

### 3.1 机器推理基础

推理(reasoning)是人脑的重要基本功能,是求解问题的一种重要方法。人工智能的所有领域几乎都与推理有关。因此,要实现人工智能,就必须将推理的功能赋予机器,实现机器推理。机器推理又称为计算机推理或自动推理,它是人工智能的核心内容之一。

#### 3.1.1 思维与数理逻辑

##### 1. 思维及基本规律

人的大脑对事物的认识活动是借助于概念、判断和推理等思维的活动进行的,思维的过程就是运用概念做判断和推理的过程,是人的理性认识。思维对事物的间接反映是通过其他媒介认识客观事物,以及借助于已有的知识、经验和已知的条件推测未知的事物。

思维规律是客观世界的规律在人们意识中的反映,是对事物发展过程中的本质联系和必然趋势的再现。客观事物的规律和思维规律的一致是在认识中实现的,反映同一律是思维的基本规律。

##### 2. 逻辑思维

逻辑思维是人们在认知过程中借助概念、判断、推理等思维形式能动地反映客观现实的

理性认知过程,又称理论思维,它是作为对认知者的思维、思维结构以及起作用的规律的分析而产生和发展起来的。只有经过逻辑思维,人们才能达到对具体对象本质规定的把握,进而认知客观世界。逻辑思维是人的认知的高级阶段,即理性认识阶段,是思维的一种高级形式,是符合世间事物之间关系、合乎自然规律的思维方式。

逻辑思维是确定的、而不是模棱两可的,是前后一贯的、而不是自相矛盾的,是有条理、有根据的思维。在逻辑思维中,要用到概念、判断、推理等思维形式以及比较、分析、综合、抽象、概括等方法,而掌握和运用这些思维形式和方法的程度也就是逻辑思维的能力。

### 3. 数理逻辑

逻辑学是探索、阐述和确立有效推理原则的学科,其最早由古希腊学者亚里士多德创建。用数学的方法来研究推理、证明等问题的学科称为数理逻辑,又称为符号逻辑。数理逻辑的主要分支包括:模型论、证明论、递归论和公理化集合论,它与计算机科学多处重合,原因在于许多计算机科学的先驱者既是数学家,又是逻辑学家。程序语言学和语义学衍生于模型论,而程序验证则衍生于模型论的模型检测。

#### 3.1.2 概念与判断

概念构成判断,判断构成推理,而推理是思维的最高形式。总体上,思维就是由概念、判断和推理这三大要素所决定。

##### 1. 概念

概念是存在于人大脑意识中的对象,只有本质的属性才能将一类对象与其他对象区别开来,概念能够有效地区别对象。概念的内涵和外延是其最基本的逻辑特征,内涵反映了概念中对象的本质属性,人们习惯上将内涵称为含义;外延是指具有概念所反映的本质属性的对象,例如,人的内涵是指能够使用工具劳动的动物,外延是指世界上所有人。

(1) 概念间的关系。在逻辑学的思维规律研究中,概念之间的关系是基于外延角度考虑,也就是说,概念是外延间的关系,主要分为4种,即全同关系、从属关系、交叉关系和全异关系,以欧拉图表示的概念间的关系如图3-1所示。

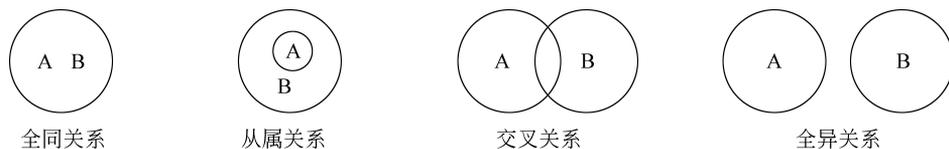


图 3-1 概念间的关系

(2) 根据外延的数量,概念可以分为单独概念和普遍概念。

(3) 根据指向的是某类事物还是该类事物以外的事物,又可以将概念分为正概念和负概念。

##### 2. 判断

判断是思维的核心部分,其含义是根据一定的先知条件,通过既有的知识、以思维进行判定、推断得出结论的能力。判断是对思维对象是否存在、是否具有某种属性以及事物之间是否具有某种关系的肯定或否定。显然,没有判断就无法进行正常的解释活动。

### 3.1.3 推理及其分类

推理方法是一种符号主义的方法,人类使用符号方法来研究形式逻辑,就发展出了数理逻辑。在人工智能中,数理逻辑可用于知识表示与基于知识的推理,并构造智能系统。

#### 1. 推理

推理是人类求解问题的主要思维方法,是按照某种策略从已有事实和知识出发推出结论的过程,是通过一个或几个被认为是正确的陈述、声明或判断达到另一真理的行为,而该真理被相信是从前面的陈述、声明或判断中得出的。

在人工智能中,推理是从某些前提产生结论的行为。推理由判断组成,一个推理至少包含两个判断:一个已知判断和一个新判断。由已知判断推出未知的新判断是推理的主要特征,已知的判断与新的判断之间必有一定的关系,这种关系就是前提与结论之间的逻辑关系。各种不同的推理形式简称为论式,每种论式都有自己的推理规则。推理凭借推理规则将前提和结论两部分连接而构成,前提、结论、推理规则是推理的三个基本要素。

#### 2. 基于产生式规则的推理

利用产生式规则可以实现有前提条件的操作,也可以实现逻辑推理。实现操作的方法是在测试一条规则的前提条件满足时,就执行其后部的行为。利用产生式规则实现逻辑推理的方法是在有事实能够与某规则的前提匹配时,就得到该规则后部的结论,表示如下。

$$\frac{A \rightarrow B}{\frac{A}{B}}$$

这里的大前提就是一个产生式规则  $A \rightarrow B$ ,小前提就是证据事实是  $A$ ,结论是  $B$ 。上面的式子也就是基于产生式规则的一般推理模式。

#### 3. 推理的分类

人类的智能活动呈现出多种思维方式,人工智能是人类智能的模拟,相应地也就出现了多种推理方式。

##### 1) 基于前提与结论之间的蕴含程度划分

根据前提与结论之间的蕴含程度可将推理分为确定性推理和不确定性推理。

(1) 确定性推理:推理所用的知识与证据都是确定的,推出的结论也是确定的,其结论或者为真或者为假。

(2) 不确定性推理:推理所用的知识与证据不都是确定的,推出的结论也是不确定的。不确定性推理主要包括基于概率论的似然推理和基于模糊逻辑的模糊推理。

##### 2) 基于逻辑思维方式划分

逻辑思维是分析事物的因果关系,基于思维方式不同可将推理划分为演绎推理、归纳推理和类比推理。3.1.4 节将详细介绍。

##### 3) 基于前提的数量划分

根据前提的数量多少,推理可分为直接推理和间接推理两类。

(1) 直接推理:只有一个前提的推理。例如,前提是一个性质判断的直接推理;前提是

一个关系判断的直接推理；前提是一个假言判断的直接推理等。

(2) 间接推理：由两个或两个以上的前提推出结论的推理。例如，由  $A=B$ 、 $B=C$  和  $C=D$  这三个前提推出结论  $A=D$ 。

#### 4) 基于结论是否递增划分

将推理方法按照推理过程中推理出的结论是否单调递增，可将推理划分为单调推理和非单调推理。

(1) 单调推理：在推理的过程中，随着推理的方向向前推进和新的前提知识的加入，推理出来的结论逐步接近终极目标。多个命题的演绎推理就属于单调推理。

(2) 非单调推理：在推理的过程中，随着新的知识的加入，需要否定已经推理出来的结论，将推理回退到前面的某一步，重新开始。

#### 5) 基于是否使用启发性知识划分

基于是否使用启发性知识可将推理划分为启发式推理和非启发式推理。

(1) 启发式推理：使用启发式的规则和策略的推理过程。

(2) 非启发式推理：没有使用启发式的规则和策略的推理过程。

#### 6) 基于推理方向划分

根据推理方向不同，可将推理分为正向推理、反向推理和混合推理，用于控制推理进行的策略。

(1) 正向推理：是事实驱动推理，由已知事实得出结论。

(2) 反向推理：是目标驱动推理，以某个假设作为出发点。

(3) 混合推理：分为有先正而后逆向和先逆向而后正向两种方式。先正而后逆向是先进行正向推理，获得某个目标，然后再用逆向推理证实该目标；先逆向而后正向是先假设一个目标进行逆向推理，然后再利用逆向推理中得到的目标进行正向推理。

基于不同依据而划分的推理分类如图 3-2 所示。

实际上，一个推理可以分属不同的种类。例如，三段论推理属于演绎推理，也属于必然性推理，还属于间接推理。

### 3.1.4 逻辑推理

逻辑思维可以分析事物的因果关系，依据逻辑进行推理主要有演绎推理、归纳推理和类比推理。

#### 1. 演绎推理

##### 1) 演绎推理的定义

演绎推理是从一般性的前提出发，通过推导演绎具体陈述或个别结论的过程。演绎推理采用自上而下的逻辑，常用来寻求以现象证明理论，使用形式逻辑并在逻辑上产生结果。

演绎推理存在以下几种定义：

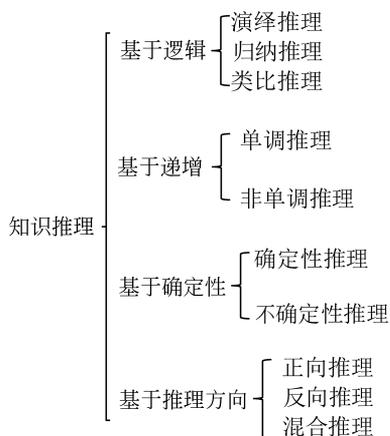


图 3-2 推理分类

- (1) 是从一般到特殊的推理；
- (2) 是前提蕴含结论的推理；
- (3) 是前提和结论之间具有必然联系的推理。

演绎推理的逻辑形式对人的思维保持严密性、一贯性有着不可替代的校正作用,这是因为演绎推理保证推理有效的根据并不在于它的内容,而在于它的形式。演绎推理的最典型、最重要的应用是逻辑证明和数学证明。

## 2) 演绎推理的形式

演绎推理主要有三段论推理、假言推理、选言推理、关系推理等形式。

(1) 三段论推理。三段论是由两个含有一个共同项的性质判断前提得出一个新的性质判断为结论的演绎推理,它是演绎推理的一般模式,包含三个部分:大前提(已知的一般原理)、小前提(所针对的特殊情况)、结论(根据一般原理对特殊情况作出判断),示例如下所示。

大前提:所有金属都是闪光的。

小前提:铜是金属。

结论:所以铜是闪光的。

(2) 假言推理。假言推理是以假言判断为前提的推理,分为充分条件假言推理和必要条件假言推理两种。其中,充分条件假言推理的基本原则是:小前提肯定大前提的前件,结论就肯定大前提的后件;小前提否定大前提的后件,结论就否定大前提的前件。必要条件假言推理的基本原则是:小前提肯定大前提的后件,结论就肯定大前提的前件;小前提否定大前提的前件,结论就否定大前提的后件。

(3) 选言推理。选言推理是以选言判断为前提的推理,分为相容的选言推理和不相容的选言推理两种。相容的选言推理的基本原则是:大前提是一个相容的选言判断,小前提否定了其中一个(或一部分)选言分支,结论就肯定剩下的一个选言分支。不相容的选言推理的基本原则是:大前提是一个不相容的选言判断,小前提肯定其中的一个选言分支,结论就否定其他选言分支;小前提否定除其中一个以外的选言分支,结论就肯定剩下的那个选言分支。

(4) 关系推理。关系推理是前提中至少包含一个关系命题的推理。几种常用的关系有,对称性关系推理(如 1 米=100 厘米,所以 100 厘米=1 米);反对称性关系推理( $A > B$ ,所以  $B < A$ );传递性关系推理( $A > B, B > C$ ,所以  $A > C$ )。

## 2. 归纳推理

归纳推理是一种由特殊的具体事例推导出一般原理、原则的解释方法,它可以从对个别事物的认识上升到对事物的一般规律性的认识,是从个别事物得出一般性结论的推理过程。在进行归纳时,解释者不只单纯运用归纳推理,同时也会运用演绎法。在人们的解释思维中,归纳和演绎互相联系、互相补充、不可分割。

根据前提所考察对象范围的不同,可以将归纳推理分为完全归纳推理和不完全归纳推理。

### 1) 完全归纳

完全归纳是根据某类事物的所有情况都一一考察,做出一般结论。例如,通过直观得出平面内直角三角形的内角和是  $180^\circ$ ,锐角三角形的内角和是  $180^\circ$ ,钝角三角形的内角和也

是  $180^\circ$ , 所以得出平面内任意三角形的内角和都是  $180^\circ$ 。

### 2) 不完全归纳

不完全归纳仅根据某类事物中的部分情况具有某种属性得出一般性结论。例如, 数学的乘法、运算定律、分数的基本性质等。一般举几个例子, 分别做出个别结论(即单称判断), 然后做出一般结论(即全称判断)。

在应用不完全归纳推理时, 可能根据不够多的几个事实得出不正确的结论。例如, 3 是质数、也是奇数; 7 是质数、也是奇数; 11 是质数、也是奇数, 归纳出所有的质数都是奇数。但是, 2 是质数, 却是偶数。显然, 此结论不正确。为此, 使用不完全归纳推理所列举的事实必须有代表性, 而且获得的结论后还需要做进一步验证。

### 3. 类比推理

类比推理又称为类推, 是逻辑推理的方法之一, 是启发人们进行创新思维的重要形式。类比推理是根据两个或两类事物在某些属性上有相同或相似之处, 而且已知其中一个事物具有某种属性, 由此推知另一个事物也可能具有这种属性的推理。

类比推理分为完全类推和不完全类推两种形式。完全类推是两个或两类事物在进行比较的方面完全相同时的类推; 不完全类推是两个或两类事物在进行比较的方面不完全相同时的类推。类比推理是一种从特殊性前提推出特殊性结论的推理, 也就是从一个对象的属性推出另一对象也可能具有这属性。因为进行类比推理的两个事物虽有许多相似之点, 但仍有一些差异, 如果遇到有差异的属性, 或者在第二个事物中根本没有这种属性, 而仍使用类比推理, 就会出现错误。由于类比推理所得的结论有偶然性, 所以其不能代替科学论证, 需要在推出结论后进一步论证或再通过实践检验。

## 3.2 非单调推理

非单调推理是在知识不完全的情况下进行的推理, 对于非单调推理, 如何提出合理的假设以及处理矛盾是主要的问题。

### 3.2.1 单调逻辑与单调推理

#### 1. 单调逻辑

单调逻辑是指从前提一旦推出结论则此结论将总是有效的, 即使后来又获得了新的信息, 得出来的新结论也不会否定以前就推出的结论, 所以结论集随着前提集的增加而单调递增。

经典逻辑是单调逻辑, 它以一个无矛盾的公理系统为基础。多数形式逻辑都有单调性的推论关系, 也就是说, 如果一个句子可以从前提的集合中被推理出来, 则它也可以从将这个前提集合作为子集包含的任何前提集中被推理出来, 这表明往此类理论增加一个公式永不会引起它的推论集合的减小。简单地说, 单调性表示学习一些新知识不能减小已知知识。

#### 2. 单调推理

单调推理是指随着推理向前推进及新知识的不断加入, 推出的结论越来越接近终极目标。其中加进系统的新知识必须与已有的知识不矛盾。随着运行时间的推移, 系统内含的

知识有增无减,这就是单调推理的单调性。单调性的优点如下。

(1) 加入新命题时不需要审查其与系统原有知识的兼容性,因为这些新命题只能是已有知识的逻辑推理结果,不可能引起矛盾。换言之,加入的新命题必定为永真。

(2) 不需要记忆推导过程,因为推导的结论永远不会失败,故不存在事后审查推导过程的需求问题。

### 3. 单调逻辑不能处理的问题

有些推理任务不能由单调逻辑处理,如下所示。

(1) 缺省推理。缺省推理是指事实已知,但缺乏反面的证据。例如,如果给出一个动物是鸟,并且不知道其他事情,仅假定它能飞。如果后来知道这个动物其实是企鹅,那么假定它能飞的这个论点必须被撤销。这个例子也说明缺省推理逻辑不应为单调逻辑。

(2) 溯因推理。溯因推理是从已知事实推导出可能解释的过程。事实只按最合适的解释演绎出来。溯因逻辑不应当是单调的,因为最可能的解释不是必然正确。例如,看到潮湿的草地的最可能的解释是下雨了,但在知道草地潮湿的真正原因是浇水了时,这个解释应当被撤销。因为获得了增加的知识(洒水车经过了),旧的解释(下雨了)被撤销了,这也不是单调推理。

(3) 知识推理。对于知识的推理,在事实变成已知时,对一个无知的事实必须被撤销,如果逻辑包括事物是已知的公式,这个逻辑不应当是单调逻辑。实际上,“学习以前是未知的事物导致除去指定这个知识是未知的公式”。这里的第二个改变(增加导致去除)违反了单调性的条件。

上述推理都不是单调推理。

## 3.2.2 非单调逻辑与非单调推理

### 1. 非单调逻辑

非单调逻辑能够完成非单调推理,它是指为知识库加入新知识后,可能推翻原有的推论的逻辑。也就是说,知识库中的推论不随知识增长而增长,反而呈现了非单调递增情况。这时需采用合理维持机制确保推理继续进行。因此,非单调推理是在知识不完全的情况下所进行的推理。

### 2. 非单调推理

在解决复杂问题的过程中,人们经常面对不完全的信息、不断变化的场景,难以找到一组一致性的逻辑公式来表示,如果能找到,也不能保证其在变化的环境中保持一致性。为此,可以允许包含假设,将假设作为推理的依据。但在推理过程中,随着新事物的出现,可能发现原先所作的假设不正确,应给予删除,从而造成推理的非单调性,即新知识(事实)的加入会引起已有知识的删除。这就是面向非单调推理的概念、方法和技术。

可以看出,对于非单调推理,如何提出合理的假设以及处理矛盾是主要问题。

### 3. 非单调性的特征

推理形式呈现非单调性的特征,所谓非单调性即非演绎性。归纳推理、模糊推理和概率推理都具有非单调性的特征。非单调推理具有一定的灵活性,所得结论具有暂时性。随着新信息的出现,人们可以不断修正结论,这满足了常识推理的要求。非单调推理可以处理日常情景中所遇到的复杂推理问题。在实际应用中,人们很少能拥有所需的一切信息。在缺

乏信息时,一个有效的做法就是根据已有信息和经验做有益的猜测,构造这些猜测的过程称为缺省推理。

缺省推理是在知识不完全的情况下假设某些条件已经具备所进行的推理。例如,在条件 A 已成立的情况下,如果没有足够的证据能够证明条件 B 不成立,则缺省 B 是成立的,并可在此缺省的前提下进行推理,推导出某个结论。在缺省推理过程中,如果某一时刻发现原先的假设不正确,则需要撤销缺省前提以及由此推出的结论,重新按新情况进行推理。

缺省逻辑是用来形式化有缺省假定推理的非单调逻辑,它可以表达某个缺省事物是真的事实;相反,标准逻辑只能表达某个事物为真或为假,因为推理经常遇到在多数时是真、但不总是真的事实的推理情况。缺省逻辑则形式化了这样的推理规则,而不需要明确提及所有的例外。例如,鸟通常能飞。这个规则可以在标准逻辑中表达为要么所有鸟都能飞,这与鸵鸟、企鹅不能飞的事实相矛盾;要么除了企鹅、鸵鸟等的所有鸟都能飞,这就要求规则指定出所有的例外。

#### 4. 非单调推理的最终目标

非单调推理的最终目标是实现推理的合理性,这不同于单调推理所要求的有效性。推理的合理性往往带有时效性和主观性,这种时效性与主观性体现出模态的特征。

(1) 时效性。时效性体现为所相信的事实暂时为真而非永久为真。随着时间推移,有用信息的扩大,所相信的事实可能为假,或者在某段时间内为假。

(2) 主观性。主观性体现为相信某事实为真的主体之间,其对判断事实为真的标准可能不一致。

### 3.2.3 非单调推理与单调推理的比较

非单调推理与单调推理两者都是一种推理模式,在功能上都能从前提中得出相应的结论。但差异点的如下。

(1) 在推理的形式上,单调推理呈现线性特征,而非单调推理不呈现线性特征。

(2) 在推理有效性上,单调推理要强于非单调推理,但单调推理在常识推理中的应用范围要远小于非单调推理。

(3) 在常识推理中,非单调推理要比单调推理更加灵活。

更具体地说,单调推理是非单调推理的基础,这就类似于演绎推理是归纳推理、模糊推理和概率推理的基础。非单调推理的合理性试图逼近单调推理所具有的有效性,使犯错误的风险尽可能地小,以获得更多可靠的结论。

## 3.3 谓词逻辑推理

### 3.3.1 谓词逻辑

前面介绍了基于谓词逻辑的知识表示方法,下面将进一步介绍基于谓词逻辑的知识推理方法。谓词逻辑是能够表达人类思维活动规律的一种最精准的形式语言。它不仅接近于人类的自然语言,而且可方便地将知识存于计算机中,还可以被计算机精确处理。命题是一

个非真即假的陈述句,一个命题可在一种条件下为真,在另一种条件下为假。命题逻辑是命题及命题之间关系的逻辑系统。由于命题包含的信息量太少,命题逻辑往往无法将所描述的事物的结构及逻辑特征反映出来,也不能将不同事物间的共同特征表述出来,但谓词逻辑克服了命题逻辑的弊端,可以精准描述和精确处理。

### 1. 谓词逻辑的基本成分

#### 1) 命题和真值

一个陈述句称为一个断言,凡有真假意义的断言称为命题,命题的意义只有真、假两种情况,命题是非真即假的陈述句。

#### 2) 论域

论域也称为个体域,是由所讨论的全体对象构成的非空集合。

#### 3) 谓词与个体

谓词刻画个体的性质,以及状态或个体之间的关系,它实现的是从个体域中的个体到真或假的映射。谓词分为谓词名和个体两个部分。用大写英文字母表示谓词,用小写英文字母表示命题中的主语,主语可以是常量、变元和函数。

谓词的一般形式为:  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

其中,  $P$  为谓词名;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是个体。

(1) 个体是常量: 一个或一组指定的个体。

例如, wang is a teacher: TEACHER(wang), TEACHER 为谓词名, wang 为一个抽象概念的个体。

(2) 个体是变元, 没有指定的一个或一组个体, 只有将个体赋值后才能判断真假。

例如,  $x < 5$ : LESS( $x, 5$ )。

(3) 个体可以是函数, 函数是从一个个体到另一个个体的映射, 函数本身没有真值。在谓词逻辑中, 函数本身不能被单独使用, 它必须嵌入谓词之中。

例如, The father of Li is a teacher: TEACHER(father(Li)), TEACHER 是谓词, 而 father 是函数。

#### 4) 连接词

主要的连接词如下。

否定: 非,  $\neg$ 。

析取: 或,  $\cup$ 。

合取: 与,  $\cap$ 。

蕴含: 如果条件  $P$  为  $F$  时, 不管  $Q$  值为  $T$  或  $F$ ,  $P \rightarrow Q$  为  $T$ 。

等价: 当且仅当  $P$  和  $Q$  的值相同时,  $P \leftrightarrow Q$  值为  $T$ 。

连接词的优先级为: 量词  $>$  非  $>$  合取  $>$  析取  $>$  蕴含  $>$  等价。

可以看出: 一元运算优先于二元运算, 先于非运算, 优先级最高, 然后是合取、析取、蕴含、双蕴含。另外, 量词(全称量词、存在量词)的优先级要高于上述运算符。

谓词逻辑真值如表 3-1 所示。

表 3-1 谓词逻辑真值表

$P$	$Q$	$\neg P$	$P \cup Q$	$P \cap Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

### 5) 量词

量词用来对个体的数量进行约束。常用的量词有全称量词( $\forall$ )和存在量词( $\exists$ )。

(1) 全称量词( $\forall x$ ): 对个体域中所有个体  $x$ 。例如,所有机器人都是灰色的:  $(\forall x)$   $[\text{ROBOT}(x)] \rightarrow \text{COLOR}(x, \text{gray})$ 。

(2) 存在量词( $\exists x$ ): 在个体域中存在个体  $x$ 。例如,  $r_1$  号房间有个物体:  $(\exists x)$   $\text{INROOM}(x, r_1)$ 。

(3) 全称量词和存在量词出现的先后次序会影响命题的内容。例如,  $(\forall x)(\exists y)$   $\text{FRIEND}(x, y)$  表示对于个体域中的全部个体  $x$  都存在一个个体  $y$ ,  $x$  与  $y$  是朋友。再如,  $(\exists x)(\forall y)$   $\text{FRIEND}(x, y)$  表示在个体域中存在一个个体  $x$ , 与个体域中的任何个体  $y$  都是朋友。又如,  $(\exists x)(\exists y)$   $\text{FRIEND}(x, y)$  表示在个体域中存在一个个体  $x$  与另一个个体  $y$  是朋友。还如,  $(\forall x)(\forall y)$   $\text{FRIEND}(x, y)$  表示对于个体域中的任何两个个体  $x$  和  $y$  都是朋友。

(4) 量词的辖域: 位于量词后面的单个谓词或用括号括起来的谓词公式。

(5) 约束变元与自由变元: 辖域内与量词中同名的变元称为约束变元; 不同名的变元称为自由变元。例如,  $(\exists x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y)) \cup R(x, y)$ ,  $(\exists x)$  的辖域内的变元  $x$  是受  $(\exists x)$  约束的约束变元,  $R(x, y)$  中的  $x$  是自由变元, 所有  $y$  也都是自由变元。

## 2. 谓词公式

谓词公式是指对谓词进行自由包含和组合、连接词与量词所构成的公式。单个谓词称为原子谓词公式。谓词公式在个体域上的解释是个体域中的实体对谓词演算表达式的每个常量、谓词和函数符号的指派。对于每一个解释,谓词公式都能求出一个真值。

谓词公式的主要性质如下。

(1) 永真性: 如果谓词公式  $P$  对个体域  $D$  上的任何一个解释都取真值, 则  $P$  在  $D$  上是永真的; 如果  $P$  在每个非空个体域上均永真, 则  $P$  永真, 并可称之为重言式。

(2) 可满足性: 对于谓词公式  $P$ , 如果至少存在一个解释使  $P$  在此解释下为真值, 则可称  $P$  是可满足的, 否则,  $P$  是不可满足的。

(3) 等价性: 设  $P$  与  $Q$  是两个谓词公式,  $D$  是它们共同的个体域。如果对  $D$  上的任何一个解释,  $P$  与  $Q$  都有相同的真值, 则可称公式  $P$  和  $Q$  在  $D$  上等价; 如果  $D$  是任意个体域, 则  $P$  和  $Q$  等价, 记为  $P \Leftrightarrow Q$ 。

(4) 谓词公式的永真蕴含: 对于谓词公式  $P$  与  $Q$ , 如果  $P \rightarrow Q$  永真, 则可称公式  $P$  永真蕴含  $Q$ , 且称  $Q$  为  $P$  的逻辑结论, 称  $P$  为  $Q$  的前提, 记为  $P \Rightarrow Q$ 。

### 3.3.2 谓词逻辑的自然推理规则

谓词演算的推理规则有 US、ES、EG 和 UG 规则,使用这些规则的限制条件是对于同一个客体变元,应先去存在,再去全称量词,必须是公式的最左边量词,且前边没有任何符号。辖域到公式末尾添加量词时,也是最左边开始,辖域到末尾。

推理是从前提推出结论的思维过程,前提是已知公式,结论是指从前提出发,应用推理规则推出的公式。显然,如果推理正确,而且前提也正确,则结论一定也正确。谓词逻辑中的推理方法称为自然推理方法,常用的自然推理规则如下。

#### 1. 基本规则

命题逻辑中 P、T 等推理规则都可在谓词中使用。

(1) P 规则 (premise rule): 前提引入规则,引入前提集中的任意一个前提。

(2) T 规则 (universal specify rule): 全称特指规则,有下述两种形式。

$$\forall xP(x) \Rightarrow P(y) \quad \text{或} \quad \forall xP(x) \Rightarrow P(c)$$

#### 2. 消去和添加量词的规则

在谓词逻辑的推理中,前提和结论均有量词出现,只有消去前提中的量词才能运用命题逻辑的推理规则,而推导出的结论又必须适当加上量词,才能得到含有量词的最后结论。因此,需要定义消去和添加量词的规则。

##### 1) US 规则

US 规则是消去全称量词的基本规则。如果个体域的所有个体都具有性质 A,则个体域中的任一个个体都具有性质 A。此时,可消去全称量词如下。

$$\forall xA(x) \rightarrow A(y) \quad \text{或} \quad \forall xA(x) \rightarrow A(c)$$

换成常元或变元主要取决于要证明结论的形式,上述规则成立的条件如下。

(1) 取代  $x$  的  $y$  应为任意不在  $A(x)$  的约束中出现的个体变元。

(2) 用  $y$  取代  $A(x)$  中自由出现的  $x$  时,必须将所有的  $x$  都取代。

(3) 自由变元  $y$  也可被替换为个体域中的任意个体常元  $c$ ,  $c$  为任意未在  $A(x)$  中出现过的个体常元。前两点就是要保证不与其他的符号重复。

##### 2) ES 规则

ES 规则是消去存在量词的规则。存在量词的属性是存在,如果个体域存在有性质 A 的个体,则个体域中必有某一个个体具有性质 A。

$$\exists xA(x) \rightarrow A(c)$$

规则成立的条件如下。

(1)  $c$  是个体域中使 A 为真的特定个体常元。

(2) 不曾在  $A(x)$  或前面的推导公式中出现过。

(3)  $A(x)$  中除了自由出现的  $x$  外,还有其他自由出现的个体变项不能用此规则。

前两个显而易见,对于第(3)个,考虑  $\exists yF(x, y)$  并不能得出  $F(x, c)$ ,  $F(x, c)$  表示的是对于指定的  $c$ ,任意的  $x$  都满足  $F$ ,错误在于:如果  $F$  表示大小关系,  $c$  的具体指定可能与  $x$  的取值有关。

##### 3) UG 规则

UG 规则是全称量词的推广规则。如果个体域的任意个体都具有性质 A,则个体域中

的所有个体都具有性质  $A$ 。

$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$  规则成立的条件如下。

(1)  $y$  在  $A(y)$  中自由出现, 且  $y$  取任何值时  $A$  均为真。

(2)  $x$  不在  $A(y)$  的约束中出现(符号不重复就行)。

4) EG 规则

EG 规则是存在量词的推广规则。如果个体域有某一个个体  $c$  具有性质  $A$ , 则个体域中必存在具有性质  $A$  的个体, 即能找出一个就表示其存在。

$$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$$

规则成立的条件如下。

(1)  $c$  是个体域中某个确定的个体。

(2) 代替  $c$  的  $x$  没在  $A(c)$  中出现过(还是符号不重复)。

**例 3-1**  $P$ 、ES 和 T 自然推理规则的使用。

(1)  $\exists x A(x)$   $P$

(2)  $A(c)$   $ES(1)$

(3)  $\exists x B(x)$   $P$

(4)  $B(c)$   $ES(3)$

(5)  $A(c) \wedge B(c)$   $T(2)(4)$

在上述推理中, 第(5)步使用 T 规则出错, 原因是使  $A$  成立的个体不一定能够使  $B$  也成立。

**例 3-2** 证明  $\forall x P(x), \exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x))$

(1)  $\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$   $P$

(2)  $P(x) \rightarrow Q(x)$   $ES(1)$

(3)  $\forall x P(x)$   $P$

(4)  $P(c)$   $ES(3)$

(5)  $Q(c)$   $T(2)(4)$

(6)  $\exists x (Q(x))$   $EG(5)$

### 3.3.3 谓词逻辑的自然推理方法

在谓词逻辑中, 常用的自然推理方法有: 永真推理、假设推理和反证推理。

#### 1. 永真推理

永真式指重言式。如果存在一个公式, 对于它的任一解释其真值都为真, 则可称此公式为永真式。数理逻辑旨在利用有限的公理推出尽可能多的永真式。永假式又称矛盾式, 如果对任意一个赋值  $V$ , 都有  $V[A]=0$ , 即公式  $A$  对任一赋值均取假值, 则公式  $A$  为永假式。

永真推理是建立在永真式、领域知识及规则基础上的正向推理。由于永真式及规则是常识, 所以永真推理是建立在领域知识(已知条件)基础之上正向推理。谓词逻辑中的永真推理方法就是谓词逻辑中的定理证明。证明是一个过程, 证明条件是由已知条件到定理的一种形式化过程的规范描述。

#### 2. 假设推理

假设推理是永真推理中的一种, 也是一种正向推理。所不同的是, 在假设推理中, 需要

求证的定理具有  $A \rightarrow B$  的形式,此时,可将  $A$  作为已知条件列入,而所求证的定理仅为  $B$ 。这样可以做到既增加已知部分又减少求证部分,进而达到简化证明的目的。

### 3. 反证推理

反证推理与永真推理的区别在于:在证明过程中,可将定理  $Q$  的否定  $\neg Q$  作为列入,而确认最终获得的定理是矛盾的,即永假式,它也可被称为空,并可以用符号  $\square$  表示。反证推理即反证法,在推理中属于反向推理。从需要求证的定理出发做证明,最终获得矛盾,则定理得证。

## 3.4 不确定性推理

主观贝叶斯方法是基于概率论而建立的不确定性推理,模糊推理是基于模糊理论而建立的不确定性推理。

### 3.4.1 不确定性推理基础

#### 1. 不确定性含义

(1) (狭义)不确定性:所表示的事件的真实性不能被完全肯定,只能对其为真的可能性给出某种估计。

(2) 不确切性(模糊性):一个命题中所出现的某些言词的含义不够确切,在概念上,也就是其代表的概念的内涵没有硬性的标准或条件,其外延没有硬性的边界,即边界是不明确的。

(3) 不完全性:对某事物来说,关于它的信息或知识还不全面、不充分。例如,在有关信息不完全的情况下,仍然可以通过分析、推理等手段得到最终结果。

(4) 不一致性:在推理过程中发生了前后不相容的结论,或者随着时间的推移、范围的扩大,原来一些成立的命题已变得不成立、不适合了。

#### 2. 不确定性推理及其分类

##### 1) 不确定性推理

不确定性推理是指建立在不确定性知识和证据的基础上的推理。不完备、狭义不确定性知识的推理和模糊知识的推理等都属于不确定性推理,其实质都是一种从不确定的初始证据出发,通过运用不确定性知识,最终推出具有一定程度不确定性的但却又是合理或基本合理结论的思维过程。

由于不确定性推理中所用的知识和证据都具有某种程度的不确定性,所以其推理机制的设计除了解决推理方向、推理方法、控制策略等基本问题以外,还需要解决不确定性的表示与量度、不确定性匹配、不确定性的传递算法以及不确定性的合成等问题。

不确定性推理中存在 3 种不确定性,也就是知识不确定性、证据不确定性和结论不确定性。在选择知识的表示方式时,需要考虑能够准确地描述问题本身的不确定性和便于推理过程中计算的不确定性。知识静态强度是指知识的可信程度,在专家系统中的知识静态强度是由领域专家给出,通常是一个数值,它可以使用概率、信度、隶属度和程度来描述。

(1) 用概率表示知识静态强度。用概率表示知识强度,则其取值范围为  $[0, 1]$ ,该值越接近于 1,说明该知识越接近于真;其值越接近于 0,说明越接近于假。

(2) 用信度表示知识静态强度。信度是指测量结果的可靠性、一致性和稳定性,即测验

结果是否反映了被测者的稳定的、一贯的真实特征。如果用信度表示静态强度,则其取值范围为 $[-1,1]$ 。当该值大于0时,值越大,说明知识越接近于真;当其值小于0时,值越小,说明知识越接近于假。

(3) 用隶属度表示知识静态强度。隶属度是后者对前者的隶属关系程度,用隶属度表示知识静态强度,则其取值范围为 $[0,1]$ ,该值越接近于0,隶属度越低;该值越接近于1,隶属度越高。

(4) 用程度表示静态强度。程度就是一个命题中所描述事物的特征强度。程度化方法是给语言特征值(简称语言值)附加一个程度的参数以刻画对象的特征,这种附有程度的语言值称为程度语言值,其一般形式如下。

( $\langle$ 语言值 $\rangle, \langle$ 程度 $\rangle$ )

例如,使用(高,0.8)表示一个人身高的程度。基于程度化知识的推理比确切推理多了一个程度计算的过程,推理时除了要进行符号推演操作外还要进行程度计算。这种附加程度计算的推理为程度推理。程度推理的一般模式等于符号推演加上程度计算。

在推理过程中,规则的前件要与证据事实匹配成功,不但要求两者的符号模式能够匹配,而且要求证据事实所含的程度必须达到已定的阈值。所推得的结论是否有效也取决于其程度是否达到已定的阈值。

#### 2) 证据不确定性的表示

按照组织形式,证据可分为基本证据和组合证据。基本证据是指单一证据或单一证据的否定;组合证据是指将多个基本证据组织到一起形成的复合证据。

按照不同来源,证据可分为初始证据和中间结论。初始证据是指在推理之前由用户提供的原始证据,其信度是由提供证据的用户给出;中间结论是指在推理中所得到的中间结果,它将被存入综合数据库,并作为以后推理的证据使用,其信度是在推理过程中按不确定性更新算法计算而得到的。

证据不确定性的表示应包括基本证据的不确定性表示和组合证据的不确定性计算。基本证据的不确定性表示的表示方法与知识的不确定性表示方法一致,以便推理过程能够对不确定性进行统一处理。

当一个知识的前提条件是由多个基本证据组合而成时,多个基本证据的组合方式可以是析取关系,也可以是合取关系。组合证据的不确定性可在各基本证据的基础上由最大最小方法、概率方法和有界方法等计算而获得。

#### 3) 结论不确定性的表示

由于使用的知识和证据具有的不确定性,故得出的结论也具有不确定性。这种结论的不确定性也称为规则的不确定性,它表示当规则的条件被完全满足时产生的某种结论的不确定程度。在不确定性推理过程中,如果由多个不同知识推出了同一结论,并且推出的结论的不确定性程度又各不相同,那么需要对这些不同的不确定性进行合成,求出该结论的综合不确定性。

#### 4) 不确定性推理的类型

不确定性推理包括非数值方法和数值方法,如图3-3所示。其中,常用的是数值方法的不确定性推理。

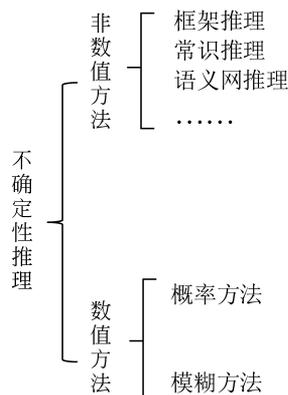


图 3-3 不确定性推理的类型

应用概率论与模糊数学产生了两种不同的不确定性推理。将概率论用于处理随机现象,事件本身有明确的含义,只是由于条件不充分,使条件和事件之间不能出现决定性的因果关系。对于模糊现象,其概念本身就不明确,一个对象是否符合这个概念往往是难以被确定的,属于模糊的概念。

### 3.4.2 贝叶斯推理

贝叶斯推理是推论统计的一种方法。这种方法使用贝叶斯定理,在有更多证据及信息时更新特定假设的概率。贝叶斯推理是统计学(特别是数理统计学)中很重要的技巧之一。

#### 1. 贝叶斯公式

如果  $B$  是一个事件,而  $A$  是另一个事件,两者不互斥,则在  $A$  发生后  $B$  发生的条件概率为

$$P(B | A) = (B \text{ 和 } A \text{ 同时发生的次数}) / (A \text{ 发生的次数}) = P(B \cap A) / P(A)$$

同样,因为  $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$ ,因此,  $P(A \cap B) = P(B)P(A | B) = P(A)P(B | A)$ ,所以贝叶斯公式为

$$P(B | A) = P(B)P(A | B) / P(A)$$

#### 2. 全概率公式

全概率公式是概率论中的重要公式,它把对复杂事件  $A$  的概率求解问题转化为了在不同情况下发生的简单事件的概率的求和问题。如果事件  $B_1, B_2, B_3 \dots B_n$  构成一个完备事件组,即它们两两互不相容,其和为全集;并且  $P(B_i)$  大于 0,则对任一事件  $A$  有

$$P(A) = P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2) + \dots + P(A | B_n) P(B_n)$$

#### 3. 先验概率和后验概率

从原因到结果的论证称为先验的,而从结果到原因的论证称为后验的。先验概率是指根据以往经验和分析得到的概率,在全概率公式中的先验概率作为“由因求果”问题中的“因”出现。后验概率是指在得到结果的信息后重新修正的概率。

先验概率不需要使用贝叶斯公式计算;而后验概率则需要使用贝叶斯公式计算,而且在利用样本信息计算逻辑概率时,还要使用理论概率分布,需要更多的数理统计知识。例如,对于  $C_1$  和  $C_2$  二分类,由贝叶斯公式可得:

$$P(C_1 | x) = P(x | C_1)P(C_1) / P(x)$$

$$P(C_2 | x) = P(x | C_2)P(C_2) / P(x)$$

$P(C_1), P(C_2), P(x | C_1), P(x | C_2)$  都是先验概率,但  $P(C_1 | x)$  和  $P(C_2 | x)$  是后验概率。

#### 4. 独立性和条件独立性

##### 1) 独立性

两个随机变量  $x$  和  $y$  在概率分布中将被表示成两个因子乘积形式,一个因子只包含  $x$ ,另一个因子只包含  $y$ ,两个随机变量相互独立。

当事件独立时,联合概率等于概率的乘积,即  $P(xy) = P(x)P(y)$ ,事件  $x$  和事件  $y$  独立。此时给定  $z$ ,有  $P(x, y | z) \neq P(x | z)P(y | z)$ 。

##### 2) 条件独立性

给定  $z$  的情况下,  $x$  和  $y$  条件独立,当且仅当:

$$x \perp y \mid z \Leftrightarrow P(x, y \mid z) = P(x \mid z)P(y \mid z)$$

$x$  和  $y$  的关系依赖于  $z$ , 而不是直接产生的。

### 5. 贝叶斯推理过程

产生式规则可以表示如下。

if  $E$  is true then  $H$  is true (概率  $P$ )

其中,  $E$  表示前提,  $H$  代表结论。

$$P(H \mid E) = P(H)P(E \mid H) / (P(E \mid H)P(H) + P(E \mid \neg H)P(\neg H))$$

$P(H \mid E)$  称为在观察到前提  $E$  后的结论  $H$  的后验概率。 $\neg H$  表示假设不成立的事件, 等式右侧的概率由专家提供,  $P(H)$  称为先验概率,  $P(E \mid H)$  称为条件概率, 这个等式的意义在于其可以根据假设(先验概率)得到结论的概率。

如果问题提供了多个结论  $H_1, H_2, \dots, H_m$  或者给定多个前提  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , 产生的多个结论之间各自相互独立, 且所有假设的概率之和为 1 时, 有下述几种情况。

(1) 单个前提多个结论:

$$P(H_i \mid E) = P(E \mid H_i)P(H_i) / \sum (P(E \mid H_k)P(H_k))$$

(2) 多个前提多个结论:

$$P(H_i \mid E_1 E_2 \dots E_n) = P(E_1 E_2 \dots E_n \mid H_i) P(H_i) / \sum (P(E_1 E_2 \dots E_n \mid H_k) P(H_k))$$

待到  $H_k$  发生时,  $E_1 E_2 \dots E_n$  同时发生的概率难度较大, 因此, 需要假定所有的前提之间相互独立, 上面的等式可以变换为

$$\begin{aligned} P(H_i \mid E_1 E_2 \dots E_n) = & \\ & P(E_1 \mid H_i) P(E_2 \mid H_i) \dots P(E_n \mid H_i) P(H_i) / \sum (P(E_1 \mid H_i) \\ & P(E_2 \mid H_i) \dots P(E_n \mid H_k) P(H_k)) \end{aligned}$$

3) 充分性似然和必要性似然

充分性似然可以表示  $E$  对  $H$  的充分性程度, 则

$$P(E \mid H) / P(E \mid \neg H)$$

该值远大于 1 时, 则表示  $E$  出现时  $H$  出现的概率极大。

必要性似然表示  $E$  对  $H$  的必要性程度, 则

$$P(\neg E \mid H) / P(\neg E \mid \neg H)$$

如果该值在 0 和 1 之间, 那么即使没有发现  $E$ ,  $H$  也极有可能不出现。

求解在  $H$  发生的条件下  $E_i$  发生的概率是一件困难的事情, 而求事件  $E_i$  发生条件下事件  $H$  的发生概率则相对简单。

**例 3-3** 设  $H_1, H_2, H_3$  分别是 3 个结论,  $E$  是支持这些结论的前提, 且已知:

$$P(E_1) = 0.3, \quad P(E_2) = 0.4, \quad P(E_3) = 0.5$$

$$P(H \mid E_1) = 0.5, \quad P(H \mid E_2) = 0.3, \quad P(H \mid E_3) = 0.4$$

则有

$$P(E_1 \mid H) = P(H \mid E_1)P(E_1) = 0.15$$

$$P(E_2 \mid H) = P(H \mid E_2)P(E_2) = 0.12$$

$$P(E_3 \mid H) = P(H \mid E_3)P(E_3) = 0.20$$

贝叶斯推理将概率值作为主要输入。

### 3.4.3 信度推理

如果将信度作为不确定性推理的表示,则推理的结果仍然含有信度。也就是说,在进行信度推理时,除了要进行符号推理外还要进行信度计算,因此信度推理等于符号推理加上信度计算。信度推理是一种简单而有效的推理方法。

#### 1. 信度推理的信度计算

(1) 信度推理规则的前件要与证据事实匹配成功,不但要求两者的符号模式能够匹配,而且要求证据事实所含的信度也必须达到一个阈值。

(2) 信度推理的规则触发不仅要求其前件能被匹配成功,而且前件条件的总信度还必须至少达到阈值。

(3) 信度推理中所推得的结论是否有效也取决于其信度是否达到阈值。

(4) 信度推理需要信度计算,包括 $\cap$ 关系的信度计算、 $\cup$ 关系的信度计算、 $\neg$ 关系的信度计算和推理结果信度的计算。

#### 2. 信度推理方法

信度是基于概率的一种度量,或者就直接是概率本身。例如,在著名的专家系统 MYCIN 中,信度就是基于概率而定义的。

1) 知识的不确定表示

应用信度产生式规则表示知识的基本格式如下。

```
if E then H(CF(H, E))
```

其中,  $CF(H, E)$  为信度因子,即规则的可信度,反映了前提条件与结论的联系程度。

**例 3-4** if 乌云密布 and 电闪雷鸣 then 下暴雨(0.9),信度因子为 0.9。

$CF(H, E)$  取值范围为  $[-1, 1]$ 。

(1) 如果  $CF(H, E) > 0$ , 其值越大, 则前提越支持结论  $H$  为真。

(2) 如果  $CF(H, E) < 0$ , 其值越小, 则前提越支持结论  $H$  为假。

(3) 如果  $CF(H, E) = 0$ , 则前提与  $H$  无关。

2) 前提(证据)不确定性表示

在  $CF$  模型中, 证据  $E$  的也是使用可信度  $CF(E)$  来表示。

例如,  $CF(E) = 0.8$  表明  $E$  的信度为 0.8。

(1)  $CF(E)$  的取值范围为  $[-1, 1]$ 。

(2) 对于初始证据  $E$ , 如果肯定为真, 则  $CF(E) = 1$ 。

(3) 对于初始证据  $E$ , 如果肯定为假, 则  $CF(E) = -1$ 。

(4) 对于初始证据  $E$ , 如果以某种程度为真, 则  $0 < CF(E) < 1$ 。

(5) 对于初始证据  $E$ , 如果以某种程度为假, 则  $-1 < CF(E) < 0$ 。

(6) 对于初始证据  $E$ , 如果没有获得任何相关的观察, 则  $CF(E) = 0$ 。

可以使用  $CF(E)$  表示静态强度在证据  $E$  为真时对结论  $H$  的影响度。可以使用  $CF(E)$  表示动态强度, 表示证据  $E$  当前的不确定性程度。

#### 3. 组合证据的不确定性计算

组合证据包括多个单一证据的合取和析取两种形式。

## 1) 合取形式

合取形式是指多个单一证据的合取,表示如下。

$E = E_1 \text{ and } E_2 \text{ and } \dots \text{ and } E_n$  时, 如果已知  $CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)$ , 则

$$CF(E) = \min\{CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)\}$$

## 2) 析取形式

当组合证据是多个单一证据的析取时,表示如下。

当  $E = E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \dots \text{ or } E_n$  时,  $CF(E) = \max\{CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)\}$   
且定义  $CF(\neg E) = -CF(E)$

## 4. 信度的传递计算

推理是从不确定的初始证据出发,运用相关的不确定性知识最终推出结论,并计算出结论的信度值。每次运用不确定的知识都需要由证据的不确定性和规则的不确定性计算结论的不确定性。

(1) 证据确定存在,且  $CF(E) = 1$  时,则

$$CF(H) = CF(H, E)$$

上式表明规则强度  $CF(H, E)$  就是在前提条件对应的  $E$  证据为真时结论  $H$  的可信度。

(2) 当证据不是肯定存在,且  $CF(E) \neq 1$  时,则

$$CF(H) = CF(H, E) \max\{0, CF(E)\}$$

上式表明,如果  $CF(E) < 0$ ,则  $CF(H) = 0$ ,这表明该模型中没有考虑证据为假时对结论  $H$  所造成的影响。

其中,结论  $H$  的信度计算如下。

当  $CF(E) < 0$  时, 则  $CF(H) = 0$

当  $CF(E) = 1$  时, 则  $CF(H) = CF(H, E)$

## 5. 信度结论的合成计算

信度产生式规则如下。

*if*  $E_1$  *then*  $H$  ( $CF(H, E_1)$ )

*if*  $E_2$  *then*  $H$  ( $CF(H, E_2)$ )

(1) 计算每一条信度产生式规则的结论  $H$  信度  $CF(H)$ ,如下所示。

$$CF_1(H) = CF(H, E_1) \max\{0, CF(E_1)\}$$

$$CF_2(H) = CF(H, E_2) \max\{0, CF(E_2)\}$$

(2) 计算  $E_1$  与  $E_2$  对  $H$  的综合影响所形成的信度  $CF_{1,2}(H)$ ,如下所示。

$$CF_{1,2}(H) = CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H)CF_2(H), \quad \text{当 } CF_1(H) \geq 0, CF_2(H) \geq 0$$

$$CF_{1,2}(H) = CF_1(H) + CF_2(H) + CF_1(H)CF_2(H), \quad \text{当 } CF_1(H) < 0, CF_2(H) < 0$$

$$CF_{1,2}(H) = CF_1(H) + CF_2(H) / (1 - \min\{|CF_1(H)|, |CF_2(H)|\})$$

$CF_1(H)$  与  $CF_2(H)$  异号

## 例 3-5 信度计算。

已知一组信度产生式规则( $R_1 \sim R_5$ )如下。

$R_1$ : *if*  $E_1$  *then*  $H$  (0.8)

$R_2$ : *if*  $E_2$  *then*  $H$  (0.6)

$R_3$ : *if*  $E_3$  *then*  $H$  (-0.5)

$R_4$ : if  $E_4$  and  $(E_5 \text{ or } E_6)$  then  $H$  (0.7)

$R_5$ : if  $E_7$  and  $E_8$  then  $H$  (0.9)

并且有

$$CF(E_1) = 0.35, \quad CF(E_2) = 0.8, \quad CF(E_3) = 0.54, \quad CF(E_4) = 0.5,$$

$$CF(E_5) = 0.6, \quad CF(E_6) = 0.7, \quad CF(E_7) = 0.6, \quad CF(E_8) = 0.9$$

求  $CF(H)$ 。

$R_1$ : if  $E_1$  then  $H$  (0.8)

$$\begin{aligned} CF_1(H) &= 0.8 \max\{0, CF(E_1)\} \\ &= 0.8 \max\{0, 0.35\} \\ &= 0.28 \end{aligned}$$

$R_2$ : if  $E_2$  then  $H$  (0.6)

$$\begin{aligned} CF_2(H) &= 0.6 \max\{0, CF(E_2)\} \\ &= 0.6 \max\{0, 0.8\} \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

$R_3$ : if  $E_3$  then  $H$  (-0.5)

$$\begin{aligned} CF_3(H) &= -0.5 \max\{0, CF(E_3)\} \\ &= -0.5 \max\{0, 0.54\} \\ &= -0.27 \end{aligned}$$

$R_4$ : if  $E_4$  and  $E_5$  then  $H$  (0.7)

$$\begin{aligned} CF(H) &= 0.7 \max\{0, CF(E_4 \text{ and } E_5)\} \\ &= 0.7 \max\{0, \min\{0, CF(E_4), CF(E_5)\}\} \\ &= 0.7 \max\{0, \min\{0.5, 0.6\}\} \\ &= 0.7 \max\{0, 0.5\} \\ &= 0.35 \end{aligned}$$

$R_5$ : if  $E_7$  and  $E_8$  then  $H$  (0.9)

$$\begin{aligned} CF(H) &= 0.9 \max\{0, CF(E_7 \text{ and } E_8)\} \\ &= 0.9 \max\{0, \min\{CF(E_7), CF(E_8)\}\} \\ &= 0.9 \max\{0, \min\{0.6, 0.9\}\} \\ &= 0.9 \max\{0, 0.6\} \\ &= 0.54 \end{aligned}$$

计算  $E_1$  与  $E_2$  对  $H$  的综合影响所形成的信度  $CF_{1,2}(H)$ :

$$\begin{aligned} CF_{1,2}(H) &= CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H) CF_2(H) \\ &= 0.28 + 0.48 - 0.28 \times 0.48 \\ &= 0.63 \end{aligned}$$

计算  $E_1$ 、 $E_2$  和  $E_3$  对  $H$  的综合影响所形成的信度  $CF_{1,2,3}(H)$ :

$$\begin{aligned} CF_{1,2,3}(H) &= (CF_{1,2}(H) + CF_3(H)) / (1 - \min\{|CF_{1,2}(H)|, |CF_3(H)|\}) \\ &= (0.63 - 0.27) / (1 - \min\{0.63, 0.27\}) \\ &= 0.36 / 0.73 \\ &= 0.49 \end{aligned}$$

从上述计算可以看出,贝叶斯推理和可信度推理都需要人类专家提供先验概率信息。

### 3.4.4 模糊推理

1965年扎德(Zadeh)教授首先提出了模糊集概念,自此之后,模糊推理理论迅速发展,现在已经出现了多种模糊推理方法。

模糊逻辑建立的多值逻辑基础之上,运用模糊集合的方法可以研究模糊性思维、语言形式及其规律。模糊逻辑是模仿人脑的不确定性概念判断、推理思维方式。对于模型未知或不能确定的描述系统,以及强非线性、大滞后的控制对象,可以应用模糊集合和模糊规则进行推理。运用模糊逻辑可以表达界限不清晰的定性知识与经验,它借助于隶属度函数概念以区分模糊集合、处理模糊关系,模拟人脑实施规则型推理,解决各种不确定问题。

从不精确的前提集合中得出可能的不精确结论的推理称为近似推理。在人类的思维中,推理过程常常是近似的。例如,人类根据条件语句(假言)做出的推断:“如果西红柿是红的,则西红柿是熟的”,这种不精确的推理显然不能使用经典的二值逻辑或多值逻辑完成。模糊推理包括的主要内容如图3-4所示。

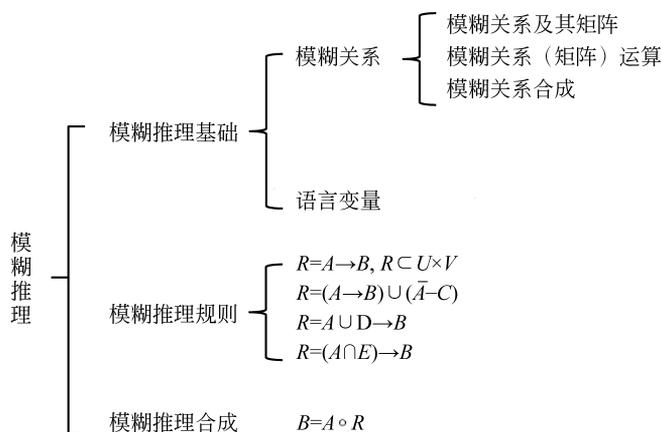


图 3-4 模糊推理内容

与信度推理一样,模糊推理是通过计算得出结论而不是推理出逻辑的结论,具体做法是将推理前提约定为一些算子,再借助计算得出结论。

#### 1. 模糊集合与隶属函数

由于概念本身不清晰、界限不分明,因而对象对集合的隶属关系也不明确。模糊集合概念的出现使人们可以用数学的思维和方法处理模糊性现象,从而构成了模糊集合论的基础。

##### 1) 经典集合

(1) 论域: 需要研究的全体对象。

(2) 元素: 论域中的每个对象。

(3) 集合: 在论域中具有某种相同属性的、确定的、可以彼此区分的元素的全体。

例如,  $A = \{x | f(x) > 0\}$ ,  $A$  为  $f(x)$  大于 0 的  $x$  的集合,  $x$  为元素。

在经典集合中,元素  $a$  与集合  $A$  的关系只有两种,  $a$  属于  $A$  或  $a$  不属于  $A$ ,对于双值逻辑只有真或假两个值。经典集合可用特征函数表示,例如,成年人(大于或等于 18 岁)集合的特征函数可以表示为