

动态系统建模——状态空间方程

本章将介绍使用状态空间方程(State Space Model)描述系统数学模型的方法。状态空间方程是现代控制理论的基础,它以矩阵的形式表达系统状态变量、输入及输出之间的关系。它可以描述和处理多输入多输出(Multiple Input Multiple Output, MIMO)的系统。目前流行的一些算法,如模型预测控制、卡尔曼滤波器及最优化控制,都是在状态空间方程的表达形式基础上发展而来的。本章的学习目标为:

- 掌握使用状态空间方程建立动态系统数学模型的流程。
- 理解状态空间方程与传递函数的关系。
- 掌握使用矩阵的特征值与特征向量解耦动态系统的方法。
- 掌握一维与二维相平面、相轨迹的绘制方法。
- 熟练使用相平面、相轨迹的方法分析动态系统平衡点的类型。
- 理解动态系统平衡点类型与状态矩阵特征值之间的关系。

3.1 状态空间方程

3.1.1 状态空间方程表达式

从一个例子入手分析,如图 3.1.1(a)所示的弹簧质量阻尼系统,在 2.1.2 节中曾经分析过,它的动态微分方程为

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t) \quad (3.1.1)$$

其中, $x(t)$ 是位移,方向向右; m 是质量; b 是阻尼系数; k 是弹簧系数; $f(t)$ 是外力。

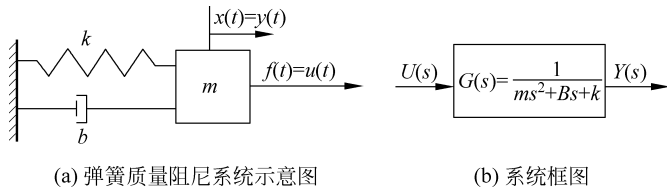


图 3.1.1 弹簧质量阻尼系统与框图

令此系统的输入等于外力,即 $u(t) = f(t)$, 系统的输出等于位移,即 $y(t) = x(t)$ 。第 2 章介绍了经典控制理论中使用传递函数来描述系统的方法,对式(3.1.1)等号两边分别进行

拉普拉斯变换,并将 $u(t)=f(t)$ 、 $y(t)=x(t)$ 代入进行调整,同时假设零初始条件 $x(0)=\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=0$,可以得到系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{ms^2+bs+k} \quad (3.1.2)$$

式(3.1.2)所对应的系统框图如图 3.1.1(b)所示。

对于同样的系统,在现代控制理论中则会使用状态空间方程的表达方式。状态空间方程是一个集合,它包含了系统的输入、输出及状态变量,并把它们用一系列的一阶微分方程表达出来。对于本例中的二阶系统,为了将其写成状态空间方程,需要选取合适的状态变量(State Variables),才能使二阶系统转化为一系列的一阶系统。根据这个要求,选取两个状态变量 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$,其中

$$z_1(t)=x(t) \quad (3.1.3)$$

$$z_2(t)=\frac{dz_1(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt} \quad (3.1.4)$$

根据式(3.1.4),取 $z_2(t)$ 对时间的导数,并将式(3.1.1)和 $u(t)=f(t)$ 代入其中,可得

$$\begin{aligned} \frac{dz_2(t)}{dt} &= \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{1}{m} \left(f(t) - b \frac{dx(t)}{dt} - kx(t) \right) \\ &= \frac{1}{m} u(t) - \frac{b}{m} z_2(t) - \frac{k}{m} z_1(t) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

现在将式(3.1.3)和式(3.1.5)写成紧凑的矩阵表达形式,可得

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \quad (3.1.6)$$

而系统的输出 $y(t)=x(t)$ 也可以写成矩阵形式,即

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + [0][u(t)] \quad (3.1.7)$$

式(3.1.6)和式(3.1.7)是图 3.1.1 中弹簧质量阻尼系统的状态空间方程。

上述形式可推广并得到状态空间方程的一般形式,即

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (3.1.8a)$$

$$y(t) = \mathbf{C}z(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (3.1.8b)$$

其中

$z(t)$ 是状态变量,是一个 n 维向量, $z(t)=[z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^T$;

$y(t)$ 是系统输出,是一个 m 维向量, $y(t)=[y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$;

$u(t)$ 是系统输入,是一个 p 维向量, $u(t)=[u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)]^T$ 。

这说明,当使用状态空间方程来描述系统时,有 n 个状态变量、 m 个输出和 p 个输入。它可以表达多状态、多输出、多输入的系统。其中,矩阵 $\mathbf{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵,表示系统状态变量之间的关系,称为状态矩阵或者系统矩阵。矩阵 $\mathbf{B}$ 是 $n \times p$ 矩阵,表示输入对状态变量的影响,称为输入矩阵或者控制矩阵。矩阵 $\mathbf{C}$ 是 $m \times n$ 矩阵,表示系统的输出与系统状态变量之

间的关系,称为输出矩阵。矩阵 D 是 $m \times p$ 矩阵,表示系统的输入直接作用在系统输出的部分,称为直接传递矩阵。状态空间方程符号说明见表 3.1.1。

表 3.1.1 状态空间方程符号说明

符 号	名 称	维 度
$\mathbf{z}(t)$	状态变量	$n \times 1$
$\mathbf{y}(t)$	系统输出	$m \times 1$
$\mathbf{u}(t)$	系统输入	$p \times 1$
$\mathbf{A}$	状态矩阵	$n \times n$
$\mathbf{B}$	输入矩阵	$n \times p$
$\mathbf{C}$	输出矩阵	$m \times n$
$\mathbf{D}$	直接传递矩阵	$m \times p$

以上述弹簧质量阻尼系统为例,参考式(3.1.6)和式(3.1.7),其状态变量 $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$, 是 $n=2$ 维向量。输出 $\mathbf{y}(t)=x(t)$, 是 $m=1$ 维向量。输入 $\mathbf{u}(t)=f(t)$, 是 $p=1$

维向量。因此,对应的状态矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix}$, 是一个 $n \times n = 2 \times 2$ 的矩阵。输入矩阵

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$, 是一个 $n \times p = 2 \times 1$ 的矩阵。输出矩阵 $\mathbf{C} = [1 \ 0]$, 是一个 $m \times n = 1 \times 2$ 的矩

阵。直接传递矩阵 $\mathbf{D}=[0]$, 是一个 $m \times p = 1 \times 1$ 的矩阵。因为它只有一个输入和一个输出,所以本系统属于单输入单输出(Single Input Single Output, SISO)系统。

下面请看一个多输入多输出(Multiple Inputs Multiple Outputs, MIMO)系统的例子。

根据图 3.1.2 所示的电路网络,列出其状态空间方程表达式。其中,系统有两个输入 $\mathbf{u}(t)=[e_1(t), e_2(t)]^T$ 和两个输出 $\mathbf{y}(t)=[i_1(t), e_{R_3}(t)]^T$ 。

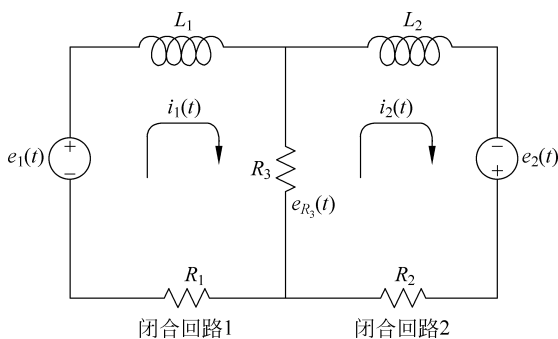


图 3.1.2 多输入多输出电路系统

若要建立上述系统的状态空间方程,首先要掌握它的动态微分方程。这个系统可以考虑成两个闭合回路,在每一个闭合回路里面使用基尔霍夫电压定律。可以得到

闭合回路 1

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t)R_1 + e_{R_3}(t) = e_1(t) \quad (3.1.9a)$$

闭合回路 2

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t)R_2 - e_{R_3}(t) = e_2(t) \quad (3.1.9b)$$

其中

$$e_{R_3}(t) = (i_1(t) - i_2(t))R_3 \quad (3.1.9c)$$

将式(3.1.9c)代入式(3.1.9a)和式(3.1.9b)并进行调整,得到

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t)(R_1 + R_3) - i_2(t)R_3 = e_1(t) \quad (3.1.9d)$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t)(R_2 + R_3) - i_1(t)R_3 = e_2(t) \quad (3.1.9e)$$

选取系统的状态变量 $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t)]^T$, 其中

$$z_1(t) = i_1(t) \quad (3.1.10a)$$

$$z_2(t) = i_2(t) \quad (3.1.10b)$$

将式(3.1.10a)、式(3.1.10b)代入式(3.1.9d)和式(3.1.9e), 调整后可得

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = -\left(\frac{R_1 + R_3}{L_1}\right)z_1(t) + \frac{R_3}{L_1}z_2(t) + \frac{1}{L_1}e_1(t) \quad (3.1.11a)$$

$$\frac{dz_2(t)}{dt} = \frac{R_3}{L_2}z_1(t) - \left(\frac{R_2 + R_3}{L_2}\right)z_2(t) + \frac{1}{L_2}e_2(t) \quad (3.1.11b)$$

将式(3.1.11a)、式(3.1.11b)写成紧凑的矩阵形式, 得到

$$\begin{bmatrix} \frac{dz_1(t)}{dt} \\ \frac{dz_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{R_1 + R_3}{L_1}\right) & \frac{R_3}{L_1} \\ \frac{R_3}{L_2} & -\left(\frac{R_2 + R_3}{L_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.1.12)$$

系统输出 $\mathbf{y}(t) = [i_1(t), e_{R_3}(t)]^T$, 可以表达为

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ e_{R_3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_3 & -R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.1.13)$$

将式(3.1.12)和式(3.1.13)写成一般形式, 可以得到系统的状态空间方程, 即

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{z}(t) = [i_1(t), i_2(t)]^T; \mathbf{y}(t) = [i_1(t), e_{R_3}(t)]^T; \mathbf{u}(t) = [e_1(t), e_2(t)]^T;$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{R_1 + R_3}{L_1}\right) & \frac{R_3}{L_1} \\ \frac{R_3}{L_2} & -\left(\frac{R_2 + R_3}{L_2}\right) \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_3 & -R_3 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

3.1.2 状态空间方程与传递函数的关系

如 3.1.1 节所分析的,一个单输入单输出系统可以写成式(3.1.2)的传递函数形式和式(3.1.8a)、式(3.1.8b)的状态空间方程表达式,下面我们来讨论这两种形式之间的联系。

对式(3.1.8a)、式(3.1.8b)的等式两边进行拉普拉斯变换,得到

$$\mathcal{L}\left[\frac{dz(t)}{dt}\right] = \mathcal{L}[\mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}u(t)] \quad (3.1.14a)$$

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}(t)] = \mathcal{L}[\mathbf{C}z(t) + \mathbf{D}u(t)] \quad (3.1.14b)$$

考虑零初始状态, $z_1(0) = z_2(0) = 0$, 式(3.1.14a)、式(3.1.14b)可以整理为

$$s\mathbf{Z}(s) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.1.15a)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{Z}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (3.1.15b)$$

其中, $\mathbf{Z}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{z}(t)]$, $\mathbf{Y}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{y}(t)]$, $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ 。式(3.1.15a)调整后可得

$$\mathbf{Z}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.1.16)$$

其中, $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 是 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 的逆矩阵; $\mathbf{I}$ 是 $n \times n$ 单位矩阵, $\mathbf{I}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

将式(3.1.16)代入式(3.1.15b)中并调整,可得

$$\mathbf{Y}(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{U}(s) \quad (3.1.17)$$

因此,系统的传递函数可以表达为

$$G(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.1.18)$$

考虑图 3.1.1 的弹簧质量阻尼系统,其中 $\mathbf{D} = 0$, 根据矩阵求逆公式 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^*}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$, 代入式(3.1.18)可得

$$G(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \frac{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^* \mathbf{B}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (3.1.19)$$

其中, $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^*$ 是 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 的伴随矩阵, $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ 是 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 的行列式。

观察式(3.1.19),如果令 $G(s)$ 的分母部分为零,即 $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$, 得出的 s 值有两个含义: 第一,从传递函数的角度考虑,它是传递函数的极点; 第二,从状态矩阵的角度考虑,它是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值(令 $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ 是求矩阵 $\mathbf{A}$ 特征值的公式,见 3.2.1 节)。在 2.3 节中曾经介绍过,通过分析传递函数极点可以判断系统的表现。而当把系统写成状态空间方程之后,状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值即为其相对应的传递函数 $G(s)$ 的极点。因此,通过分析矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值也可以判断系统的表现。

状态空间方程系统建模内容请扫描此二维码观看。



3.2 相平面数学基础

式(3.1.8a)、式(3.1.8b)是状态空间方程的一般表达式,求解矩阵形式的微分方程可以掌握系统状态变量随时间的变化。式(3.1.8a)的解为

$$\mathbf{z}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.2.1)$$

关于求解过程本书不做详细推导,只给出结论作为参考,有兴趣的读者可以参考其他书籍。观察式(3.2.1)可以发现 $\mathbf{z}(t)$ 由两部分组成,第一部分只和系统的初始条件 $\mathbf{z}(t_0)$ 相关,而第二部分是一个卷积,与系统的输入相关。式(3.2.1)包含了卷积,而且指数部分还出现矩阵,因此增加了分析求解的难度和复杂程度。在第2章中引入了拉普拉斯变换和传递函数来绕开求解微分方程和卷积,从而简化了系统的分析。而对于状态空间方程,使用相平面与相轨迹的方法可以快速有效地分析系统。在讲解这一数学工具之前,首先回顾线性代数中的一个重要概念——矩阵的特征值与特征向量。

3.2.1 矩阵的特征值与特征向量

在线性代数中,对于一个给定的方阵 $\mathbf{A}$,它的特征向量 $\mathbf{v}$ 经过矩阵 $\mathbf{A}$ 线性变换的作用之后,得到的新的向量仍然与原来的 $\mathbf{v}$ 保持在同一条直线上,但其长度或方向也许会改变。即

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (3.2.2)$$

其中, λ 为标量,即特征向量的长度在矩阵 $\mathbf{A}$ 线性变换下缩放的比例,称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值。

首先来看线性变换,假设有一个二维矩阵 $\mathbf{A}$ 与一个向量 $\mathbf{v}_a$,其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

用矩阵 $\mathbf{A}$ 左乘以 $\mathbf{v}_a$,根据矩阵的乘法法则,可得

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 \\ 4 \times 1 + (-2) \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

从 $\mathbf{v}_a$ 到 $\mathbf{A} \mathbf{v}_a$ 的过程称为线性变换,如图 3.2.1(a) 所示。向量 $\mathbf{v}_a$ 经过矩阵 $\mathbf{A}$ 线性变换后,长度发生了改变,而且不再和原向量保持在一条直线上。

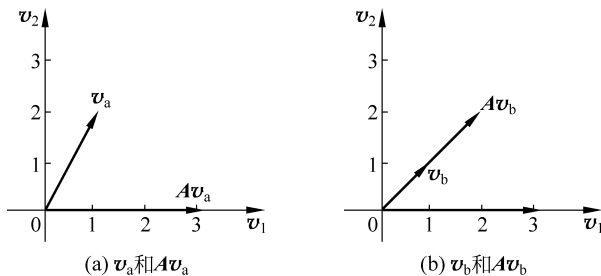


图 3.2.1 向量的线性变换

再来考虑另一个向量 $\mathbf{v}_b = [1, 1]^T$, 对它进行同样的通过矩阵 $\mathbf{A}$ 的线性变换, 可得

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{v}_b \quad (3.2.5)$$

式(3.2.5)说明通过矩阵 $\mathbf{A}$ 线性变换后, $\mathbf{A}\mathbf{v}_b = \lambda \mathbf{v}_b = 2\mathbf{v}_b$ 。如图 3.2.1(b)所示, 经过变换后的新向量与原向量在一条直线上, 但是长度发生了改变。根据定义, $\mathbf{v}_b$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量, 缩放比例 $\lambda = 2$ 则是矩阵 $\mathbf{A}$ 对应于特征向量 $\mathbf{v}_b$ 的特征值。

现在以矩阵 $\mathbf{A}$ 为例, 说明如何求解特征值与特征向量。根据式(3.2.2), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} &= 0 \\ \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

其中, $\mathbf{I}$ 为单位矩阵, 维度与 $\mathbf{A}$ 相同。根据矩阵理论, 如果式(3.2.6)有非零解, 则矩阵 $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ 的行列式必须为零, 即

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (3.2.7)$$

将 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ 代入式(3.2.7), 可得

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.8a)$$

即

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(-2-\lambda) - 1 \times 4 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.8b)$$

式(3.2.8b)称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程(Characteristic Equation)。可以得到矩阵 $\mathbf{A}$ 的两个特征值:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= -3 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

将式(3.2.9)代入式(3.2.6)即可得到不同特征值所对应的特征向量。例如当 $\lambda_1 = 2$ 时, 对应的特征向量为 $\mathbf{v}_1 = [v_{11}, v_{12}]^T$, 根据式(3.2.6), 可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ 4 & -2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} -v_{11} + v_{12} = 0 \\ 4v_{11} - 4v_{12} = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow v_{11} &= v_{12} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

式(3.2.10)说明特征向量 $\mathbf{v}_1$ 存在于 $v_{11} = v_{12}$ 这一条直线上。可以任意取其中的一组, 例如选取 $v_{11} = v_{12} = 1$, 那么矩阵 $\mathbf{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

$\mathbf{v}_1$ 通过矩阵 $\mathbf{A}$ 的线性变换后得到 $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = [2, 2]^T = 2\mathbf{v}_1$, 如图 3.2.1(b)所示。

同理, 可以计算 $\mathbf{v}_2$, 即特征值 $\lambda_2 = -3$ 时的特征向量, 可得

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 1+3 & 1 \\ 4 & -2+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \\
 \begin{cases} 4v_{21} + v_{22} = 0 \\ 4v_{21} + v_{22} = 0 \end{cases} \\
 \Rightarrow v_{21} &= -\frac{1}{4}v_{22}
 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

选取 $v_{21}=0.5, v_{22}=-2$ 。那么, 矩阵 $\mathbf{A}$ 对应于特征值 $\lambda_2=-3$ 的特征向量为

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{3.2.13}$$

$$\text{此时, } \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 6 \end{bmatrix} = -3\mathbf{v}_2。$$

3.2.2 特征值与特征向量的应用——线性方程组解耦

特征值与特征向量的一个重要应用是将矩阵转化成对角矩阵, 从而达到解耦 (Decouple) 的效果。解耦即解除耦合, 而耦合是指一个系统里面的两个或以上的状态变量存在相互影响、相互关联的作用。考虑一个包含两个状态变量的系统, 它的微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = z_1(t) + z_2(t) \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = 4z_1(t) - z_2(t) \end{cases} \tag{3.2.14}$$

式(3.2.14)说明, 系统状态变量 $z_1(t)$ 的变化率 $\frac{dz_1(t)}{dt}$ 除了与自身相关之外, 还与 $z_2(t)$ 相关。而 $z_2(t)$ 的变化率 $\frac{dz_2(t)}{dt}$ 同时是 $z_2(t)$ 和 $z_1(t)$ 的函数, 这样的两个状态变量就是耦合的。对于耦合系统, 分析单个状态变量的变化需要同时考虑两个变量, 这是不容易做到的。将上述系统写成紧凑的状态空间方程, 得到

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) \tag{3.2.15}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

若要解耦这个系统, 首先需要定义过渡矩阵 (Transition Matrix):

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \tag{3.2.16}$$

其中, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 所对应的两个特征向量。用矩阵 $\mathbf{A}$ 左乘以过渡矩阵, 可得

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} & \mathbf{A} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{3.2.17}$$

$$\text{因为 } \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \text{ 是矩阵 } \mathbf{A} \text{ 的特征向量, 所以 } \mathbf{A} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}, \mathbf{A} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix},$$

其中, λ_1 和 λ_2 是特征向量 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 所对应的特征值。式(3.2.17)可以写成

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{11} & \mathbf{v}_{21} \\ \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{v}_{11} & \lambda_2 \mathbf{v}_{21} \\ \lambda_1 \mathbf{v}_{12} & \lambda_2 \mathbf{v}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{11} & \mathbf{v}_{21} \\ \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{D} \quad (3.2.18)$$

其中, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 是一个特征值位于对角线上的对角矩阵。现在对式(3.2.18)等号两边同时左乘以 $\mathbf{P}^{-1}$, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D} \\ \Rightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} &= \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

式(3.2.19)通过过渡矩阵 $\mathbf{P}$ 将原矩阵 $\mathbf{A}$ 对角化。

下面定义一组新的状态变量 $\bar{\mathbf{z}}(t)$, 令

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\bar{\mathbf{z}}(t) \quad (3.2.20)$$

将式(3.2.20)代入式(3.2.15), 可得

$$\mathbf{P} \frac{d\bar{\mathbf{z}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{P}\bar{\mathbf{z}}(t) \quad (3.2.21)$$

式(3.2.21)等号两边同时左乘以 $\mathbf{P}^{-1}$, 得到

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} \frac{d\bar{\mathbf{z}}(t)}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\bar{\mathbf{z}}(t) \quad (3.2.22)$$

其中, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I}$ 是单位矩阵。根据式(3.2.19), $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ 。可得

$$\frac{d\bar{\mathbf{z}}(t)}{dt} = \mathbf{D}\bar{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}(t) \quad (3.2.23)$$

即

$$\begin{cases} \frac{d\bar{z}_1(t)}{dt} = \lambda_1 \bar{z}_1(t) \\ \frac{d\bar{z}_2(t)}{dt} = \lambda_2 \bar{z}_2(t) \end{cases} \quad (3.2.24)$$

式(3.2.24)说明新的状态变量 $\bar{z}_1(t)$ 和 $\bar{z}_2(t)$ 的变化率只和自身相关, 因此通过这样的一个变换之后, 原来系统中的耦合关系就不再存在。而求解式(3.2.24)则非常容易, 根据微分方程的求解公式可得

$$\begin{cases} \bar{z}_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \bar{z}_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (3.2.25)$$

其中, C_1 和 C_2 是常数, 与初始条件有关。

我们之前已经计算过了矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值(参考式(3.2.9))及特征向量(参考式(3.2.11)和式(3.2.13)), 代入式(3.2.25)可得

$$\begin{cases} \bar{z}_1(t) = C_1 e^{2t} \\ \bar{z}_2(t) = C_2 e^{-3t} \end{cases} \quad (3.2.26)$$

此时, 根据式(3.2.20), 可以得到系统的原状态变量 $\mathbf{z}(t)$ 的表达式, 即

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\bar{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{2t} + 0.5 C_2 e^{-3t} \\ C_1 e^{2t} - 2 C_2 e^{-3t} \end{bmatrix} \quad (3.2.27)$$

请读者观察式(3.2.27),会发现状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda_1=2$ 和 $\lambda_2=-3$ 出现在指数的部分。它们将决定 $\mathbf{z}(t)$ 随时间的变化趋势。例如, $z_1(t)=C_1 e^{2t}+0.5 C_2 e^{-3t}$ 的第一项 $C_1 e^{2t}$ 会随着时间的增加趋于无穷大,而第二项 $0.5 C_2 e^{-3t}$ 则会随着时间的增加趋于零。因此,这两项相加的结果也会随着时间的增加趋于无穷大。 $z_2(t)$ 也有同样的表现。综上所述,随着时间的增加,系统的状态变量 $\mathbf{z}(t)$ 会趋于无穷。以上解耦的方法也可以推广到更高阶的矩阵当中,这部分推导留给读者自行分析。

讨论过数学基础之后,我们将正式进入相平面与相轨迹的分析中。

3.3 相平面与相轨迹分析

相平面与相轨迹(Phase Portrait)将使用直观的图形来分析微分方程,特别是二阶微分方程。相轨迹描述了系统的状态变量随时间在相平面上的变化轨迹。它的理念也可以拓展到更高维度的系统中。而且不只是线性系统,在非线性系统中也可以利用这一数学工具分析系统的表现。

3.3.1 一维相轨迹

首先讨论使用图形化分析一阶微分方程的方法。考虑一个一阶微分方程:

$$\frac{dz(t)}{dt} = z^2(t) - 1 \quad (3.3.1)$$

将其在相平面中绘制出来,令横轴为状态变量 $z(t)$,纵轴为 $\frac{dz(t)}{dt}$ 。式(3.3.1)所表达的是一条抛物线,如图 3.3.1 所示,它与横坐标之间存在两个交点,分别定义为 z_{f1} 和 z_{f2} 。当状态变量 $z(t)$ 位于这两个点时, $\left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{z(t)=z_{f1}} = \left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{z(t)=z_{f2}} = 0$,说明此刻的 $z(t)$ 将不会随时间发生任何改变。因此,这两个点被称为平衡点(Equilibrium Point 或者 Fixed Point)。从动态系统的角度考虑,当状态变量 $z(t)$ 位于平衡点时的动态系统会保持“静止”的状态。

一旦状态变量偏离平衡点之后,动态系统便会“动”起来,此时我们所关心的是系统能否回到静止的状态(平衡点)。首先看图 3.3.1(a),假设状态变量 $z(t)$ 在 $t=0$ 时位于平衡点 z_{f1} 的左边,即 $z(0)=z_{1l}$ 。根据图像显示,此时 $\left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{z(t)=z_{1l}} > 0$,这说明随着时间的增加,状态变量 $z(t)$ 也会增加。在图中, $z(t)$ 将沿着向右的轨迹移动。而在它移动的过程中, $\frac{dz(t)}{dt}$ 始终保持为正值,因此 $z(t)$ 就会一直增加并保持向右移动。直到 $z(t)=z_{f1}$ 时才会停下来(此时 $\left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{z(t)=z_{f1}} = 0$)。同理,如果 $t=0$ 时 $z(0)$ 在 z_{f1} 的右边,即 $z(0)=z_{1r}$,此时

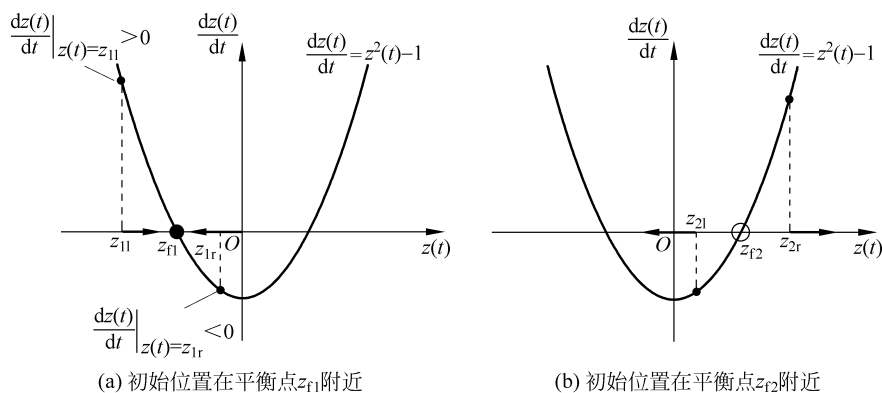


图 3.3.1 一维微分方程图形化分析

$\left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{z(t)=z_{1r}} < 0$, $z(t)$ 则会随着时间的增加而向左移动(随着时间的增加而减小),直到平衡点 z_{f1} 为止。以上的分析说明,当系统的状态变量 $z(t)$ 小范围偏离平衡点 z_{f1} 后,会自动回到平衡点 z_{f1} 。因此, z_{f1} 被称为**稳定平衡点**。

用同样的方法分析另一个平衡点 z_{f2} ,请读者根据图 3.3.1(b)自行推导,可以发现,无论 $z(t)$ 的初始位置在 z_{f2} 的左边还是右边,它的变化趋势都将会是远离 z_{f2} 。因此, z_{f2} 被称为系统的**不稳定平衡点**。即状态变量偏离 z_{f2} 之后,就无法再自动地回到 z_{f2} 这个平衡点上。需要注意的是,根据图 3.3.1,只有当初始位置 $z(0)$ 在 z_{f2} 左边,即 $z(0) < z_{f2}$ 时,状态变量才可以回到平衡点 z_{f1} 。因此, z_{f1} 是一个**局部(Local)**稳定的平衡点。

使用此方法来分析如下非线性微分方程。

例 3.3.1 利用相平面与相轨迹分析 Logistic 人口繁殖模型,它的微分方程为

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K} \right) \quad (3.3.2)$$

其中, $P(t)$ 是人口数, r 是人口的自然增长率($r > 0$), K 是环境承载力。

解: 式(3.3.2)可以写成

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) - \frac{r}{K}P^2(t) \quad (3.3.3)$$

因为式(3.3.3)存在 $P^2(t)$ 项,所以它是一个非线性的系统,求解微分方程相较于线性系统会更加困难,使用相平面可以简化分析并直观地理解系统的特征。首先来寻找系统的

平衡点,令 $\frac{dP(t)}{dt} = 0$, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= rP(t) - \frac{r}{K}P^2(t) \\ \Rightarrow \begin{cases} P_{f1} = 0 \\ P_{f2} = K \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

上面两个平衡点的位置很容易通过物理意义来理解。首先, $P_{f1} = 0$ 说明这是个无人区,人口自然不会凭空产生出来。而当 $P_{f2} = K$ 时,说明人口数达到了环境的承载力,将在此位置

保持平衡。将式(3.3.3)分成两部分,即 $rP(t)$ 和 $\frac{r}{K}P^2(t)$,并把这两条曲线在相平面中绘制出来,如图 3.3.2 所示,系统的平衡点位于两条曲线交叉位置($rP(t) = \frac{r}{K}P^2(t)$)。负数对于人口数量没有意义,所以图中只包含了正数部分。横轴为人口数 $P(t)$,纵轴为人口变化率 $\frac{dP(t)}{dt}$ 。

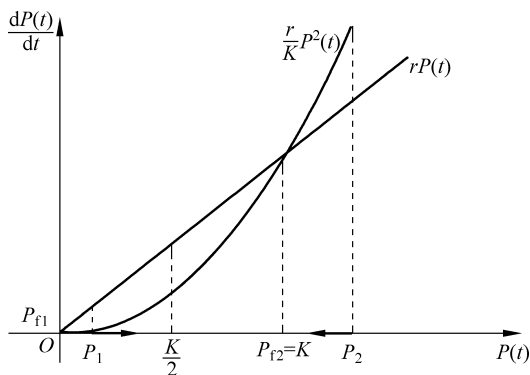


图 3.3.2 例 3.3.1 相轨迹分析

首先分析平衡点 $P_{f1} = 0$ 。如图 3.3.2 所示,当有少量人口迁移到此地时(此时假设初始状态为 $P(0) = P_1$),此时的人口变化率 $\left. \frac{dP(t)}{dt} \right|_{P(t)=P_1} = rP_1 - \frac{r}{K}P_1^2 > 0$,因此随着时间的增加,人口将正增长, $P(t)$ 将沿着正方向轨迹移动并将远离平衡点 P_{f1} ,所以 P_{f1} 是一个不稳定平衡点。这说明一个地方一旦开始出现生命,就会生生不息。同时可以发现,随着 $P(t)$ 不断向正方向移动, $rP(t)$ 与 $\frac{r}{K}P^2(t)$ 之间的差距会越来越大,直到 $P(t) = \frac{K}{2}$ 时它们达到最大的差值。这说明当人口数 $P(t) < \frac{K}{2}$ 时,人口的增长率在不断地升高,人口加速增长。而当 $P(t) > \frac{K}{2}$ 以后,增长速度就会减缓,直到达到环境的承载力,即另一个平衡点 $P_{f2} = K$ 时为止。

考虑另一种情况,如果突然间有大量的人口涌入这个地方(此时初始状态为 $P(0) = P_2$),从图 3.3.2 中可以发现,此时 $rP_2 < \frac{r}{K}P_2^2$,所以变化率 $\left. \frac{dP(t)}{dt} \right|_{P(t)=P_2} = rP_2 - \frac{r}{K}P_2^2 < 0$,人口将负增长($P(t)$ 将沿着负方向移动)。同时可以发现,初始状态下涌入的人越多,负增长的速率就越快,随着人口的下降,负增长的速率也会下降,直到达到环境的承载力,即平衡点 $P_{f2} = K$ 为止。所以 P_{f2} 是一个稳定的平衡点。

图 3.3.3 显示了从 P_1 和 P_2 开始时人口随时间的变化。它呈现出了与上面分析一致的结果。当初始位置从 P_1 开始时,人口的增速会越来越快,直到 $\frac{K}{2}$ 后增速开始下降,并达到承载力。而一旦人口超过承载能力 K 以后,将会迅速负增长以达到平衡点。

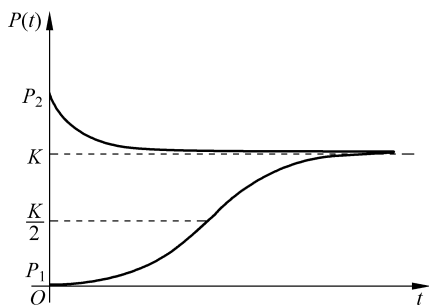


图 3.3.3 例 3.3.1 人口随时间的变化趋势图

如图 3.3.3 所示,在此模型条件下,人口从 P_1 增长到 K 的速度要远远慢于人口从 P_2 下降到 K 的速度。这是因为一个人从出生到成熟需要十几年的时间,繁衍一代人则需要二三十年的周期。然而,一场战争、一场瘟疫或一场自然灾害却可以在短时间内毁灭大量的人口,甚至造成深远的断代影响。人类是世界上最伟大的物种,自从诞生在这个地球以来就开始了对自然界的征服之旅,仅仅用了很短的时间就站到了食物链的顶端,从此不断地繁衍、进化,变得文明。与此同时,人类的生存环境也在被自身的活动不断地改变着。上述人口模型比较简单且参数较少,它并没有考虑到人口的年龄结构、迁徙、疾病、科技发展,或是政策因素的影响。但即便如此,这个简单的数学模型仍然揭示了人类活动和环境承载力之间的关系,并阐述了一个重要的道理:在发展的同时需要对自然法则存一份敬畏之心。尊重自然,尊重科学,人类的文明才能够更加繁荣地发展下去。

3.3.2 二维相平面与相轨迹——简化形式

考虑一个二维系统,在没有输入的情况下,它的状态空间方程为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

求式(3.3.5)的平衡点,可令 $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = 0$, 得到

$$\begin{cases} 0 = a_{11}z_1(t) + a_{12}z_2(t) \\ 0 = a_{21}z_1(t) + a_{22}z_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{1f} = 0 \\ z_{2f} = 0 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

首先分析简化矩阵,假设 $a_{12} = a_{21} = 0$ 。此时式(3.3.5)可以化简为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

即

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = a_{11}z_1(t) \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = a_{22}z_2(t) \end{cases} \quad (3.3.8)$$

下面根据 a_{11} 和 a_{22} 的符号来进行分类讨论。

类(1): $a_{11} > 0$ 且 $a_{22} > 0$ 。

首先分析 $a_{11} = a_{22} > 0$ 的情况: 从坐标轴上的点入手, 假设 $z(t)$ 在 $t=0$ 时位于坐标横轴上, 即 $z(0) = [z_1(0), z_2(0)]^T = [z_1(0), 0]^T$, 此时 $z_2(0) = 0 = z_{2f}$ 在平衡点上, 所以 $z_2(t)$ 不会随时间改变。如图 3.3.4(a) 所示, 当初始状态 $z_1(0) = z_{1r} > 0$ 时, 根据式(3.3.8), $\left. \frac{dz_1(t)}{dt} \right|_{z_1(0)=z_{1r}} = a_{11}z_{1r} > 0$, 因此 $z_1(t)$ 会随着时间增加而不断地增加, 向右移动并远离平衡点。同理, 如果初始状态处于平衡点左边, 即 $z_1(0) = z_{1l} < 0$, 那么随着时间的增加, $z_1(t)$ 会不断地减小(向左移动)。读者可以用同样的方法去分析在纵轴上 ($z_1(0) = z_{1f} = 0$) 的情况, 如图 3.3.4(a) 所示, 在纵轴上 $z_2(t)$ 的变化也将是沿着远离平衡点的轨迹移动。

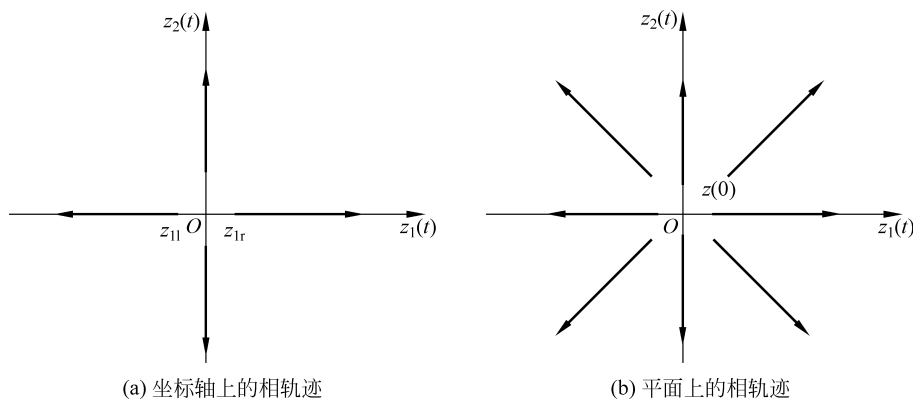


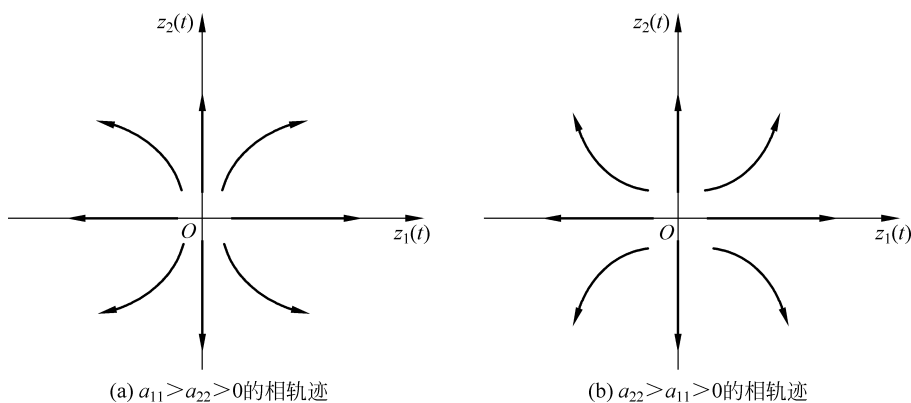
图 3.3.4 $a_{11} = a_{22} > 0$ 时的相平面分析

把坐标轴上的情况推广到整个相平面上可以得到图 3.3.4(b) 所示的图像。如果初始位置在第一象限, 即 $z_1(0) > 0$ 且 $z_2(0) > 0$, 此时 $\left. \frac{dz_1(t)}{dt} \right|_{t=0} > 0$ 且 $\left. \frac{dz_2(t)}{dt} \right|_{t=0} > 0$ 。因此, 两个变量都会随着时间的增加而增加。而且因为 $a_{11} = a_{22}$, 所以根据式(3.3.7), $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 的变化速率是一样的, 此时的相轨迹便是一条直线。读者可以自行推导在其他象限上的情况。

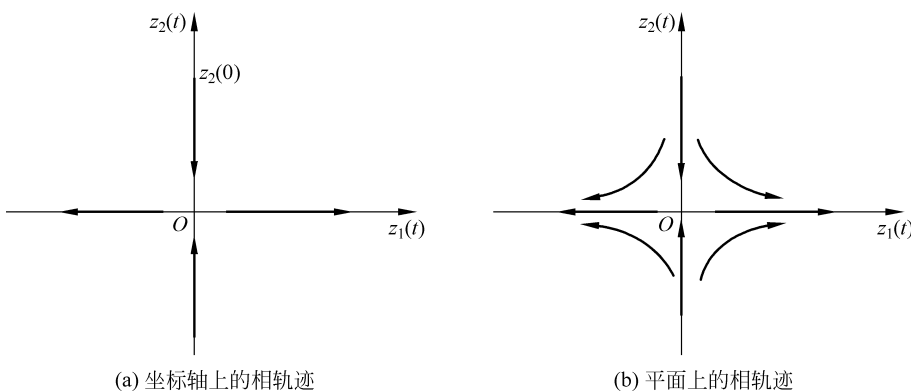
如果 $a_{11} \neq a_{22} > 0$, 那么它的相轨迹如图 3.3.5 所示。因为两个变量的变化率不同, 所以相轨迹是一条曲线, 但仍然是远离平衡点位置的。在这种情况下, 平衡点 z_f 称为**不稳定节点(Unstable Node)**。

类(2): $a_{11} > 0$ 且 $a_{22} < 0$ 。

使用与类(1)相似的分析方法, 首先分析坐标轴上的点, 其中平衡点 $z_{1f} = 0$ 是不稳定平衡点, $z_1(t)$ 会从初始位置向远离平衡点的方向移动。同时, 因为 $a_{22} < 0$, 所以在坐标轴纵轴上, 一个偏离平衡点 $z_{2f} = 0$ 的初始状态会向平衡点移动。例如在图 3.3.6(a) 中, 初始位

图 3.3.5 $a_{11} \neq a_{22} > 0$ 时的相平面分析

置为 $z_2(0) > 0$, 此时 $\left. \frac{dz_2(t)}{dt} \right|_{t=0} = a_{22}z_2(0) < 0$ 。所以 $z_2(t)$ 将随着时间的增加递减, 并逐渐靠近平衡点 $z_{2f} = 0$ 。

图 3.3.6 $a_{11} > 0$ 且 $a_{22} < 0$ 时的相平面分析

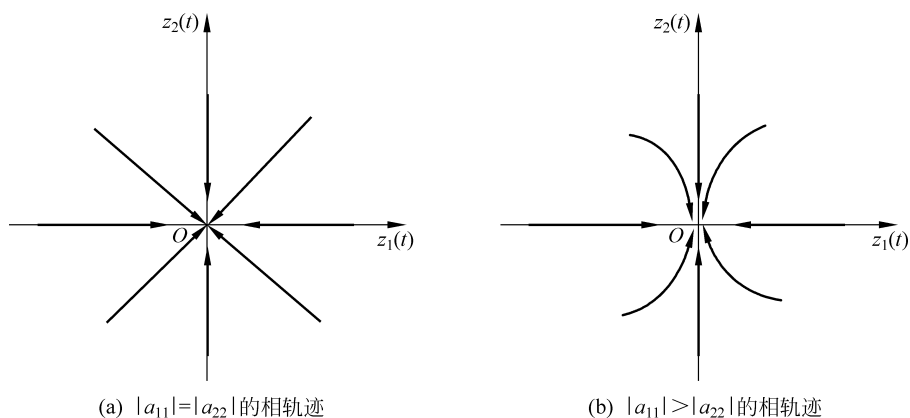
得到坐标轴上的情况之后, 便可以推导出整个相平面上的相轨迹, 如图 3.3.6(b) 所示。相轨迹会沿着横轴远离平衡点 $z_{1f} = 0$ 的位置, 同时沿着纵轴靠近平衡点 $z_{2f} = 0$ 的位置。在此情况下, 随着时间 t 趋于无穷, $z_2(t)$ 将收敛于平衡点 $z_{2f} = 0$, 而 $z_1(t)$ 将趋于正(负)无穷。

当 $a_{11} < 0, a_{22} > 0$ 时与上述分析类似, 故不再赘述, 读者可以自行推导。在这种情况下, 平衡点 z_f 称为鞍点(Saddle), 是一个不稳定的点。

类(3): $a_{11} < 0$ 且 $a_{22} < 0$ 。

可以使用与类(1)相同的方式分析, 故不再赘述。它的相轨迹如图 3.3.7 所示。其中, 图 3.3.7(a) 显示的情况是 $|a_{11}| = |a_{22}|$, 所以 $z_1(t)$ 与 $z_2(t)$ 向平衡点收敛的速度是相同的。而在图 3.3.7(b) 中, $|a_{11}| > |a_{22}|$, 所以 $z_1(t)$ 的收敛速度会大于 $z_2(t)$ 的收敛速度。

在这种情况下, 平衡点 z_f 称为稳定节点(Stable Node)。

图 3.3.7 $a_{11} < 0$ 且 $a_{22} < 0$ 时的相轨迹分析

3.3.3 二维相平面与相轨迹——一般形式

掌握了简化形式的二维系统相轨迹后,可以推广到一般形式。首先将式(3.3.5)解耦(对角化),定义一个新的状态变量 $\bar{\mathbf{z}}(t)$,令 $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\bar{\mathbf{z}}(t)$ 。 $\mathbf{P}$ 是过渡矩阵 $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$,其中 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量。根据 3.3.2 节中的介绍,可得

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}(t) \quad (3.3.9)$$

其中, λ_1 和 λ_2 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值。式(3.3.9)是一个对角矩阵,分析它的相轨迹可以使用 3.3.2 节的结论。下面通过几个例子深入地讨论一般形式矩阵的相轨迹。

例 3.3.2 分析二阶系统 $\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ 的相轨迹,其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ 。

解: 首先求矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值,令 $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$,可得 $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$,与其相对应的特征向量分别

为 $\mathbf{v}_1 = [2, 1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1, 1]^T$ 。令 $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\bar{\mathbf{z}}(t)$,其中 $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,根据式(3.3.9),得到

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}(t) \quad (3.3.10)$$

式(3.3.10)所示矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值都是实数且符号相反,这种情况和 3.3.2 节中讨论的类(2)是一样的,如前面所分析的,平衡点 $\bar{\mathbf{z}}_f = [0, 0]^T$ 是一个鞍点。它的相轨迹如图 3.3.8(a)所示, $\bar{z}_1(t)$ 随着时间增加而靠近平衡点, $\bar{z}_2(t)$ 随着时间增加而远离平衡点。式(3.3.10)中 $\bar{\mathbf{z}}(t)$ 的解为

$$\bar{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^t \end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

其中, C_1 、 C_2 为两个常数,和初始条件 $\bar{\mathbf{z}}(t_0)$ 相关。

此时原始状态变量 $\mathbf{z}(t)$ 为

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\bar{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 e^{-t} + C_2 e^t \\ C_1 e^{-t} + C_2 e^t \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

式(3.3.12)说明 $\mathbf{z}(t)$ 是 $\bar{\mathbf{z}}(t)$ 通过矩阵 $\mathbf{P}$ 的线性变换,在通过这个线性变换之后,相轨迹将

从 $\bar{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \end{bmatrix}$ 映射到 $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$ 上。如图 3.3.8(b)所示,从直观上看,这个线性

变换将 $\bar{z}_1(t)$ 和 $\bar{z}_2(t)$ 两个坐标轴沿着图中箭头的方向旋转到 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 上,那么相轨迹也会被相应地“拉长”与“压扁”。 $\mathbf{z}(t)$ 的相轨迹如图 3.3.8(c)所示。更为重要的是,这个线性变化不会改变平衡点的性质,因此平衡点 $\mathbf{z}_f$ 的性质与 $\bar{\mathbf{z}}_f$ 保持一致,是一个鞍点。这也可以通过式(3.3.12)得到验证:例如在某种初始条件下, $C_2 = 0$, 可得 $\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 说明随

着时间的增加, $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 将沿着 $\mathbf{v}_1 = [2, 1]^T$ 这条直线向 $[0, 0]^T$ 移动(相对应的指数部分为 $\lambda_1 = -1$)。同理,当 $C_1 = 0$ 时, $\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 e^t \\ C_2 e^t \end{bmatrix}$, 这说明随着时间的增加, $z_1(t)$ 和

$z_2(t)$ 将沿着 $\mathbf{v}_2 = [1, 1]^T$ 这条直线趋于无穷(对应的指数部分为 $\lambda_2 = 1$)。

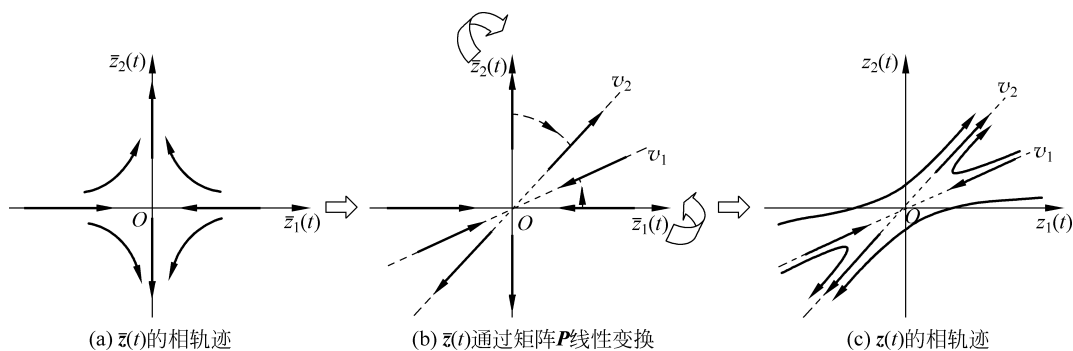


图 3.3.8 例 3.3.2 的相轨迹分析

例 3.3.3 分析二阶系统 $\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)$ 的相轨迹, 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

解: 矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$, 因此平衡点 $\mathbf{z}_f$ 是一个不稳定节点。相轨迹的分析方法

同例 3.3.2, 故不再赘述。

例 3.3.4 分析二阶系统 $\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)$ 的相轨迹, 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

解: 矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$, 因此平衡点 $\mathbf{z}_f$ 是一个稳定的节点。相轨迹的分析方

法同例 3.3.2,故不再赘述。

例 3.3.3 和例 3.3.4 的相轨迹如图 3.3.9 所示,请读者自行推导。

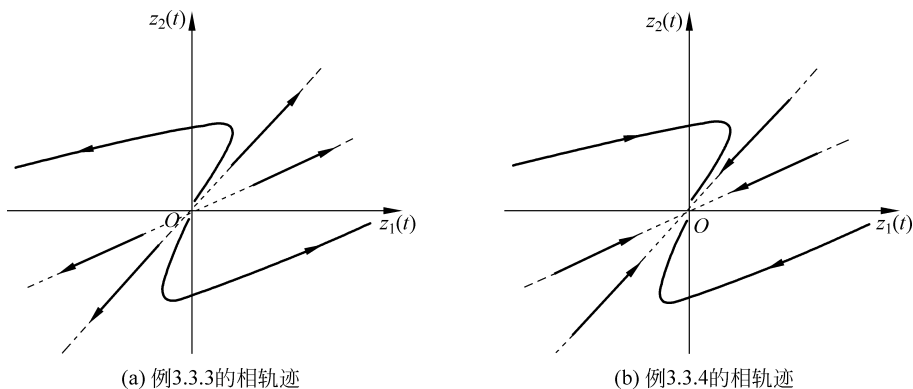


图 3.3.9 例 3.3.3 与例 3.3.4 的相轨迹分析

例 3.3.5 分析二阶系统 $\frac{dz(t)}{dt} = Az(t)$ 的相轨迹, 其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

解: 首先求解矩阵 A 的特征值与特征向量, 可得

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2j \\ \lambda_2 = -2j \end{cases}, \begin{cases} v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix} \\ v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -j \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.3.13)$$

式(3.3.13)说明矩阵 A 的特征值是一对共轭复数, 而且它不存在实数特征向量(特征向量无法在相平面中表达出来)。前面例子的处理方法将无法使用, 因此需要从解入手分析。首先令 $z(t) = P\bar{z}(t)$, 其中 $P = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ j & -j \end{bmatrix}$, 可得

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2j & 0 \\ 0 & -2j \end{bmatrix} \bar{z}(t) \quad (3.3.14)$$

式(3.3.14)的解为

$$\bar{z}(t) = \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{j2t} \\ C_2 e^{-j2t} \end{bmatrix} \quad (3.3.15)$$

根据欧拉公式 $e^{jt} = \cos t + jsint$, 式(3.3.15)可以写成

$$\bar{z}(t) = \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \cos 2t + C_1 j \sin 2t \\ C_2 \cos 2t - C_2 j \sin 2t \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

将式(3.3.16)代入 $z(t) = P\bar{z}(t)$, 可得

$$\begin{aligned} z(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \cos 2t + C_1 j \sin 2t \\ C_2 \cos 2t - C_2 j \sin 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 \cos 2t + 2C_1 j \sin 2t + 2C_2 \cos 2t - 2C_2 j \sin 2t \\ jC_1 \cos 2t - C_1 \sin 2t - jC_2 \cos 2t - C_2 \sin 2t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(C_1 + C_2) \cos 2t + 2(C_1 - C_2) j \sin 2t \\ (C_1 - C_2) j \cos 2t - (C_1 + C_2) \sin 2t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

令 $C_1 + C_2 = B_1, C_1 - C_2 = B_2$, 则式(3.3.17)化简为

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2B_1 \cos 2t + 2B_2 j \sin 2t \\ B_2 j \cos 2t - B_1 \sin 2t \end{bmatrix} \quad (3.3.18)$$

根据式(3.3.18)可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_1(t)}{2}\right)^2 + z_2^2(t) &= (B_1 \cos 2t + B_2 j \sin 2t)^2 + (B_2 j \cos 2t - B_1 \sin 2t)^2 \\ &= B_1^2 \cos^2 2t + 2B_1 B_2 j \cos 2t \sin 2t - B_2^2 \sin^2 2t - \\ &\quad B_2^2 \cos^2 2t - 2B_1 B_2 j \cos 2t \sin 2t + B_1^2 \sin^2 2t \\ &= B_1^2 \cos^2 2t - B_2^2 \sin^2 2t - B_2^2 \cos^2 2t + B_1^2 \sin^2 2t \\ &= (B_1^2 - B_2^2) \cos^2 2t + (B_1^2 - B_2^2) \sin^2 2t = (B_1^2 - B_2^2) (\cos^2 2t + \sin^2 2t) \\ &= B_1^2 - B_2^2 \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

将 $C_1 + C_2 = B_1, C_1 - C_2 = B_2$ 代入式(3.3.19)可得

$$\left(\frac{z_1(t)}{2}\right)^2 + z_2^2(t) = (C_1 + C_2)^2 - (C_1 - C_2)^2 = 4C_1 C_2 \quad (3.3.20)$$

两边同时乘以 $\frac{1}{4C_1 C_2}$, 整理后可得

$$\left(\frac{z_1(t)}{4\sqrt{C_1 C_2}}\right)^2 + \left(\frac{z_2(t)}{2\sqrt{C_1 C_2}}\right)^2 = 1 \quad (3.3.21)$$

式(3.3.21)是一个以原点为中心的椭圆方程, 这说明 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 在相平面中沿着一个椭圆的轨迹运行, 如图 3.3.10 所示。在这种情况下, 平衡点 $\mathbf{z}_f$ 称为**中心点(Center)**, 相轨迹会围绕这个中心点做圆周运动。判断相轨迹的运动方向, 可以以一个在横轴的点进行分析, 例如选择状态在横轴 $\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ 0 \end{bmatrix}$ (如图 3.3.10 所示, 选择 $z_1(0) > 0$) 的点进

行分析。此时根据状态空间方程 $\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t)$, 可得 $\begin{bmatrix} \frac{dz_1(t)}{dt} \\ \frac{dz_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -z_1(0) \end{bmatrix}$ 。在

这一时刻, $\left.\frac{dz_1(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$, 所以 $z_1(t)$ 不会随时间改变。而 $\left.\frac{dz_2(t)}{dt}\right|_{t=0} = -z_1(0) < 0$, 所以 $z_2(t)$ 会随着时间的增加而减小。在相轨迹中, $z_2(t)$ 在 $t=0$ 时的移动趋势指向下方, 所以相轨迹在图中按照顺时针移动。图 3.3.10(b)显示了 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 随时间的变化。可以发现, $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 此消彼长, 循环往复。如果从能量的角度来分析, 它们的总能量取决于初始状态 $\mathbf{z}(0)$, 不会随着时间发生改变。所以这个系统在稳定与不稳定之间, $\mathbf{z}(t)$ 始终有界但始终不为 0。

例 3.3.6 分析二阶系统 $\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)$ 的相轨迹, 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

解: 首先求解矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, 可得

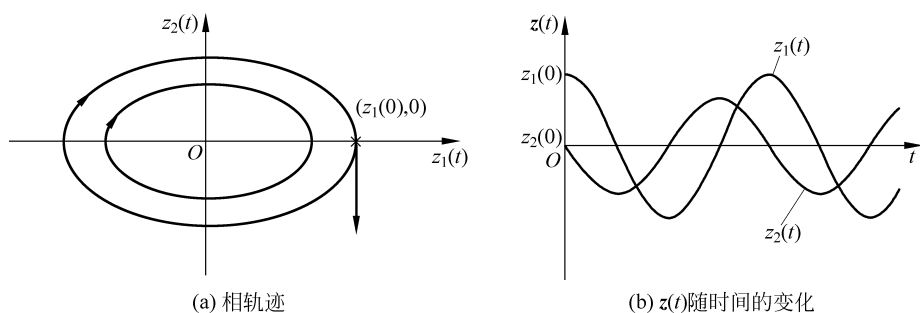


图 3.3.10 例 3.3.5 的相轨迹分析

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2j \\ \lambda_2 = 1 - 2j \end{cases} \quad (3.3.22)$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值是共轭的复数,但与例 3.3.5 不同,它包含了实部部分。分析它的解,令 $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\bar{\mathbf{z}}(t)$, 其中 $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, 可得

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2j & 0 \\ 0 & 1 - 2j \end{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}(t) \quad (3.3.23)$$

式(3.3.23)的解为

$$\bar{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{1+2jt} \\ C_2 e^{1-2jt} \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} C_1 e^{j2t} \\ C_2 e^{-j2t} \end{bmatrix} \quad (3.3.24)$$

可以发现,它和式(3.3.15)的差别在于一个系数 e^t , 而 e^t 是随着时间的增加而不断增大的。因此其相轨迹如图 3.3.11(a)所示,它与图 3.3.10(a)类似,以原点为中心做圆周运动,但是直径在不断地扩大,形成了一个向外的螺旋线(本例中,螺旋线的方向是顺时针的,如例 3.3.5 所分析,可以通过坐标轴上一点进行判断,故不赘述)。 $\mathbf{z}(t)$ 随时间变化的示意图如图 3.3.11(b)所示,会持续地振荡且振幅不断地加强。在这种情况下,平衡点 $\mathbf{z}_f$ 称为**不稳定焦点 (Unstable Spiral)**。

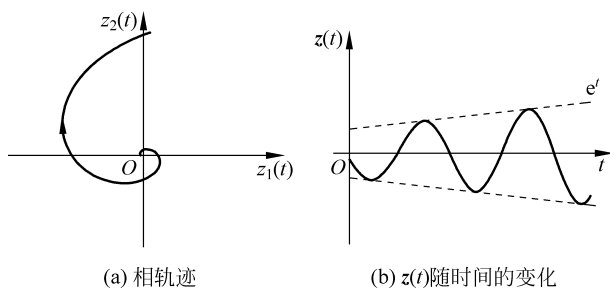


图 3.3.11 例 3.3.6 的相轨迹分析

例 3.3.7 分析二阶系统 $\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)$ 的相轨迹, 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ 。

解: 求解矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, 可得

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3 + 3j \\ \lambda_2 = -3 - 3j \end{cases} \quad (3.3.25)$$

与例 3.3.6 类似,可以判断出它的平衡点是一个**稳定焦点(Stable Spiral)**。相轨迹将沿螺旋线指向原点。其所对应的时间函数将振荡衰减,直至为 0。它的相轨迹和时间函数如图 3.3.12 所示。

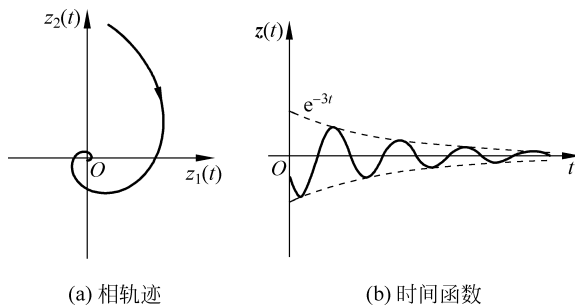


图 3.3.12 例 3.3.7 的相轨迹分析

上述例子说明,状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值将决定平衡点的类型及系统的表现。表 3.3.1 总结了特征值与平衡点类型的关系。通过上述分析和表 3.3.1 可知,状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值实部部分决定了平衡点的稳定性,而特征值的虚部部分决定了系统是否有振动。

表 3.3.1 状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值与平衡点类型

$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$	特征值 λ_1, λ_2 分类与说明		平衡点类型
特征值为实数 ($\omega = 0$)	$\lambda_1 \lambda_2 > 0$ 且 $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$	λ_1 和 λ_2 都为负数	稳定节点
	$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	λ_1 和 λ_2 一正一负	鞍点
	$\lambda_1 \lambda_2 > 0$ 且 $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$	λ_1 和 λ_2 都为正数	不稳定节点
特征值为复数 ($\omega \neq 0$)	$\lambda_{1,2} = \pm j\omega$	特征值为纯虚数	中心点
	$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ($\sigma > 0$)	实部大于 0	不稳定焦点
	$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ($\sigma < 0$)	实部小于 0	稳定焦点

正如在 3.2.2 节中所描述的,状态矩阵的特征值就是其对应的传递函数的极点。希望读者可以把这两种描述系统的方法结合起来分析思考。另外,请读者开始思考一个问题,如果设计一个反馈控制器(即系统的输入是状态变量的一个函数),使得状态变量稳定于一个平衡点,那么这个控制器应该满足什么条件? 相关分析请见第 10 章。

3.4 相平面案例分析——爱情故事

3.3 节详细讨论了使用相轨迹分析状态空间方程平衡点类型的方法。在本节中,将通过一个案例帮助读者加深对这部分内容的理解,希望这个有趣的例子可以引起读者的兴趣与思考。另外,本节将介绍动态系统分析的思路与讨论方法,这种思路和讨论方法可以作为模板使用在论文写作和学术报告中。动态系统的分析可以分为三个步骤:第一步**描述系**

统,即通过语言来描述系统的特性;第二步**数学分析**,即使用数学工具对系统进行量化解析;第三步**结果与讨论**,即根据第二步数学分析的结果,进行深层次的思考与讨论。

爱情是永恒的主题,每个人都有自己的故事。康奈尔大学应用数学系教授 Steven Strogatz 在 1988 年首先将爱情模型引入相轨迹分析的教学中。他当时在哈佛大学做博士后,根据课堂的经验引入了这一模型。他选用的是莎翁笔下的著名人物——罗密欧与朱丽叶。之后很多教师都纷纷使用这一概念来引起同学们的兴趣,而每一个教师也会在其中加入自己的思考与分析。

为了使本书读者有更好的代入感,我将选用两个中国人的名字,来自于我的两位朋友,男生叫雨飞,女生叫梦寒,如图 3.4.1 所示。其中,雨飞对梦寒的感情用 $Y(t)$ 来表示,梦寒对雨飞的感情用 $M(t)$ 来表示。 $Y(t)$ 与 $M(t)$ 大于零时说明他们是相爱的,小于零时说明他们心有怨恨,等于零时说明他们对对方无感。

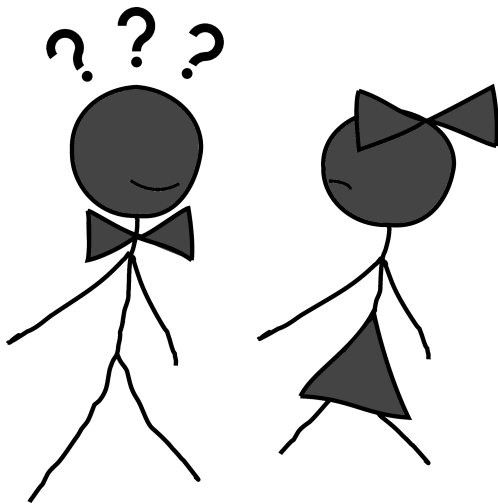


图 3.4.1 爱情故事: 雨飞和梦寒

分以下几种情况进行讨论。

情况(1): $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} Y(t) \\ M(t) \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$, $a > 0$ 且 $b > 0$ 。

第一步: 描述系统。

从上式可以看出,雨飞是一个耿直男孩。他的表现是:如果你对我好($M(t) > 0$),我就会对你产生好感($\frac{dY(t)}{dt} = aM(t) > 0$);如果你讨厌我($M(t) < 0$),我也不搭理你($\frac{dY(t)}{dt} = aM(t) < 0$)。他属于“投桃报李”加“以牙还牙”的性格。这种性格过于直来直去,在现实生活中其实不太容易受到欢迎。

而梦寒则是一个多情甚至有些矫情的女孩。当雨飞向他嘘寒问暖时($Y(t) > 0$),她爱答不理,你越热情,她就越远离($\frac{dM(t)}{dt} = -aY(t) < 0$)。而当雨飞开始疏远她时($Y(t) < 0$),她又发现了雨飞身上的优点,不可控制地开始爱上他($\frac{dM(t)}{dt} = -aY(t) > 0$)。即“欲迎还

拒”加“若即若离”的性格。当这两种性格遇到一起,就会发生一些奇妙的事情。

第二步:数学分析。

首先求系统的平衡点,令 $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = 0$, 得到平衡点 $\begin{cases} Y_f = 0 \\ M_f = 0 \end{cases}$ 。

求矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值,可得 $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{ab}j$ 。根据表 3.3.1,判断出平衡点是一个中心点。它的相轨迹是图 3.4.2 所示的椭圆(参考例 3.3.5)。根据初始状态的不同,这个椭圆的大小会有所不同。

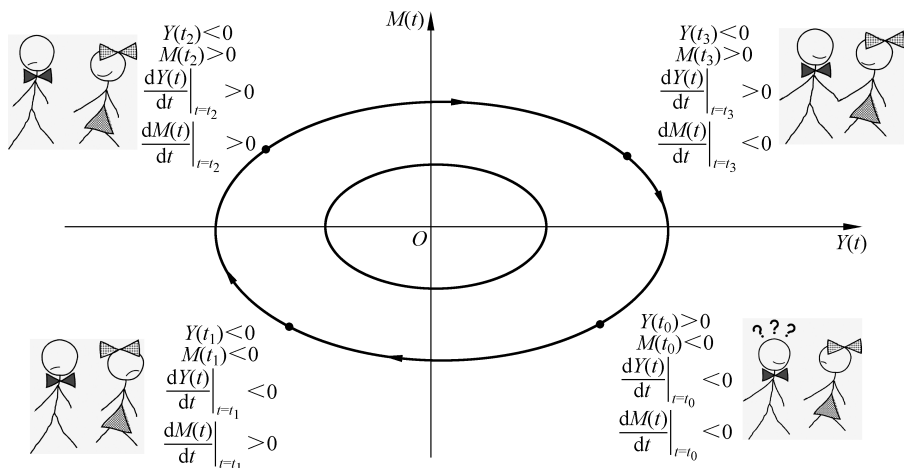


图 3.4.2 情况(1)的相轨迹

第三步:结果与讨论。

分析图 3.4.2 中的相轨迹,会发现他们之间是一个无限循环、爱恨交织的关系。例如,以第四象限的 $[Y(t_0), M(t_0)]^T$ 点作为初始条件开始分析。在 t_0 时刻, $Y(t_0) > 0$ 代表雨飞爱着梦寒,而 $M(t_0) < 0$ 则代表梦寒正在讨厌着雨飞。此时, $\left. \frac{dY(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = aM(t_0) < 0$, 说明了因为梦寒讨厌雨飞,所以雨飞对她的热情也在减少当中。直到过了某个临界点之后,相轨迹来到了第三象限,雨飞开始讨厌梦寒了, $Y(t_1) < 0$ 。而这时 $\left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=t_1} > 0$, 说明梦寒对雨飞的态度发生了转变,虽然还是讨厌,但因为雨飞开始不搭理她,她反而想起了雨飞的好, $M(t)$ 开始增加,向正方向移动。二人的关系继续发展到下一个临界点(进入第二象限),此时的雨飞已经非常讨厌梦寒,而梦寒却开始喜欢上雨飞 ($M(t_2) > 0$)。随着梦寒态度变得亲近,雨飞的热情又重新被燃了起来,此时 $\left. \frac{dY(t)}{dt} \right|_{t=t_2} > 0$ 。沿着这个椭圆继续走,相轨迹进入第一象限,雨飞又开始喜欢梦寒 ($Y(t_3) > 0$),但梦寒却因为受不了他的热情,逐渐变得冷淡了起来, $\left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=t_3} < 0$ 。

就这样,他们有四分之一时间是相爱的(第一象限),有四分之一时间是互相看不顺眼的(第三象限)。而剩下的二分之一时间是一半火焰,一半海洋(第二、四象限)。这是个不错的关系,也是情侣之间的常态。因为即使在这互不顺眼的四分之一时间内,也充满了对未来的

期望和憧憬。

那是一场不见不散

终点等时间来宣判

离别不过是换一种方式的陪伴

这一刻让我凝望你的眼

——张磊《一念天堂》

情况(2): $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} Y(t) \\ M(t) \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, $a > 0$ 且 $b > 0$ 。

第一步: 描述这种情况下的爱情系统。

以雨飞为例, $\frac{dY(t)}{dt} = -aY(t) + bM(t)$, 说明雨飞的感情变化 $\frac{dY(t)}{dt}$ 和梦寒对其的感情 $M(t)$ 是正相关的。如果雨飞感受到的是梦寒的爱 ($M(t) > 0$), 那么就会促进雨飞对梦寒感情的增长 ($bM(t) > 0$), 而如果他感受到的是梦寒的恨 ($M(t) < 0$), 那么他对梦寒的感情也会受挫 ($bM(t) < 0$)。同时, 雨飞的感情变化 $\frac{dY(t)}{dt}$ 还与他自身对梦寒的感情反相关, 因为其中包含了 $-aY(t)$ 这一项。这说明了他很小心, 不管是爱或恨都会有所保留, 有所克制。因为矩阵 $\mathbf{A}$ 是一个对称矩阵, 所以梦寒的性格和雨飞是一样的。

第二步: 对这个系统进行数学分析。

首先求系统的平衡点, 令 $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = 0$, 可以得到平衡点 $\begin{cases} Y_f = 0 \\ M_f = 0 \end{cases}$

求矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, 可得

$$\begin{cases} \lambda_1 = -a + b \\ \lambda_2 = -a - b \end{cases} \quad (3.4.1)$$

其所对应的特征向量为

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = [1, 1]^T \\ \mathbf{v}_2 = [1, -1]^T \end{cases} \quad (3.4.2)$$

这时需要分情况进行讨论。

情况(2.1): $a > b$ 。

在这种情况下, 他们两个人对于自我的意识要超过对于对方的感情, 换言之, 他们都很理智, 都更倾向于克制自己的情感。根据式(3.4.1), 当 $a > b$ 时, $\lambda_1 < 0$ 且 $\lambda_2 < 0$, 所以平衡点是一个稳定节点。它的相轨迹如图 3.4.3(a) 所示, 无论是从任何的初始状态开始, 随着时间的增加, $Y(t)$ 和 $M(t)$ 都会趋于 0, 并最终稳定在 0 点处。在这种情况下, 不管他们曾经爱得有多深, 或是恨得有多深, 随着时间的增加, 雨飞与梦寒终究会成为路人, 相忘于江湖, $Y(t) = M(t) = 0$ 。

十年之后

我们是朋友, 还可以问候, 只是那种温柔

再也找不到拥抱的理由

情人最后难免沦为朋友

——陈奕迅《十年》

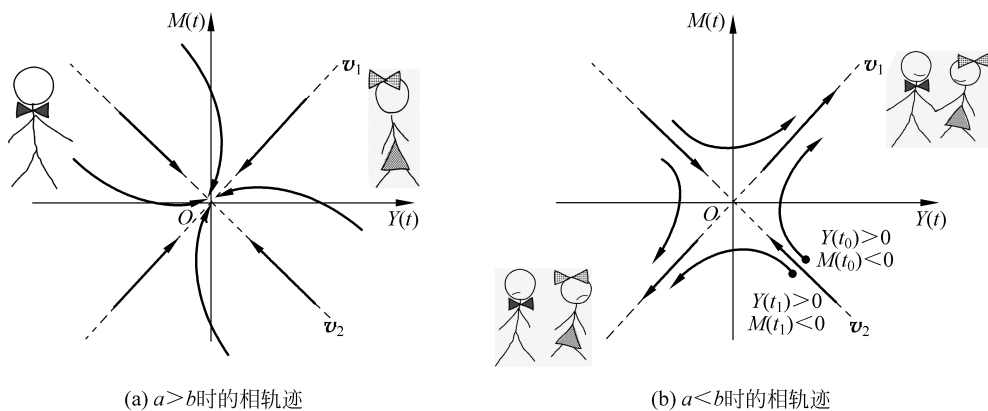


图 3.4.3 情况(2)的相轨迹

情况(2.2): $a < b$.

在这种情况下,他们两个人对于对方的感情都超过了对于自我的意识,他们都很感性,都更加勇于表达对对方的情感。根据式(3.4.1),当 $a < b$ 时, $\lambda_1 > 0$ 而 $\lambda_2 < 0$, 所以平衡点是一个鞍点。它的相轨迹如图 3.4.3(b)所示。可以发现,这将导致两种极端的情况,他们或者在第一象限共浴爱河($Y(t) > 0$ 且 $M(t) > 0$),或者在第三象限成为仇敌($Y(t) < 0$ 且 $M(t) < 0$)。而最终的结果与初始状态相关,即他们给对方的第一印象。

如果他们初次见面时对对方的感受在图 3.4.3(b)所示的第四象限中的 $[Y(t_0), M(t_0)]^T$ 点,在此时刻,雨飞深爱着梦寒($Y(t_0) > 0$),但是梦寒却不喜欢雨飞($M(t_0) < 0$)。在以后的交往中,梦寒对雨飞的感情逐渐升温,可以看到 $M(t)$ 在相轨迹中向上移动(增加)。而雨飞虽然动摇过($Y(t)$ 在不断减小),但是却仍然一直爱着梦寒($Y(t) > 0$)。终于,他们突破了零界点,进入第一象限。两个人开始过上了幸福的生活。相反地,如果他们初次见面时的感受在图 3.4.3(b)所示的第四象限中的 $[Y(t_1), M(t_1)]^T$ 点,这个时候,雨飞爱着梦寒($Y(t_1) > 0$),但是梦寒非常讨厌雨飞($M(t_1) < 0$)。在后面的发展中,虽然梦寒的感情在升温,但是雨飞却先坚持不住了,终于达到零界点并且崩溃(相轨迹进入第三象限),他们最终由爱生恨,变成了仇人。所以,一定要珍惜第一次亮相的机会,不要等到和心上人见面以后才想起来要充实自己或是做身材管理,初始条件将决定最后的结果,要时刻做好准备,给对方留下惊艳的初次印象。

假如我年少有为不自卑

懂得什么是珍贵

那些美梦

没给你,我一生有愧

——李荣浩《年少有为》

第三步: 结果与讨论。

上面的结果说明当一个人过于理性,过于在乎自我的时候($a > b$),往往就会忽略别人的感受,最终会和心上人变为路人,成为一个孤独的人。而如果对对方倾入的情感大于对自

我的意识时($a < b$),则会有两种结果,要么共浴爱河,要么因爱生根。通过这个分析可以得出两个结论:①有很多人愿意一辈子做朋友,却不愿意去打破这个微妙的平衡。②如果不认真的话,那肯定赢不了;但是如果认真的话,那就有可能输了。

最后要说明的是,希望通过这个例子引起读者的兴趣并加深对相轨迹的理解。但在我看来,请读者朋友们千万不要试图用数学的方式来解决爱情问题。因为生活当中有太多的不确定性,我们无法准确地建立爱情的数学模型。即使有一天,新的技术手段可以准确地预测这些不确定性,我也不愿意这样做。因为我认为,正是这些不确定性,才让这个世界如此浪漫,如此美丽。

少一些套路,多一点真诚,才是面对爱情和生活最正确的态度。值得一提的是,本例中我的两位朋友最后幸福地生活在了一起。

谁画出这天地

又画下我和你

让我们的世界绚丽多彩

——许巍《旅行》

3.5 本章要点总结

- 状态空间表达形式:

- 用一系列的一阶微分方程表达系统的输入、输出及状态变量。其一般形式为

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}z(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases}$$

其中,符号定义与维度见表 3.3.1。

- 状态矩阵的特征值与其所对应的单输入单输出传递函数的极点相同。根据第 2 章的内容,极点决定系统的表现,状态矩阵的特征值是研究的重点。
- 相平面与相轨迹分析:
 - 利用矩阵特征值与特征向量的性质可以将矩阵对角化,从而将系统解耦。
 - 利用图形的方法,可以直观地分析复杂的非线性一阶系统平衡点的表现。
 - 二阶系统平衡点的性质由状态矩阵的特征值决定,具体见表 3.3.1。
- 动态系统的分析方法:
 - 第一步,描述系统。通过语言来描述系统的特性。
 - 第二步,数学分析。使用数学工具对系统进行解析。
 - 第三步,结果与讨论。分析的结果,进行深层次的思考与讨论。

一阶系统的时域响应分析

使用一阶微分方程描述的动态系统被称为一阶系统。本章将使用传递函数和状态空间方程来分析一阶系统的时域响应与性能特征。本章的学习目标为：

- 了解典型系统输入信号的含义和数学表达式：包括单位冲激输入和单位阶跃输入。
- 掌握使用传递函数和状态空间方程的方法分析一阶系统的时域响应，并体会两种方式各自的优势。
- 掌握一阶系统性能指标的推导方法和意义。
- 了解一阶动态系统的应用。

4.1 引子——案发时间是几点

请读者试想以下的场景(如图 4.1.1 所示)：你是一名侦探，应邀去调查一起密室杀人案件。基于职业习惯，你在进入房间的时候看了一眼手表，记录下此刻的时间是下午 2:30。死者正躺在密室的地板上，你拿出温度枪，测得此刻尸体的温度是 26℃。你开始对房间展开调查并寻找蛛丝马迹。这是一个密闭的空间，有一套完善的空调系统可以将室温准确地保持在 20℃。空调控制器也没有被动过的痕迹，因此可以断定尸体一直保存在 20℃ 的环境下。调查取证用了 1 小时的时间，在收集完所有物证之后时钟指向下午 3:30。此时再次测量尸体的温度，已经降低到了 25℃。你了解到死者进入现场之前曾经测量过体温，是标

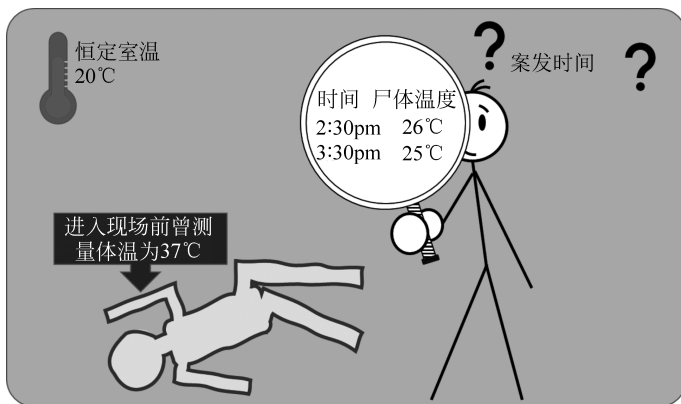


图 4.1.1 案发时间是几点？

准的 37°C 。此时,你思考了一下,在本子上演算并得出结论:本案案发时间是……(答案将在 4.3 节揭晓。)

在现实生活中,法医判断案发时间是一门综合性很强的技术,需要收集多方因素进行分析演算才能得到精确的结果。上述的例子属于理想状态(密室且恒温),因此可以使用简单的牛顿冷却定律进行分析。牛顿冷却定律的动态微分方程是

$$\frac{dT(t)}{dt} = -K(T(t) - C(t)) \quad (4.1.1)$$

其中, $T(t)$ 是物体温度, $C(t)$ 是环境温度, K 是导热系数。式(4.1.1)是一个一阶微分方程,所以其对应的系统是一阶动态系统。设系统的输入 $u(t)$ 是环境温度,即 $u(t) = C(t)$, 系统的输出是物体温度,即 $x(t) = T(t)$ 。将上述定义代入式(4.1.1)并进行调整,可得

$$\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = Ku(t) \quad (4.1.2)$$

对式(4.1.2)等号两边分别进行拉普拉斯变换,得到

$$sX(s) - x(0) + KX(s) = KU(s) \quad (4.1.3)$$

其中, $x(0)$ 是系统的初始条件,在本例中则是初始体温,即 $x(0) = 37^{\circ}\text{C}$ 。式(4.1.3)可以写为

$$(s + K)X(s) = K\left(\frac{1}{K}x(0) + U(s)\right) \quad (4.1.4)$$

系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{X(s)}{\frac{1}{K}x(0) + U(s)} = \frac{K}{s + K} \quad (4.1.5)$$

式(4.1.5)说明系统的输入由两部分相加而成,定义 $U_1(s) = \frac{1}{K}x(0)$, $U_2(s) = U(s)$, 得到

$$G(s) = \frac{X(s)}{U_1(s) + U_2(s)} = \frac{K}{s + K} \quad (4.1.6)$$

根据线性时不变系统的叠加性质,系统的输出则是对应于这两个输入响应(定义为 $X_1(s)$ 和 $X_2(s)$)的和,即

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) \quad (4.1.7)$$

在本例中,这两个输入分别是冲激输入 $U_1(s)$ 和阶跃输入 $U_2(s)$, 所对应的响应则是冲激响应和阶跃响应,我们暂时从这个密室走出来,首先来分析一阶系统的时域响应。等到掌握了这些基本知识之后,再回到密室揭秘案发时间。

4.2 一阶系统的时域响应

4.2.1 典型一阶系统和典型系统输入信号

典型一阶系统的微分方程为

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = au(t) \quad (4.2.1)$$

其中, a 是一个常数。考虑零初始条件 $x(0)=u(0)=0$, 对式(4.2.1)等号两边进行拉普拉斯变换, 可得

$$sX(s) + aX(s) = aU(s) \quad (4.2.2)$$

调整后可以得到系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{a}{s+a} \quad (4.2.3)$$

$G(s)$ 的极点是 $s_p = -a$ 。

下面介绍两个典型的系统输入信号。

单位冲激函数(见 2.1.1 节), 定义为

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

其拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s0} = 1 \quad (4.2.5)$$

单位阶跃函数(Unit Step): 读者可以在英语国家的一些公共场所看到小心台阶(Watch Your Step)的警示牌, 如图 4.2.1(a)所示。“阶跃”(Step)可以理解为一个台阶。“单位”阶跃是指幅度为 1 的阶跃函数, 如图 4.2.1(b)所示。它的数学表达式为

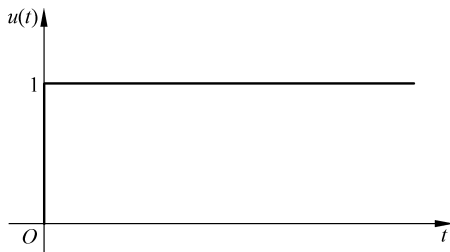
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.2.6)$$

其对应的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[e^{-0t}] = \frac{1}{s+0} = \frac{1}{s} \quad (4.2.7)$$



(a) 小心台阶(Watch Your Step)



(b) 单位阶跃函数

图 4.2.1 单位阶跃函数理解与图示

4.2.2 一阶系统单位冲激响应

当系统的输入为单位冲激函数时, $u(t)=\delta(t)$, $U(s)=1$ 。代入式(4.2.3), 可得

$$X(s) = U(s)G(s) = 1 \times \frac{a}{s+a} = \frac{a}{s+a} \quad (4.2.8)$$

对式(4.2.8)等号两边进行拉普拉斯逆变换, 可得

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s+a}\right] = a e^{-at} \quad (4.2.9)$$

图 4.2.2 显示了一阶系统在不同 a 值下的单位冲激响应。可知当单位冲激输入作用在一阶系统时,系统的输出 $x(t)$ 将从 a 开始变化。

从系统输出的极点角度来看,当 $a > 0$ 时, $X(s)$ 的极点 $s_p = -a < 0$, 因此 $x(t)$ 将递减并收敛于 0。另一方面,当 $a < 0$ 时, $X(s)$ 的极点 $s_p = -a > 0$, $x(t)$ 则会趋于负无穷。同时,因为 $X(s)$ 是单位冲激响应,所以 $X(s) = G(s)$, 输出的极点也是传递函数的极点。

现在假设式(4.2.1)中的系统输入为 $u(t) = 0$, 但是系统的初始条件 $x(0) = x_0 \neq 0$ 。那么式(4.2.1)和式(4.2.2)分别变为

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0 \quad (4.2.10)$$

$$sX(s) - x_0 + aX(s) = 0 \quad (4.2.11)$$

调整式(4.2.11),得到

$$X(s) = \frac{x_0}{s + a} \quad (4.2.12a)$$

对式(4.2.12a)等号两边进行拉普拉斯逆变换,得到

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{x_0}{s + a}\right] = x_0 e^{-at} \quad (4.2.12b)$$

$x(t)$ 随时间的变化如图 4.2.3 所示。比较式(4.2.12b)和式(4.2.9), 会发现它们之间只有系数部分的不同。因此,它的初始输出状态是 x_0 。 $x(t)$ 随时间收敛或者发散取决于 a 的符号,当 $a > 0$ 时,不管初始输出 x_0 的符号是什么,系统的输出 $x(t)$ 都会随时间的增加趋于 0。当 $a < 0$ 时,不同符号的初始输出 x_0 会导致 $x(t)$ 随时间的增加向着正无穷或者负无穷变化。

通过以上分析可知,一阶系统对初始条件的响应就是系统的冲激响应,冲激的强度使得系统的初始输出达到 x_0 。单位冲激响应发散或收敛与传递函数的极点相关。

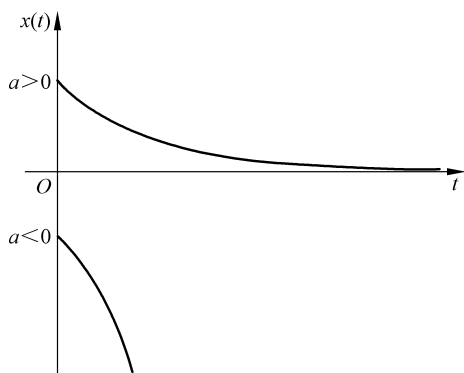


图 4.2.2 一阶系统的单位冲激响应

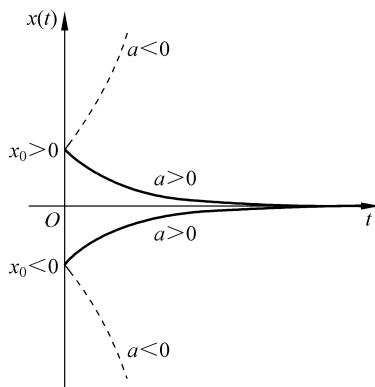


图 4.2.3 一阶系统对初始条件的响应

上述分析使用了传递函数的方法,下面我们换一种思路,使用相轨迹的方法对同样的一阶系统进行分析。考虑式(4.2.10)的零输入,即 $u(t) = 0$ 的情况,定义系统的状态变量为系

统的输出,即 $z(t)=x(t)$ 。此时,式(4.2.10)可以写为

$$\frac{dz(t)}{dt} = -az(t) \quad (4.2.13)$$

令 $\frac{dz(t)}{dt}=0$,可以得到它的平衡点 $z_f=0$ 。图 4.2.4 显示了不同 a 值时式(4.2.13)的相轨迹。以 $a>0$ 的情况为例(相轨迹如图 4.2.4(a)所示),当系统的初始条件在平衡点 z_f 的左侧,即 $z(0)=z_1$ 时, $\left.\frac{dz(t)}{dt}\right|_{z(t)=z_1} > 0$,因此 $z(t)$ 将随着时间的增加而不断增大,其移动轨迹向右直到平衡点为止。同时,随着 $z(t)$ 向平衡点不断地靠近,它的变化速率 $\frac{dz(t)}{dt}$ 会不断地减小。同理,当初始条件在平衡点右侧,即 $z(0)=z_2$ 时, $z(t)$ 将随着时间的增加而不断减小,移动轨迹向左直到平衡点。因此,平衡点 $z_f=0$ 是一个稳定的平衡点。读者可以自己分析 $a<0$ 时的情况并和图 4.2.4(b)进行对比,在这种条件下,平衡点 $z_f=0$ 是一个不稳定的平衡点。以上通过相轨迹分析的结果和图 4.2.3 所示的结果一致。

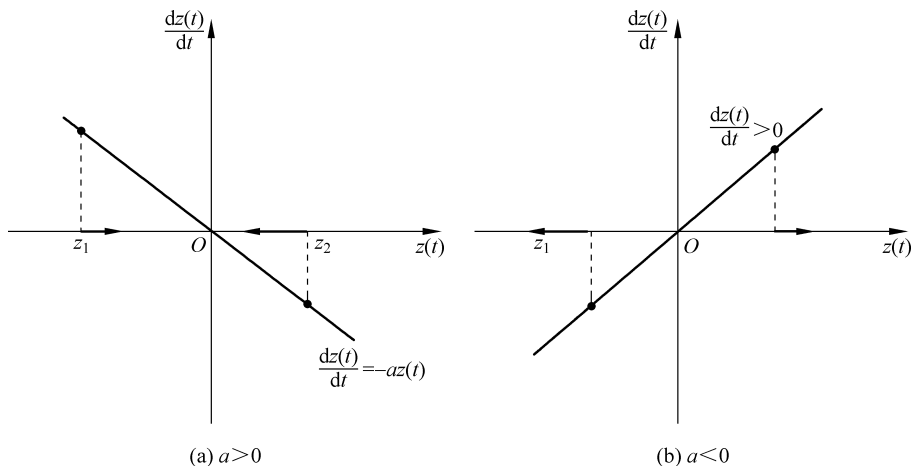


图 4.2.4 一阶系统零输入的相轨迹图(冲激响应)

4.2.3 一阶系统单位阶跃响应

当系统的输入为单位阶跃函数时,其拉普拉斯变换是 $U(s)=\frac{1}{s}$,代入式(4.2.3),可得

$$X(s)=U(s)G(s)=\frac{1}{s}\times\frac{a}{s+a}=\frac{a}{s(s+a)} \quad (4.2.14)$$

对式(4.2.14)等号两边进行拉普拉斯逆变换,得到

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-0}-\frac{1}{s+a}\right]=e^{0t}-e^{-at}=1-e^{-at} \quad (4.2.15)$$

根据式(4.2.15),当 $a<0$ 时, $x(t)$ 将趋于负无穷(图略)。当 $a>0$ 时, $x(t)$ 的图像如图 4.2.5 所示,从 0 开始, $x(t)$ 随着时间的增加而不断地增加,直到达到稳定值 1。通过分析式(4.2.14)

的极点也可以得到一致的结论, $X(s)$ 有两个极点, 其中 $s_{p1}=0$ 来自系统输入 $U(s)=\frac{1}{s}$, 另一个极点 $s_{p2}=-a$ 是系统传递函数 $G(s)$ 的极点。

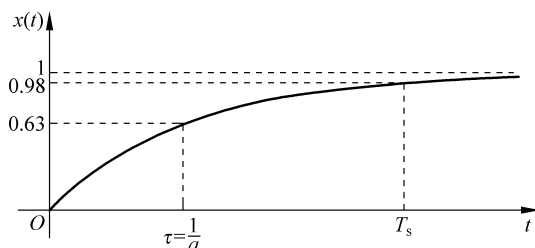


图 4.2.5 一阶系统单位阶跃响应

下面介绍两个一阶系统的重要性能指标。

(1) **时间常数(Time Constant):** $\tau = \frac{1}{a}$, 此时 $x(\tau) = 1 - e^{-a\tau} = 1 - e^{-1} \approx 0.63$ 。这个参数反映了系统的响应速度。 a 越大, τ 越小, 系统的反应速度越快。

(2) **调节时间或者稳定时间(Settling Time):** $T_s = 4\tau = \frac{4}{a}$, 此时 $x(T_s) \approx 0.98$ 。它表示了系统输出与终值之间的差距达到 2% 以内时所需要的时间。在工程中, 可以理解为对系统施加一个阶跃输入后, 系统需要 T_s 的时间达到稳定状态。

在具体工程案例中, 可以通过实验的方法来确定一阶系统的参数。例如针对 4.1 节的牛顿冷却系统, 传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s+K}$, 就可以通过实验的方法测得其冷却系数 K 。假设以下场景: 将一杯初始状态为 $x(0)=0^\circ\text{C}$ 的水在 $t=0$ 时刻放入一个环境温度为 20°C 的空间中, 此时的输入即为阶跃输入, $u(t) = \begin{cases} 20, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 。测得这个水的温度经过 5 小时之后达到了 19.6°C (为最终稳态值 20°C 的 98%)。因此可以得到这杯水在这一空间中的时间常数为 $\tau = \frac{5}{4} = 1.25$, 其所对应的冷却系数 $K = \frac{1}{1.25} = 0.8$ 。

使用相轨迹的方法可以得到同样的结论, 设系统的状态变量为系统输出 $z(t)=x(t)$, 式(4.2.1)可以写成

$$\frac{dz(t)}{dt} + az(t) = au(t) \quad (4.2.16)$$

当对其施加单位阶跃输入时 ($u(t)=1$), 式(4.2.16)可以整理为

$$\frac{dz(t)}{dt} = a - az(t) \quad (4.2.17)$$

令 $\frac{dz(t)}{dt} = 0$, 可以得到其平衡点位置 $z_f = 1$ 。当 $a > 0$ 时, 其对应的相轨迹如图 4.2.6 所示, 可以得出平衡点 z_f 是一个稳定平衡点, 无论初始状态在其左边还是右边, 都将回到平衡位

置。读者可以自己推导当 $a < 0$ 时的情况。

通过以上分析可以发现,使用传递函数和相轨迹得出的结论是一致的。其中,传递函数和拉普拉斯变换可以方便地得到一阶系统的时域响应解析式。而通过相轨迹可以直观、快速地分析一阶系统对初始条件的响应。

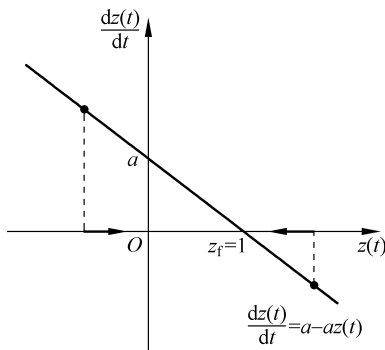


图 4.2.6 一阶系统单位阶跃响应的相轨迹



一阶系统的时域响应内容请扫描此二维码观看。

4.3 案发时间揭秘

在 4.2 节中,我们充分讨论了一阶系统的冲激响应和阶跃响应。现在回到本章开始的案例,揭秘案发的时间。式(4.1.5)所对应的系统框图如图 4.3.1 所示。

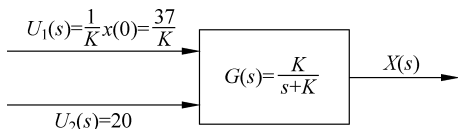


图 4.3.1 系统框图

系统的输入分为两部分: 其中 $U_1(s) = \frac{37}{K}$ 是

冲激输入, $U_2(s) = \begin{cases} 20, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 是阶跃输入。因

此,系统的输出是对这两部分输入响应的和(冲激响应加阶跃响应)。

根据式(4.2.12b),输出 $x_1(t) = x_0 e^{-Kt} = 37e^{-Kt}$ 。根据式(4.2.15), $x_2(t) = 20(1 - e^{-Kt})$, 它是 20 倍的单位阶跃响应。 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 如图 4.3.2(a)所示。叠加后的响应为

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 37e^{-Kt} + 20(1 - e^{-Kt}) = 20 + 17e^{-Kt} \quad (4.3.1)$$

$x(t)$ 随时间的变化如图 4.3.2(b)所示。

此时将两个已知条件代入式(4.3.1)(下午 2:30 时体温为 26°C , 下午 3:30 时体温为 25°C), 并设下午 2:30 时已经距离死亡时间过去了 t_1 小时, 可得

$$\begin{cases} 26 = 20 + 17e^{-Kt_1} \\ 25 = 20 + 17e^{-K(t_1+1)} \end{cases} \quad (4.3.2)$$

求解式(4.3.2)所示方程组, 得到

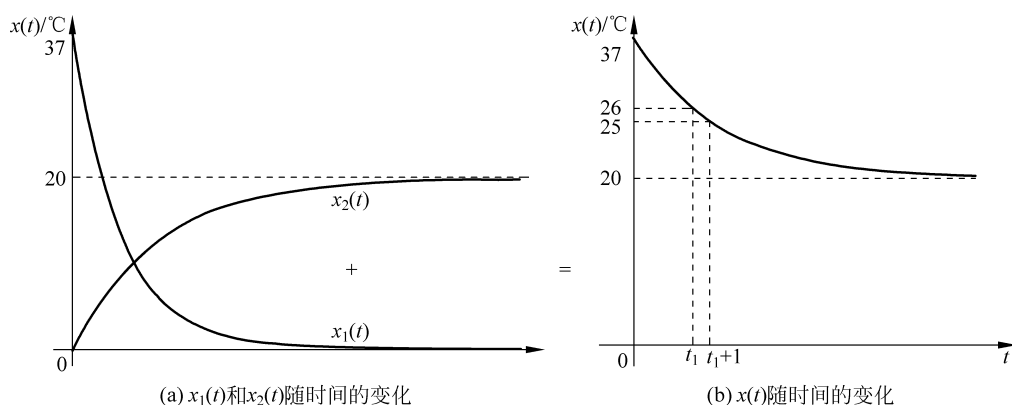


图 4.3.2 式(4.3.1)的输出响应

$$\begin{cases} K = 0.182 \\ t_1 = 5.72 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

式(4.3.3)说明在下午 2:30 的时候,距离死亡时间已经过去了 5.72 小时(5 小时 43 分钟),所以案发时间大概是上午 8:47。

4.4 本章要点总结

• 一阶系统的表达形式:

◦ 微分方程: $\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = au(t)$ 。

◦ 传递函数: $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{a}{s+a}$ 。

◦ 传递函数极点: $s_p = -a$ 。

• 一阶系统的单位冲激响应:

◦ 单位冲激函数: $\begin{cases} \delta(t) = 0, t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$ 。

◦ 系统输出的拉普拉斯变换: $X(s) = \frac{a}{s+a}$ 。

◦ 冲激响应的时域表达: $x(t) = ae^{-at}$ 。

◦ 当 $a > 0$ 时, $s_p < 0$, 系统收敛于 0。当 $a < 0$ 时, $s_p > 0$, 系统趋于负无穷。

◦ 系统对初始条件的响应即冲激响应。

• 一阶系统的单位阶跃响应:

◦ 单位阶跃函数: $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 。

- 系统输出的拉普拉斯变换： $X(s) = \frac{a}{s(s+a)}$ 。
- 冲激响应的时域表达： $x(t) = 1 - e^{-at}$ 。
- 当 $a > 0$ 时, $s_p < 0$, 系统收敛于 1。当 $a < 0$ 时, $s_p > 0$, 系统趋于负无穷。
- 时间常数 $\tau = \frac{1}{a}$, 此时系统输出在终值状态的 63%。
- 调节时间 $T_s = 4\tau = \frac{4}{a}$, 此时系统输出达到了终值的 98%。
- 使用相轨迹法可以直观明了地分析系统对于不同初始条件的响应。