

【导读】 本章从普通时间函数的谱分析入手,引入了随机过程功率谱密度与互功率谱密度,讨论了随机过程谱密度、互谱密度及其性质;分析了功率谱与相关函数之间的关系及复随机过程的功率谱,并给出了基于 Blackman-Tukey(B-T法)和周期图法的功率谱实现方法。

平稳随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的相关函数 $R_X(\tau)$ 是在时间域上描述过程的统计特性;为描述平稳随机过程在频域上的统计特性,需要进行谱分析。本章主要讨论平稳随机过程的谱密度及相关函数 $R_X(\tau)$ 的谱分析。

3.1 平稳随机过程的功率谱密度

3.1.1 普通时间函数的谱分析

1. 总能量与能谱密度

若普通时间函数 $x(t)$ 绝对可积,即 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$,则其傅里叶变换存在,或者说 $x(t)$ 具有频谱

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.1.1)$$

一般地, $X(\omega)$ 是复值函数,有

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = X^*(\omega)$$

对 $X(\omega)$ 作傅里叶逆变换,得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.1.2)$$

利用式(3.1.1)和式(3.1.2),得信号的总能量为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) X^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

式(3.1.3)称为帕斯瓦尔(Parseval)定理, $|X(\omega)|^2$ 称为能量谱密度。若把 $x(t)$ 看作通过 1Ω 电阻上的电流或电压,则左边的积分表示消耗在 1Ω 电阻上的总能量。

2. 平均功率及功率谱密度

实际问题中,大多数时间函数的总能量都是无限的,因此不能满足傅里叶变换条件。为此,需考虑平均功率及功率谱密度。

作一截尾函数

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \quad (3.1.4)$$

因 $x_T(t)$ 有限,故满足绝对可积条件,其傅里叶变换存在,于是

$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.1.5)$$

对 $X_T(\omega)$ 作傅里叶逆变换,得

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.1.6)$$

在区间 $[-T, T]$ 上的平均功率为

$$P_T = \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega)|^2 d\omega \quad (3.1.7)$$

故 $T \rightarrow \infty$ 时,总平均功率为

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} P_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T x^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

式中,

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega)|^2 \quad (3.1.9)$$

为 $x(t)$ 的功率谱密度,简称谱函数; $G_X(\omega) d\omega$ 为谱分布函数。

3.1.2 随机过程的功率谱密度

设随机过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 是均方连续的,作截尾后,得

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \quad (3.1.10)$$

因为 $X_T(t)$ 均方可积,故存在傅里叶变换

$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.1.11)$$

利用 Parseval 定理及傅里叶变换,得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt = \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega \quad (3.1.12)$$

因为 $X(t)$ 是随机过程,故式(3.1.12)两边都是随机变量,对时间区间 $[-T, T]$ 取时间平均后,概率意义下的统计平均为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |F_{X_T}(\omega)|^2 \right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|F_{X_T}(\omega)|^2] d\omega \quad (3.1.13)$$

式(3.1.13)就是随机过程 $X(t)$ 的平均功率和功率密度关系的表达式。

【定义 3.1】 设 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 为均方连续随机过程, 称

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt \right] \quad (3.1.14)$$

为 $X(t)$ 的总平均功率, 称

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega)|^2] \quad (3.1.15)$$

为 $X(t)$ 的功率谱密度, 简称谱密度。

当 $X(t)$ 是均方连续平稳过程时, 由于 $E[|X(t)|^2]$ 是与 t 无关的常数, 因此,

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[|X(t)|^2] dt \\ &= E[|X(t)|^2] = R_X(0) \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

由式(3.1.16)和式(3.1.13)知, 平稳随机过程的平均功率等于该过程的均方值, 或等于它的谱密度在频率上的积分, 即

$$R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega \quad (3.1.17)$$

式(3.1.17)是平稳过程 $X(t)$ 的平均功率的频谱展开式, $G_X(\omega)$ 描述了各种频率成分所具有的能量大小。

【例 3.1】 设随机过程 $X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Theta)$, a, ω_0 为常数, 在下列情况下, 求 $X(t)$ 的平均功率。

- (1) Θ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量;
- (2) Θ 是在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上服从均匀分布的随机变量。

解: (1) 随机过程 $X(t)$ 是平稳过程, 其相关函数 $R_X(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$ 。于是由式(3.1.16)得 $X(t)$ 的平均功率为

$$P = R_X(0) = \frac{a^2}{2}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= E[a^2 \cos^2(\omega_0 t + \Theta)] = E \left[\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos^2(2\omega_0 t + 2\Theta) \right] \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2(2\omega_0 t + 2\theta) \frac{2}{\pi} d\theta = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{\pi} \sin(2\omega_0 t) \end{aligned}$$

故此时 $X(t)$ 为非平稳过程, 由式(3.1.14)得 $X(t)$ 的总平均功率为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X(t)^2] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{\pi} \sin(2\omega_0 t^2) \right] dt = \frac{a^2}{2}$$

对于平稳随机序列的谱分析,有类似结果。

【定义 3.2】 设 $\{X_k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是平稳随机序列, $E[X_k]=0$; 若相关函数 $R_X(m)$ 满足 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |R_X(m)| < \infty$, 则称

$$G_X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-jm\omega}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (3.1.18)$$

为 $\{X_k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 的谱密度。平稳随机序列的相关函数与谱密度之间的关系为

$$R_X(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_X(\omega) e^{jm\omega} d\omega, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.1.19)$$

很显然, 功率谱密度 $G_X(\omega)$ 是周期为 2π 的周期函数。

当 $m=0$ 时, 则

$$R_X(0) = E\{X_k\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_X(\omega) d\omega \quad (3.1.20)$$

平稳随机序列的功率谱通常也用 z 变换表示, 即

$$G_X(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_X(m) z^{-m} \quad (3.1.21)$$

由于自相关函数为偶函数, 所以

$$G_X(z) = G_X(z^{-1}) \quad (3.1.22)$$

自相关函数 z 变换的收敛域是一个包含单位圆的环形区域, 即收敛域为

$$a < |z| < \frac{1}{a}, \quad 0 < a < 1 \quad (3.1.23)$$

很显然,

$$G_X(\omega) = G_X(z) \Big|_{z=e^{-j\omega}} \quad (3.1.24)$$

自相关函数也可用功率谱的 z 逆变换表示为

$$R_X(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C G_X(z) z^{m-1} dz \quad (3.1.25)$$

式中, C 为收敛域内包含 z 平面原点逆时针的闭合围线。

3.1.3 功率谱密度与自相关函数之间的关系

1. 维纳-辛钦定理

众所周知, 确定信号 $x(t)$ 与它的频谱 $X(\omega)$ 在时域和频域之间构成一对傅里叶变换对。可以证明, 实平稳随机信号的自相关函数与其功率谱密度之间也构成一对傅里叶变换对。下面就来推导这一关系式。

由功率谱密度的推导知

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega)|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T^*(\omega) X_T(\omega)] \quad (3.1.26)$$

将式(3.1.11)截断函数的频谱代入式(3.1.26), 则实过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T X(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \cdot \int_{-T}^T X(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[X(t_1)X(t_2)] e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_1, t_2) e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \quad (3.1.27)
\end{aligned}$$

式中, $R_X(t_1, t_2)$ 只在 $-T \leq t_1, t_2 \leq T$ 时存在。令 $t = t_1, \tau = t_2 - t_1 = t_2 - t$, 代入式(3.1.27)进行变量置换, 得

$$\begin{aligned}
G_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-2T}^0 \left[\int_{-T-\tau}^T R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau + \right. \\
&\quad \left. \int_0^{2T} \left[\int_{-T}^{T-\tau} R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \\
&= \int_{-\infty}^0 \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-\tau}^T R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau + \\
&\quad \int_0^{+\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-\tau} R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^0 \langle R_X(t, t+\tau) \rangle_t e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} \langle R_X(t, t+\tau) \rangle_t e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \langle R_X(t, t+\tau) \rangle_t e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.1.28)
\end{aligned}$$

由傅里叶变换的定义, 式(3.1.28)成立的条件是 $\langle R_X(t, t+\tau) \rangle_t$ 绝对可积, 其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示对时间的均值。根据傅里叶变换的唯一性, 有

$$\langle R_X(t, t+\tau) \rangle_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.1.29)$$

所以, 任意随机过程 $X(t)$ 自相关函数的时间平均与其功率谱密度互为傅里叶变换, 即

$$\langle R_X(t, t+\tau) \rangle_t \xleftrightarrow[F^{-1}]{F} G_X(\omega) \quad (3.1.30)$$

若随机过程 $X(t)$ 是平稳过程, 其自相关函数 $R_X(t_1, t_2) = R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$ 与 t 无关。则

$$\langle R_X(t, t+\tau) \rangle_t = \langle R_X(\tau) \rangle_t = R_X(\tau) \quad (3.1.31)$$

只要 $R_X(\tau)$ 绝对可积, 即满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty \quad (3.1.32)$$

则

$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.1.33)$$

同理,

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.1.34)$$

所以, 实平稳过程的自相关函数与其功率谱密度之间是一对傅里叶变换关系, 即

$$R_X(\tau) \xleftrightarrow[F^{-1}]{F} G_X(\omega) \quad (3.1.35)$$

这一关系就是著名的维纳—辛钦定理, 或称为维纳—辛钦公式。它给出了实平稳过程的时域特性和频域特性之间的联系。

由于平稳过程的自相关函数和功率谱密度皆为偶函数, 维纳—辛钦定理可表示为

$$\begin{cases} G_X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \\ R_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_X(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \end{cases} \quad (3.1.36)$$

2. 维纳—辛钦定理的推广

应该指出,以上讨论的维纳—辛钦定理是在随机过程的 $R_X(\tau)$ 满足绝对可积的条件下推出的。它要求随机过程的均值为 0,且 $R_X(\tau)$ 中不能含有周期分量。然而,实际中含有直流分量和周期分量的随机过程很多,而任何直流分量和周期分量在频域上都表现为某些频率点上出现强度无限的离散谱线,绝对可积的条件限制了定理的应用。

借助冲激函数 $\delta(t)$,就可以不受此条件的限制。即将直流分量与周期分量在各个频率点上的无限值用一个 δ 函数来表示,借助 δ 函数的傅里叶变换,就可以将维纳—辛钦定理推广到含有直流或周期成分的平稳过程中。

δ 函数的时域和频域傅里叶变换为

$$\begin{cases} \delta(\tau) \Leftrightarrow 1 \\ \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow \delta(\omega) \end{cases} \quad (3.1.37)$$

周期函数的傅里叶变换对为

$$\begin{cases} \cos(\omega_0\tau) \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ \sin(\omega_0\tau) \Leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{cases} \quad (3.1.38)$$

δ 函数与连续函数 $x(t)$ 的乘积公式为

$$\begin{cases} x(t)\delta(t - \tau) = x(\tau)\delta(t - \tau) \\ x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \end{cases} \quad (3.1.39)$$

【例 3.2】 已知某随机过程 $X(t)$ 的样本函数可用傅里叶级数表示为

$$X(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0(t + t_0) + b_n \sin n\omega_0(t + t_0)]$$

式中, t_0 为在一个周期内均匀分布的随机变量; a_n, b_n 为常数。试写出 $X(t)$ 的功率谱密度表达式。

解: 既然随机过程的功率谱密度是其自相关函数的傅里叶变换,故先求其自相关函数。由于题意中并没说明该过程是否平稳,因此,在求自相关函数时,要保留变量 t 。

$$R_X(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)]$$

$$\begin{aligned} &= E \left\{ \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0(t + t_0) + b_n \sin n\omega_0(t + t_0)] \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0(t + t_0 + \tau) + b_n \sin n\omega_0(t + t_0 + \tau)] \right] \right\} \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0(t + t_0) + b_n \sin n\omega_0(t + t_0)] + \\ &\quad \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0(t + t_0 + \tau) + b_n \sin n\omega_0(t + t_0 + \tau)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n a_m \cos n \omega_0 (t+t_0) \cos m \omega_0 (t+t_0+\tau) + \\ & a_n b_m \cos n \omega_0 (t+t_0) \sin m \omega_0 (t+t_0+\tau) + \\ & a_m b_n \sin n \omega_0 (t+t_0) \cos m \omega_0 (t+t_0+\tau) + \\ & b_n b_m \sin n \omega_0 (t+t_0) \sin m \omega_0 (t+t_0+\tau)] \end{aligned}$$

共 9 项。

第一项为常数,第二至第五项求统计平均(在一个周期内积分),结果为 0。再观察二次求和项的第一项:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a_n a_m \cos n \omega_0 (t+t_0) \cos m \omega_0 (t+t_0+\tau) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{a_m a_n}{2} \cos n \omega_0 \tau, & m = n \end{cases}$$

类似地,第二项为

$$\begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{a_m a_n}{2} \sin n \omega_0 \tau, & m = n \end{cases}$$

第三项为

$$\begin{cases} 0, & m \neq n \\ -\frac{a_m a_n}{2} \sin n \omega_0 \tau, & m = n \end{cases}$$

第四项为

$$\begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{b_n^2}{2} \sin n \omega_0 \tau, & m = n \end{cases}$$

$$R_X(\tau) = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{2} \cos n \omega_0 \tau$$

可见,该随机过程虽然表达式较复杂,但仍是平稳随机过程。

$$G_X(\omega) = \frac{a_0^2}{2} \pi \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(a_n + b_n)}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

3.1.4 谱密度的性质

1. 谱密度性质

设 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 是均方连续平稳过程, $R_X(\tau)$ 为它的相关函数, $G_X(\omega)$ 为它的功率谱密度,则 $G_X(\omega)$ 具有下列性质:

【性质 1】 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty$, 则 $G_X(\omega)$ 是 $R_X(\tau)$ 的傅里叶变换,即

$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.1.40)$$

证明: 将式(3.1.11)代入式(3.1.15),得

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\left| \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T X(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \left(\int_{-T}^T X(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \right)^* \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T \int_{-T}^T X(t_1) X^*(t_2) e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[X(t_1) X^*(t_2)] e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_1-t_2) e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

对于平稳随机过程, $R_X(t_1-t_2) = R_X(\tau)$, $\tau = t_1-t_2$, 将积分变量 t_1, t_2 变换到 τ, t , 则

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\left| \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

令

$$R_{X_T}(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_X(\tau), & |\tau| \leq 2T \\ 0, & |\tau| > 2T \end{cases}$$

显然, $\lim_{T \rightarrow \infty} R_{X_T}(\tau) = R_X(\tau)$, 故

$$\begin{aligned}
G_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{X_T}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} R_{X_T}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau
\end{aligned}$$

证毕。

对式(3.1.16)作傅里叶逆变换, 得

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.1.41)$$

式(3.1.40)与式(3.1.41)说明, 平稳过程的相关函数与谱密度之间构成一对傅里叶变换, 在式(3.1.41)中, 令 $\tau=0$, 得平均功率

$$R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega \quad (3.1.42)$$

当 $X(t)$ 为实平稳过程时, 则

$$\begin{cases} G_X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \\ R_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_X(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \end{cases} \quad (3.1.43)$$

【性质 2】 $G_X(\omega)$ 非负, 满足

$$G_X(\omega) \geq 0 \quad (3.1.44)$$

根据式(3.1.15)功率谱密度的定义, 其中的 $|X_T(\omega)|^2$ 非负, 故其数学期望值非负。

【性质 3】 $G_X(\omega)$ 是 ω 的实函数, 满足

$$G_X^*(\omega) = G_X(\omega) \quad (3.1.45)$$

考虑到 $|X_T(\omega)|^2$ 是实函数, 故其数学期望必为实函数。

【性质 4】 $G_X(\omega)$ 是 ω 的偶函数, 满足

$$G_X(\omega) = G_X(-\omega) \quad (3.1.46)$$

证明: 对于实随机过程 $X(t)$ 截断函数的频谱, 有

$$X_T(\omega) = X_T^*(-\omega) \Rightarrow X_T^*(\omega) = X_T(-\omega) \quad (3.1.47)$$

代入式(3.1.15), 得

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega)|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T^*(\omega) X_T(\omega)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T(-\omega) X_T^*(-\omega)] = G_X(-\omega) \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

【性质 5】 平稳随机过程的 $G_X(\omega)$ 可积, 即满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega < \infty \quad (3.1.49)$$

证明: 由式(3.1.16)知, 平稳过程的平均功率为

$$P = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega) d\omega \quad (3.1.50)$$

平稳过程的均方值有限, 满足 $E[X^2(t)] < \infty$, 得证。

2. 物理功率谱

有理谱密度是常用的一类功率谱。在工程中, 由于只在正的频率范围内进行测量, 根据平稳过程的谱密度 $G_X(\omega)$ 是偶函数的性质, 可将负的频率范围内的值折算到正频率范围内, 得到所谓“单边功率谱”或物理功率谱。单边功率谱 $G_X^S(\omega)$ 定义为

$$G_X^S(\omega) = \begin{cases} 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\left| \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \right], & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (3.1.51)$$

它与 $G_X(\omega)$ 有如下关系:

$$G_X^S(\omega) = \begin{cases} 2G_X(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (3.1.52)$$

相应地, $G_X(\omega)$ 可称为“双边谱”。它们图形关系如图 3.1 所示。

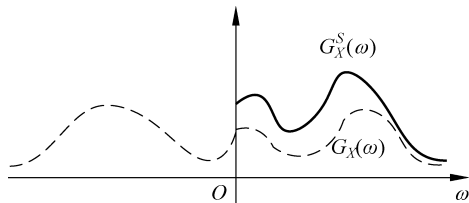


图 3.1 双边谱与单边谱

【例 3.3】 已知平稳过程的相关函数为 $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|} \cos(\omega_0 \tau)$, 其中 $a > 0, \omega_0$ 为常数, 求谱密度 $G_X(\omega)$ 。

解:

$$G_X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega_0 \tau) \cos(\omega \tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} e^{-a\tau} [\cos(\omega_0 + \omega)\tau + \cos(\omega_0 - \omega)\tau] d\tau \\
 &= \frac{a}{a^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}
 \end{aligned}$$

【例 3.4】 已知平稳过程的谱密度 $G_X(\omega) = \frac{2Aa^3}{\pi^2(\omega^2 + a^2)^2}$, 求相关函数 $R_X(\tau)$ 及平均功率 P 。

解:

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= \frac{Aa^3}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau}}{(\omega^2 + a^2)^2} d\omega \\
 &= \frac{Aa^3}{\pi^3} 2\pi j \left\{ \frac{e^{j|\tau|Z}}{(Z^2 + a^2)^2} \text{ 在 } Z = \pm ja \text{ 处的留数} \right\} \\
 &= \frac{A(1 + a|\tau|)}{2\pi} e^{-a|\tau|} \\
 P = R_X(0) &= \frac{A}{2\pi}
 \end{aligned}$$

3.2 联合平稳随机过程的互功率谱

现将单个实随机过程功率谱的概念以及相应的分析方法推广到两个随机过程中。

3.2.1 互功率谱密度及其性质

对两个平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 它们的样本函数 $x_i(t)$ 和 $y_i(t)$ 的两个截断函数 $x_{T_i}(t)$ 和 $y_{T_i}(t)$ 分别定义为

$$x_{T_i}(t) = \begin{cases} x_i(t), & |t| < T \\ 0, & |t| \geq T \end{cases}, \quad y_{T_i}(t) = \begin{cases} y_i(t), & |t| < T \\ 0, & |t| \geq T \end{cases} \quad (3.2.1)$$

因为截断函数 $x_{T_i}(t)$ 和 $y_{T_i}(t)$ 都满足绝对可积的条件, 它们的傅里叶变换存在且分别记为 $X_{T_i}(\omega)$ 和 $Y_{T_i}(\omega)$, 两个随机过程样本函数 $x_i(t)$ 和 $y_i(t)$ 的互平均功率为

$$P_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_{T_i}(t) y_{T_i}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{T_i}^*(\omega) Y_{T_i}(\omega) d\omega \quad (3.2.2)$$

相对于所有实验结果的互平均功率是一个随机变量, 因此, 统计平均后的互平均功率是确定值 P_{XY} , 即

$$\begin{aligned}
 P_{XY} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X(t)Y(t)] dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T^*(\omega)Y_T(\omega)] d\omega \quad (3.2.3)
 \end{aligned}$$

仿照功率谱密度的定义, 两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互功率谱密度定义为

$$G_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T^*(\omega)Y_T(\omega)] \quad (3.2.4)$$

则互平均功率为

$$P_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega) d\omega \quad (3.2.5)$$

同理, $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的另一个互功率谱密度为

$$G_{YX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[Y_T^*(\omega) X_T(\omega)] \quad (3.2.6)$$

$X(t)$ 与 $Y(t)$ 的另一个互平均功率为

$$P_{YX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{YX}(\omega) d\omega \quad (3.2.7)$$

比较可得两个互功率谱密度之间的关系为

$$G_{XY}(\omega) = G_{YX}^*(\omega) \quad (3.2.8)$$

注意, $G_{XY}(\omega)$ 和 $G_{YX}(\omega)$ 的定义是不完全相同的, 不要混淆。互功率谱密度也可以简称为互功率谱或互谱密度。其性质如下:

【性质 1】 $G_{XY}(\omega)$ 非偶函数, 满足

$$G_{XY}(\omega) = G_{YX}^*(\omega) = G_{YX}(-\omega) \quad (3.2.9)$$

【性质 2】 $G_{XY}(\omega)$ 的实部为 ω 的偶函数, 即

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[G_{XY}(\omega)] = \operatorname{Re}[G_{XY}(-\omega)] \\ \operatorname{Re}[G_{YX}(\omega)] = \operatorname{Re}[G_{YX}(-\omega)] \end{cases} \quad (3.2.10)$$

式中, $\operatorname{Re}[\cdot]$ 表示实部。

【性质 3】 $G_{XY}(\omega)$ 的虚部为 ω 的奇函数, 即

$$\begin{cases} \operatorname{Im}[G_{XY}(\omega)] = -\operatorname{Im}[G_{XY}(-\omega)] \\ \operatorname{Im}[G_{YX}(\omega)] = -\operatorname{Im}[G_{YX}(-\omega)] \end{cases} \quad (3.2.11)$$

【性质 4】 若 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 正交, 则有

$$G_{XY}(\omega) = G_{YX}(\omega) = 0 \quad (3.2.12)$$

【性质 5】 若 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 不相关, 且分别具有常数均值 m_X 和 m_Y , 则

$$\begin{cases} R_{XY}(t, t + \tau) = m_X m_Y \\ G_{XY}(\omega) = G_{YX}(\omega) = 2\pi m_X m_Y \delta \end{cases} \quad (3.2.13)$$

【性质 6】 $G_{XY}(\omega)$ 与 $G_X(\omega)$ 和 $G_Y(\omega)$ 满足下列关系式:

$$|G_{XY}(\omega)|^2 \leq |G_X(\omega)| |G_Y(\omega)| \quad (3.2.14)$$

3.2.2 互功率谱密度与互相关函数的关系

如同单个实平稳随机过程自相关函数与其功率谱密度之间的关系一样, 两个实平稳随机过程互相关函数与互功率谱密度之间也存在着类似的关系。对于两个实随机过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$, 如果它们是联合平稳的, 则其互功率谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 与其互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 之间的关系为

$$\begin{cases} G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases} \quad (3.2.15)$$

两个随机过程的互功率谱密度与单个随机过程的功率谱密度不同,它不再是频率 ω 的非负、实值偶函数。

【例 3.5】 设两个随机过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 联合平稳,其互相关函数为

$$R_{XY}(\tau) = \begin{cases} 9e^{-3\tau}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

求互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 和 $G_{YX}(\omega)$ 。

解: 由联合平稳过程互相关函数和互谱密度的傅里叶变换对关系,得

$$G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} 9e^{-3\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = 9 \int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)\tau} d\tau = \frac{9}{3+j\omega}$$

可见, $G_{XY}(\omega)$ 是 ω 的复函数。根据互谱密度的性质 1, 得

$$G_{YX}(\omega) = G_{XY}^*(\omega) = \frac{9}{3-j\omega}$$

【例 3.6】 已知平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互谱密度为

$$G_{XY}(\omega) = \begin{cases} (a + jb\omega)/\omega_0, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_0 \end{cases}$$

其中 a, b, ω_0 为实数。求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 。

解: 由式(3.2.15), 得

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{a + jb\omega}{\omega_0} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi\omega_0\tau^2} [(a\omega_0\tau - b)\sin(\omega_0\tau) + b\omega_0\tau\cos(\omega_0\tau)] \end{aligned}$$

3.2.3 平稳复随机过程的功率谱

若复随机过程 $Z(t)$ 是平稳的, 则按照实随机过程的功率谱密度的定义, 将复随机过程的功率谱密度定义为

$$G_Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.2.16)$$

由傅里叶逆变换, 得

$$R_Z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_Z(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.2.17)$$

若复随机过程 $Z_i(t)$ 和 $Z_k(t)$ 联合平稳, 则它们的互功率谱密度为

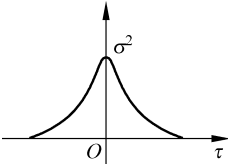
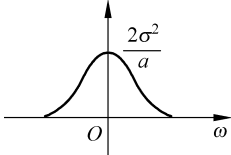
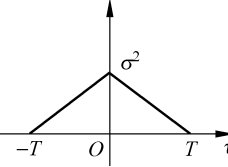
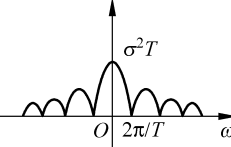
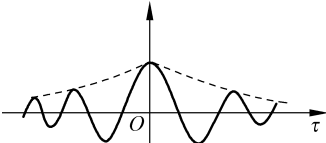
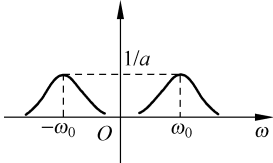
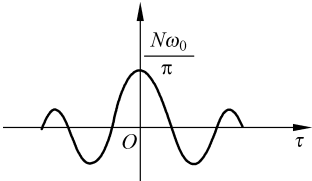
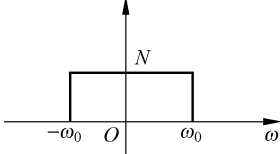
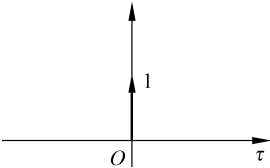
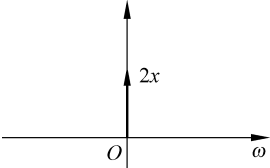
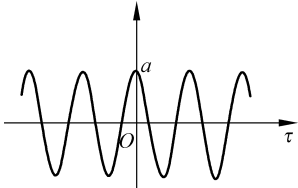
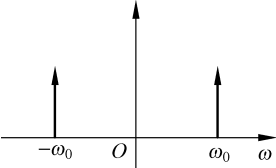
$$G_{Z_i Z_k}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{Z_i Z_k}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.2.18)$$

由傅里叶逆变换, 得

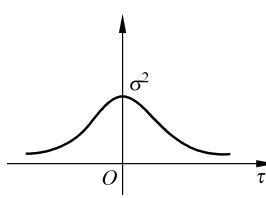
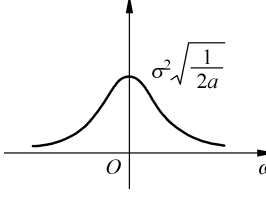
$$R_{Z_i Z_k}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{Z_i Z_k}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.2.19)$$

常见的平稳过程的相关函数 $R_X(\tau)$ 及相应的谱密度 $G_X(\omega)$, 如表 3.1 所示。

表 3.1 平稳过程的相关函数及相应的谱密度

$R_X(\tau)$	$G_X(\omega)$
 $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-a \tau }$	 $s_X(\omega) = \frac{2\sigma^2 a}{a^2 + \omega^2}$
 $R_X(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{ \tau }{T}\right), & \tau \leq T \\ 0, & \tau > T \end{cases}$	 $s_X(\omega) = \frac{4\sigma^2 \sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}$
 $R_X(\tau) = e^{-a \tau } \cos(\omega_0 \tau)$	 $G_X(\omega) = \frac{a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}$
 $R_X(\tau) = N \frac{\sin \omega_0 \tau}{\pi \tau}$	 $G_X(\omega) = \begin{cases} N, & \omega \leq \omega_0 \\ 0, & \omega > \omega_0 \end{cases}$
 $R_X(\tau) = 1$	 $G_X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$
 $R_X(\tau) = a \cos(\omega_0 \tau)$	 $G_X(\omega) = a\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

续表

$R_X(\tau)$	$G_X(\omega)$
 $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\sigma^2 \tau^2}$	 $G_X(\omega) = \sigma^2 \sqrt{\frac{1}{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

3.3 实例与仿真

信号的频谱分析是研究信号特性的重要手段之一,对于确定性信号,可以用傅里叶变换来考查信号的频谱特性,而对于广义平稳随机信号,需要对其进行功率谱分析。

功率谱密度函数反映了随机信号各频率成分的功率分布情况,是随机信号处理中应用很广的技术。实际应用的平稳信号通常是有限长的。因此,只能从有限长的信号中去估计信号的真实功率谱,这就是功率谱估计的问题。本节仅介绍谱估计的经典方法及MATLAB仿真实例。

3.3.1 基于 Blackman-Tukey(B-T 法)的功率谱实现

此方法的理论基础是维纳-辛钦定理。1958年,莱克曼(Blackman)和图基(Tukey)给出了用维纳相关法从抽样数据序列得到功率谱的实现方法。即先由 $x_N(n)$ 估计出自相关函数 $\hat{R}_X(m)$, 然后对 $\hat{R}_X(m)$ 作傅里叶变换得到 $x_N(n)$ 的功率谱 $\hat{G}_X(\omega)$, 并以此作为对 $G_X(\omega)$ 的估计, 即

$$\hat{G}_X(\omega) = \sum_{m=-M}^M \hat{R}_X(m) e^{-j\omega m}, \quad |M| \leq N-1 \quad (3.3.1)$$

因为由这种方法求出的功率谱是通过自相关函数间接得到的,所以称为间接法,又称自相关法或BT法。当 M 较小时,式(3.3.1)的计算量不是很大,因此,该方法是在傅里叶快速变换(FFT)问世之前(即周期图被广泛应用之前)是常用的谱估计方法。

【例 3.7】 设 $x(n) = \exp(j\pi n - j\pi) + \exp(j\omega_0 n - j0.7\pi) + w(n)$ 为一复正弦加白噪声随机过程,其中 $w(n)$ 为零均值白噪声。信噪比 $S/N = 10\text{dB}$ 。要求: ①产生仿真数据; ②估计自相关函数; ③估计经典功率谱。

MATLAB 程序如下:

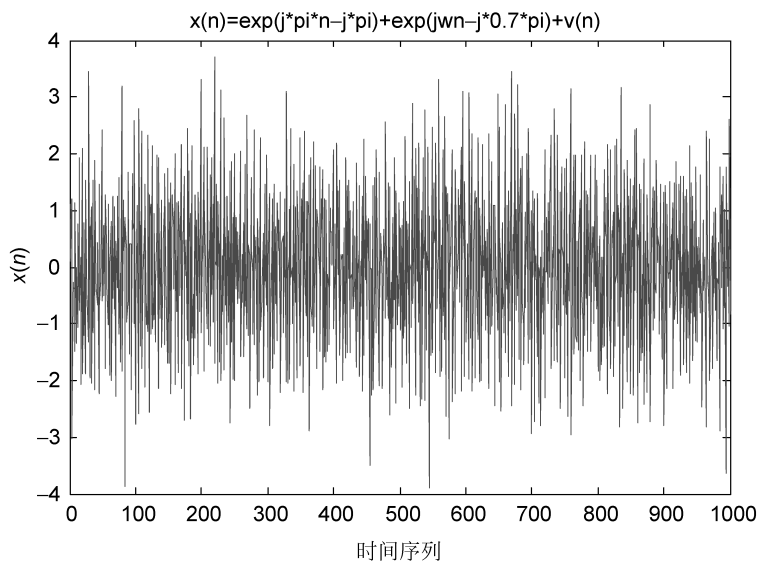
```
产生仿真数据  $N = 1000$  点,  $x(1), x(2), \dots, x(N)$ ,  $\omega = 1.4\pi$ 
clear
var = sqrt(1/exp(1.0));
v = var * randn(1,1000);
n = 1: 1000;
w0 = 1.4 * pi;
```

```

x(n) = exp(j * pi * n - j * pi) + exp(j * w0 * n - j * 0.7 * pi) + v(n);
plot(n,x);
xlabel('时间序列');
ylabel('x(n)');
title('x(n) = exp(j * pi * n - j * pi) + exp(jwn - j * 0.7 * pi) + v(n)');
figure,
% corr
m = -500:500;
[r, lag] = xcorr(x,500,'biased');
hndl = stem(m,r);
set(hndl,'Marker','o');
set(hndl,'MarkerSize',2);
xlabel('时延');
ylabel('自相关 r');
% blackman.pbt
k = 0:1000;
w = (pi/500) * k;
M = k/500;
X = r * (exp(-j * pi/500)).^(m' * k);
magX = abs(X);
figure,
plot(M,10 * log10(magX));
xlabel('角频率');
ylabel('功率谱幅度');
title('BT 谱估计')

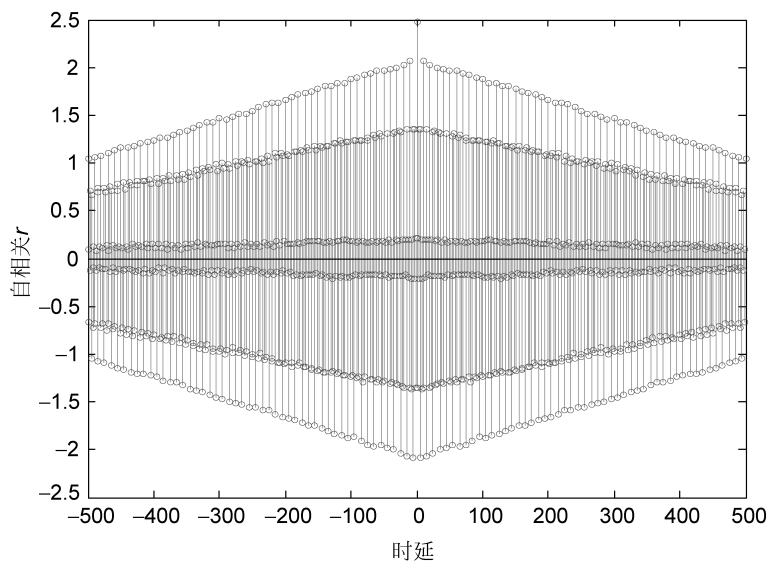
```

仿真结果如图 3.2 所示。



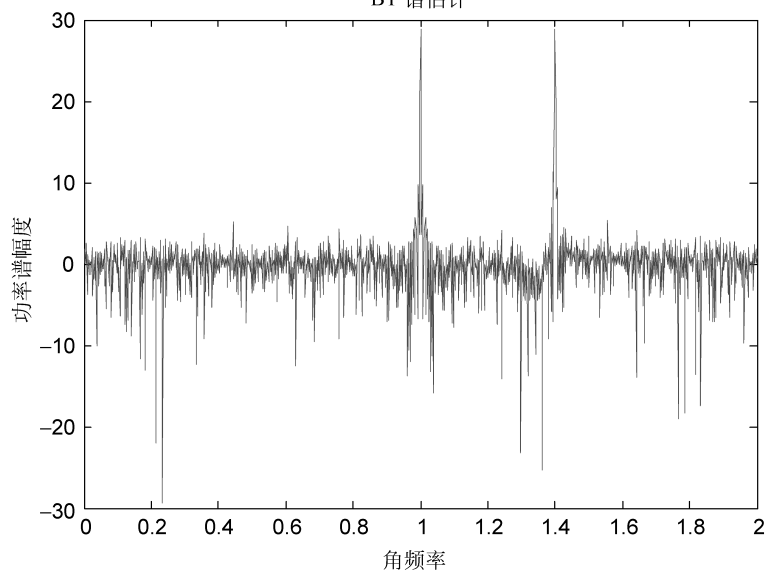
(a) 正弦信号加白噪声

图 3.2 例 3.7 的仿真结果



(b) 信号自相关

BT 谱估计



(c) 信号的功率谱估计

图 3.2 (续)

3.3.2 基于周期图法的功率谱实现

周期图法又称直接法,它是将随机信号 $x(n)$ 的 N 点观察数据 $x_N(n)$ 视为一个能量有限信号,直接作 $x_N(n)$ 的傅里叶变换得 $X_N(\omega)$,然后再取其幅值的平方,并除以 N ,作为对 $x(n)$ 真实的功率谱 $G_X(\omega)$ 的估计。以 $\hat{G}_X(\omega)$ 表示用周期图法估计出的功率谱,则

$$\hat{G}_X(\omega) = \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2 \quad (3.3.2)$$

周期图这一概念是由舒斯特于 1899 年首先提出的。因为它是直接由傅里叶变换得到的,所以人们习惯上称为直接法。在傅里叶变换问世之前,由于该方法的计算量过大而无法运用。自 1965 年傅里叶变换出现后,此方法就成为谱估计中的一个常用的方法。将 ω 在单位圆上等间隔取值,得

$$\hat{G}_X(k) = \frac{1}{N} |X_N(k)|^2 \quad (3.3.3)$$

由于 $X_N(k)$ 可以用 FFT 快速计算,所以 $\hat{G}_X(k)$ 也可方便地求出。由前面的讨论可知,上述谱估计的方法包含了下述假设及步骤:

(1) 把平稳随机信号 $X(n)$ 视为各态遍历的,用其一个样本 $x(n)$ 来代替 $X(n)$,并且仅利用 $x(n)$ 的 N 个观察值 $x_N(n)$ 来估计 $x(n)$ 的功率谱 $G_X(\omega)$ 。

(2) 从记录到的一个连续信号 $x(t)$ 到估计出 $G_X(k)$,还包括了对 $x(t)$ 的离散化(A/D)、必要的预处理(如除去均值、除去信号的趋势项、滤波)等。

BT 法和周期图法所得到的各种功率谱估计都应用了经典的傅里叶分析法,故称为经典谱估计法。这两种谱估计法也称为线性谱估计法,这是因为它们对所得到的数据序列只进行线性运算。BT 法与周期图法本质上是一样的。它们都是将有限长的数据段作为无限长的抽样序列给予开窗截断的结果,BT 法可以看作是对周期图法的一种改进。经典谱估计有一个主要弱点,就是会在频域发生“泄漏”,即功率谱主瓣内的能量泄漏到旁瓣内。这样,弱信号的主瓣很容易被强信号的旁瓣淹没或畸变,造成谱的模糊或失真。此外,函数的选择及观测数据的长度,对谱估计的质量也有很大的影响。

【例 3.8】 分别用周期图法和 BT 法估计两个频率点的余弦信号加白噪声序列的功率谱。

```
clear
% 周期图法
% 301 个数据点
t = 0: 0.001: 0.3;
x = cos(2 * pi * t * 300) + cos(2 * pi * t * 320) + randn(size(t));
subplot(2,2,1)
plot(0:300,x)
xlabel('时间序列')
ylabel('x(t)')
title('余弦信号加高斯白噪声')
grid
% 没有加窗的周期图谱估计
subplot(2,2,2)
periodogram(x,[],512,1000);
xlabel('频率(kHz)')
ylabel('功率谱(dB)')
title('周期图谱估计')
% 加窗的周期图谱估计
subplot(2,2,3)
window = hann(301);
periodogram(x>window,512,1000);
xlabel('频率(kHz)')
ylabel('功率谱(dB)')
title('汉宁周期图谱估计')
% 相关函数法
R = xcorr(x)/15000;
Pw = fft(R);
```

```

subplot(2,2,4);
f = (0: length(Pw) - 1) * 1000/length(Pw);
plot(f,10 * log10(abs(Pw)));
title('BT 功率谱估计')
xlabel('频率 (Hz)')
ylabel('功率谱 (dB)')
axis([0 500 -50 0]);
grid

```

仿真结果如图 3.3 所示。

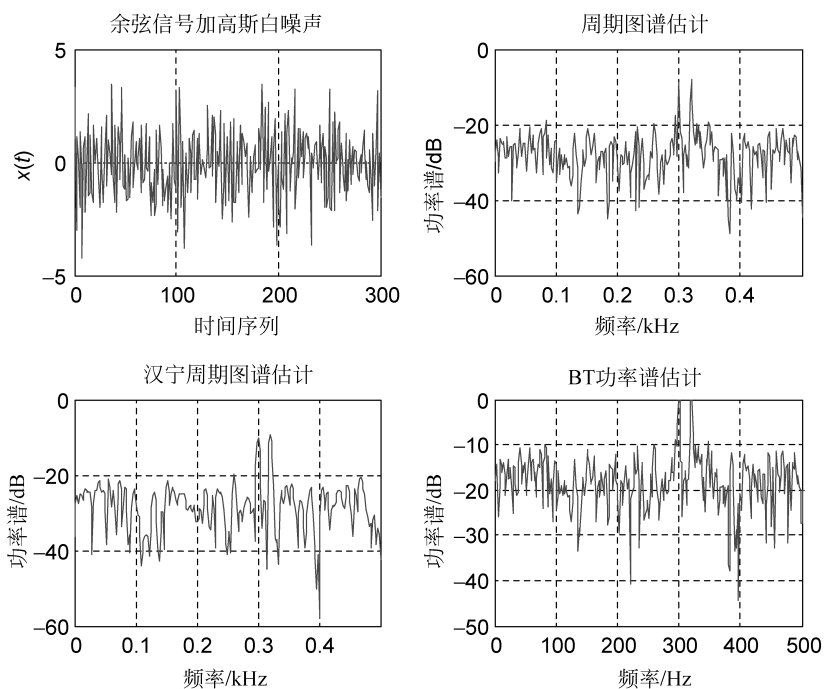


图 3.3 例 3.8 的功率谱估计对比

【例 3.9】 求受白噪声干扰的正弦信号和白噪声信号的自相关并比较。

MATLAB 程序如下：

```

clear
N = 1000;
n = 0: N - 1;
Fs = 500;
t = n/Fs;
Lag = 100;
x = sin(2 * pi * 10 * t) + 0.6 * randn(1, length(t));
[c, lags] = xcorr(x, Lag, 'unbiased');
% 受白噪声干扰的正弦信号
subplot(221);
plot(t, x)
xlabel('时间')
ylabel('x(t)')
title('原信号 x')
grid
% 受白噪声干扰的正弦信号的自相关

```

```

subplot(222);
plot(lags/Fs,c);
xlabel('时延');
ylabel('自相关函数');
title('自相关');
grid
x1 = randn(1,length(x));
[c,lags] = xcorr(x1,Lag,'unbiased');
% 白噪声信号
subplot(223);
plot(t,x1);
xlabel('t');
ylabel('x1(t)');
title('白噪声');
grid
% 白噪声信号的自相关
subplot(224);
plot(lags/Fs,c);
xlabel('时延');
ylabel('自相关函数');
title('自相关');
grid

```

仿真结果如图 3.4 所示。

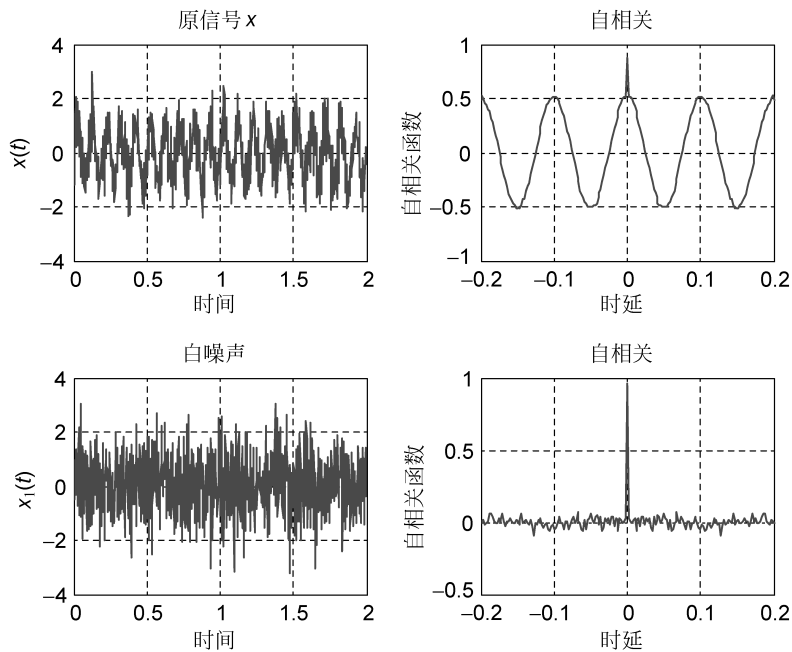


图 3.4 例 3.9 的仿真结果

【例 3.10】两周期信号

$$x_1(t) = \sin(2\pi ft), \quad x_2(t) = 0.5\sin(2\pi ft + \pi)$$

式中, $f=10\text{Hz}$, 求互相关函数 $R_{x_1x_2}(\tau)$ 。

MATLAB 程序如下:

```

clear
N = 1000;
n = 0: N - 1;
Fs = 500;
t = n/Fs;
Lag = 200;
x = sin(2 * pi * 10 * t);
y = 0.5 * sin(2 * pi * 10 * t + pi);
[c, lags] = xcorr(x, y, Lag, 'unbiased');
% 周期信号 x1(t)
subplot(311);
plot(t, x, 'r');
xlabel('时间');
ylabel('x1(t)');
grid;
title('原信号');
% 周期信号 x2(t)
subplot(312);
plot(t, y, 'b');
xlabel('时间');
ylabel('x2(t)');
title('原信号');
grid;
% 互相关函数
subplot(313);
plot(lags/Fs, c, 'black');
xlabel('时延');
ylabel('互相关函数');
title('互相关');
grid;

```

仿真结果如图 3.5 所示。

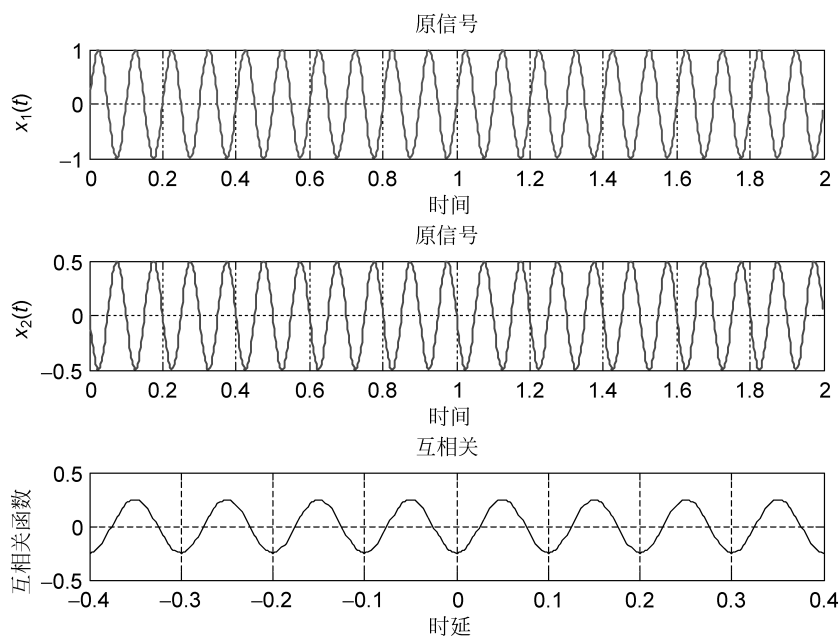


图 3.5 例 3.10 的结果比较

习题三

3.1 下列有理函数是否为功率谱密度的正确表达式? 为什么?

$$\begin{array}{ll}
 (1) \frac{\omega^2}{\omega^6 + 3\omega^2 + 3} & (2) \exp[-(\omega - 1)^2] \\
 (3) \frac{\omega^2}{\omega^4 - 1} - \delta(\omega) & (4) \frac{\omega^4}{1 + \omega^2 + j\omega^6} \\
 (5) \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 4\omega^2 + 3} & (6) \frac{e^{-j\omega^2}}{\omega^2 + 2}
 \end{array}$$

3.2 对题 3.1 中的正确功率谱密度表达式, 计算其自相关函数和均方值。

3.3 求正弦随相信号 $X(t) = \cos(\omega_0 t + \Phi)$ 的功率谱密度。式中, ω_0 为常数, Φ 为 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。

3.4 求 $Y(t) = X(t) \cos(\omega_0 t + \Phi)$ 的自相关函数及功率谱密度。式中, $X(t)$ 为平稳随机过程, Φ 为 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, ω_0 为常数, $X(t)$ 与 Φ 相互独立。

3.5 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$, 求 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$, 并作图。

3.6 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 4e^{-|\tau|} \cos\omega_0 \tau + \cos 3\omega_0 \tau$, 求 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$, 并作图。

3.7 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T}, & -T \leq \tau \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$, 并作图。

3.8 设 $X(t)$ 为平稳随机过程, 试用 $X(t)$ 的功率谱表示 $Y(t) = A + BX(t)$ 的功率谱密度。式中, A 和 B 为实常数。

3.9 求自相关函数为 $R_X(\tau) = p \cos^4(\omega_0 \tau)$ 的随机过程的功率谱密度, 并求其平均功率。式中, p, ω_0 为常数。

3.10 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$, 并作图。

3.11 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 8\delta(\omega) + 20 \times \left(1 - \frac{|\omega|}{10}\right), & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 。

3.12 设平稳随机过程是实过程, 求证该过程的自相关函数与功率谱密度都是偶函数。

3.13 若系统的输入过程 $X(t)$ 为平稳过程, 系统的输出为平稳随机过程 $Y(t) = X(t) + X(t - \tau)$, 如图 3.6 所示。证明 $Y(t)$ 的功率谱密度为 $G_Y(\omega) = 2G_X(\omega)(1 + \cos\omega\tau)$ 。

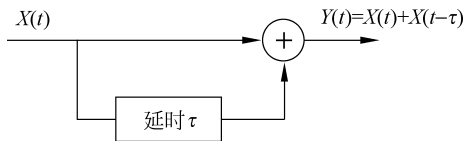


图 3.6 习题 3.13 图

3.14 已知平稳随机过程

$$X(t) = \sum_{i=1}^N a_i Y_i(t)$$

式中, a_i 是一组常实数, 而随机过程 $Y_i(t)$ 皆为平稳过程且相互正交。证明:

$$G_X(\omega) = \sum_{i=1}^N a_i^2 G_{Y_i}(\omega)$$

3.15 设平稳随机过程 $X(t) = a \cos(\Theta t + \Phi)$, 式中, a 为常数, Φ 是在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量; Θ 也是随机变量, 并且 $f_{\Theta}(\omega) = f_{\Theta}(-\omega)$, Φ 与 Θ 相互独立。求证 $X(t)$ 的功率谱密度为 $G_X(\omega) = a^2 \pi f_{\Theta}(\omega)$ 。

3.16 随机过程为

$$W(t) = AX(t) + BY(t)$$

式中, A 和 B 为实常数, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是宽联合平稳过程。

- (1) 求 $W(t)$ 的功率谱密度 $G_W(\omega)$;
- (2) 如果 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不相关, 求 $G_W(\omega)$;
- (3) 求互谱密度 $G_{XW}(\omega)$ 和 $G_{YW}(\omega)$ 。

3.17 设随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 联合平稳, 求证:

$$\operatorname{Re}[G_{XY}(\omega)] = \operatorname{Re}[G_{YX}(\omega)]; \quad \operatorname{Im}[G_{XY}(\omega)] = -\operatorname{Im}[G_{YX}(\omega)]$$

3.18 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个不相关的平稳随机过程, 均值 m_X, m_Y 都不为 0, 定义 $Z(t) = X(t) + Y(t)$, 求互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 及 $G_{XZ}(\omega)$ 。

3.19 已知平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 相互独立, 功率谱密度分别为

$$G_X(\omega) = \frac{16}{\omega^2 + 16}, \quad G_Y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 16}$$

令新的随机过程

$$\begin{cases} Z(t) = X(t) + Y(t) \\ V(t) = X(t) - Y(t) \end{cases}$$

- (1) 证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 联合平稳;
- (2) 求 $Z(t)$ 的功率谱密度 $G_Z(\omega)$;
- (3) 求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互谱密度 $G_{XY}(\omega)$;
- (4) 求 $X(t)$ 和 $Z(t)$ 的互相关函数 $R_{XZ}(\tau)$;
- (5) 求 $V(t)$ 和 $Z(t)$ 的互相关函数 $R_{VZ}(\tau)$ 。

3.20 已知可微平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 1}$$

(1) 证明过程 $X(t)$ 和导数 $Y(t) = X'(t)$ 联合平稳;

(2) 求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 和互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 。

3.21 已知可微平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 2\exp(-\tau^2)$, 其导数为 $Y(t) = X'(t)$ 。求互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 和功率谱密度 $G_Y(\omega)$ 。

3.22 已知随机过程 $W(t) = X(t)\cos\omega_0 t + Y(t)\sin\omega_0 t$ 。其中, 随机过程 $X(t), Y(t)$ 联合平稳, ω_0 为常数。

(1) 讨论 $X(t), Y(t)$ 及其均值和自相关函数在什么条件下, 才能使随机过程 $W(t)$ 宽平稳。

(2) 利用(1)的结论, 用功率谱密度 $G_X(\omega), G_Y(\omega), G_{XY}(\omega)$ 表示 $W(t)$ 的功率谱密度 $G_W(\omega)$ 。

(3) 若 $X(t), Y(t)$ 互不相关, 求 $W(t)$ 的功率谱密度 $G_W(\omega)$ 。

3.23 已知平稳随机过程 $X(t), Y(t)$ 互不相关, 它们的均值 m_X, m_Y 皆不为 0。令新的随机过程 $Z(t) = X(t) + Y(t)$, 求互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 和 $G_{XZ}(\omega)$ 。

3.24 已知可微平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \frac{4\alpha^2\beta}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

式中, α, β 皆为正实常数, 求随机过程 $X(t)$ 和其导数 $Y(t) = X'(t)$ 的互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 。

3.25 已知随机过程 $X(t), Y(t)$ 为

$$\begin{cases} X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Theta) \\ Y(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \Theta) \end{cases}$$

式中 a, ω_0 为实正常数; $A(t)$ 是具有恒定均值 m_A 的随机过程; Θ 为与 $A(t)$ 独立的随机变量。

(1) 运用互谱密度的定义式

$$G_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T^*(\omega) Y_T(\omega)]$$

证明: 无论随机变量 Θ 的概率密度形式如何, 总有

$$G_{XY}(\omega) = \frac{\pi a m_A}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

(2) 证明: $X(t), Y(t)$ 的互相关函数为

$$R_{XY}(t, t + \tau) = \frac{a m_A}{2} \{ \cos\omega_0 \tau + E[\cos(2\theta)] \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) - E[\sin(2\theta)] \sin(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) \}$$

(3) 求互相关函数 $R_{XY}(t, t + \tau)$ 的时间平均 $\langle R_{XY}(t, t + \tau) \rangle_t$ 。

3.26 设一个线性系统由微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = ax(t)$$

给出, 式中 a, b 为常数; $x(t), y(t)$ 分别为输入平稳过程 $X(t)$ 和输出平稳过程 $Y(t)$ 的样

本函数,且输入过程均值为0,初始条件为0, $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$,求输出的谱密度 $G_Y(\omega)$ 和相关函数 $R_Y(\tau)$ 。

3.27 设一个线性系统输入平稳过程 $X(t)$,其相关函数为 $R_X(\tau) = \beta e^{-a|\tau|}$ 。若输入与输出过程的样本函数满足微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = \frac{dx(t)}{dt} + ax(t)$$

式中, a, b 为常数。求输出过程 $Y(t)$ 的谱密度 $G_Y(\omega)$ 和相关函数 $R_Y(\tau)$ 。

3.28 设有如图 3.7 所示的电路系统,输入零均值的平稳过程 $X(t)$,且相关函数为 $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$ 。求 $Y_1(t), Y_2(t)$ 的谱密度及两者的互谱密度。

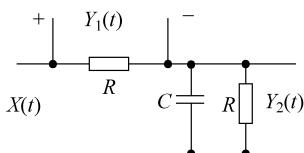


图 3.7 习题 3.28 图

3.29 设 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 是均值为 0 的正交增量过程, $E[|X(t_2) - X(t_1)|^2] = |t_2 - t_1|$, 若

$$Y(t) = X(t) - X(t-1)$$

- (1) 证明 $\{Y(t), -\infty < t < \infty\}$ 是平稳过程;
- (2) 求 $\{Y(t)\}$ 的功率谱密度。