

前面几章讨论的静电场、恒定电场和恒定磁场都是静态场。简单的静态场问题可采用库仑定律、安培力定律进行求解。但是对于更复杂的问题,这些求解方法就很难胜任。讨论静态场边值问题及其解法的意义就在于,为一些复杂的静态场问题提供简单的或者可行的解法。另外,静态场的解必须是唯一的才有实际意义。因此,静态场边值问题的内涵是:在边值确定的情形下,求得静态场的唯一解。不管采用哪种方法,唯一性定理都是其理论基础。

本章将讨论边值问题的分类,证明唯一性定理,讨论镜像法和分离变量法,简单讨论数值解法中的有限差分法。复变函数法和保角变换法在本书中不作讨论。其他数值解法将在第 10 章作概要性说明。

## 5.1 静态场的边值问题及唯一性定理

### 5.1.1 边值问题的分类

已知电荷源、电流源的分布去求解场,这类问题称为**分布问题(distribution problem)**。但有很多情形,只能得知场域  $V$  的边界面  $S$  上某些场量的值,即**边值或边界值(boundary value)**。通过边值求解场域内的场量则称为**边值问题(boundary-value problem)**。静态场的边值问题可以分为三类:

(1) 已知位函数  $\varphi(\mathbf{r}_S)$  在场域  $V$  的边界面  $S$  上各点的值,称之为第一类边界条件,也称之为狄利克雷(Dirichlet)边界条件;

(2) 已知位函数  $\varphi(\mathbf{r}_S)$  在场域  $V$  的边界面  $S$  上各点法向导数值  $\left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_S}$ ,称之为第二类边界条件,也称之为纽曼(Neumann)边界条件;

(3) 已知部分边界面  $S_1$  上位函数  $\varphi(\mathbf{r}_{S_1})$  的值,而另一部分边界面  $S_2$  上已知位函数的法向导数值  $\left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{S_2}}$ ,且  $S=S_1+S_2$ ,称之为第三类边界条件,也称之为混合边界条件。

对于某些问题,场域可能要延伸到无穷远。此时,还需要考虑场量在无穷远处的条件,这类条件称为自然边界条件。例如,电位函数在无穷远处需要满足  $\lim_{r \rightarrow \infty} r\varphi \rightarrow$  有限值。对于轴对称的情形,例如同轴电缆,需要考虑周期性边界条件  $\varphi(\phi+2n\pi)=\varphi(\phi)$ 。另外,场量还

必须满足静态场条件下分界面上的边界条件,也可称为衔接边界条件。

### 5.1.2 唯一性定理

**唯一性定理 (uniqueness theorem)** 指出: 在给定边界条件下(同时还应当满足自然边界条件和分界面上边界条件), 满足拉普拉斯方程(或泊松方程)的解是唯一的。也就是说, 不管采用哪种方法求解, 静态场的解唯一。下面用反证法证明唯一性定理。

假设场域  $V$  内的解不唯一, 即存在两个位函数  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  都满足泊松方程

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{和} \quad \nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

令  $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$ , 于是在场域  $V$  内有

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon} + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

根据格林第一恒等式, 即  $\int_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$ , 可以令  $\varphi = \varphi_0$  以及  $\psi = \varphi_0$ , 因此得到

$$\int_V (\nabla \varphi_0 \cdot \nabla \varphi_0 + \varphi_0 \nabla^2 \varphi_0) dV = \oint_S \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} dS \quad (5.1.1)$$

考虑到  $\nabla^2 \varphi_0 = 0$ , 式(5.1.1)可改写为

$$\int_V |\nabla \varphi_0|^2 dV = \oint_S \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} dS \quad (5.1.2)$$

另外, 由于  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  都满足边界条件, 因此可以分三种边界条件考虑。

(1) 第一类边界条件:  $\varphi_0|_S = \varphi_1|_S - \varphi_2|_S = 0$ ;

(2) 第二类边界条件:  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_S - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_S = 0$ ;

(3) 第三类边界条件:  $\varphi_0|_{S_1} = \varphi_1|_{S_1} - \varphi_2|_{S_1} = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \Big|_{S_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{S_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{S_2} = 0$ 。

可以看出, 不管哪一种边界条件, 都有

$$\int_V |\nabla \varphi_0|^2 dV = \oint_S \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} dS = 0$$

考虑到  $|\nabla \varphi_0|^2$  的非负性, 就必须要求  $\nabla \varphi_0 = 0$ , 即  $\varphi_0$  在整个场域内为常数  $C$ ,

$$\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = C$$

对于第一类边界条件, 在  $S$  上  $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , 故  $C$  为 0, 亦即  $\varphi_1 = \varphi_2$ , 此时解唯一。对于第二类边界条件, 假设  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  的参考点取在同一位置, 那么在该点有  $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , 故  $C$  为 0。因此  $\varphi_1 = \varphi_2$ , 此时解同样唯一。对于第三类边界条件,  $\varphi_1|_{S_1} = \varphi_2|_{S_1}$ , 故  $C$  为 0。同理,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , 此时解仍然唯一。综合三种情况可以看出, 不管是给定哪种边界条件, 解都是唯一的。

唯一性定理为解的正确性提供了一种验证方法。如果不同的方法得出的解不唯一, 那么至少有一种解法是错误的。实际上, 唯一性定理也是数值方法的理论基础。



动画 10

## 5.2 镜像法

**镜像法 (method of images)** 是解析解法的一种,也可以称为等效法。在静态场中,位于导体附近的电荷源或者电流源会在导体表面感应出表面电荷或者感应电流。感应电荷或电流也将产生场量。如果直接用库仑定律或安培力定律计算将十分困难,原因是导体表面的感应电荷或者感应电流分布比较复杂,一般情况下不容易确定。但是,如果电荷或者电流比较简单,在一些具有结构对称的情形下,可以采用等效的方法去表示感应电荷或者电流,即镜像电荷和镜像电流(或称为镜像源)。利用镜像源进行求解是一种特殊的解析解法,它既能保证解的唯一性,又能满足导体的边界条件。

镜像源必须满足以下条件:

- (1) 所有镜像源必须位于所求场域之外;
- (2) 镜像源的数量、位置以及大小需要通过边界条件确定。

下面将重点讨论平面、球面、柱面和介质分界面等几种特殊的情形。电流元的镜像只在平面分界情形做简单讨论。



视频 21

### 5.2.1 导体平面镜像

#### 1. 电荷的镜像

如图 5.2.1 所示,一点电荷  $q$  置于无限大导体平面上方  $h$  处,导体平面接地,且其上方是介电常数为  $\epsilon$  的无限大均匀各向同性的介质。以垂直于导体平面且穿过点电荷的矢量为  $z$  轴,以平行于导体表面为  $x$  轴。由于系统具有圆对称性,因此  $x$  轴的方向可以在导体平面内任意选取而不失一般性。

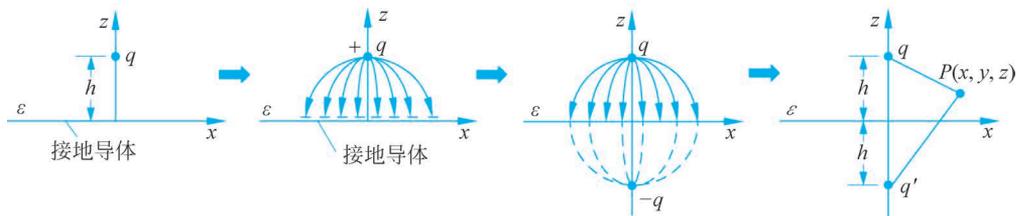


图 5.2.1 点电荷在接地导体平面的镜像电荷分析

由于电荷会在接地导体表面感应出极性相反的电荷。因此,从直观上考虑,镜像电荷应当与原始电荷的极性相反。下面详细分析镜像电荷的求解过程。

求解条件:

- (1) 在  $z > 0$  的空间内,电场由电荷  $q$  及其感应电荷产生;
- (2) 在  $z > 0$  的空间内,除点  $(0, 0, h)$  外,其他点都满足拉普拉斯方程;
- (3) 在  $z = 0$  的平面,电位为 0。

接下来将理想导体移去,而将理想导体的感应电荷等效为电荷  $q'$ ,该电荷位于  $z = -h$  处。那么在  $z > 0$  的空间内任一点  $P(x, y, z)$  的电位为

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}}, \quad z > 0$$

注意,此时  $q'$  的作用空间只在  $z > 0$  的上半空间。根据边界条件,在  $z = 0$  的平面,电位为 0, 于是可得

$$\varphi(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} = 0$$

也就得到  $q' = -q$ 。说明镜像电荷与原电荷关于导体平面对称,且带电极性相反,大小相等。于是上半空间的电位可写为

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right], \quad z > 0$$

根据导体与介质分界面上的边界条件,可求出导体平面上的感应电荷密度

$$\rho_s = -\epsilon \left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

因为此时,正  $z$  方向就是表面的法向。导体平面上的总感应电荷为

$$q_{in} = \int_S \rho_s dS = -\frac{qh}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = -\frac{qh}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = -q \quad (5.2.1)$$

可见,导体平面上的总感应电荷恰好与所设置的镜像电荷相等。接地导体平面好像一面镜子,电荷  $-q$  就是原电荷  $q$  的镜像,故称之为镜像电荷。

而在  $z < 0$  的空间内,电场为 0。其镜像电荷就在原电荷所在位置,且带电极性相反,大小相等。这与静电屏蔽是一致的。

现在把问题延伸一下,点电荷变成无限长线电荷  $\rho_1$ ,其他条件不变,如图 5.2.2 所示。此时结构对称性发生改变,当  $x$  坐标固定时,该结构对任意  $y$  坐标的电位都是相等的。假设镜像线电荷的位置仍在  $z = -h$  处,而电荷密度为  $\rho'_1$ ,那么在  $z > 0$  的空间范围内任一点  $P(x, y, z)$  的电位为

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}} + \frac{\rho'_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}}, \quad z > 0$$

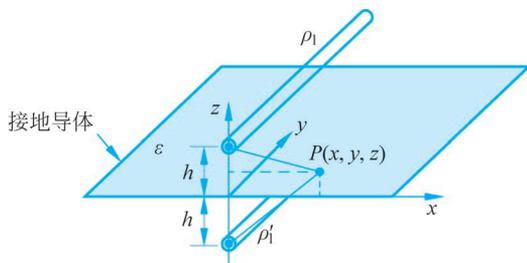


图 5.2.2 线电荷在接地导体平面的镜像电荷分析

根据边界条件,在  $z = 0$  的平面,电位为 0,于是

$$\varphi(x, 0, 0) = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{\rho'_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

也就得到  $\rho'_1 = -\rho_1$ 。说明镜像线电荷与原电荷关于导体平面对称,且带电极性相反,线电荷密度大小相等。

## 2. 电流的镜像

电流元也有镜像,镜像的原则是在接地导体平面产生的磁感应强度  $\mathbf{B}$  的法向分量  $B_n$  为 0, 电场强度  $\mathbf{E}$  的切向分量  $E_t$  为 0。水平放置的电流元,其镜像电流元与原电流元大小相等,方向相反,所处位置与原电流元关于导体平面对称,如图 5.2.3(a)所示;垂直放置的电流元,其镜像电流元与原电流元大小相等,方向相同,所处位置与原电流元关于导体平面对称。镜像电流元在分析置于地表面附近的线天线时十分方便。

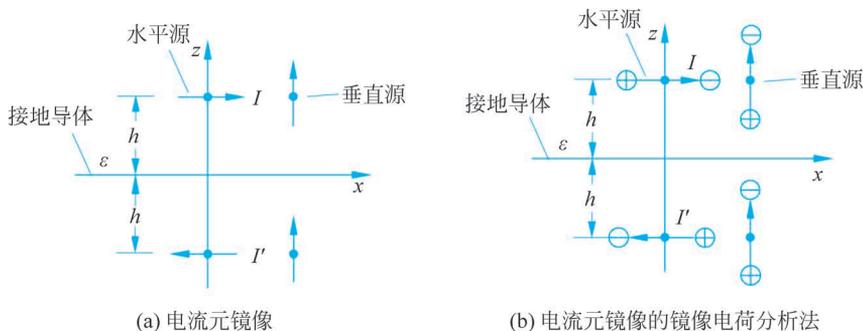


图 5.2.3 线电流元接地导体平面的镜像电流分析

对于水平放置的电流元

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\mathbf{l} \times \mathbf{e}_{R+}}{R^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_{R-}}{R^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I l \mathbf{e}_x \times (x, y, z-h)}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' l \mathbf{e}_x \times (x, y, z+h)}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

在接地平面,有  $z=0$ , 因此

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I l \mathbf{e}_x \times (x, y, -h)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' l \mathbf{e}_x \times (x, y, h)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \frac{(0, I h - I' h, I y + I' y)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

要保证磁感应强度的法向分量为 0, 需要  $I y + I' y = 0$ , 即  $I' = -I$ 。

实际上,更简便的分析方法是将电流元看成正负电极,电流元起始端为正电荷,箭头端为负电荷,如图 5.2.3(b)所示。利用电荷的镜像原理可以很容易判断电流元的镜像。对于斜放的电流元,可以将电流元分解为水平和垂直两个方向。

对于磁流元在电导体表面的镜像、电流元和磁流元在磁导体表面的镜像,在本章最后设置了相关习题,请读者自行推导。

## 5.2.2 导体球面镜像

### 1. 点电荷对接地导体球面的镜像

假设有一如图 5.2.4 所示的接地金属球,球的半径为  $a$ ,球外距离球心  $D$  处有一点电荷  $q$ 。求球外任意一点的电位。

点电荷  $q$  靠近金属球时,会在金属球表面感应出与之极性相反的电荷,且这部分电荷呈非均匀分布,即靠近点电荷  $q$  的一端电荷密度更大一些。那么,整个球的等效电荷就应当更靠近点电荷  $q$ 。考虑到球的对称性,把这些等效电荷(即镜像电荷  $q'$ )置于  $z$  轴且离球心距离为  $d$ 。那么,球外任意一点  $P(r, \theta)$  的电位为



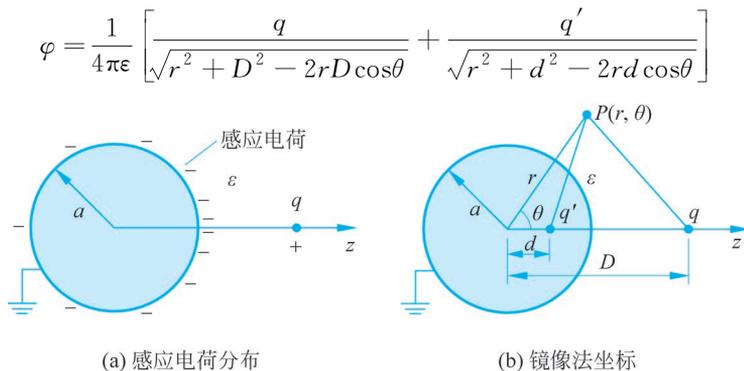


图 5.2.4 点电荷在接地导体球面的镜像电荷分析

边界条件：导体球接地，即在球面  $r=a$  处  $\varphi=0$ 。于是有

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{q}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} \right] = 0$$

由此得

$$(a^2 + D^2)q'^2 - (a^2 + d^2)q^2 - 2a\cos\theta(Dq'^2 - dq^2) = 0$$

因上式对任意  $\theta$  都成立，所以必须满足两个条件：

- (1)  $\cos\theta$  的系数为 0；
- (2)  $\cos\theta$  为 0 时其他部分也必须为 0。于是可得

$$\begin{cases} (Dq'^2 - dq^2) = 0 \\ (a^2 + D^2)q'^2 - (a^2 + d^2)q^2 = 0 \end{cases}$$

由此可得两组解

$$q' = -\frac{a}{D}q, \quad d = \frac{a^2}{D} \quad (5.2.2)$$

和

$$q' = -q, \quad d = D$$

第二组解无意义，需舍去。

于是，球外的电位函数为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta}} - \frac{a}{\sqrt{(Dr)^2 + a^4 - 2rDa^2\cos\theta}} \right], \quad r > a$$

球面上的感应电荷面密度为

$$\rho_s = -\epsilon \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{q(D^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + D^2 - 2aD\cos\theta)^{3/2}} \quad (5.2.3)$$

说明接地导体球面上的感应电荷分布不均匀，靠近点电荷  $q$  的一侧密度更大。这与静电分析的结果是一致的。

另外，导体球面上的总感应电荷为

$$q_{in} = \int_S \rho_s dS = -\frac{q(D^2 - a^2)}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 \sin\theta d\theta d\phi}{(a^2 + D^2 - 2aD\cos\theta)^{3/2}} = -\frac{a}{D}q \quad (5.2.4)$$

也就是总的感应电荷等于镜像电荷，相当于把总的感应电荷全部放置在镜像位置。

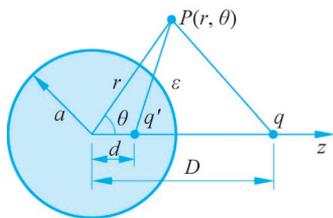


图 5.2.5 点电荷在非接地导体球面的镜像电荷分析

## 2. 点电荷对不接地导体球面的镜像

如果导体不接地,那么金属球的电位就不为 0,但它仍然是一个等位体,如图 5.2.5 所示。另外,由于金属球未接地,因此整个球面的净电荷为 0。

可以把问题分成两步:

- (1) 先利用接地金属球的方法求解镜像电荷  $q'$ ,此时整个球面的电位为 0;
- (2) 利用静电场叠加原理,在球心处放置一镜像电荷  $q''$ ,该镜像电荷能把导体表面的电位提高并保证球面为等位面。

根据第(1)步,得到

$$q' = -\frac{a}{D}q, \quad d = \frac{a^2}{D} \quad (5.2.5)$$

根据第(2)步,必须保证导体内净电荷为 0,这样才能保证通过球面的电通量为 0。于是得到

$$q'' = -q' = \frac{a}{D}q \quad (5.2.6)$$

于是,球外的电位函数为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta}} - \frac{a}{\sqrt{(Dr)^2 + a^4 - 2rDa^2\cos\theta}} + \frac{a}{Dr} \right], \quad r > a$$



视频 23

## 5.2.3 导体圆柱面的镜像

### 1. 线电荷对导体圆柱面的镜像

假设有一如图 5.2.6 所示的接地金属柱,柱的半径为  $a$ 。在圆柱外距离圆柱对称轴  $D$  处,有一电荷密度为  $\rho_1$  并与柱平行的无限长线电荷。求圆柱外任意一点的电位。

考虑到金属圆柱的柱对称性,镜像电荷必须是无限长电荷源。假设镜像电荷的线密度为  $\rho_1'$ ,并且镜像电荷与圆柱平行。同时,设镜像电荷  $\rho_1'$ 距圆柱的轴线为  $d$ 。此时,空间任意一点  $P(\rho, \phi)$ 的电位函数应为  $\rho_1$  和  $\rho_1'$ 在该点产生的电位之和,即

$$\varphi = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + D^2 - 2\rho D \cos\phi}} + \frac{\rho_1'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos\phi}} + c$$

此处,  $c$  为一常数。由于导体圆柱接地,所以当  $\rho = a$  时,电位应为零,即

$$\varphi = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 + D^2 - 2aD \cos\phi}} + \frac{\rho_1'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos\phi}} + c = 0$$

要求解镜像电荷的线密度和位置,可以采用两种方法。

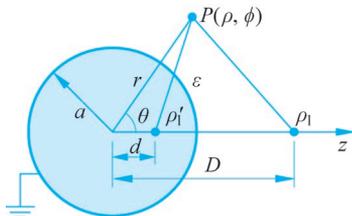


图 5.2.6 线电荷在接地导体柱面的镜像电荷分析

方法一：将电位表达式规整之后可得

$$(a^2 + D^2 - 2aD\cos\phi)^{\rho_1} \cdot (a^2 + d^2 - 2ad\cos\phi)^{\rho_1'} = c'$$

或写成

$$\frac{(a^2 + D^2 - 2aD\cos\phi)^{\rho_1}}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\phi)^{-\rho_1'}} = c'$$

此处,  $c'$  为一常数。上式对任意的  $\phi$  都成立, 必须满足两个条件

$$\rho_1' = -\rho_1 \quad (5.2.7)$$

和

$$\frac{a^2 + D^2}{a^2 + d^2} = \frac{2aD\cos\phi}{2ad\cos\phi} = \frac{D}{d}$$

即

$$Dd^2 - (a^2 + D^2)d + a^2D = 0$$

于是又得到

$$d = \frac{a^2}{D} \quad \text{或者} \quad d = D \quad (5.2.8)$$

第二个解没有意义, 故舍去。于是可得,  $c = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D}{a}$ 。

方法二：当  $\rho = a$  时, 电位为 0 对任意的  $\phi$  都应成立。也就是电位在任意  $\phi$  方向保持不变, 所以电位表达式对  $\phi$  的导数应当为 0, 由此可得

$$\rho_1 D(a^2 + d^2) + \rho_1' d(a^2 + D^2) - 2aDd(\rho_1 + \rho_1')\cos\phi = 0$$

所以有

$$\begin{cases} \rho_1 D(a^2 + d^2) + \rho_1' d(a^2 + D^2) = 0 \\ \rho_1 + \rho_1' = 0 \end{cases}$$

由此可求得关于镜像电荷的两组解

$$\rho_1' = -\rho_1, \quad d = \frac{a^2}{D} \quad (5.2.9)$$

和

$$\rho_1' = -\rho_1, \quad d = D \quad (5.2.10)$$

第二组解无意义, 故舍去。同样可求得  $c = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D}{a}$ 。

导体圆柱面外的电位函数为

$$\varphi = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt{D^2\rho^2 + a^4 - 2\rho Da^2\cos\phi}}{\sqrt{a^2\rho^2 + a^2D^2 - 2\rho Da^2\cos\phi}}$$

导体圆柱面上的感应电荷面密度为

$$\rho_s = -\epsilon \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \right|_{\rho=a} = -\frac{\rho_1(D^2 - a^2)}{2\pi a(a^2 + D^2 - 2aD\cos\phi)}$$

导体圆柱面上单位长度的感应电荷为

$$q_{\text{in}} = \int_S \rho_s dS = -\frac{\rho_l(D^2 - a^2)}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{a d\phi}{a^2 + D^2 - 2aD\cos\phi} = -\rho_l \quad (5.2.11)$$

同样可见, 导体圆柱面上单位长度的感应电荷与镜像电荷也相等。

## 2. 两平行圆柱导体的电场

在通信系统中, 平行双导线可以近似为无限长圆柱导体。为计算平行双导线的电场分布, 可以采用镜像法。平行双导线的等效模型如图 5.2.7 所示。

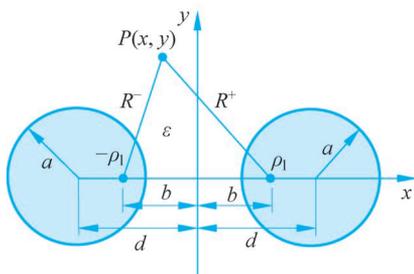


图 5.2.7 平行双导体传输线的镜像电荷分析

假设导线的半径都为  $a$ , 它们的轴线间距为  $2d$ 。同样地, 由于两圆柱带电导体的电场互相影响, 导体表面上的电荷分布不均匀, 相对的一侧电荷密度较大, 而相背的一侧电荷密度较小。根据线电荷对导体圆柱的镜像法, 可以设想圆柱的表面电荷为集中在某一位置的线电荷, 其线密度分别为  $\rho_l$  和  $-\rho_l$ , 且两线电荷相距为  $2b$ 。因此,  $\rho_l$  和  $-\rho_l$  实际上可以看成是互为镜像的线电荷。由此可得任意一点  $P$  的电位  $\varphi$  为

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R^-}{R^+}$$

式中

$$\begin{cases} R^- = \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \\ R^+ = \sqrt{(x-b)^2 + y^2} \end{cases}$$

电轴的位置可由圆柱导体的镜像表示,  $d' = d - b$ ,  $D' = d + b$ , 故有

$$(d-b)(d+b) = a^2$$

由此解得

$$b = \sqrt{d^2 - a^2} \quad (5.2.12)$$

## 5.2.4 介质平面的镜像

### 1. 点电荷对电介质分界平面的镜像

如图 5.2.8 所示, 介质分界面为  $xy$  平面, 在  $z > 0$  和  $z < 0$  区域的介电常数分别为  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ 。在电介质 1 中有一点电荷  $q$ , 与分界面距离为  $h$ 。在求解  $z > 0$  区域的电位时, 假设镜像电荷位于  $z = -h$  处, 带电量为  $q'$ ; 在求解  $z < 0$  区域的电位时, 假设镜像电荷位于  $z = h$  处, 带电量为  $q''$ 。

于是在介质 1 中的电位可以表示为

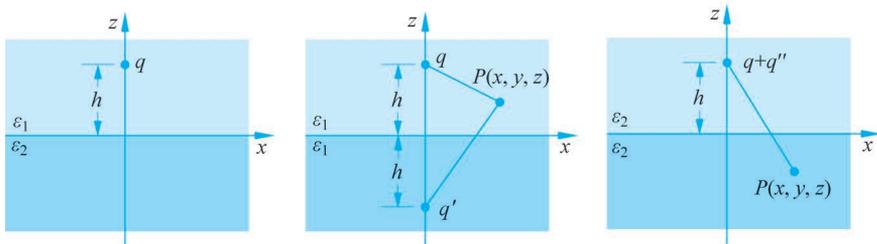


图 5.2.8 点电荷对电介质分界平面的镜像电荷分析

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[ \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right], \quad z > 0$$

在介质 2 中的电位可以表示为

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q + q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}}, \quad z < 0$$

在介质分界平面  $z=0$  处, 电位应满足边界条件:

- (1) 电位连续;
- (2) 法向电位移矢量连续。

即

$$\begin{cases} \varphi_1|_{z=0} = \varphi_2|_{z=0} \\ D_{1n}|_{z=0} = D_{2n}|_{z=0} \quad (\epsilon_1 E_{1n}|_{z=0} = \epsilon_2 E_{2n}|_{z=0}) \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} \varphi_1|_{z=0} = \varphi_2|_{z=0} \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \end{cases}$$

于是得到

$$\begin{cases} \frac{q + q'}{\epsilon_1} = \frac{q + q''}{\epsilon_2} \\ q - q' = q + q'' \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \\ q'' = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \end{cases} \quad (5.2.13)$$

## 2. 线电流对磁介质分界平面的镜像

与静电问题类似, 当线电流位于两种不同磁介质分界平面附近时, 也可用镜像法求解磁场分布问题。

如图 5.2.9 所示, 磁导率分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$  的两种均匀磁介质的分界面是无限大平面, 在介质 1 中有一电流元  $I l$  平行于分界平面, 且与分界平面相距  $h$ 。此时, 在电流元  $I l$  产生的磁场作用下, 磁介质被磁化, 在不同磁介质的分界面上和介质中都有磁化电流分布。空间中的磁场由电流元  $I l$  和磁化电流共同产生。依据镜像法的基本思想, 在计算磁介质 1 中的磁场时, 用置于介质 2 中的镜像线电流元  $I' l$  来代替磁化电流, 并把整个空间看作充满磁导率

为  $\mu_1$  的均匀介质。

在计算磁介质 2 中的磁场时,用置于介质 1 中的镜像线电流  $I''l$  元来代替磁化电流,并把整个空间看作充满磁导率为  $\mu_2$  的均匀介质。

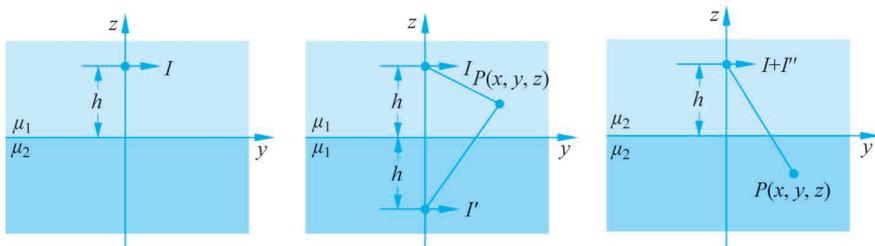


图 5.2.9 线电流对磁介质分界平面的镜像电流分析

因为设定电流沿  $y$  轴方向流动,所以矢量磁位只有  $y$  分量,即  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_y A$ 。则磁介质 1 和磁介质 2 中任意一点  $P(x, z)$  的矢量磁位分别为

$$A_1 = \frac{\mu_1 I l}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} + \frac{\mu_1 I' l}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}}, z > 0 \quad (5.2.14)$$

和

$$A_2 = \frac{\mu_2 (I + I'')}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}}, z < 0 \quad (5.2.15)$$

所设置的镜像电流  $I'$  和  $I''$  的取值需通过磁介质分界面上的边界条件来确定。在磁介质分界面  $z=0$  处,矢量磁位应满足边界条件

$$\begin{cases} A_1|_{z=0} = A_2|_{z=0} \\ \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \end{cases}$$

将式(5.2.14)和式(5.2.15)代入上式,得

$$\begin{cases} \mu_1 (I + I') = \mu_2 (I + I'') \\ I - I' = I + I'' \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \\ I'' = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \end{cases} \quad (5.2.16)$$

### 5.3 分离变量法

**分离变量法(separation of variables)**也称为本征函数法或者级数法。它是求解边值问题的一种重要的解析方法。其基本思想是:把待求位函数表示为几个本征函数的乘积,其中每一个本征函数仅是一个坐标变量的函数,利用这几个本征函数代入偏微分方程可实现变量分离,并且将原偏微分方程分离为几个常微分方程。分别求解这些常微分方程要简单

得多,再利用边界条件便可确定其中的常数,从而求得位函数。

本节主要介绍直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系下,利用分离变量法求解二维拉普拉斯方程的边值问题。

### 5.3.1 直角坐标系中的分离变量法

在实际应用中,矩形波导、矩形谐振腔等器件可采用直角坐标系下的分离变量法分析。在直角坐标系下,拉普拉斯方程可表示为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

如果将  $\varphi(x, y, z)$  表示为三个一维函数  $X(x)$ 、 $Y(y)$  和  $Z(z)$  的乘积,即

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (5.3.1)$$

则有

$$Y(y)Z(z) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + X(x)Y(y) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

用  $X(x)Y(y)Z(z)$  除上式各项,得

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0 \quad (5.3.2)$$

上式中每一项都只与一个坐标变量有关。因此为了保证在任意坐标系下都成立,必须满足每一项都等于一个常数,分别对应  $-k_x^2$ 、 $-k_y^2$  和  $-k_z^2$ 。因为如果不是常数,说明各函数之间还存在相关性,就不能称之为分离变量。于是得到

$$\begin{cases} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0 \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_z^2 Z(z) = 0 \end{cases} \quad (5.3.3)$$

同时满足

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (5.3.4)$$

如果是二维情形,即  $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$ ,那么  $k_x^2 + k_y^2 = 0$ ,或者  $k_x^2 = k^2, k_y^2 = -k_x^2 = -k^2$ ,那么就有

$$\begin{cases} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0 \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - k^2 Y(y) = 0 \end{cases}$$

(1) 当  $k^2 = 0$  时,上式的解为

$$\begin{cases} X(x) = A_0 x + B_0 \\ Y(y) = C_0 y + D_0 \end{cases}$$

(2) 当  $k_x^2 > 0$  时,其解的形式为



视频 24

$$\begin{cases} X(x) = A \sin kx + B \cos kx \\ Y(y) = C e^{ky} + D e^{-ky} \end{cases}$$

于是

$$\varphi(x, y) = (A \sin kx + B \cos kx)(C e^{ky} + D e^{-ky})$$

(3) 当  $k_y^2 > 0$  时, 其解的形式又为

$$\begin{cases} X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx} \\ Y(y) = C \sin ky + D \cos ky \end{cases}$$

于是

$$\varphi(x, y) = (A e^{kx} + B e^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky)$$

在求解边值问题时, 为了满足给定的边界条件, 分离常数  $k$  通常取一系列特定的值  $k_n (n=1, 2, \dots)$ , 而待求位函数  $\varphi(x, y)$  则由所有可能解的线性组合构成, 称为位函数的通解, 即

$$\varphi(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)](C_n e^{k_n y} + D_n e^{-k_n y}) \quad (5.3.5)$$

或者

$$\varphi(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{k_n x} + B_n e^{-k_n x}) [C_n \sin(k_n y) + D_n \cos(k_n y)] \quad (5.3.6)$$

通解中分离常数的选取以及待定常数均由给定的边界条件确定。

**例 5.3.1** 如图 5.3.1 所示结构, 由  $z=0$ 、 $x=a$  和  $x=0$  三个平面围成上半区域, 其中  $z=0$  平面在  $0 < x < a$  范围内电位恒为  $U$ , 其他两个平面的电位为 0, 求该区域内的电位函数。

**解:** 由于在  $y$  方向上无穷大, 因此位函数与  $y$  无关, 也可以假设  $\varphi(x, z) = X(x)Z(z)$ 。于是得到

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

由前面的推导可知, 该位函数的通解为

$$\varphi(x, z) = (Ax + B)(Cz + D) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)](C_n e^{k_n z} + D_n e^{-k_n z})$$

边界条件 1: 当  $z \rightarrow \infty$  时,  $\varphi(x, \infty) \rightarrow 0$ , 此时必然要求  $C=0$ 、 $D=0$  以及  $C_n=0$ , 于是

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \cos(k_n x) + B'_n \sin(k_n x)] e^{-k_n z}$$

边界条件 2: 当  $x=0$  时,  $\varphi(0, z) = 0$ , 即

$$\varphi(0, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n e^{-k_n z}$$

故  $A'_n = 0$ , 即得到

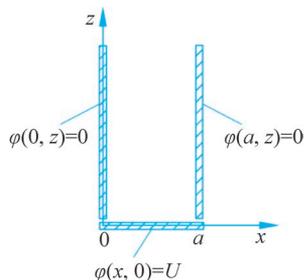


图 5.3.1 例 5.3.1 示意图

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin(k_n x) e^{-k_n z}$$

边界条件 3: 当  $x=a$  时,  $\varphi(a, z)=0$

$$\varphi(a, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin(k_n a) e^{-k_n z}$$

故  $k_n a = n\pi$ , 即  $k_n = \frac{n\pi}{a}$ , 于是

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-\frac{n\pi}{a}z}$$

边界条件 4: 当  $z=0$  时,  $\varphi(x, 0)=U$

$$\varphi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = U$$

利用傅里叶变换, 可得

$$B'_n = \frac{\int_0^a U \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx}{\int_0^{2a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx} = (-1)^{n-1} \frac{2U}{n\pi}$$

故

$$\varphi(x, z) = \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-\frac{n\pi}{a}z}$$

### 5.3.2 圆柱坐标系中的分离变量法

在实际应用中, 圆波导、圆柱谐振腔等器件具有圆柱形边界条件, 可以采用圆柱坐标系下的分离变量法分析。此时拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \varphi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.3.7)$$

令位函数  $\varphi(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ , 代入式(5.3.7)可得

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{\rho^2}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

在这里, 先讨论位函数与  $z$  坐标无关的情形。对于位函数与  $z$  坐标有关的情形, 将留在 8.4 节一并讨论。此时, 拉普拉斯方程简化为

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = 0 \quad (5.3.8)$$

利用与直角坐标系相似的方法, 取  $\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -n^2$ , 也就是

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + n^2 \Phi(\phi) = 0 \\ \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] - n^2 R(\rho) = 0 \end{cases} \quad (5.3.9)$$

(1) 当  $n=0$  时, 方程的解为

$$\begin{cases} \Phi(\phi) = A_0 + B_0 \phi \\ R(\rho) = C_0 + D_0 \ln \rho \end{cases}$$

于是

$$\varphi(\rho, \phi) = (A_0 + B_0 \phi)(C_0 + D_0 \ln \rho)$$

对于许多具有圆柱面边界的问题,位函数  $\varphi(\rho, \phi)$  是变量  $\phi$  的周期函数,其周期为  $2\pi$ ,即  $\varphi(\rho, \phi + 2m\pi) = \varphi(\rho, \phi)$ ,其中  $m=0,1,2,\dots$ ,故必须满足  $B_0=0$ 。

(2) 当  $n \neq 0$  时,方程的解为

$$\begin{cases} \Phi(\phi) = A \cos(n\phi) + B \sin(n\phi) \\ R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n} \end{cases}$$

于是

$$\varphi(\rho, \phi) = [A \cos(n\phi) + B \sin(n\phi)](C\rho^n + D\rho^{-n})$$

因此,圆柱区域中二维拉普拉斯方程的通解为

$$\varphi(\rho, \phi) = C_0 + D_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)](C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \quad (5.3.10)$$

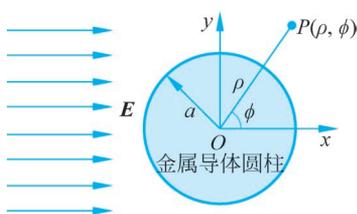


图 5.3.2 例 5.3.2 示意图

式中的待定常数由具体问题所给定的边界条件确定。

**例 5.3.2** 在均匀外电场  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0$  中,放置一半径为  $a$  的无限长金属导体圆柱,见图 5.3.2。圆柱的轴与电场垂直,柱外为空气。试求导体圆柱外面的电位函数和电场强度。

**解:** 由于金属导体圆柱外无电荷分布,因此电位函数  $\varphi$  满足拉普拉斯方程,且与  $z$  轴无关。因此,通解应当为

$$\varphi(\rho, \phi) = C_0 + D_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)](C_n \rho^n + D_n \rho^{-n})$$

边界条件 1: 当  $\rho \rightarrow \infty$  时,感应电荷的作用基本可以忽略,电位函数基本由外电场决定,即

$$\varphi(\rho, \phi) = -E_0 x = -E_0 \rho \cos \phi \quad (\rho \rightarrow \infty)$$

因此,必须满足  $C_0$  和  $D_0$  均为 0。由于不含  $\sin$  函数,因此  $B_n$  为 0。又由于只含  $n=1$  的  $\cos$  函数,因此  $A_n=0(n \neq 1), C_n=0(n \neq 1), D_n=0(n \neq 1)$ 。故得到

$$\varphi(\rho, \phi) = \cos \phi (C' \rho + D' \rho^{-1})$$

边界条件 2: 当  $\rho=a$  时,柱面为等位体,即

$$\left. \frac{\partial \varphi(\rho, \phi)}{\partial \phi} \right|_{\rho=a} = -\sin \phi (C'a + D'a^{-1}) = 0$$

于是得到  $D' = -a^2 C'$ , 即

$$\varphi(\rho, \phi) = C' \rho \cos \phi + C' a^2 \rho^{-1} \cos \phi$$

再次利用边界条件 1, 可得  $C' = -E_0$ 。故导体圆柱外的电位函数为

$$\varphi(\rho, \phi) = -E_0 (\rho - a^2 \rho^{-1}) \cos \phi$$

导体圆柱外的电场为

$$\mathbf{E}_{\text{外}}(\rho, \phi) = -\nabla \varphi(\rho, \phi) = -\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \mathbf{e}_\phi \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \phi}$$

$$= e_\rho E_0 (1 + a^2 \rho^{-2}) \cos \phi - e_\phi E_0 (1 - a^2 \rho^{-2}) \sin \phi$$

导体圆柱表面感应电荷的面密度为

$$\rho_S = \epsilon_0 e_\rho \cdot \mathbf{E}_{\text{外}}(\rho, \phi) \Big|_{\rho=a} = 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi$$

### 5.3.3 球坐标系中的分离变量法\*

在实际应用中,球面波展开是具有球面边界的边值问题,这一类问题宜采用球坐标系中的分离变量法求解。球坐标系下拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (5.3.11)$$

令位函数  $\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ , 代入式(5.3.11), 得

$$\frac{\sin^2 \theta}{R(r)} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right] + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right] + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0$$

由于在球坐标系下的分离变量法比较复杂,故这里只讨论位函数与坐标变量  $\phi$  无关的情形。这类情形是具有轴对称性的情形,其拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right] + \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right] = 0$$

令

$$\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right] = -k^2$$

则可分离成为两个常微分方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right] - k^2 R(r) = 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right] + k^2 \Theta(\theta) = 0 \end{cases} \quad (5.3.12)$$

方程(5.3.12)的第二式称为勒让德方程。若取  $k^2 = n(n+1) (n=0, 1, 2, \dots)$ , 则其解为

$$\Theta(\theta) = A_n P_n(\cos \theta) + B_n Q_n(\cos \theta)$$

式中,  $P_n(\cos \theta)$  称为第一类勒让德函数,  $Q_n(\cos \theta)$  称为第二类勒让德函数。考虑到:

- (1)  $\theta$  的取值范围为  $[0, \pi]$ ;
- (2)  $Q_n(\cos \theta)$  在  $\theta=0$  和  $\pi$  时是发散的。

因此,当场域包含  $\theta=0$  和  $\pi$  的点时,必须取  $B_n=0$ , 即

$$F(\theta) = A_n P_n(\cos \theta)$$

$P_n(\cos \theta)$  又称为勒让德多项式,其一般表达式为

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} [(\cos^2 \theta - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

前几个勒让德多项式分别为

$$\begin{cases} P_0(\cos \theta) = 1 \\ P_1(\cos \theta) = \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \\ P_3(\cos \theta) = \frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \end{cases}$$

当  $k^2 = n(n+1)$  时, 方程(5.3.12)第一式的解为

$$R(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}$$

于是得到方程(5.3.11)的特解为

$$\varphi(r, \theta) = [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta)$$

而其通解为

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta) \quad (5.3.13)$$

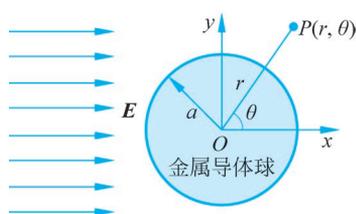


图 5.3.3 例 5.3.3 示意图

式中的待定常数由具体问题所给定的边界条件确定。

**例 5.3.3** 如图 5.3.3 所示, 在均匀外电场  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0$  中, 放置一半径为  $a$  的金属导体球, 球外为空气, 试求导体球外面的电位函数和电场强度。

**解:** 由于金属导体球外无电荷分布, 因此电位函数  $\varphi$  满足拉普拉斯方程, 且与  $\phi$  无关。因此, 通解应当为

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta)$$

边界条件 1: 当  $r \rightarrow \infty$  时, 感应电荷的作用基本可以忽略, 电位函数基本由外电场决定, 即

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta \quad (r \rightarrow \infty)$$

因此, 只含有一阶勒让德方程, 于是必须满足  $C_n = 0 (n \neq 1), D_n = 0 (n \neq 1)$ 。故得到

$$\varphi(r, \theta) = \cos\theta (C' r + D' r^{-2})$$

边界条件 2: 当  $r = 0$  时, 球面为等位体, 即

$$\left. \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{r=a} = -\sin\theta (C' a + D' a^{-2}) = 0$$

于是得到  $D' = -a^3 C'$ , 即

$$\varphi(r, \theta) = C' r \cos\theta + C' a^3 r^{-2} \cos\theta$$

再次利用边界条件 1, 可得  $C' = -E_0$ 。故导体球外的电位函数为

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 (r - a^3 r^{-2}) \cos\theta$$

导体柱外的电场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{外}}(r, \theta) &= -\nabla \varphi(r, \theta) = -\mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \mathbf{e}_\theta \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \\ &= \mathbf{e}_r E_0 (1 + 2a^3 r^{-3}) \cos\theta - \mathbf{e}_\theta E_0 (1 - a^3 r^{-3}) \sin\theta \end{aligned}$$

导体柱表面感应电荷的面密度为

$$\rho_S = \epsilon_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_{\text{外}}(r, \theta) \Big|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$$

## 5.4 有限差分法\*

镜像法和分离变量法都属于求解电磁场边值问题的解析解法 (analytical method), 即最终结果是一个描述电磁场空间分布的确定解析表示式。在这里, 简单介绍一种数值解法 (numerical method), 即有限差分法 (finite difference method)。这种方法可以解决边界形状过于复杂的实际问题, 这类问题很难有解析解。对于静态场, 有限差分法是比较容易理解的



数值方法。第10章还会简要介绍其他各种数值方法。

利用有限差分法计算静态场边值问题,需先将偏微分方程变换成差分方程迭代式。因此主要分为以下几步。

(1) **求解区域网格化**。如图5.4.1所示,将求解区域 $S$ 划分成网格,网格的边长为 $h$ ,对网格节点进行编号,以 $i$ 和 $j$ 为下标。

(2) **求解区域拉普拉斯方程离散化**。在求解区域 $S$ 内,电位函数 $\varphi(x,y)$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.4.1)$$

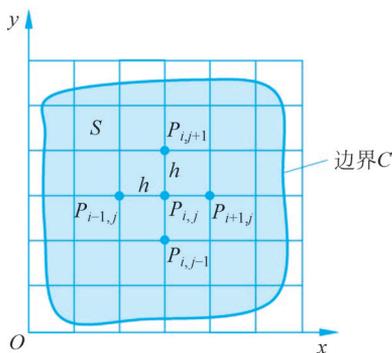


图 5.4.1 有限差分法网格剖分图

用 $\varphi_{i,j}$ 表示点 $P_{i,j}(x_i, y_j)$ 处的电位值。将电位函数进行泰勒展开,得到与节点 $P_{i,j}(x_i, y_j)$ 直接相邻节点上的电位表达式

$$\varphi_{i-1,j} = \varphi(x_i - h, y_j) = \varphi_{i,j} - h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \dots \quad (5.4.2)$$

$$\varphi_{i+1,j} = \varphi(x_i + h, y_j) = \varphi_{i,j} + h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \dots \quad (5.4.3)$$

$$\varphi_{i,j-1} = \varphi(x_i, y_j - h) = \varphi_{i,j} - h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_{i,j} - \dots \quad (5.4.4)$$

$$\varphi_{i,j+1} = \varphi(x_i, y_j + h) = \varphi_{i,j} + h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_{i,j} + \dots \quad (5.4.5)$$

将式(5.4.2)与式(5.4.3)相加,并略去比 $h^2$ 更高阶的项,可得

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{h^2} \quad (5.4.6)$$

同理,由式(5.4.4)与式(5.4.5)可得到

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}}{h^2} \quad (5.4.7)$$

将式(5.4.6)与式(5.4.7)代入式(5.4.1),可得到节点 $P_{i,j}(x_i, y_j)$ 处的差分方程

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4} (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1})$$

这就是二维拉普拉斯方程的差分形式。

(3) **应用边界条件进行初始赋值。**先对场域内的节点赋予迭代初值  $\varphi_{i,j}^0$ , 这里上标 0 表示 0 次(初始)赋值。边界的赋值按初始边界条件处理, 其他地方的初始值可以都设为 0。已知的边界条件经离散化后转换为边界节点上的固定取值, 不参与第(4)步中的迭代。若场域的边界正好落在网格节点上, 则将这些节点赋予边界上的位函数值。一般情况下, 场域的边界不一定正好落在网格节点上, 最简单的近似处理就是将最靠近边界的节点作为边界节点, 并将位函数的边界值赋予这些节点。

(4) **迭代。**利用下式进行迭代

$$\varphi_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}[\varphi_{i-1,j}^{(k)} + \varphi_{i,j-1}^{(k)} + \varphi_{i+1,j}^{(k)} + \varphi_{i,j+1}^{(k)}], \quad i, j = 1, 2, \dots$$

其中,  $k=0, 1, 2, \dots$ 。迭代停止的条件是第  $k$  次迭代以后, 所有内节点的相邻两次迭代值之间的最大误差不超过允许范围, 即

$$\max_{i,j} |\varphi_{i,j}^{(k)} - \varphi_{i,j}^{(k-1)}| < E$$

这里  $E$  是预定的允许误差。此时迭代终止, 而第  $k$  次的迭代结果即可视为最终数值解。

(5) **扩展: 超松弛迭代。**为了提高迭代效率, 也可采用超松弛迭代, 即

$$\tilde{\varphi}_{i,j}^{(k+1)} = \varphi_{i,j}^{(k)} + \alpha[\tilde{\varphi}_{i,j}^{(k+1)} - \varphi_{i,j}^{(k)}]$$

此时的迭代包含了第  $k$  次的值和第  $k+1$  次周围四个节点的值, 并且

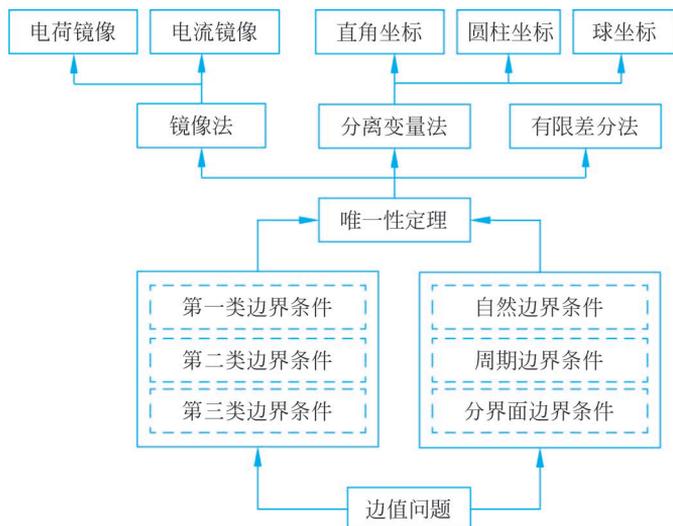
$$\tilde{\varphi}_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}[\varphi_{i-1,j}^{(k+1)} + \varphi_{i,j-1}^{(k+1)} + \varphi_{i+1,j}^{(k)} + \varphi_{i,j+1}^{(k)}], \quad i, j = 1, 2, \dots$$

而  $\alpha$  的最佳取值可以是

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sin \frac{\pi}{p-1}}$$

$p$  为网格划分每边的节点数。

## 本章知识结构



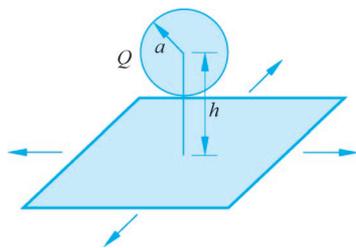
### 习题

5.1 求直角、 $60^\circ$ 角、 $45^\circ$ 角的镜像电荷,试探索其中的规律。如果劈尖为  $70^\circ$ 角,镜像电荷又会有什么特点?

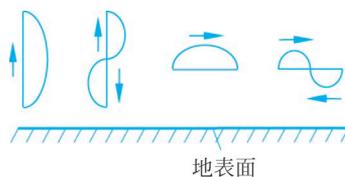
5.2 求磁流元在电导体表面的镜像、电流元和磁流元在磁导体表面的镜像。

5.3 如题 5.3 图所示,有一半径为  $a$  的金属导体球,带电量为  $Q$ 。将其置于无穷大金属表面上方  $h$  处,求该球体的镜像电荷大小及位置。

5.4 广播天线经常会竖直或水平架设在地表面附近。此时地表面可近似为无限大导体平面,请画出题 5.4 图情形的镜像电流。箭头代表电流方向。

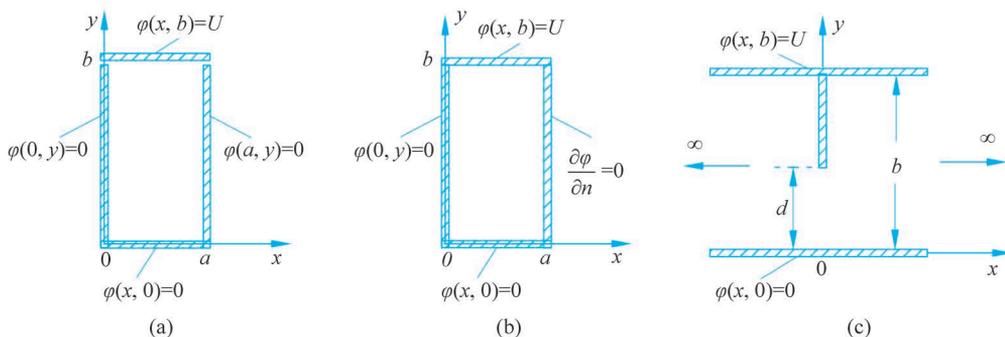


题 5.3 图



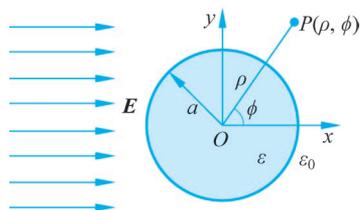
题 5.4 图

5.5 在直角坐标系下,利用分离变量法求解题 5.5 图中各图的电位分布。



题 5.5 图

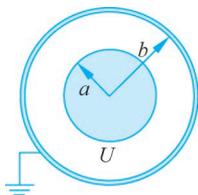
5.6 在圆柱坐标系下,利用分离变量法求解题 5.6 图中的电位分布。介质柱体的半径为  $a$ ,介电常数为  $\epsilon$ 。外电场  $E$  沿  $x$  方向。



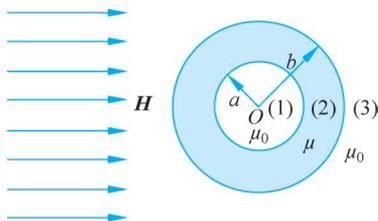
题 5.6 图

5.7 在圆柱坐标系下,利用分离变量法求解题 5.7 图中同轴电缆的电位分布。同轴电缆的内、外半径分别为  $a$  和  $b$ ,内导体电位为  $U$ 。

5.8 如题 5.8 图所示,在均匀外磁场  $\mathbf{H}$  中(幅度为  $H_0$ )放置一磁导率为  $\mu$  的无限长磁介质圆柱体,介质分为三个区域。在圆柱坐标系下,利用分离变量法求解腔内的磁场分布。(提示:利用题 5.6 的方法)



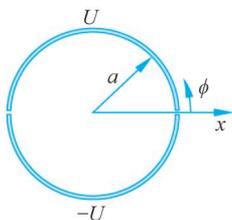
题 5.7 图



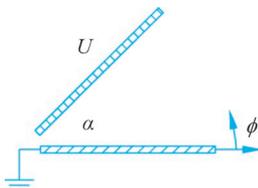
题 5.8 图

5.9 如题 5.9 图所示,无限长切开圆柱管的上下部分电位分别为  $U$  和  $-U$ ,圆柱管半径为  $a$ 。在圆柱坐标系下,利用分离变量法求解其电位分布。

5.10 在圆柱坐标系下,利用分离变量法求解题 5.10 图中的电位分布。



题 5.9 图

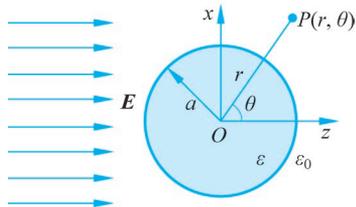


题 5.10 图

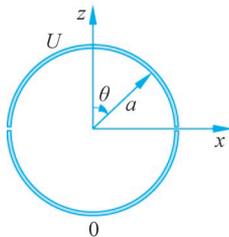
5.11 在球坐标系下,利用分离变量法求解题 5.11 图的电场分布。介质球体的半径为  $a$ ,介电常数为  $\epsilon$ 。外电场  $\mathbf{E}$  沿  $z$  方向。

5.12 在球坐标系下,利用分离变量法求解题 5.12 图中对半切球体的电位分布。上半球电位为  $U$ ,下半球电位为  $0$ 。

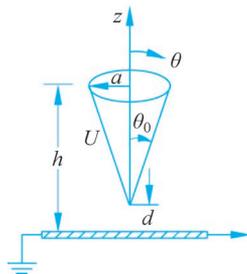
5.13 在球坐标系下,利用分离变量法求解题 5.13 图中的电位分布。



题 5.11 图



题 5.12 图



题 5.13 图