

第 3 章

仿射变换

3.1 点和坐标系

1. 点

将点和向量理解为两个不同的概念十分重要。点表示几何世界中某个固定的位置，而向量表示几何世界中两点之间的移动。我们使用不同的符号区分点和向量，向量 $\boldsymbol{v}$ 用黑斜体标记，而点 $\tilde{p}$ 上用波浪号标记。

如果向量表示两点间的移动，向量运算(加法和数乘)则具有显著意义。两个向量的加法运算表示两个移动的连接，将标量乘以一个向量表示移动的增加或减少(以某因子增减)。零向量是一个特殊向量，表示没有移动。

但这些运算对点没有多大意义。两点相加应意味着什么呢？例如，哈佛广场加上肯德尔广场是什么？一个点乘以标量的意义是什么？北极点的 7 倍是多少？是否存在一个作用不同的其他零点呢？

然而，点的减法运算确有意义。两点相减时，即获得第二点到第一点间的移动，

$$\tilde{p} - \tilde{q} = \boldsymbol{v}$$

相反，如果从一点开始，沿某向量移动，即可得另一点

$$\tilde{q} + \boldsymbol{v} = \tilde{p}$$

点的线性变换是有意义的，如一点围绕某定点的旋转。然而，点的平移同样具有意义(对向量而言却没有意义)。为表示平移，需引入仿射变换(affine transform)的概念，并使用 4×4 矩阵实现该变换，这些矩阵不仅便于计算此处的仿射变换，而且为介绍后文的相机投影运算做了铺垫(参见第 10 章)。

2. 坐标系

在仿射空间中，首先从原点 $\tilde{o}$ 开始，向其增添一些线性组合的向量，从而表示任意点 $\tilde{p}$ 。使用坐标 c_i 和向量基表示

$$\tilde{p} = \tilde{o} + \sum_i c_i \mathbf{b}_i = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \tilde{o}] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{f}'^t \mathbf{c}$$

其中, $1\tilde{o}$ 即为 $\tilde{o}$ 。如下表示称为一个仿射坐标系(affine frame)。

$$[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \tilde{o}] = \vec{f}'^t$$

与基类似,该坐标系由三个向量和一个点组成。

为确定坐标系中一点,可以使用一个 4D 坐标向量(译者注:即为齐次坐标,点 (x, y, z) 的齐次坐标定义为 (x_h, y_h, z_h, h) , 其中 $h \neq 0, x_h = hx, y_h = hy, z_h = hz$), 其中第四项为 1。为表示仿射坐标系中的向量,可以使用一个第四项为 0 的坐标向量(即仅为基向量的组合)。这种 4D 坐标向量(以及 4×4 矩阵)的几何表示方法有助于我们在第 10 章中对针孔相机进行建模。

3.2 仿射变换和 4×4 矩阵

与线性变换类似,可以通过在 4D 坐标向量和坐标系之间放置适当的矩阵来定义点的仿射变换。

将仿射矩阵(affine matrix)表示为如下 4×4 矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

点 $\tilde{p} = \vec{f}'^t \mathbf{c}$ 的仿射变换如下

$$[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \tilde{o}] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \tilde{o}] \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

或简写为

$$\vec{f}'^t \mathbf{c} \Rightarrow \vec{f}'^t \mathbf{A} \mathbf{c}$$

如下乘法给出了一个第四项为 1 的 4D 向量坐标,由此得出上述变换中的右侧表达式即表示一个有效的点

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

另外,如下乘法给出了一个有效坐标系,由三个向量和一个点组成

$$[b'_1 \quad b'_2 \quad b'_3 \quad \tilde{o}'] = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \tilde{o}] \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中, $0\tilde{o}$ 即为 $\mathbf{0}$ 。注意,如果矩阵的最后一行不是 $[0,0,0,1]$,得到的结论也通常无效。

与线性变换类似,对坐标系进行如下仿射变换

$$[b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \tilde{o}] \Rightarrow [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \tilde{o}] \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

或简写为

$$\vec{f}' \Rightarrow \vec{f}' A$$

3.3 点的线性变换

假设使用一个 3×3 的矩阵表示线性变换,将其插至一个 4×4 矩阵的左上角,并使用这个较大的矩阵对点(或坐标系)进行变换。

$$[b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \tilde{o}] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \tilde{o}] \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ e & f & g & 0 \\ i & j & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这与 c_i 线性变换后的效果相同,如果点 $\tilde{p}$ 相对于原点 $\tilde{o}$ 移动了一个向量 $\mathbf{v}$,效果则等同于对该向量进行线性变换。因此,如果 3×3 矩阵为旋转矩阵,该旋转变换将围绕原点进行(见图 3.1)。对于点的线性变换,其坐标原点的位置尤为重要,参见第 4 章。

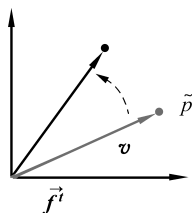


图 3.1 点的线性变换,通过变换其距原点的偏移向量实现

简单地说,使用如下 4×4 矩阵表示线性变换:

$$L = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

其中, L 是一个 4×4 矩阵, I 是一个 3×3 矩阵, 右上角的 $\mathbf{0}$ 是 3×1 的零矩阵, 左下角的 $\mathbf{0}$ 是 1×3 的零矩阵, 右下角的 1 是一个标量。

3.4 点的平移

点的平移变换非常重要, 且是非线性的(参见习题 2.4)。相对于线性变换, 仿射变换的主要作用是描述平移。如果使用如下变换

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \tilde{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \tilde{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其对坐标的效果为

$$c_1 \Rightarrow c_1 + t_x$$

$$c_2 \Rightarrow c_2 + t_y$$

$$c_3 \Rightarrow c_3 + t_z$$

将平移变换简写为

$$T = \begin{bmatrix} I & t \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

其中, T 是一个 4×4 矩阵, I 是一个 3×3 的单位矩阵, t 是一个代表平移的 3×1 矩阵, $\mathbf{0}$ 是一个 1×3 的零矩阵, 右下角的 1 是一个标量。

注意, 如果 c 的第四项为 0, 那么它即为一个向量, 而并非一个点, 且不受平移影响。

3.5 综 合

任意仿射矩阵都可以分解成线性变换部分和平移变换部分。

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ e & f & g & 0 \\ i & j & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

或简写为

$$\begin{bmatrix} l & t \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & t \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{TL} \quad (3.2)$$

注意,由于矩阵乘法不满足交换律,所以相乘的顺序十分重要。使用不同的平移矩阵 $\mathbf{T}'$ 也可将仿射矩阵分解为 $\mathbf{A} = \mathbf{LT}'$,但我们不用这种形式。

如果 $\mathbf{A}$ 的线性变换部分 $\mathbf{L}$ 是一个旋转,则写作

$$\mathbf{A} = \mathbf{TR} \quad (3.3)$$

在这种情况下,将矩阵 $\mathbf{A}$ 称为一个刚体矩阵(rigid body matrix),它的变换即为刚体变换(rigid body transform, RBT),这种刚体变换保持向量的点积、基的左右手性、点的距离不变。

3.6 法 向 量

在计算机图形学中,经常根据曲面的法向量确定表面点的遮挡情况,所以对表面上的点进行关于矩阵 $\mathbf{A}$ 的仿射变换时,需了解其法向量的变换过程。

有人认为可以直接将法向量坐标乘以 $\mathbf{A}$,如几何体旋转时,法向量以完全相同的方式旋转。然而,事实上矩阵 $\mathbf{A}$ 并不总适用,例如,在图 3.2 中沿 y 轴挤压球体,实际法向量沿 y 轴拉伸而非收缩。在这里,可以推出适用于所有情况的正确变换。

将光滑曲面上一点的法向量(normal)定义为垂直于该点处切平面的向量,该切平面由向量集合组成,这些向量由(无穷接近地)相邻面上的点作差表示。因此,已知法向量 $\mathbf{n}$ 与表面上两个非常接近的点 $\tilde{p}_1$ 和 $\tilde{p}_2$,则有

$$\mathbf{n} \cdot (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) = 0$$

在某个标准正交坐标系下,即表示为

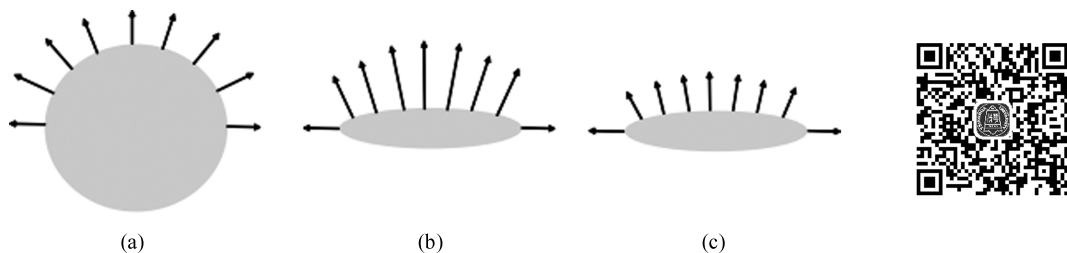


图 3.2 (a)球体及其法向量；(b)球体沿 y 轴收缩，其(未归一化的)法向量沿 y 轴拉伸；
(c)重新归一化球体的法向量后，得到压缩形状的正确单位法向量

$$[nx \quad ny \quad nz \quad *] \left(\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x0 \\ y0 \\ z0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.4)$$

因为第四项将乘以 0, 其数值对结果没有影响, 所以该项用符号 $*$ 代替。

假设使用仿射矩阵 $\mathbf{A}$ 对所有点进行仿射变换, 哪种向量可以与任意切向量保持垂直呢? 将式(3.4)重新表示为

$$([nx \quad ny \quad nz \quad *] \mathbf{A}^{-1}) \left(\mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x0 \\ y0 \\ z0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) = 0$$

假设变换后点的坐标为 $[x', y', z', 1] = \mathbf{A} [x, y, z, 1]^t$, 且 $[nx', ny', nz', *] = [nx, ny, nz, 1] \mathbf{A}^{-1}$, 则有

$$[nx' \quad ny' \quad nz' \quad *] \left(\begin{bmatrix} x1' \\ y1' \\ z1' \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x0' \\ y0' \\ z0' \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

可知, $[nx', ny', nz']^t$ 是几何变换后法向量的坐标(与原坐标成比例关系)。

注意, 由于不考虑 $*$ 的取值, 因此无须考虑 $\mathbf{A}^{-1}$ 的第四列。同时, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{-1}$ 都是仿射矩阵, 其余三列的第四行均为零, 一并省略后简写为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{l} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

已知

$$[nx' \quad ny' \quad nz'] = [nx \quad ny \quad nz] \mathbf{l}^{-1}$$

将矩阵转置可得

$$\begin{bmatrix} nx' \\ ny' \\ nz' \end{bmatrix} = \mathbf{l}^{-t} \begin{bmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{bmatrix}$$

其中, $\mathbf{l}^{-t}$ 是 3×3 的逆转置(等价于转置的逆)矩阵。注意, 如果 $\mathbf{l}$ 是旋转矩阵, 那么也一定是标准正交矩阵, 因此其逆转置即为本身。在这种情况下, 法向量与点的坐标变换一致, 但对于其他的线性变换, 法向量则表现不同(见图 3.2)。另外, $\mathbf{A}$ 的平移部分对其法向量无影响。

习 题

3.1 证明对于实数 α_i , 只要满足 $1 = \sum_i \alpha_i$, 点的运算 $\alpha_1 \tilde{p}_1 + \alpha_2 \tilde{p}_2$ 即有几何意义, 可参考 3.1 节介绍的点和向量的运算。