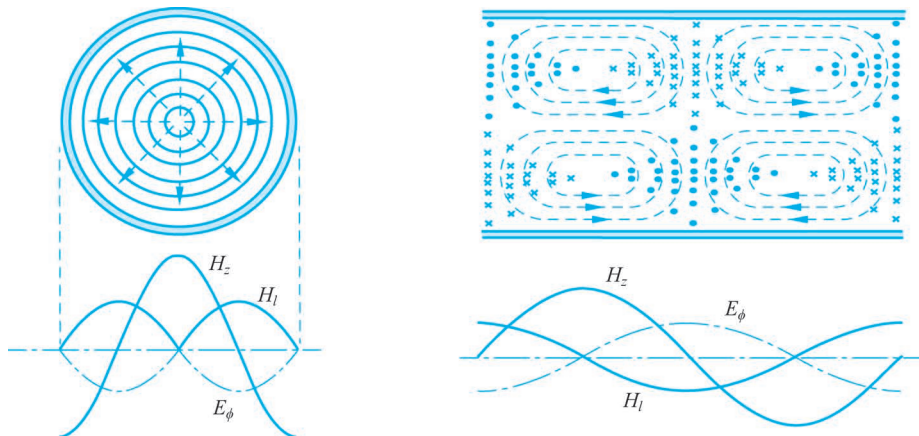


图 5-19 圆波导 TE_{01} 模的场结构

TE_{01} 模具有一个非常突出的特点:在波导管壁上无纵向电流,管壁电流只沿圆周方向流动,如图 5-20 所示(所有 TE_{0n} 模都有此特点),并且当传输功率一定时,随着频率的

升高,波导管壁的热损耗将下降。 TE_{01} 模的这个特点,使它特别适合作高 Q 谐振腔的工作模式,也特别适用于毫米波远距离波导传输。 TE_{01} 模圆波导是目前毫米波波导传输的最有效的结构形式。在毫米波段,标准圆波导 TE_{01} 模的理论衰减为矩形波导 TE_{10} 模衰减的 $1/4 \sim 1/8$ 。不过,由于 TE_{01} 模不是圆波导中的主模,因此在使用时需要设法抑制其他模式。

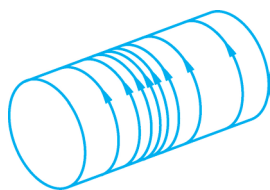


图 5-20 TE_{01} 模管壁电流分布

3. TM_{01} 模

TM_{01} 模是圆波导中的次低次模,也是最低次的 TM 模式,没有简并模式,其截止波长 $\lambda_c = 2.62b$ 。 TM_{01} 模的场结构如图 5-21 所示。

$m=0$ 的模式其电磁场沿 ϕ 方向没有变化,其场分布具有轴对称性。由于 TM_{01} 模的场具有轴对称性,并且又是低次模,这一特点使得 TM_{01} 模特别适于作天线机械扫描装置中的旋转关节的工作模式,如图 5-22 所示。不过,由于 TM_{01} 模不是圆波导中的主模,使用时也须设法抑制 TE_{11} 主模。

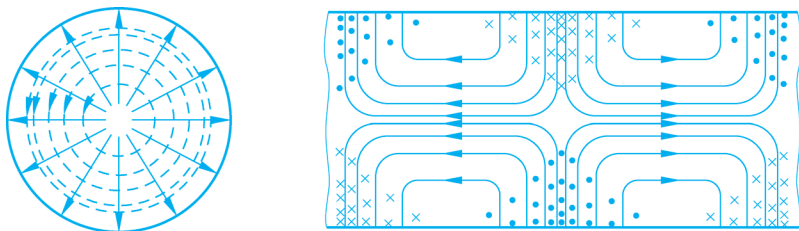


图 5-21 圆波导 TM_{01} 模的场结构

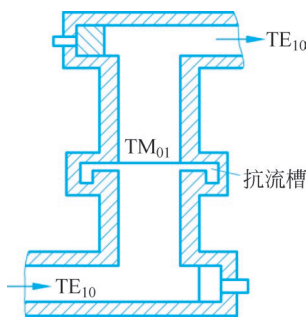


图 5-22 工作于 TM_{01} 模的旋转关节

5.5 同轴传输线

矩形波导和圆波导一般是用于波长 10cm 以下的波段,当用于 10cm 以上的波段时就显得尺寸大、笨重,使用很不方便。在波长大于 10cm 波段时,通常采用尺寸小得多的同轴线或同轴电缆作传输线。同轴线是一种双导体传输线,有内、外两个导体,如图 5-23 所示,图中 a 表示内导体外半径, b 表示外导体内半径,内、外导体之间的空间内填充的是

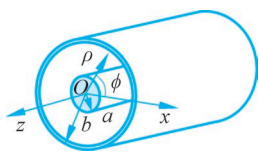


图 5-23 同轴传输线结构

参数为 ϵ 、 μ 的均匀媒质。同轴线的结构是圆柱对称的，因而采用圆柱坐标系进行分析。若同轴线中的电磁波沿同轴线中的 $+z$ 纵轴方向传播，则与矩形波导类似，可以将同轴线内传播的电磁波电场强度和磁场强度的表达式写为

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \mathbf{e}(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \quad (5-108a)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \phi, z) = \mathbf{h}(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \quad (5-108b)$$

式中

$$\mathbf{e}(\rho, \phi) = e_\rho(\rho, \phi) \hat{\rho} + e_\phi(\rho, \phi) \hat{\phi} + e_z(\rho, \phi) \hat{z} \quad (5-109a)$$

$$\mathbf{h}(\rho, \phi) = h_\rho(\rho, \phi) \hat{\rho} + h_\phi(\rho, \phi) \hat{\phi} + h_z(\rho, \phi) \hat{z} \quad (5-109b)$$

是只与横截面圆柱坐标 (ρ, ϕ) 有关的矢量，仅是横向圆柱坐标 (ρ, ϕ) 的函数，分别表示电场和磁场在同轴线横截面内的分布状态，称为电场的横向分布函数和磁场的横向分布函数。 $e^{-\gamma z}$ 表示场沿同轴线纵向的传播规律，为传播因子。 γ 是同轴线中电磁波沿轴向传播的传播常数，其物理意义与矩形波导内电磁波传播常数意义相同。在一般情况下，它是复数，即 $\gamma = \alpha + j\beta$ ，其中 α 为衰减常数， β 为相移常数。

另外，作为一般场的分量形式，在圆柱坐标 (ρ, ϕ, z) 下，电场和磁场的表达式还可以写为

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = E_\rho(\rho, \phi, z) \hat{\rho} + E_\phi(\rho, \phi, z) \hat{\phi} + E_z(\rho, \phi, z) \hat{z} \quad (5-110a)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \phi, z) = H_\rho(\rho, \phi, z) \hat{\rho} + H_\phi(\rho, \phi, z) \hat{\phi} + H_z(\rho, \phi, z) \hat{z} \quad (5-110b)$$

因此，对比式(5-109)和式(5-110)中表达式的对应项，可得

$$E_\rho(\rho, \phi, z) = e_\rho(\rho, \phi) e^{-\gamma z}, \quad H_\rho(\rho, \phi, z) = h_\rho(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \quad (5-111a)$$

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = e_\phi(\rho, \phi) e^{-\gamma z}, \quad H_\phi(\rho, \phi, z) = h_\phi(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \quad (5-111b)$$

$$E_z(\rho, \phi, z) = e_z(\rho, \phi) e^{-\gamma z}, \quad H_z(\rho, \phi, z) = h_z(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \quad (5-111c)$$

同轴线是一种双导体传输线，同轴线中可以传输 TEM 波。由于 $k_c = 0$ ，对应的截止波长 $\lambda_c = 2\pi/k_c = \infty$ ，即 TEM 波的截止波长最长，因此 TEM 波是同轴线中的主模。下面先重点讨论同轴线中 TEM 模的求解，再讨论同轴线 TEM 波的一般传播特性。

5.5.1 同轴线 TEM 波的求解

分析同轴线中 TEM 模的传播规律，必须先求出同轴线中电磁场的各个分量。已知 TEM 模的纵向场分量 $E_z = 0, H_z = 0$ ，因此 TEM 模只有横向电场分量 E_ρ, E_ϕ 和横向磁场分量 H_ρ, H_ϕ 。由于 TEM 模的 $k_c = 0$ ，即 $\gamma^2 + k^2 = 0$ ，同轴线中 TEM 模的传播常数为

$$\gamma = jk = j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (5-112)$$

又由于 $E_z = 0, H_z = 0$ ，纵向场法在此不适用。因此，直接用麦克斯韦方程来求解同轴线 TEM 模的电场和磁场分量。为此，首先在圆柱坐标系中将麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$$

展开,写成分量形式

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -j\omega\mu H_\rho \quad (5-113a)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -j\omega\mu H_\phi \quad (5-113b)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} = -j\omega\mu H_z \quad (5-113c)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = j\omega\epsilon E_\rho \quad (5-113d)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = j\omega\epsilon E_\phi \quad (5-113e)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = j\omega\epsilon E_z \quad (5-113f)$$

将 $E_z=0, H_z=0$, 以及式(5-111) 所表达的相互关系代入式(5-113)中各项,再利用同轴线壁面为理想导体的边界条件,可求出同轴线中 TEM 模的电场和磁场分别为

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \hat{\rho} E_\rho = \hat{\rho} \frac{E_0}{\rho} e^{-jkz} \quad (5-114a)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \phi, z) = \hat{\phi} H_\phi = \hat{\phi} \frac{E_0}{\rho \sqrt{\mu/\epsilon}} e^{-jkz} \quad (5-114b)$$

式中: E_0 为待定常数,可用边界条件或激励源来确定。

根据波阻抗的定义,同轴传输线的主模 TEM 模的波阻抗 Z 为

$$Z_{\text{TEM}} = \frac{E_t}{H_t} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (5-115)$$

同轴传输线主模 TEM 的瞬时表达式为

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z, t) = \hat{\rho} E_\rho(\rho, \phi, z, t) = \hat{\rho} \frac{E_0}{\rho} \cos(\omega t - kz) \quad (5-116a)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \phi, z, t) = \hat{\phi} H_\phi(\rho, \phi, z, t) = \hat{\phi} \frac{E_0}{\rho \sqrt{\mu/\epsilon}} \cos(\omega t - kz) \quad (5-116b)$$

根据 TEM 的瞬时表达式画出同轴线传输 TEM 波时的电磁场结构,如图 5-24 所示。

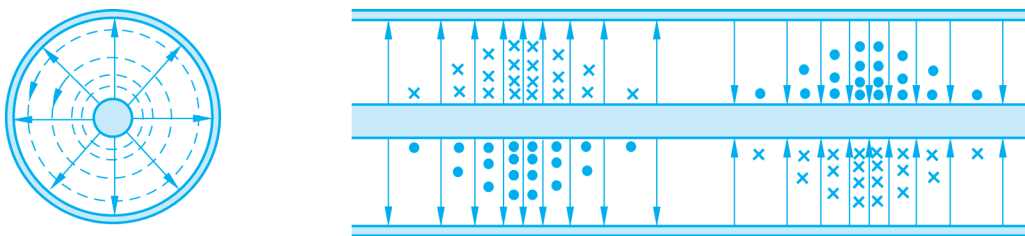


图 5-24 同轴传输线中 TEM 模的场结构

同轴线传输 TEM 波时, $k_c=0$, 其截止波长 $\lambda_c=2\pi/k_c=\infty$ 。这表明任何频率的能

量都能够以 TEM 波形式在同轴线内传输。下面讨论传输 TEM 波时的一些传输特性。

5.5.2 同轴线 TEM 波的传输特性

1. 同轴线 TEM 波的相速度与波长

对于 TEM 波,由 $\gamma^2 + k^2 = 0$,可得 $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$,因此相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (5-117)$$

波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} \quad (5-118)$$

这表明,同轴线中波的相速度与相应介质中波的传播速度一样,其波长就等于介质中的波长,它不随频率而变化,因此 TEM 模是无色散模。信号在同轴线中以 TEM 模传输时不会出现色散现象,不会产生失真。同轴线可以传输 TEM 波,具有宽频带特性。因此,在需要宽频带使用时,通常采用同轴线结构。

2. 同轴线的损耗与衰减

当传输 TEM 波时,同轴线中波的衰减主要是导体损耗引起的。导体损耗引起的波的衰减常数为

$$\alpha = \frac{R}{2Z_c} \quad (5-119)$$

式中: R 为同轴线单位长度的电阻,其表示式为

$$R = \sqrt{\frac{f\mu_1}{4\pi\sigma_1}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (5-120)$$

式中: σ_1, μ_1 分别为同轴线导体材料的电导率和磁导率。

3. 同轴线的功率容量

同轴线传输 TEM 模时,其传输功率是平均坡印廷矢量 $\mathbf{S}_{av}$ 在同轴线横截面上的积分。将式(5-114)代入 $\mathbf{S}_{av} = \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* / 2)$,可得同轴线任意横截面上任一点的平均坡印廷矢量为

$$\mathbf{S}_{av} = \text{Re} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) = \text{Re} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}_\rho \times \mathbf{H}_\phi^* \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{|E_0|^2}{\rho^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (a \leq \rho \leq b)$$

因此,通过同轴线传输的总传输功率为

$$P = \iint_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{|E_0|^2}{\rho^2} 2\pi\rho d\rho = \pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |E_0|^2 \ln \frac{b}{a} \quad (5-121)$$

由式(5-116)可知,同轴线中 TEM 模在 $\rho = a$ 处电场强度最大,令该处电场强度值 $|E_0|/a$ 等于同轴线中所填充媒质的击穿强度 E_{br} ,则击穿时有 $|E_0| = E_{br}a$,将其代入式(5-121)得同轴线传输 TEM 模时的功率容量为

$$P_{br} = \sqrt{\epsilon_r} \frac{a^2 E_{br}^2}{120} \ln \frac{b}{a} \quad (5-122)$$

5.5.3 同轴线中的高次模及其尺寸选择

在实际工作中,同轴线都以 TEM 模工作。但是,当同轴线尺寸与波长相比够大时,除 TEM 模之外,同轴线中还可能出现一系列高次模 TE 模和 TM 模,这些模是色散型模。讨论这些高次模的意义在于确定高次模的截止波长,以便在频率给定时选择合适的同轴线尺寸 a 、 b 对这些模进行抑止,保证同轴线内只传输 TEM 模,或者采取其他措施抑制高次模。

1. TE 模和 TM 模的截止波长

分析同轴线中 TE 模和 TM 模的方法与分析圆波导中 TE 模和 TM 模的方法相似。在同轴线边界条件下解波动方程可以得到同轴线中 TM_{01} 模和 TE_{11} 模截止波长近似式,分别为

$$(\lambda_c)_{TE_{11}} \approx \pi(b+a) \quad (5-123)$$

$$(\lambda_c)_{TM_{01}} \approx 2(b-a) \quad (5-124)$$

由以上两式可以看出,同轴线中第一个高次模是 TE_{11} 模。图 5-25 给出了同轴线中各模式的截止波长分布。

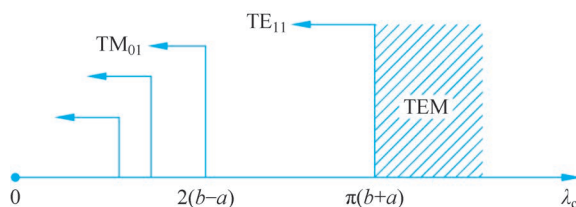


图 5-25 同轴线中各模式的截止波长分布

2. 同轴线中的尺寸选择

为了保证在工作频带内只传输 TEM 模,必须使最短工作波长大于第一个高次模 TE_{11} 模的截止波长,即

$$\lambda_{\min} \geq (\lambda_c)_{TE_{11}} \approx \pi(b+a)$$

由此可得

$$b+a \leq \frac{\lambda_{\min}}{\pi} \quad (5-125)$$

该式决定了 a 、 b 之和的数值范围。为最后确定尺寸,还必须确定 a 、 b 的比值关系。此关系可根据功率容量最大,或损耗最小来确定。

功率容量最大的条件是 $dP_{br}/da=0$,由此可得

$$\frac{b}{a} = 1.65 \quad (5-126)$$

这就是说,当 $b/a=1.65$ 时,同轴线的功率容量最大。

损耗最小的条件是 $d\alpha/da=0$,由此可得

$$\frac{b}{a} = 3.592 \quad (5-127)$$

这就是说,当 $b/a = 3.592$ 时,同轴线的衰减最小。若采用这种尺寸的同轴线作谐振器,其品质因数 Q 最高。

由式(5-126)和式(5-127)可以看出,获得最大功率容量和最小衰减的条件是不一样的。若要兼顾功率容量大和衰减小这两个指标,则可折中取 $b/a = 2.303$ 。此时的衰减比最佳情况约大 10%,功率容量比最大值约小 15%,其相应的特性阻抗为 50Ω 。在微波波段工作,同轴线的特性阻抗通常选用标准值,常采用的是 50Ω 和 75Ω 两种。

5.6 平行双导线传输线

图 5-26(a)是均匀平行双导体传输线的结构,两根细柱形导体的横截面形状相同,两根导体的间距沿轴向坐标轴 z 保持均匀不变,两根导体周围是参数为 ϵ 、 μ 、 σ 的均匀媒质。电磁场由平行双导体引导沿轴向传输。由于是双导体,线上可以传输的电磁波的主模式是 TEM 波,其横截面上的电磁场的横向分布与静态电磁场的分布完全相同,如图 5-26(b)所示。

对于这些传输 TEM 波的传输线,可以像静态场那样来定义电压和电流。图 5-26(c)表示的是均匀平行双导体传输线中 z 为任意值的一个横截面。由于其上传输的是 TEM 波,双导线周围空间的电、磁场就只有横向分量而无纵向分量,即传输线任意横截面上的电磁场可分别写成 $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$,根据电压、电流的定义,图 5-26(c)中 z 为任意值时, t 时刻导体 1 和导体 2 间的电压为

$$u(z, t) = \int_a^b \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (E_x dx + E_y dy) \quad (5-128)$$

式中: l 为两导体间的一条任意路径。

在 xOy 平面上取仅包围导线 l 的一条有向闭合路径 L ,使其正方向与导体 l 上电流方向呈右手螺旋关系,则 t 时刻在 z 处流过导体 l 的电流为

$$i(z, t) = \oint_L \mathbf{H}_t \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (H_x dx + H_y dy) \quad (5-129)$$

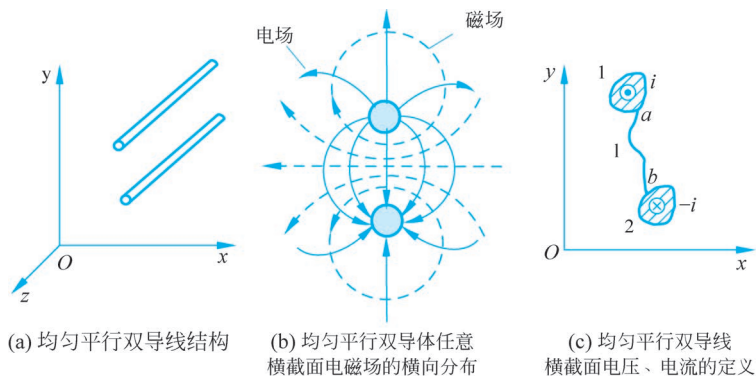


图 5-26 均匀平行双导体的任意横截面

5.7 微带线

微带线(简称微带)是微波集成电路的主要组成部分,它在微波集成电路中用来连接各元件和器件,并用来构成电感、电容、谐振器、滤波器、混合环、定向耦合器等无源元件。

微带线是一种以固体介质绝缘的单接地板传输线,可以看成由平行双导线演变而来的。图 5-27 为其演变过程。在平行双导线两圆柱导体间的平分面上放置一个无限薄的导电平板,由于平分面处所有电力线与导电平板垂直,因此不会扰动原来的电磁场分布。若把导电平板一侧的一根圆柱导体去掉,导电平板另一侧的电磁场分布也不会改变,此时一根圆柱导体与导电平板构成一对传输线。如果把圆柱导体做成薄带敷在均匀介质板的一面,介质板的另一面为接地导电平板,即构成微带线。

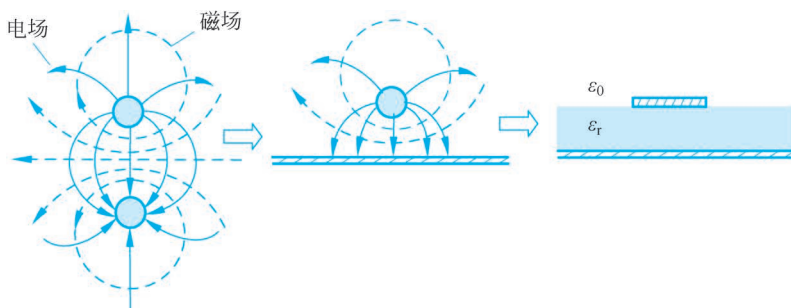


图 5-27 微带线的演变

可以判断微带线中的电磁场分布与平行双导线的类似,如图 5-28 所示。

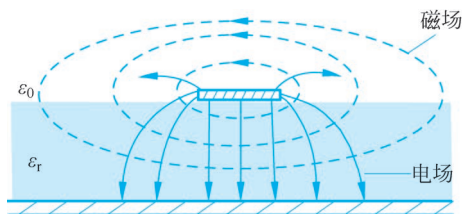


图 5-28 微带线中的电磁场结构

5.7.1 微带线中的工作模式

如果微带线中没有介质片,这种双导体(导体带和接地板)系统可以维持静电场和静磁场,因而可存在无色散的 TEM 模,其截止频率 $f_c = 0$, TEM 模是此系统的最低模式。但实用的微带是有介质片的,而且介质片又不是充满双导体系统全部空间,因而在传输系统中不仅有导体与空气的交界面,而且还有介质($\epsilon_r > 1$)与空气($\epsilon_r = 1$)的交界面,导行波在这种以均匀介质平板为支撑的微带线中传输时,必须同时满足这两种边界条件,或者说在这两种边界处电场切向分量 E_t 和磁场切向分量 H_t 都必须连续。可以证明:在这种具有两种不同介质界面的传输系统中,一般不可能存在的单一的 TEM 波,其中导行波的场一定具有纵向分量,即导行波中的 $H_z \neq 0, E_z \neq 0$ 。换句话说,纯的 TEM 波不

可能在微带线中存在。

实际上,微带线中的工作模式是一种 $H_z \neq 0, E_z \neq 0$ 的混合模式,这种工作模式可以同时满足微带线中的上述两种边界条件,并能在任何频率下传播($f_c=0$)。但该混合模式是有色散的,而且其纵向场分量的大小也随工作频率而变,当工作频率 f 较低时,其色散较弱,纵向场分量也较小,当 $f \rightarrow 0$ 时,可以近似看成 TEM 模,故称为准 TEM 模。实用的微带线总是工作在低频弱色散区,在这种条件下,其准 TEM 模的工作模式与无色散的 TEM 模的工作模式非常接近,工程中可用等效介电常数来分析微带线的特性,此处不展开论述,可查阅相关资料。

5.7.2 微带线的损耗

微带线的损耗主要包括导体损耗和介质损耗两部分。由于微带的尺寸很小,它的损耗比波导和同轴线的损耗大得多。

微带线的导体损耗是导体条带和接地板高频趋肤效应产生的热损耗引起的。导体损耗还与导体条带的厚度和表面粗糙度有关。由于趋肤效应的影响,导体条带越厚,导体损耗越小。为了减小导体损耗,保证流过 98% 以上的电流,导体条带的厚度必须大于趋肤深度的 3~5 倍。同时,导体表面粗糙度越低,导体损耗越小。微带线中导体的损耗比介质损耗大得多,因此,微带线中导体损耗是主要的。

微带线还有辐射损耗。由于微带线是半开放系统,必然有一部分能量向外辐射,尤其是在不均匀性处,辐射更为严重。在微带线的开路端,辐射最大。工程中,取微带线基片厚度足够小,并将电路加以屏蔽,就可以避免辐射损耗。

5.7.3 微带线的色散特性和高次模

微带线的色散特性是指微带线中波的相速随频率变化的特性,即微带线的有效介电常数随频率变化的特性。实验结果表明,当工作频率 $f < 5000\text{MHz}$ 时,微带线的相速、特性阻抗等参数与按 TEM 波计算的结果十分接近,故微带线中的导行波就可以近似地按 TEM 模处理。但是,当 $f > 5000\text{MHz}$ 时,实验值与计算值就开始有较大的偏差。因此,准 TEM 波的假设只有在频率较低时才成立。当 $f > 5000\text{MHz}$ 时,色散不能忽略,如仍按 TEM 模处理,所得结果必须修正,否则误差会太大。

微带线中也存在高次模,这些高次模除了使微带特性参数偏离按 TEM 波计算的结果,还增加了辐射损耗,并引起电路中各部分之间相互耦合,使工作状态恶化。关于微带线的高次模这里不作介绍,读者可参阅其他书籍。

思考题

- 5-1 微波传输线有哪几种? 它们各有什么优、缺点?
- 5-2 什么叫作截止波长? 为什么只有 λ 小于截止波长的波才能在传输线中传输?
- 5-3 何谓相速度和群速度? 为什么传输线中波的相速度大于光速,群速度小于光速?

- 5-4 何谓传输线的色散特性? 传输线为何有色散特性?
- 5-5 矩形波导中的 v_p 、 v_g 、 λ_c 和 λ_g 有何区别和联系? 它们与哪些因素有关?
- 5-6 为什么一般矩形波导测量线的纵槽开在波导宽壁的中线上?
- 5-7 圆波导中的模式指数 m 、 n 的意义如何? 为什么不存在 $n=0$ 的模式?

练习题

5-1 为什么传输线中要保证单一模传输? 若 λ_0 为 8mm、3cm、10cm, 试问如何保证矩形波导中只有单一模传输?

5-2 空气填充的矩形波导尺寸为 $a=22.86\text{mm}$, $b=10.16\text{mm}$, 信号频率为 10GHz, 求 TE_{10} 、 TE_{01} 、 TE_{11} 、 TM_{11} 四种模式的截止波数、截止频率、截止波长、波导波长、相移常数、波阻抗。如果波导填充介质, $\epsilon_r=2.5$, 再求上述量值。

5-3 空气填充的矩形波导尺寸为 $a=7.2\text{cm}$, $b=3.4\text{cm}$, 传播 TE_{10} 模式, 若沿纵向测得波导中的电场强度最大值与相邻的最小值之间的距离为 4.47cm, 求信号频率。

5-4 矩形波导尺寸为 $a=22.86\text{mm}$, $b=10.16\text{mm}$, 求工作波长为 3cm 的传输 TE_{10} 模的最大传输功率。

5-5 矩形波导尺寸为 $a=22.86\text{mm}$, $b=10.16\text{mm}$, 传输 TE_{10} 模, 当工作频率为 10GHz 时:

- (1) 求 λ_c 、 λ_g 、 β 和 $Z_{\text{TE}_{10}}$ 。
- (2) 若波导宽边尺寸增大 1 倍, 则上述各参量将如何变化?
- (3) 若波导窄边尺寸增大 1 倍, 则上述各参量又将如何变化?
- (4) 若波导尺寸不变, 工作频率变为 15GHz, 则上述各参量又将如何变化?

5-6 某发射机的工作波长 λ_0 为 7.6~11.8cm。若用矩形波导作馈线, 问该波导尺寸应如何选取?

5-7 矩形波导尺寸 $a=22.86\text{mm}$, $b=10.16\text{mm}$, 用其作馈线, 试问:

- (1) 当工作波长分别为 1.5cm、3cm、4cm 时, 波导中可能出现哪些模式?
- (2) 为保证只传输 TE_{10} 模, 其波长范围应为多少?

5-8 频率 $f=3\text{GHz}$ 的 TE_{10} 模式在矩形波导中传输, 填充空气, 要求 $1.3f_{\text{cTE}_{10}} < f < 0.7f_{\text{cTE}_{20}}$, 试确定该波导的尺寸。

5-9 矩形波导 $a=8\text{cm}$, $b=4\text{cm}$, 求 TM_{10} 、 TM_{01} 模式的截止波长。

5-10 同轴线内导体半径 2mm、外导体半径 4mm, 填充空气, 求同轴线中主模的截止波长、相速度和波阻抗。