第3章

机器人动力学

对于动力学，有两个相反的问题：其一是已知机械手各关节的作用力或力矩，求各关节的位移、速度和加速度，求得运动轨迹；其二是已知机械手的运动轨迹，即各关节的位移、速度和加速度，求各关节所需要的驱动力或力矩。

工业机器人动力学分析的两类问题是：

(1) 给出已知的轨迹点的关节位置、速度和加速度，求相应的关节力矩向量$\boldsymbol{\tau}$，用以实现对机器人的动态控制。

(2) 已知关节驱动力矩，求机器人系统的相应各瞬时的运动，用于模拟机器人运动。

分析机器人动力学的方法很多，如拉格朗日方法、牛顿-欧拉方法、高斯方法、凯恩方法等。其中，拉格朗日方法不仅能使求解复杂的系统动力学方程简单，而且容易理解。

3.1 刚体的转动惯量

3.1.1 刚体定轴转动与惯性矩

在物理学中，刚体定轴转动微分方程：

$$\boldsymbol{I}\dot{\omega}=\boldsymbol{\tau} \tag{3.1}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 为绕固定轴的惯性矩(也称为转动惯量)；$\boldsymbol{\tau}$ 是作用在固定轴上的合外力矩。对于一个质量为 m 的质点，其在直线上运动的动力学问题可以用牛顿第二定律描述：

$$m\dot{v}=f \quad 或 \quad m\ddot{x}=f \tag{3.2}$$

比较式(3.1)和式(3.2)可以发现，刚体定轴转动和质点直线运动的动力学方程的形式是完全相同的。因此，$\boldsymbol{I}$ 可以看作刚体定轴转动的惯性质量。

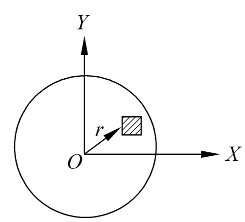

图 3-1 圆盘绕过圆心轴惯性矩

下面以图 3-1 所示质量为 M，半径为 r 的均匀圆盘绕过圆心的 Z 轴的惯性矩计算问题，给出惯性矩的定义：

$$\boldsymbol{I}=\int_V r^2\,\mathrm{d}m \tag{3.3}$$

式(3.3)给出了任意刚体绕固定轴惯性矩的定义，其中 dm 是微元体质量，r 是微元体到转轴的距离，V 是刚体的体积，因此式(3.3)表示在整个体积上积分。

对于图 3-1 所示均匀圆盘，面密度 $\rho=M/(\pi R^2)$，取极坐标微元体，则

$$\boldsymbol{I}=\int_V r^2\mathrm{d}m=\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2\rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=2\pi\rho\frac{R^4}{4}=2\pi\frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}=\frac{1}{2}MR^2 \tag{3.4}$$

例 3-1　如图 3-2 所示匀质杆，质量为 M，杆长为 L，计算绕质心的惯性矩。

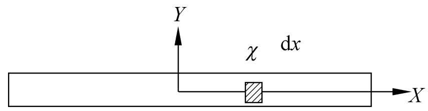

图 3-2　匀质杆绕质心惯性矩

解：匀质杆的线密度 $\rho=M/L$，取微元体 $\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}&=\int_{-L/2}^{L/2}x^2\mathrm{d}m=2\int_0^{L/2}x^2\rho\,\mathrm{d}x=2\rho\frac{(L/2)^3}{3}\\&=2\frac{M}{L}\frac{L^3}{3\cdot 8}=\frac{1}{12}ML^2\end{aligned}$$

平行移轴定理：刚体绕任意平行于质心轴的惯性矩为

$$\boldsymbol{I}={}^C\boldsymbol{I}+Md^2 \tag{3.5}$$

式中，${}^C\boldsymbol{I}$ 表示刚体绕质心轴的惯性矩；M 为刚体质量；d 为两轴之间的距离。若已知刚体绕质心轴的惯性矩，则刚体绕任意平行轴的惯性矩可以非常方便地利用平行移轴定理[式(3.5)]进行计算。

例如，计算图 3-2 所示匀质杆绕杆端点的惯性矩，根据平行移轴定理

$$\boldsymbol{I}={}^C\boldsymbol{I}+Md^2=\frac{1}{12}ML^2+M\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ML^2 \tag{3.6}$$

可以验证，式(3.6)计算结果与采用积分方法相同。

3.1.2　刚体的惯性张量

对于在三维空间自由运动的刚体，存在无穷多个可能转轴，计算绕所有转轴的惯性矩显然是不现实的。因此需要考虑这样的问题：是否存在一个量，它能够表示刚体绕任意转轴的惯性矩？答案是肯定的，该量就是刚体的惯性张量。惯性张量描述了刚体的三维质量分布，若在某坐标系下表示出来，它就是一个 3 阶对称矩阵。图 3-3 所示的一个刚体，其上定义了固连的坐标系$\{A\}$。

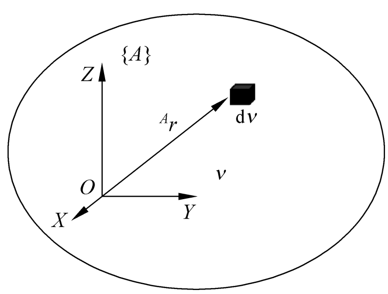

图 3-3　空间刚体的惯性张量

在坐标系$\{A\}$中惯性张量为

$$
{}^{A}\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{xx} & -\boldsymbol{I}_{xy} & -\boldsymbol{I}_{xz} \\ -\boldsymbol{I}_{xy} & \boldsymbol{I}_{yy} & -\boldsymbol{I}_{yz} \\ -\boldsymbol{I}_{xz} & -\boldsymbol{I}_{yz} & \boldsymbol{I}_{zz} \end{bmatrix} \tag{3.7}
$$

惯性张量是一个对称矩阵，各元素的值为

$$
\begin{cases} \boldsymbol{I}_{xx}=\int_V (y^2+z^2)\rho \mathrm{d}v \boldsymbol{I}_{xy}=\int_V xy\rho \mathrm{d}v \\ \boldsymbol{I}_{yy}=\int_V (x^2+z^2)\rho \mathrm{d}v \boldsymbol{I}_{xz}=\int_V xz\rho \mathrm{d}v \\ \boldsymbol{I}_{zz}=\int_V (x^2+y^2)\rho \mathrm{d}v \boldsymbol{I}_{yz}=\int_V yz\rho \mathrm{d}v \end{cases} \tag{3.8}
$$

惯性张量中 $\boldsymbol{I}_{xx}$、$\boldsymbol{I}_{yy}$ 和 $\boldsymbol{I}_{zz}$ 称为惯性矩，交叉项 $\boldsymbol{I}_{xy}$、$\boldsymbol{I}_{xz}$ 和 $\boldsymbol{I}_{yz}$ 称为惯性积。显然，惯性张量中元素的数值与坐标系的选择有关。一般存在某个坐标系，使得交叉项全为 0，该坐标系称为惯性主轴坐标系，坐标轴称为惯性主轴。对于质量均匀分布的规则物体，惯性主轴就是物体的对称轴。

例 3-2 如图 3-4 所示质量均匀分布的长方形刚体，密度为 ρ，质量为 M，计算其惯性张量。

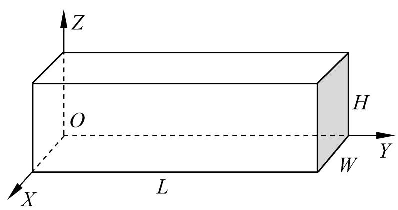

图 3-4 质量均匀分布的长方形刚体

解：单元体 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，根据式(3.8)得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_{xx}&=\int_V (y^2+z^2)\rho \mathrm{d}v=\rho\int_0^H\int_0^L\int_0^W (y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&=\rho W\int_0^H\int_0^L (y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho W\int_0^H (L^3/3+Lz^2)\mathrm{d}z \\
&=\rho W\left(\frac{HL^3}{3}+\frac{LH^3}{3}\right)=\frac{M}{3}(L^2+H^2)
\end{aligned}
$$

同理，可以得到另外两个惯性矩：

$$
\boldsymbol{I}_{yy}=\frac{M}{3}(W^2+H^2),\quad \boldsymbol{I}_{zz}=\frac{M}{3}(W^2+L^2)
$$

下面计算惯性积：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_{xy}&=\int_V xy\rho \mathrm{d}v=\rho\int_0^H\int_0^L\int_0^W xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\int_0^H\int_0^L yW^2/2\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&=\frac{\rho W^2L^2}{4}\int_0^H \mathrm{d}z=\frac{\rho W^2L^2H}{4}=\frac{M}{4}WL
\end{aligned}
$$

同理，可以得到另外两个惯性积：

$$I_{xz}=\frac{M}{4}WH,\quad I_{yz}=\frac{M}{4}HL$$

至此，我们已经计算出了式(3.7)中所有 6 个分量的值。对于惯性张量的计算问题，平行移轴定理也是成立的，下面给出其中两个表达式，其余的 3 个表达式与此类似：

$$^{A}\boldsymbol{I}_{zz}={}^{C}\boldsymbol{I}_{zz}+M(x_c^2+y_c^2)$$

$$^{A}\boldsymbol{I}_{xy}={}^{C}\boldsymbol{I}_{xy}+M(x_c y_c)$$

3.2 刚体动力学

3.2.1 刚体的动能与位能

1. 刚体的动力学方程

拉格朗日函数 L 定义为系统的动能 $\boldsymbol{K}$ 和位能 $\boldsymbol{P}$ 之差，即

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{K}-\boldsymbol{P}\tag{3.9}$$

其中，$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 可以用任何方便的坐标系来表示。

系统动力学方程式，即拉格朗日方程如下：

$$F_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i},\quad i=1,2,\cdots,n\tag{3.10}$$

式中，q_i 为表示动能和位能的坐标；$\dot{q}_i$ 为相应的速度；F_i 为作用在第 i 个坐标上的力或是力矩，是由 q_i 为直线坐标或角坐标决定的。这些力、力矩和坐标称为广义力、广义力矩和广义坐标，n 为连杆数目。

2. 刚体的动能与位能

根据力学原理，对图 3-5 所示的一般物体平动所具有的动能和位能进行计算如下：

$$\boldsymbol{K}=\frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}M_0\dot{x}_0^2$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}k(x_1-x_0)^2-M_1gx_1-M_0gx_0$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}(\dot{x}_1-\dot{x}_0)^2$$

$$\boldsymbol{W}=Fx_1-Fx_0$$

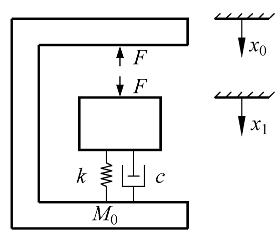

图 3-5 一般物体的动能与位能

式中，$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 分别表示物体所具有的动能、位能、所消耗的能量和外力所做的功；M_0 和 M_1 为支架和运动物体的质量；x_0 和 x_1 为运动坐标；g 为重力加速度；k 为弹簧胡克系数；c 为摩擦系数；F 为外施作用力。对于这一问题，存在两种情况：

(1) $x=0$，x_1为广义坐标：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial K}{\partial x_1}+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1}+\frac{\partial P}{\partial x_1}=\frac{\partial W}{\partial x_1}$$

其中，左式第一项为动能随速度(或角速度)和时间的变化；第二项为动能随位置(或角度)的变化；第三项为能耗随速度变化；第四项为位能随位置的变化。右式为实际外加力或力

矩。表示为一般形式：

$$M_1\ddot{x}_1+c_1\dot{x}_1+\mathrm{d}x_1=F+M_1g$$

(2) $x_0=0$，x_0 和 x_1 均为广义坐标，有下式：

$$M_1\ddot{x}_1+c(\dot{x}_1-\dot{x}_0)+k(x_1-x_0)-M_1g=F$$

$$M_0\ddot{x}_0+c(\dot{x}_1-\dot{x}_0)-k(x_1-x_0)-M_0g=-F$$

或用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix}M_1 & 0\\ 0 & M_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c & -c\\ -c & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F\\ -F\end{bmatrix}$$

3.2.2 拉格朗日方程

1. 单摆拉格朗日方程

单摆由一根无质量杆末端连接一集中质量 m，杆长为 l，其上作用力矩 τ，试建立系统的动力学方程，如图 3-6 所示。

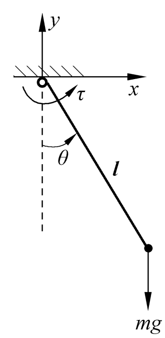

图 3-6 单摆

选择 θ 为描述单摆位置的广义坐标，先用广义坐标表示集中质量的位置，然后再对时间求导得到速度：

$$x=l\sin\theta,\quad y=-l\cos\theta$$

$$\dot{x}=l\dot{\theta}\cos\theta,\quad \dot{y}=l\dot{\theta}\sin\theta$$

系统的动能为

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta)=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

取坐标原点为势能零点，则系统的势能为

$$P=mgy=-mgl\cos\theta$$

系统的拉格朗日函数为

$$l=K-P=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$$

根据上式计算相应的导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial l}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\dot{\theta})=ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\theta}=-mgl\sin\theta$$

代入到拉格朗日方程得系统的动力学方程：

$$\tau=ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta$$

2. 二连杆机械手的拉格朗日方程

下面先来考虑二连杆机械手(图 3-7)的动能和位能。这种运动机构具有开式运动链，与复摆运动有许多相似之处。图中，m_1 和 m_2 为连杆 1 和连杆 2 的质量，且以连杆末端的点质量表示；d_1 和 d_2 分别为两连杆的长度；θ_1 和 θ_2 为 广义坐标；g 为重力加速度。先计算连杆 1 的动能和位能，再计算连杆 2 的动能和位能。

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2,\quad \nu_1 = d_1 \dot{\theta}_1$$

$$P_1 = m_1 g h_1,\quad h_1 = -d_1 \cos\theta_1$$

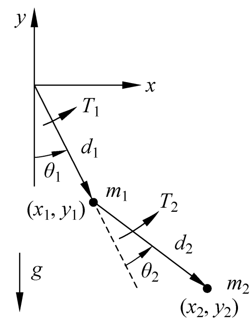

图 3-7　二连杆机械手

先计算连杆 1 的动能 K_1 和位能 P_1：

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1^2,\quad P_1 = -m_1 g d_1 \cos\theta_1$$

再计算连杆 2 的动能 K_2 和位能 P_2：

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2,\quad P_2 = m g y_2$$

式中，

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$
$$x_2 = d_1 \sin\theta_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y_2 = -d_1 \cos\theta_1 - d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

则得

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 d_1 d_2 \cos\theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

$$P_2 = -m_2 g d_1 \cos\theta_1 - m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

二连杆机械手系统的总动能和总位能分别为

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 d_1 d_2 \cos\theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \\ &= -(m_1 + m_2) g d_1 \cos\theta_1 - m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

二连杆机械手系统的拉格朗日函数 L 为

$$\begin{aligned} L &= K - P \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \\ &\quad m_2 d_1 d_2 \cos\theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) g d_1 \cos\theta_1 + m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

对 L 求导数，得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos\theta_2$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos\theta_2 - m_2 l_1 l_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \sin\theta_2 \\ &= [(m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \cos\theta_2] \ddot{\theta}_1 + [m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos\theta_2] \ddot{\theta}_2 - \\ &\quad 2 m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1 - m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}=m_2 l_2^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)+m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos\theta_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}=m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)+m_2 l_1 l_2 \cos\theta_2 \ddot{\theta}_1-m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2}=-m_2 l_1 l_2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\sin\theta_2-m_2 g l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$\begin{aligned}T_1=&[(m_1+m_2)l_1^2+m_2 l_2^2+2m_2 l_1 l_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1+[m_2 l_2^2+m_2 l_1 l_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_2-\\&2m_2 l_1 l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-m_2 l_1 l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2+(m_1+m_2)g l_1\sin\theta_1+m_2 g l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_2=&m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)+m_2 l_1 l_2\cos\theta_2\ddot{\theta}_1-m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\sin\theta_2+\\&m_2 l_1 l_2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\sin\theta_2+m_2 g l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

求得力矩的动力学方程式

$$\begin{bmatrix}T_1\\T_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}\\D_{21}&D_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\\ddot{\theta}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D_{111}&D_{122}\\D_{211}&D_{222}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1^2\\\dot{\theta}_2^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D_{112}&D_{121}\\D_{212}&D_{221}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D_1\\D_2\end{bmatrix}$$

比较可得本系统各系数如下：

有效惯量

$$D_{11}=(m_1+m_2)d_1^2+m_2 d_2^2+2m_2 d_1 d_2\cos\theta_2$$

$$D_{22}=m_2 d_2^2$$

耦合惯量

$$D_{12}=m_2 d_2^2+m_2 d_1 d_2\cos\theta_2=m_2(d_2^2+d_1 d_2\cos\theta_2)$$

向心加速度系数

$$D_{111}=0$$

$$D_{122}=-m_2 d_1 d_2\sin\theta_2$$

$$D_{211}=m_2 d_1 d_2\sin\theta_2$$

$$D_{222}=0$$

哥氏加速度系数

$$D_{112}=D_{121}=-m_2 d_1 d_2\sin\theta_2$$

$$D_{212}=D_{221}=0$$

重力项

$$D_1=(m_1+m_2)g d_1\sin\theta_1+m_2 g d_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$D_2=m_2 g d_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

其中，D_i 表示关节 i 处的重力；D_{ii} 为关节 i 的有效惯量；D_{ij} 为关节 i 和 j 间的耦合惯量；$l_1=d_1$，$l_2=d_2$。

3.3　机械手动力学方程

分析由一组变换描述的任何机械手,求出其动力学方程(图 3-8)。推导过程分 5 步进行:

(1) 计算任一连杆上任一点的速度;

(2) 计算各连杆的动能和机械手的总动能;

(3) 计算各连杆的位能和机械手的总位能;

(4) 建立机械手系统的拉格朗日函数;

(5) 对拉格朗日函数求导,以得到动力学方程式。

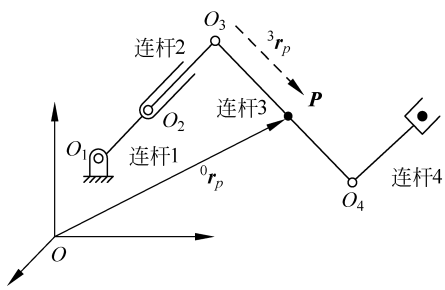

图 3-8　四连杆机械手

1. 速度的计算

连杆 3 上点 $\boldsymbol{P}$ 的速度为

$$ {}^0\boldsymbol{v}_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}^0\boldsymbol{r}_p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_3\,{}^3\boldsymbol{r}_p) = \dot{T}_3\,{}^3\boldsymbol{r}_p $$

对于连杆 i 上任一点的速度为

$$ v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \left(\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right){}^i\boldsymbol{r} $$

$\boldsymbol{P}$ 点的加速度为

$$ \begin{aligned} {}^0\boldsymbol{a}_p &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}^0\boldsymbol{v}_p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{T}_3\,{}^3\boldsymbol{r}_p) = \dot{T}_3\,{}^3\boldsymbol{r}_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_i}\dot{q}_i\right){}^3\boldsymbol{r}_p \\ &= \left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right)({}^3\boldsymbol{r}_p) + \left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 T_3}{\partial q_j\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j\right)({}^3\boldsymbol{r}_p) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_i}\ddot{q}_i\right)({}^3\boldsymbol{r}_p) + \left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 T_3}{\partial q_j\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j\right)({}^3\boldsymbol{r}_p) \end{aligned} $$

速度的平方为

$$ \begin{aligned} ({}^0\boldsymbol{v}_p)^2 &= ({}^0\boldsymbol{v}_p)\cdot({}^0\boldsymbol{v}_p) = \mathrm{Trace}[({}^0\boldsymbol{v}_p)\cdot({}^0\boldsymbol{v}_p)^{\mathrm{T}}] \\ &= \mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_j}\dot{q}_j({}^3\boldsymbol{r}_p)\cdot\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)({}^3\boldsymbol{r}_p)^{\mathrm{T}}\right] \\ &= \mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_j}({}^3\boldsymbol{r}_p)({}^3\boldsymbol{r}_p)^{\mathrm{T}}\frac{\partial T_3^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right] \end{aligned} $$

式中，Trace 表示矩阵的迹。对于 n 阶方程来说，其迹即为它的主对角线上各元素之和。任一机械手上一点的速度平方为

$$v^2=\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2=\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}\dot{q}_j{}^i\boldsymbol{r}\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k}\dot{q}_k{}^ir\right)^{\mathrm{T}}\right]$$

$$=\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_k}{}^i\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k}\right)^{\mathrm{T}}\dot{q}_k\dot{q}_k\right]$$

2. 动能的计算

令连杆 3 上任一质点 $\boldsymbol{P}$ 的质量为 $\mathrm{d}m$，则其动能为

$$\mathrm{d}K_3=\frac{1}{2}v_p^2\mathrm{d}m$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_i}{}^3\boldsymbol{r}_p({}^3\boldsymbol{r}_p)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k}\right)^{\mathrm{T}}\dot{q}_i\dot{q}_k\right]\mathrm{d}m$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_i}({}^3\boldsymbol{r}_p\mathrm{d}m{}^3\boldsymbol{r}_p{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k}\right)^{\mathrm{T}}\dot{q}_i\dot{q}_k\right]$$

任一机械手连杆 i 上位置向量 ${}^i\boldsymbol{r}$ 的质点，其动能为

$$\mathrm{d}K_i=\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}{}^i\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\frac{\partial T_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]\mathrm{d}m$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}({}^i\boldsymbol{r}\mathrm{d}m{}^i\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\frac{\partial T_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]$$

连杆 3 的动能为

$$K_3=\int_{连杆3}\mathrm{d}K_3=\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_j}\left(\int_{连杆3}^{3}\boldsymbol{r}_p^3\boldsymbol{r}_p^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m\right)\left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k}\right)^{\mathrm{T}}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]$$

任何机械手上任一连杆 i 动能为

$$K_i=\int_{连杆i}\mathrm{d}K_i=\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}I_i\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k\right]$$

式中，I_i 为伪惯量矩阵。

具有 n 个连杆的机械手总的功能为

$$K=\sum_{i=1}^{n}K_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}I_i\frac{\partial T_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_k\right]$$

连杆 i 的传动装置动能为

$$K_{ai}=\frac{1}{2}I_{ai}\dot{q}_i^2$$

所有关节的传动装置总动能为

$$K_a=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}I_{ai}\dot{q}_i^2$$

机械手系统(包括传动装置)的总动能为

$$K_t=K+K_a=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_i}I_i\frac{\partial T_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}I_{ai}\dot{q}_i^2$$

3. 位能的计算

一个在高度 h 处质量为 m 的物体，其位能为

$$P=mgh$$

连杆 i 上位置 $^i\boldsymbol{r}$ 处的质点 $\mathrm{d}m$，其位能为

$$\mathrm{d}P_i=-\mathrm{d}m\boldsymbol{g}T_0\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{r}\mathrm{d}m$$

式中，$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}=[g_x,g_y,g_z,1]$。

$$\begin{aligned}P_i&=\int_{\text{连杆}i}\mathrm{d}P_i=-\int_{\text{连杆}i}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{r}\mathrm{d}m=-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i\int_{\text{连杆}i}{}^i\boldsymbol{r}\mathrm{d}m\\&=-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_im_i{}^i\boldsymbol{r}_i=-m_i\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{r}_i\end{aligned}$$

连杆上位置 $^i\boldsymbol{r}$ 处的质点 $\mathrm{d}m$，其位能为

$$\mathrm{d}P_i=-\mathrm{d}m\boldsymbol{g}^{T_0}\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{r}\mathrm{d}m$$

机械手系统的总位能为

$$P=\sum_{i=1}^{n}(P_i-P_{ai})\approx\sum_{i=1}^{n}P_i=-\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{r}_i$$

4. 拉格朗日函数的建立

$$\begin{aligned}L=K_t-P=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}_i}{\partial q_i}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+\\&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}I_{ai}\dot{q}_i^2+\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{r}_i,\quad n=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

5. 动力学方程的推导

再据式(3.2)求动力学方程，先求导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_p}=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}_i}{\partial q_p}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+\\&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}_i}{\partial q_i}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_p}\right)\dot{q}_j+I_{ap}\dot{q}_p\quad p=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

据上式知，$\boldsymbol{I}_i$ 为对称矩阵，即 $\boldsymbol{I}_i^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_i$，所以下式成立：

$$\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}_i}{\partial q_j}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)=\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}\boldsymbol{I}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_j}\right)=\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_j}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_p}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_p}\right)\dot{q}_k+I_{ap}\dot{q}_p$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_p}=&\sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_p}\right)\ddot{q}_k+I_{ap}\ddot{q}_p+\\&\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{T}_i}{\partial q_j\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+\\&\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{T}_i}{\partial q_p\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k\\=&\sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_p}\right)\ddot{q}_k+I_{ap}\ddot{q}_p+2\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{T}_i}{\partial q_j\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_p}=\frac{1}{2}\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{T}_i}{\partial q_j\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=p}^{n}\sum_{i=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}_i}{\partial q_k \partial q_p}\boldsymbol{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{i=p}^{n} m_i \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_p}{}^{i}\boldsymbol{r}_i$$

$$= \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}_i}{\partial q_p \partial q_j}\boldsymbol{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{i=p}^{n} m_i \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_p}{}^{i}\boldsymbol{r}_i$$

具有 n 个连杆的机械手系统动力学方程如下：

$$T_i = \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_j}{\partial q_k}\boldsymbol{I}_j \frac{\partial \boldsymbol{T}_j^{\mathrm{T}}}{\partial q_i}\right)\ddot{q}_k + I_{ai}\ddot{q}_i +$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\sum_{m=1}^{j}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}_i}{\partial q_k \partial q_m}\boldsymbol{I}_j \frac{\partial \boldsymbol{T}_j^{\mathrm{T}}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_m - \sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_i}{}^{i}\boldsymbol{r}_i$$

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}\ddot{q}_j + I_{ai}\ddot{q}_i + \sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} D_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k + D_i$$