

第5章

离散时间信号与系统的时域分析

前4章讨论了连续时间信号与系统的分析方法,这些方法在通信和自动控制等领域有着广泛的应用。随着计算机和微处理器的出现,数字信号处理技术得到了迅速发展。数字信号处理具有精度高、稳定性好、灵活性强和集成度高等特点,逐渐被图像处理、工业控制、军事以及人工智能等各领域所采用。数字信号是一种离散时间信号,其相关的处理技术离不开离散时间信号和系统的分析方法。

本章主要讨论离散时间信号与系统的基本概念和分析方法。首先介绍离散时间信号描述方法和运算规则,然后分析离散时间系统的特性与建模方法,最后讨论系统响应的时域求解方法。

5.1 离散时间信号

离散时间信号与连续时间信号联系紧密,在研究内容和分析方法上具有一定的相似性。本节主要介绍离散时间信号的概念、常用的离散时间信号以及运算方法。

5.1.1 离散时间信号及表示方法



若信号只在一系列离散的时间点上有定义,则该信号称为离散时间信号。在实际应用中,通常信号取值的时刻为某个时间间隔 t_0 的整数倍,所以离散时间信号可以用 $f(nt_0)$ 来表示,通常简写为 $f(n)$ 。其中自变量 n 体现了函数值的出现次序,称为序号,故离散时间信号又称为序列。

离散时间信号可以由连续时间信号采样得到,时域采样的具体过程在3.7节进行过讨论。实际生活中许多物理现象都可以利用采样信号来描述。例如在气象观测中,要绘制出一天内的气温变化,通常选取若干特定时刻对气温进行测量,因而此时描述气温变化的信号为离散时间信号,如图5-1所示。

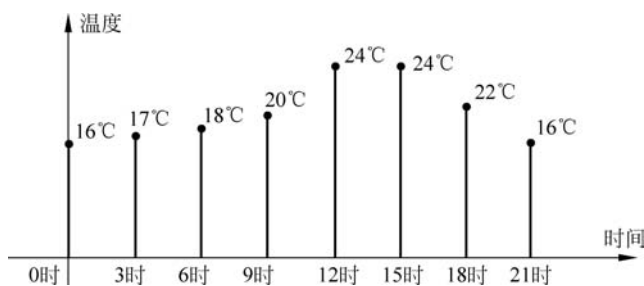


图 5-1 气温变化图

离散时间信号也可以从应用中直接获得。例如在生物学、遗传学、概率、统计及社会学等领域,存在大量离散的数据,其自变量本身就具有离散性。此外,自变量也不一定始终为时间,例如温度随高度的变化等。但是为了表示方便,一般统一用 n 来表示自变量。

离散时间信号常用以下三种方式描述:

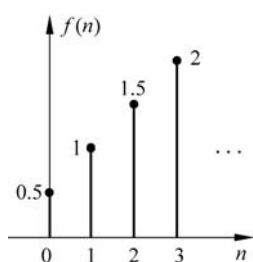


图 5-2 序列的图形

(1) 数学表达式。当 $f(n)$ 遵循某种变化规律, 则可用确定性的函数表达式来描述。如

$$f(n) = \frac{1}{2}(n+1), \quad n \geqslant 0 \quad (5.1-1)$$

(2) 图形。用图形描述可直观看出离散时间信号的变化情况, 例如式 (5.1-1) 中的信号 $f(n)$ 的图形如图 5-2 所示。

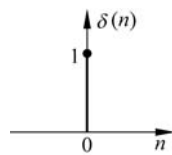
(3) 数组。用数组表示离散时间信号, 是将其信号值一一罗列出来, 并标明位置。式 (5.1-1) 所描述的信号 $f(n)$ 用数组可表示为 $f(n) = \{0.5, 1, 1.5, 2, \dots\}$, 式中箭头表示 $n=0$ 的位置。

5.1.2 常用序列

1. 单位样值序列

单位样值序列又称为单位脉冲序列, 用 $\delta(n)$ 来表示, 其定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.1-2)$$



需要注意, $\delta(n)$ 在 $n=0$ 时的函数值等于 1, 而不是无穷量, 波形如图 5-3 所示。

2. 单位阶跃序列

单位阶跃序列 $u(n)$ 定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (5.1-3)$$

单位阶跃序列 $u(n)$ 与单位阶跃信号 $u(t)$ 类似, 但两者的区别除了自变量取值是连续还是离散外, 还需要注意 $u(n)$ 在 0 时刻给出了确定的函数值 1。 $u(n)$ 的波形如图 5-4 所示。

$u(n)$ 可以用来描述信号的存在范围, 例如 $f(n) = \frac{1}{2}(n+1), n \geqslant 0$ 又可以表示为

$$f(n) = \frac{1}{2}(n+1)u(n)$$

$u(n)$ 和 $\delta(n)$ 存在如下关系:

$$u(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta(n-m) \quad (5.1-4)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (5.1-5)$$

3. 单位矩形序列

单位矩形序列用 $R_N(n)$ 来表示,其定义为

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.1-6)$$

$R_N(n)$ 中的“ N ”表示从 $n=0$ 到 $n=N-1$ 共有 N 个数值。单位矩形序列 $R_N(n)$ 的波形如图 5-5 所示,该序列又可通过单位样值序列和单位阶跃序列来描述,即

$$R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n-m) = u(n) - u(n-N) \quad (5.1-7)$$

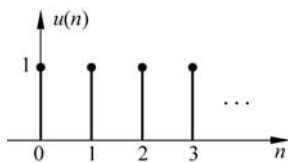


图 5-4 单位阶跃序列

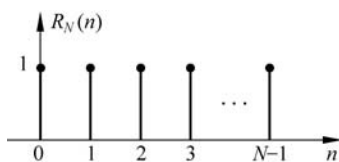
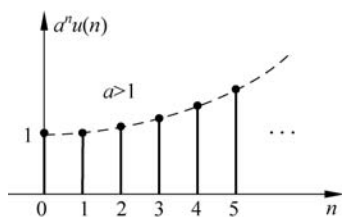


图 5-5 单位矩形序列

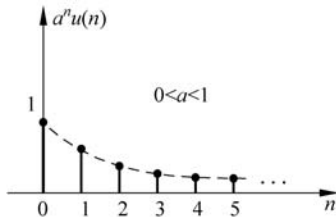
4. 单边实指数序列

$$f(n) = a^n u(n) \quad (5.1-8)$$

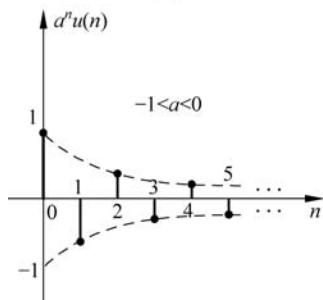
指数序列的变化规律由底数 a 取決。当 $a > 1$ 时,序列是发散的; $0 < a < 1$ 时,序列是收敛的; $-1 < a < 0$ 时,序列的正负值交替出现,总体收敛; $a < -1$ 时,序列同样是正负值交替出现,但总体发散。波形分别如图 5-6(a)~(d)所示。



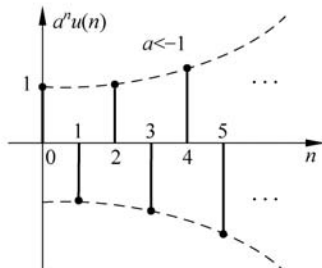
(a)



(b)



(c)



(d)

图 5-6 指数序列

5. 正弦序列

正弦序列表示为

$$f(n) = A \sin(\Omega_0 n + \theta) \quad (5.1-9)$$

式中, Ω_0 是正弦序列的数字频率, 反映序列周期重复的速率, 量纲为弧度/采样点。当

$A=1, \theta=0, \Omega_0=\frac{\pi}{5}$ 时, 正弦序列的波形如图 5-7 所示。

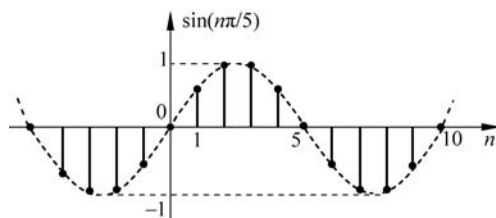


图 5-7 正弦序列 $\sin(n\pi/5)$

显然, 正弦序列的包络是连续的正弦信号, 而连续的正弦信号是典型的周期信号。由图 5-7 可知, $\sin(n\pi/5)$ 在一个正弦包络内进行等间隔离散化, 得到 10 个离散的正弦值, 然后以这 10 个离散的正弦值周期循环, 即 $\sin(n\pi/5)$ 是以 10 为周期的正弦序列。

但正弦序列的周期有可能与包络的周期不同。图 5-8 是正弦序列 $f(n) = \sin \frac{4\pi}{11}n$ 的波形图, 可以看出此正弦序列每隔 11 个样值周期重复, 所以它的周期为 11, 显然与包络的周期不一致。

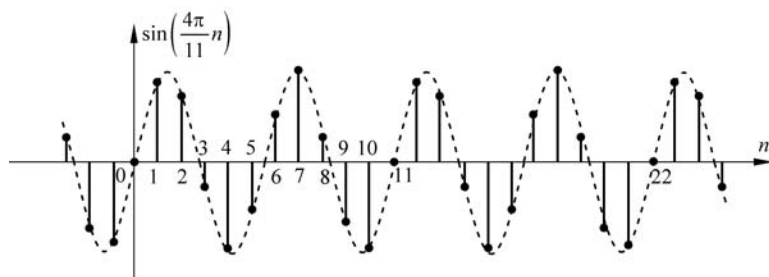


图 5-8 正弦序列 $\sin \frac{4\pi}{11}n$

如果正弦序列为周期序列, 则满足

$$\sin(\Omega_0 n) = \sin[\Omega_0 (n + N)] = \sin(\Omega_0 n + \Omega_0 N) \quad (5.1-10)$$

式中, N 为周期, $\Omega_0 N = 2k\pi$, N, k 均为整数。由 $\Omega_0 N = 2k\pi$ 可得周期 $N = 2\pi k / \Omega_0$, 故只要取一个最小的 k 使 $2\pi k / \Omega_0$ 为整数, 则这个整数就为正弦序列的周期 N 。

具体可由下列条件判断正弦序列是否为周期序列:

(1) 若 $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ 为有理数, 则可写为 $\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{N}{k}$, 此时以 Ω_0 为角频率的正弦序列为周期序列,

周期为 $N = \frac{2\pi}{\Omega_0}k$ 。

(2) 若 $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ 为无理数, 则无法找到一个合适的 k 使得 $\frac{2\pi}{\Omega_0}k$ 为整数, 故正弦序列为非周期序列。

例 5-1 判断序列 $f(n) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}n + \frac{\pi}{6}\right)$ 是否为周期序列。若是, 请求出序列周期。

解: 正弦序列的周期性与振幅和初相无关, 只与数字角频率有关。由于序列 $f(n)$ 的数字角频率 $\Omega_0 = \frac{3}{5}\pi$, 故

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{3\pi/5} = \frac{10}{3}$$

所以该序列为周期序列, 其周期 $N = 10$ 。

例 5-2 判断序列 $f(n) = \sin\left(\frac{n}{2}\right)$ 是否为周期序列。若是, 请求出序列周期。

解: 序列 $f(n)$ 的数字角频率 $\Omega_0 = \frac{1}{2}$

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$$

故该序列不是周期序列。

6. 复指数序列

复指数序列表示为

$$\begin{aligned} f(n) &= A e^{(a+j\Omega_0)n} = A e^{an} e^{j\Omega_0 n} \\ &= A e^{an} (\cos\Omega_0 n + j\sin\Omega_0 n) \end{aligned} \quad (5.1-11)$$

当 $a=0$ 时, 有

$$f(n) = A e^{j\Omega_0 n} = A (\cos\Omega_0 n + j\sin\Omega_0 n) \quad (5.1-12)$$

式(5.1-12)实部与虚部皆为正弦序列, 又可称为复正弦序列。与正弦序列类似, 复指数序列 $A e^{j\Omega_0 n}$ 若具有周期性, 则满足

$$A e^{j\Omega_0 n} = A e^{j\Omega_0 (n+N)} \quad (5.1-13)$$

故要求 $\Omega_0 N = 2\pi k$ (N, k 均为整数), 即 $N = \frac{2\pi}{\Omega_0}k$, 当且仅当存在整数 k 使得 $\frac{2\pi}{\Omega_0}k$ 为整数 N , 此时复指数序列为周期序列, 周期为 N 。

5.1.3 序列的运算与变换



序列的运算和变换包括序列的相加、相乘以及序列自身的反褶、移位、尺度变换及差分等。将这些处理方式综合运用, 可以大大提高信号处理的能力。

1. 相加运算

序列相加是指两序列同序号的数值相加构成一个新的序列,可表示为

$$y(n) = f_1(n) + f_2(n) \quad (5.1-14)$$

2. 相乘运算

序列相乘是指两序列同序号的数值相乘构成一个新的序列,可表示为

$$y(n) = f_1(n) \cdot f_2(n) \quad (5.1-15)$$

3. 反褶

序列反褶运算是将自变量 n 替换为 $-n$,得到一个新的序列,可表示为

$$y(n) = f(-n) \quad (5.1-16)$$

图 5-9 给出了原序列 $f(n)$ 与其反褶序列 $f(-n)$ 的波形。

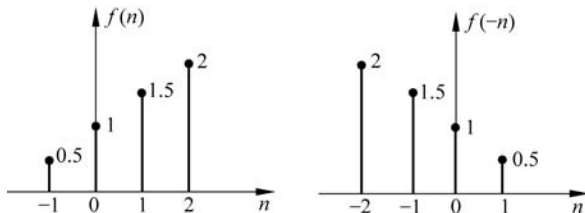


图 5-9 序列 $f(n)$ 及其反褶序列

4. 移位

序列移位有左移和右移两种情况。设 $m > 0$, 则序列右移 m 个单位可表示为

$$y(n) = f(n - m) \quad (5.1-17)$$

类似地,序列左移 m 个单位可表示为

$$y(n) = f(n + m) \quad (5.1-18)$$

例 5-3 已知序列 $f(n) = \{2, 1, 3\}$, 求序列 $y(n) = f(n) + f(n-1)f(n-2)$ 。

解: 已知 $f(n) = \{2, 1, 3\}$, 根据序列的移位运算,得

$$f(n-1) = \{2, 1, 3\}$$

$$f(n-2) = \{0, 2, 1, 3\}$$

将以上两个序列进行相乘运算,得

$$f(n-1)f(n-2) = \{0, 2, 3\}$$

最后将上式与原序列 $f(n)$ 相加后,得

$$y(n) = \{2, 1, 5, 3\}$$

另外还可以依次画出以上各序列的波形,根据波形进行运算,具体过程如图 5-10(a)~

(e)所示。

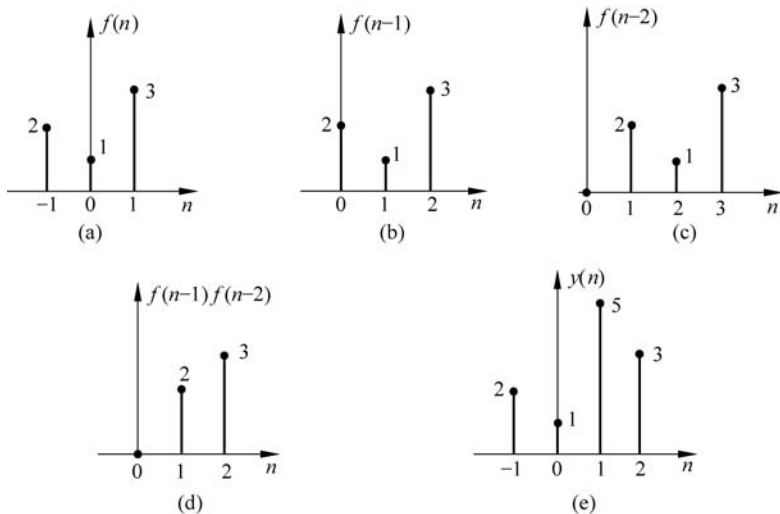


图 5-10 例 5-3 中各序列的波形

根据图 5-10(e)的结果,可知

$$y(n) = \{2, 1, 5, 3\}$$

5. 尺度变换

序列的尺度变换是指将 $f(n)$ 波形压缩或扩展为一个新的序列。若将自变量 n 乘以大于 1 的正整数 a , 构成序列 $f(an)$, 则该序列是原序列 $f(n)$ 的波形压缩, 按每隔 $a-1$ 个点取值并将取出的值重新排列。若将自变量 n 除以大于 1 的正整数 a , 构成序列 $f(n/a)$, 则该序列是原序列 $f(n)$ 的波形扩展, 即在原序列相邻两点间插入 $a-1$ 个零点值并重新排列。

例 5-4 若 $f(n)$ 波形如图 5-11(a) 所示, 画出 $f(2n)$ 和 $f(n/2)$ 的波形。

解: $f(2n)$ 是对原序列 $f(n)$ 的波形压缩, 具体方法是将原序列每隔 1 个点抽取 1 个样值, 也就是抽取了原序列偶数点的值, 然后再重新排序得到, 如图 5-11(b) 所示。

$f(n/2)$ 是对原序列 $f(n)$ 的波形扩展, 即将原序列每相邻 2 个点之间插入 1 个零点值, 后对每个序列值进行自左向右重新排序, 使得原序列的点位于偶数点上, 奇数点为插入的零点值, 如图 5-11(c) 所示。

6. 差分

序列的差分运算是指原序列 $f(n)$ 与其移位序列 $f(n-m)$ 的相减运算, 具体有前向差分和后向差分两种形式。

前向差分记为

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (5.1-19)$$

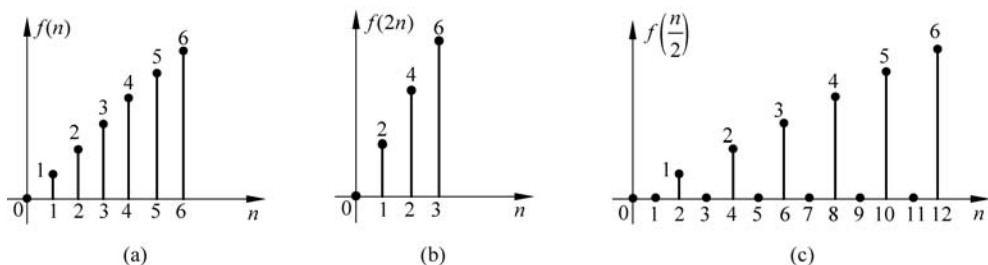


图 5-11 例 5-4 中各序列的波形

后向差分记为

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \quad (5.1-20)$$

5.2 离散时间系统

离散时间系统是指输入、输出信号均为离散时间信号的系统。离散时间系统的框图如图 5-12 所示。经过系统的作用后,输入 $f(n)$ 转变为输出 $y(n)$ 。本节针对单输入单输出系统,介绍其建模方法和特性分析。

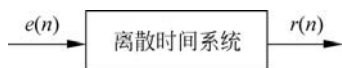


图 5-12 离散时间系统的框图

5.2.1 离散时间系统模型



系统模型是系统物理特性的数学抽象。要进行系统分析,首先要建立系统模型。离散时间系统模型主要包括数学模型和系统模拟图。

1. 数学模型——差分方程

下面通过两个例题来说明如何建立系统的数学模型,以及离散时间系统数学模型的具体形式。

例 5-5 某储户每月月初定期在银行存款。设第 n 个月的存款是 $e(n)$, 银行支付月息为 a , 每月利息不取出。设第 n 个月初的本息和为 $r(n)$, 试列写 $r(n)$ 满足的方程。

解: 第 n 个月的本息和 $r(n)$ 包括三个部分: 第 $n-1$ 个月初的本息和 $r(n-1)$ 、 $r(n-1)$ 在第 $n-1$ 个月所产生的利息 $ar(n-1)$ 及第 n 个月初的存款 $e(n)$, 因而可得

$$r(n) = r(n-1) + ar(n-1) + e(n)$$

整理得

$$r(n) - (1+a)r(n-1) = e(n) \quad (5.2-1)$$

例 5-6 图 5-13 所示为梯形电阻网络。令每个结点相对地的电压为 $v(n)$, $n=1, 2, \dots, N$ 。试建立当 $n < N$ 时, 第 n 个结点电压 $v(n)$ 与相邻两个结点电压之间的关系式。

解: 列写结点 n 的 KCL 方程, 得

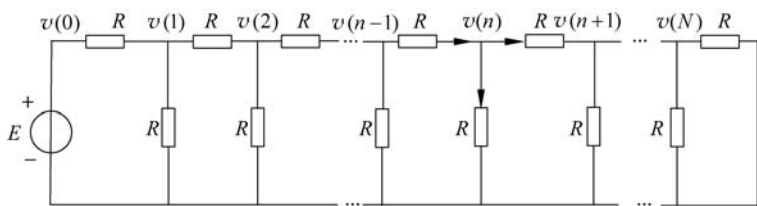


图 5-13 梯形电阻网络图

$$\frac{v(n-1) - v(n)}{R} = \frac{v(n)}{R} + \frac{v(n) - v(n+1)}{R}$$

整理得

$$v(n+1) - 3v(n) + v(n-1) = 0$$

改写为

$$v(n) - 3v(n-1) + v(n-2) = 0 \quad (5.2-2)$$

形如式(5.2-1)及式(5.2-2)的方程称为差分方程。设输入序列为 $e(n)$, 待求未知序列为 $r(n)$, 则差分方程是由 $r(n)$ 及其移位序列和 $e(n)$ 及其移位序列所组成的方程。 $e(n)$ 和 $r(n)$ 的移位形式可以是向左移, 也可以是向右移。当方程左侧是未知序列 $r(n)$ 及其左移序列 $r(n+1), r(n+2), \dots, r(n+N)$ 等形式组成时, 称该方程为前向差分方程。当方程左侧是未知序列 $r(n)$ 及其右移序列 $r(n-1), r(n-2), \dots, r(n-N)$ 等形式组成时, 称该方程为后向差分方程。同一个系统的数学模型既可以用前向差分方程来表示, 也可以用后向差分方程来表示。

差分方程的阶次由未知序列 $r(n)$ 以其移位序列中序号最大值与最小值的差决定。由于式(5.2-1)中仅包含 $r(n)$ 及 $r(n-1)$, 两序列间的移位量相差 1 个单位, 因而该差分方程的阶次为一阶。而式(5.2-2)中输出序列的形式有 $v(n), v(n-1)$ 及 $v(n-2)$, 各输出序列中序号最大值与最小值的差为 2, 因此该差分方程的阶次为二阶。

2. 系统模拟

离散时间系统的差分方程包含移位、相加及乘系数三种运算, 因而离散时间系统的模型也可以用加法器、数乘器及移位器这三种运算单元来组合表示。这种描述方法称为系统模拟。

1) 基本运算单元

加法器如图 5-14(a)和(b)所示, 将各输入序列相加等于输出, 即 $r(n) = e_1(n) \pm e_2(n)$ 。

数乘器是将输入信号乘以常数, 如图 5-15(a)和(b)所示, 用表达式描述为 $r(n) = ae(n)$ 。

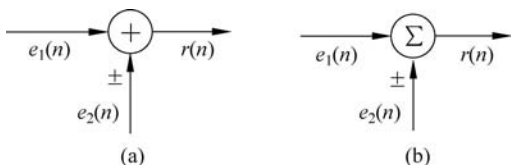


图 5-14 加法器



图 5-15 数乘器

序列的移位可用移位算子 E 来表示,即

$$Ef(n) = f(n+1) \quad (5.2-3)$$

$$E^{-1}f(n) = f(n-1) \quad (5.2-4)$$

移位器如图 5-16 所示。

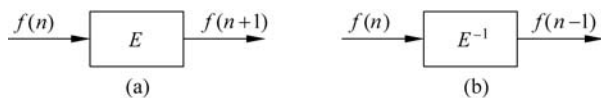


图 5-16 移位器

2) 系统模拟与差分方程

根据差分方程可以画出系统模拟图;反之,已知系统模拟图也可以列写差分方程。系统模拟图与差分方程这两种模型可以相互转化。若已知累加器的数学模型为

$$r(n) - r(n-1) = e(n)$$

可将该方程改写为

$$r(n) = e(n) + r(n-1)$$

可以看出,输出 $r(n)$ 等于输入 $e(n)$ 和前一个累加和 $r(n-1)$ 相加。故该系统可用一个移位器和一个加法器来实现,其模拟图如图 5-17 所示。

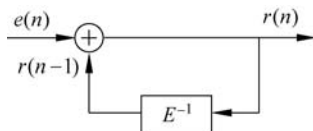


图 5-17 累加器模拟图

例 5-7 已知某离散时间系统的差分方程 $r(n) + 2r(n-1) + r(n-2) = e(n) + 3e(n-1)$, 画出该系统的模拟图。

解: 将差分方程改写为

$$r(n) = -2r(n-1) - r(n-2) + e(n) + 3e(n-1)$$

由上式可得,输出 $r(n)$ 是由 $-2r(n-1)$ 、 $-r(n-2)$ 、 $e(n)$ 和 $3e(n-1)$ 相加得到。其中 $-2r(n-1)$ 可由 $r(n)$ 右移一位再乘以 -2 得到,该过程可以利用数乘器和延时器实现。 $r(n-2)$ 可在 $r(n-1)$ 的基础上再右移一位得到。故该系统模拟图如图 5-18 所示。

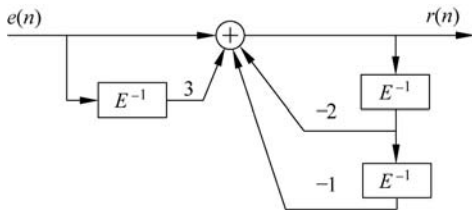


图 5-18 例 5-7 系统模拟图

例 5-8 已知某离散时间系统模拟图如图 5-19 所示,试写出该系统输入 $e(n)$ 与输出 $r(n)$ 关系的差分方程。

解: 围绕加法器,分别表示出各输入及输出序列的表达式,进行相加,便可以得出方程。

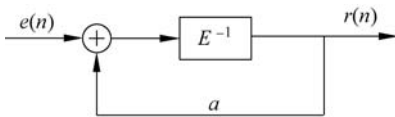


图 5-19 例 5-8 系统方框图

延时器的输出为 $r(n)$, 则输入为 $r(n+1)$, 即加法器的输出为 $r(n+1)$ 。
由此可得

$$r(n+1) = ar(n) + e(n)$$

整理得

$$r(n+1) - ar(n) = e(n)$$

例 5-9 已知某离散时间系统模拟图如图 5-20 所示, 试写出该系统的差分方程。

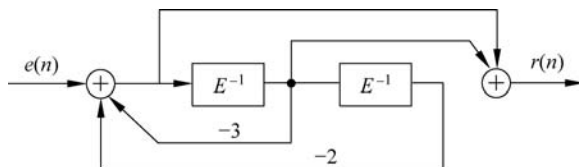


图 5-20 例 5-9 系统模拟图

解: 该模拟图中包含两个加法器, 围绕这两个加法器可以列写方程。设左侧加法器的输出序列为 $x(n)$, 引入移位算子来表示各移位序列, 如图 5-21 所示。

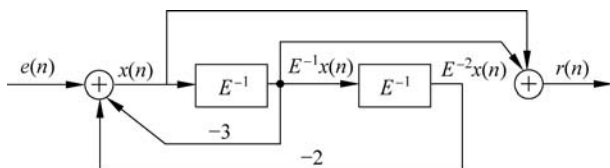


图 5-21 例 5-9 系统模拟图

围绕左边加法器, 可得

$$x(n) = e(n) - 3E^{-1}x(n) - 2E^{-2}x(n)$$

整理得

$$(1 + 3E^{-1} + 2E^{-2})x(n) = e(n) \quad (5.2-5)$$

围绕右边加法器, 可得

$$r(n) = x(n) + E^{-1}x(n) = (1 + E^{-1})x(n) \quad (5.2-6)$$

将式(5.2-5)代入式(5.2-6), 得

$$r(n) = \frac{1 + E^{-1}}{1 + 3E^{-1} + 2E^{-2}}e(n)$$

$$(1 + 3E^{-1} + 2E^{-2})r(n) = (1 + E^{-1})e(n) \quad (5.2-7)$$

将式(5.2-7)改写为差分方程, 得

$$r(n) + 3r(n-1) + 2r(n-2) = e(n) + e(n-1)$$

5.2.2 线性时不变离散时间系统的特性分析

离散时间系统从不同的角度可分为线性与非线性系统、时变与时不变系统等多种类型。本小结重点讨论线性和时不变性的判断方法, 后续以线性时不变系统为分析对象,

对响应进行求解。

1. 线性

线性特性包括叠加性和齐次性(或比例性)。满足线性的系统称为线性系统,否则为非线性系统。线性可描述为:

若已知系统输入为 $e_1(n)$,产生的响应为 $r_1(n)$,即

$$e_1(n) \rightarrow r_1(n)$$

若系统输入为 $e_2(n)$,产生的响应为 $r_2(n)$,即

$$e_2(n) \rightarrow r_2(n)$$

叠加性满足

$$e_1(n) + e_2(n) \rightarrow r_1(n) + r_2(n) \quad (5.2-8)$$

齐次性满足

$$ke_1(n) \rightarrow kr_1(n) \quad (5.2-9)$$

其中, k 为任意常数。

当且仅当叠加性和齐次性同时满足时,该系统具有线性,可表示为

$$k_1 e_1(n) + k_2 e_2(n) \rightarrow k_1 r_1(n) + k_2 r_2(n) \quad (5.2-10)$$

线性特性可用图 5-22 所示方框图来表示。

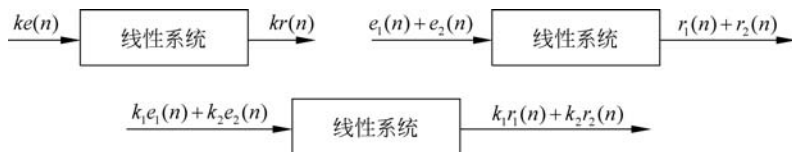


图 5-22 系统线性图示

2. 时不变性

时不变性是指系统特性不随时间的变化而变化。若已知某系统的输入为 $e(n)$,产生的响应为 $r(n)$,即

$$e(n) \rightarrow r(n)$$

则时不变性可描述为

$$e(n-m) \rightarrow r(n-m) \quad (5.2-11)$$

满足时不变性的系统为时不变系统,如图 5-23 所示。若系统不满足时不变性则为时变系统。

下面通过几个例题来讨论一下如何判断系统是否为线性时不变系统。

例 5-10 已知某离散时间系统的输入-输出关系定义为 $r(n) = ne(n)$,判断该系统是是否为线性时不变系统。

解: 由系统的输入-输出关系可知,系统的作用是对输入信号乘以 n ,即

$$e(n) \rightarrow ne(n) = r(n)$$

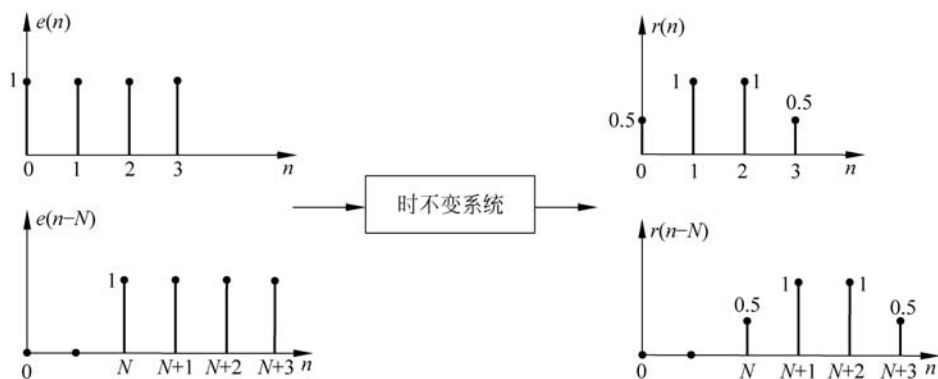


图 5-23 系统时不变性图示

(1) 线性判断。

设分别对系统输入 $e_1(n)$ 和 $e_2(n)$, 对应产生输出 $r_1(n)$ 和 $r_2(n)$, 即

$$e_1(n) \rightarrow r_1(n) = ne_1(n)$$

$$e_2(n) \rightarrow r_2(n) = ne_2(n)$$

当输入为 $e(n) = k_1 e_1(n) + k_2 e_2(n)$ 时, 有

$$\begin{aligned} k_1 e_1(n) + k_2 e_2(n) &\rightarrow n[k_1 e_1(n) + k_2 e_2(n)] = k_1 n e_1(n) + k_2 n e_2(n) \\ &= k_1 r_1(n) + k_2 r_2(n) \end{aligned}$$

故该系统具有线性。

(2) 时不变性判断。

已知

$$e(n) \rightarrow ne(n) = r(n)$$

则

$$e(n-m) \rightarrow ne(n-m)$$

而

$$r(n-m) = (n-m)e(n-m)$$

由于

$$e(n-m) \nrightarrow r(n-m)$$

故该系统不满足时不变性, 是时变系统。结合两方面特性可知, 该系统为线性时变系统。

例 5-11 已知某离散平均器 $r(n) = \frac{1}{2}[e(n) + e(n-1)]$, 判断该系统是否为线性时不变系统。

解: (1) 线性判断。

设 $e_1(n) \rightarrow r_1(n)$, 即

$$r_1(n) = \frac{1}{2}[e_1(n) + e_1(n-1)]$$

$e_2(n) \rightarrow r_2(n)$, 即

$$r_2(n) = \frac{1}{2}[e_2(n) + e_2(n-1)]$$

当 $e(n) = k_1 e_1(n) + k_2 e_2(n)$ 时, 有

$$\begin{aligned} r(n) &= \frac{1}{2}[k_1 e_1(n) + k_2 e_2(n) + k_1 e_1(n-1) + k_2 e_2(n-1)] \\ &= \frac{k_1}{2}[e_1(n) + e_1(n-1)] + \frac{k_2}{2}[e_2(n) + e_2(n-1)] \\ &= k_1 r_1(n) + k_2 r_2(n) \end{aligned}$$

故该系统具有线性。

(2) 时不变性判断。

当 $e(n-m)$ 输入该系统时, 有

$$e(n-m) \rightarrow \frac{1}{2}[e(n-m) + e(n-m-1)]$$

而

$$r(n-m) = \frac{1}{2}[e(n-m) + e(n-1-m)]$$

即

$$e(n-m) \rightarrow r(n-m)$$

所以该系统具有时不变性。总结以上两种特性可知, 该系统为线性时不变系统。

5.3 系统响应的时域求解

一般来说, 线性时不变(简称为 LTI)离散时间系统的数学模型为常系数线性差分方程, 用后向差分方程建立系统的模型为

$$\sum_{k=0}^N a_k r(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m e(n-m) \quad (5.3-1)$$

当给定系统激励时, 求解系统响应的主要方法包括迭代法、经典法以及双零法(零输入响应和零状态响应)。

5.3.1 迭代法

由前述已知, 描述 LTI 离散时间系统的差分方程如式(5.3-1)所示, 可将其改写为

$$r(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{m=0}^M b_m e(n-m) - \sum_{k=1}^N a_k r(n-k) \right] \quad (5.3-2)$$

从式(5.3-2)可以看出, 当前输出 $r(n)$ 由输入及之前的输出 $r(n-1), r(n-2), \dots, r(n-N)$ 决定, 也就是说求输出是一个递归过程, 故可以采用迭代法求解。

例 5-12 已知描述某系统的差分方程为 $r(n) - ar(n-1) = e(n)$, 其中 $e(n) = \delta(n), r(-1) = 0$, 求系统输出 $r(n)$ 。

解：将方程改写成下列形式：

$$r(n) = ar(n-1) + e(n)$$

将 $e(n) = \delta(n)$, $r(-1) = 0$ 代入方程可得

$$r(0) = ar(-1) + e(0) = 1$$

以此类推,可得

$$r(1) = ar(0) + e(1) = a$$

$$r(2) = ar(1) + e(2) = a^2$$

$$\vdots$$

$$r(n) = ar(n-1) + e(n) = a^n$$

由于 $n < 0$ 时, $r(n) = 0$, 故

$$r(n) = a^n u(n)$$

迭代法概念清楚,简单易操作,广泛应用于计算机运算中。但在实际应用中仅能求出有限个数值解,不能给出完整的解析解。

5.3.2 时域经典法

差分方程的时域经典法是指分别求出齐次方程的通解和非齐次方程的特解,然后将两者相加得到差分方程的完全解,最后利用 $r(0), r(1), \dots, r(N)$ 这些条件确定完全解中的待定系数。完全解可表示为

$$r(n) = r_h(n) + r_p(n)$$

其中, $r_h(n)$ 表示齐次方程的齐次解,又可以称为系统的自由响应; $r_p(n)$ 表示非齐次方程的特解,又可以称为强迫响应。

1. 齐次解

齐次解是齐次方程的解,式(5.3-1)所对应的齐次方程为

$$\sum_{k=0}^N a_k r(n-k) = 0 \quad (5.3-3)$$

对于该 N 阶齐次差分方程,其对应的特征方程为

$$a_0 \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N = 0 \quad (5.3-4)$$

对上式进行因式分解,可得

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

故可求得 N 个特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 。

(1) 当特征根为单根,则齐次差分方程解的形式为

$$r_h(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_N \lambda_N^n \quad (5.3-5)$$

式中,待定系数 $c_1, c_2, \dots, c_N$ 由 $r(0), r(1), \dots, r(N)$ 决定。

(2) 当特征根为重根,若 λ_1 为 K 次重根,其余 $N-K$ 个均为实数单根,则齐次差分方程解的形式为

$$r_h(n) = (c_1 + c_2 n + \cdots + c_K n^{K-1}) \lambda_1^n + \sum_{i=K+1}^N c_i \lambda_i^n \quad (5.3-6)$$

其中, $c_1, c_2, \dots, c_N$ 为待定系数, 由 $r(0), r(1), \dots, r(N)$ 决定。

2. 特解

特解是满足非齐次差分方程的一个解, 一般通过待定系数法求解。具体的求解过程是首先将输入序列 $e(n)$ 代入方程右侧, 化为最简形式的自由项, 根据方程右侧自由项的具体形式来选择含有待定系数的特解形式, 再将此特解代入非齐次方程, 通过匹配方程左右两侧求出待定系数, 最终求得方程的特解 $r_p(n)$ 。

例 5-13 已知描述某系统的差分方程 $r(n) - 0.9r(n-1) = 0.05e(n)$, $e(n) = u(n)$, $r(-1) = 1$, 求 $n \geq 0$ 时系统的响应 $r(n)$ 。

解: 根据系统的差分方程, 可知齐次方程为

$$r(n) - 0.9r(n-1) = 0$$

其特征方程为

$$\lambda - 0.9 = 0$$

可得特征根 $\lambda = 0.9$, 故齐次解为

$$r_h(n) = c \cdot 0.9^n, \quad n \geq 0$$

将激励代入方程右侧, 可设特解

$$r_p(n) = k$$

将特解代入方程得

$$k - 0.9k = 0.05$$

$$k = 0.5$$

完全响应为

$$r(n) = c \cdot 0.9^n + 0.5, \quad n \geq 0$$

为了确定待定系数 c , 需要知道 $r(0)$ 的值。将 $r(-1) = 1$ 代入系统方程, 可得

$$r(0) - 0.9r(-1) = 0.05e(0)$$

求得 $r(0) = 0.95$, 并将其代入 $r(n) = c \cdot 0.9^n + 0.5$, 可得

$$0.95 = c + 0.5$$

$$c = 0.45$$

故系统的响应为

$$r(n) = 0.45 \times 0.9^n + 0.5, \quad n \geq 0$$

或记为

$$r(n) = (0.45 \times 0.9^n + 0.5)u(n)$$

5.3.3 零输入响应和零状态响应

零输入响应是指当输入为零时, 仅由系统起始状态 $r(-1), r(-2), \dots, r(-N)$ 所产

生的响应,可记为 $r_{zi}(n)$ 。零状态响应是指当系统的起始状态 $r(-1)=r(-2)=\cdots=r(-N)=0$ 时,仅由输入信号 $e(n)$ 所产生的响应,可记为 $r_{zs}(n)$ 。当起始状态和激励同时作用于系统时,系统全响应等于零输入响应与零状态响应之和,即

$$r(n)=r_{zi}(n)+r_{zs}(n)$$

1. 零输入响应

在零输入条件下,由于激励为零,响应的数学模型是齐次差分方程,因而零输入响应的形式为齐次解。若特征根均为单根,则零输入响应可写为

$$r_{zi}(n)=\sum_{k=1}^n c_{zik}\lambda_k^n \quad (5.3-7)$$

式中, c_{zik} 为待定系数,由 $r_{zi}(0), r_{zi}(1), \cdots, r_{zi}(N-1)$ 确定。已知 $r(-1), r(-2), \cdots, r(-N)$,利用迭代法将 $r(-1), r(-2), \cdots, r(-N)$ 代入零输入响应的数学模型,可以转化出 $r_{zi}(0), r_{zi}(1), \cdots, r_{zi}(N-1)$ 。

例 5-14 已知某系统的差分方程 $r(n)-0.9r(n-1)=0, r(-1)=1$,求 $n \geq 0$ 时系统的零输入响应 $r(n)$ 。

解:该齐次差分方程的特征方程为

$$\lambda - 0.9 = 0$$

特征根为

$$\lambda = 0.9$$

因此,零输入响应为

$$r_{zi}(n)=c_{zi} \cdot 0.9^n \quad (5.3-8)$$

将 $r(-1)=1$ 代入差分方程,得

$$r(0)-0.9r(-1)=0$$

解得 $r(0)=0.9=r_{zi}(0)$,将 $r_{zi}(0)=0.9$ 代入零输入响应表达式(5.3-8),得

$$0.9=c_{zi} \cdot 0.9^0, \quad c_{zi}=0.9$$

所以

$$r_{zi}(n)=0.9 \times 0.9^n u(n)$$

例 5-15 已知某系统差分方程 $r(n)+3r(n-1)+2r(n-2)=0$,其中 $r(0)=0, r(1)=2$,求 $n \geq 0$ 时系统的响应 $r(n)$ 。

解:由于该差分方程为齐次差分方程,因而此时的响应为零输入响应。

特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

可求得特征根 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$,故

$$r_{zi}(n)=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$$

由

$$\begin{cases} r(0)=r_{zi}(0)=c_1+c_2=0 \\ r(1)=r_{zi}(1)=-c_1-2c_2=2 \end{cases}$$

解方程组,可得

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

故得

$$r_{zi}(n) = 2 \cdot [(-1)^n - (-2)^n]u(n)$$

2. 零状态响应

在零状态条件下,由于激励的存在,求解零状态响应时系统的数学模型是非齐次差分方程,完全解由齐次解和特解组成。若系统特征根为单根时,完全解可写为

$$r_{zs}(n) = \sum_{k=1}^n c_{zsk} \lambda_k^n + r_p(n) \quad (5.3-9)$$

式中, c_{zsk} 为待定系数,由 $r_{zs}(0), r_{zs}(1), \dots, r_{zs}(N-1)$ 和特解确定。

由于零状态响应包含齐次解和特解,求解相对复杂,故本书重点讨论采用卷积和的方法求解零状态响应,即先求出系统的单位样值响应,再利用激励和单位样值响应的卷积和求一般激励作用下的零状态响应。

5.4 单位样值响应



单位样值响应是指单位样值序列 $\delta(n)$ 作用于系统所引起的零状态响应,有时也称为单位脉冲响应,通常用 $h(n)$ 来表示。单位样值响应的求解方法包括初始条件等效法及传输算子法等。

1. 初始条件等效法

由于单位样值序列 $\delta(n)$ 只在 $n=0$ 时取值为 1,在其他时刻值均为 0,因而利用这一特点可以将单位样值序列对系统的作用转化为系统的边界条件。当 $n>0$ 时,由于 $\delta(n)$ 的函数值为 0,因而将单位样值响应的数学模型简化为齐次差分方程,求解过程与零输入响应的求解类似,关键在于确定单位样值响应的初始条件 $h(0), h(1), \dots, h(N-1)$ 。

例 5-16 已知描述某系统的差分方程 $r(n) - 5r(n-1) = e(n)$,求该系统的单位样值响应。

解: 求解单位样值响应时,系统的数学模型为

$$h(n) - 5h(n-1) = \delta(n) \quad (5.4-1)$$

激励 $\delta(n)$ 只在 $n=0$ 时取值为 1,因而当 $n>0$ 时,数学模型转化为

$$h(n) - 5h(n-1) = 0$$

利用齐次差分方程的求解方法,可得

$$h(n) = c \cdot 5^n$$

由单位样值响应的定义可知 $h(-1)=0$,将其代入式(5.4-1),可得

$$h(0) - 5h(-1) = \delta(0)$$

解得 $h(0)=1$ 。当 $n>0$ 时,激励 $\delta(n)=0$,但由于 $\delta(n)$ 在 0 时刻的作用转化成初始状态 $h(0)=1$,故使系统在 $n>0$ 的区间产生响应。

将 $h(0)=1$ 代入 $h(n)=c \cdot 5^n$,可得

$$c=1$$

系统的单位样值响应为

$$h(n)=5^n, \quad n \geq 0$$

或者写为

$$h(n)=5^n u(n)$$

例 5-17 已知某系统的差分方程 $r(n)-5r(n-1)+6r(n-2)=e(n)+e(n-1)$,求该系统的单位样值响应。

解: 求解单位样值响应时,系统的数学模型为

$$h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)+\delta(n-1) \quad (5.4-2)$$

激励仅作用于 $n=0$ 及 $n=1$ 两个时刻点,当 $n>1$ 时,数学模型转化为

$$h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=0$$

由齐次差分方程的求解方法,可得

$$h(n)=c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n \quad (5.4-3)$$

利用 $h(-2)=h(-1)=0$ 代入式(5.4-2),可得

$$\begin{cases} h(0)-5h(-1)+6h(-2)=\delta(0)+\delta(-1) \\ h(1)-5h(0)+6h(-1)=\delta(1)+\delta(0) \end{cases}$$

解得 $h(0)=1, h(1)=6$,将其代入式(5.4-3),得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 3c_2 = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 4 \end{cases}$$

故单位样值响应为

$$h(n)=(-3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n)u(n)$$

另解: 假设激励 $\delta(n)$ 和 $\delta(n-1)$ 分别单独作用于系统,先求 $\delta(n)$ 作用时的单位样值响应 $h_1(n)$ 。

求解齐次解为

$$h_1(n)=c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$$

利用迭代法,有

$$\begin{cases} h(0)-5h(-1)+6h(-2)=\delta(0) \\ h(1)-5h(0)+6h(-1)=\delta(1) \end{cases}$$

解得 $h(0)=1, h(1)=5$,将其代入齐次解的形式中,得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 3c_2 = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

由此可得

$$h_1(n) = (3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n)u(n)$$

当 $\delta(n-1)$ 单独作用于系统时, 由系统时不变特性可知

$$\begin{aligned}\delta(n-1) \rightarrow h_1(n-1) &= (3 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1})u(n-1) \\ &= (3^n - 2^n)u(n-1)\end{aligned}$$

将以上结果叠加, 利用系统叠加性, 可得

$$\begin{aligned}\delta(n) + \delta(n-1) \rightarrow h_1(n) + h_1(n-1) &= (3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n)u(n) + (3^n - 2^n)u(n-1) \\ &= (4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n)u(n-1) + \delta(n) \\ &= (4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n)u(n)\end{aligned}$$

2. 传输算子法

利用初始条件等效法求解高阶差分方程时需要求解齐次方程, 并等效出系统 N 个初始条件, 即 $h(0), h(1), \dots, h(N-1)$, 有时比较烦琐。为了简化运算, 可以使用移位算子求解单位样值响应。

利用移位算子描述差分方程, 则式(5.3-1)的算子方程为

$$\sum_{k=0}^N a_k E^{-k} r(n) = \sum_{m=0}^M b_m E^{-m} e(n) \quad (5.4-4)$$

当激励为 $\delta(n)$ 时, 系统模型为

$$\sum_{k=0}^N a_k E^{-k} h(n) = \sum_{m=0}^M b_m E^{-m} \delta(n)$$

故单位样值响应为

$$h(n) = \frac{b_0 + b_1 E^{-1} + \dots + b_M E^{-M}}{a_0 + a_1 E^{-1} + \dots + a_N E^{-N}} \delta(n) = H(E) \delta(n) \quad (5.4-5)$$

式(5.4-5)中, $H(E) = \frac{b_0 + b_1 E^{-1} + \dots + b_M E^{-M}}{a_0 + a_1 E^{-1} + \dots + a_N E^{-N}}$ 称为传输算子。

假设系统特征根无重根, 对式(5.4-5)进行部分分式展开, 可得

$$h(n) = \left[c_s E^{-s} + c_{s-1} E^{-(s+1)} + \dots + c_1 E^{-1} + c_0 + \frac{k_1}{1 - \lambda_1 E^{-1}} + \frac{k_2}{1 - \lambda_2 E^{-1}} + \dots + \frac{k_N}{1 - \lambda_N E^{-1}} \right] \delta(n) \quad (5.4-6)$$

式(5.4-6)是 $M \geq N$ 且系统特征根为单根。若 $M < N$, 则系数 $c_s, c_{s-1}, \dots, c_1, c_0$ 均为零。进一步整理可得

$$h(n) = \left[\sum_{i=0}^s c_i E^{-i} \delta(n) \right] + \left[\sum_{j=1}^N \frac{k_j}{1 - \lambda_j E^{-1}} \delta(n) \right] = \left[\sum_{i=0}^s h_i(n) \right] + \left[\sum_{j=1}^N h_j(n) \right] \quad (5.4-7)$$

其中, $h_i(n) = c_i E^{-i} \delta(n)$, $h_j(n) = \frac{k_j}{1 - \lambda_j E^{-1}} \delta(n)$ 。

从例 5-16 可知, 差分方程

$$h(n) - 5h(n-1) = \delta(n)$$

所对应的算子方程为

$$(1 - 5E^{-1})h(n) = \delta(n), \quad \text{即} \quad h(n) = \frac{1}{1 - 5E^{-1}}\delta(n)$$

此时单位样值响应为

$$h(n) = 5^n u(n)$$

由此可知当 $h_j(n) = \frac{k_j}{1 - \lambda_j E^{-1}}\delta(n)$ 时, $h_j(n) = k_j \cdot \lambda_j^n u(n)$ 。

故式(5.4-7)所对应的单位冲激响应为

$$h(n) = \left[\sum_{i=0}^s c_i \delta(n-i) \right] + \left[\sum_{j=1}^N k_j \cdot \lambda_j^n u(n) \right] \quad (5.4-8)$$

当系统特征方程有重根时,采用类似于例 5-16 的方法,可得

$$\text{当 } h_j(n) = \frac{k_j}{(1 - \lambda_j E^{-1})^2} \delta(n) \text{ 时,}$$

$$h_j(n) = k_j \cdot (n+1) \lambda_j^n u(n)$$

式(5.4-8)将高阶系统的单位样值响应分解为若干个一阶系统响应之和。求出一阶系统的响应后,对其简单相加便可以求出高阶系统的单位样值响应。除了 $H(E) = \frac{k_1}{1 - \lambda_1 E^{-1}}$ 这种形式外,在一阶或二阶系统中传输算子还可以写成其他形式,常见的传输算子与单位样值响应的对应关系见表 5-1。

表 5-1 传输算子 $H(E)$ 与 $h(n)$ 对照表

传输算子 $H(E)$	$h(n)$
K	$K\delta(n)$
KE^{-m}	$K\delta(n-m)$
$\frac{E^{-1}}{1 - aE^{-1}} = \frac{1}{E - a}$	$a^{n-1}u(n-1)$
$\frac{1}{1 - aE^{-1}} = \frac{E}{E - a}$	$a^n u(n)$
$\frac{1}{(1 - aE^{-1})^2} = \frac{E^2}{(E - a)^2}$	$(n+1)a^n u(n)$

例 5-18 利用传输算子法求系统 $r(n) - 5r(n-1) + 6r(n-2) = e(n) + e(n-1)$ 的单位样值响应。

解: 用移位算子表示差分方程,可得

$$(1 - 5E^{-1} + 6E^{-2})h(n) = (1 + E^{-1})\delta(n)$$

$$h(n) = \frac{1 + E^{-1}}{1 - 5E^{-1} + 6E^{-2}}\delta(n) = \frac{4}{1 - 3E^{-1}}\delta(n) - \frac{3}{1 - 2E^{-1}}\delta(n)$$

根据表 5-1 所示关系,得

$$h(n) = (4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n)u(n)$$

3. 系统特性判断

当系统差分方程确定后,单位样值响应便可以随之确定下来,所以单位样值响应体现了系统自身特性。利用单位样值响应可以判断系统的因果性与稳定性。

1) 因果性判断

系统的因果性是指如果系统在任一时刻 $n=n_0$ 所产生的输出,仅仅取决于 $n \leq n_0$ 时的输入,而与 $n > n_0$ 时刻的输入无关。满足这一个特性的系统称为因果系统,不满足则为非因果系统。

离散时间系统满足因果性的充分必要条件是

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (5.4-9)$$

例如, $r(n) = e(n+1) - e(n)$, 求解该系统的单位样值响应, 可得 $h(n) = \delta(n+1) - \delta(n)$ 。当 $n = -1$ 时, $h(-1) = 1$, 故可以判断出该系统为非因果系统。

2) 稳定性判断

系统的稳定性定义为有界的输入产生有界的输出。满足稳定性的系统称为稳定系统,不满足则为不稳定系统。

对于离散时间系统,稳定性的充分必要条件是系统的单位样值响应满足绝对可和,即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \leq M, \quad M \text{ 为有界正值} \quad (5.4-10)$$

如果某离散时间系统既满足因果性,也满足稳定性,则该系统称为因果稳定系统。

例 5-19 已知某系统的单位样值响应为 $h(n) = a^n u(n)$, 试判断该系统的因果性和稳定性。

解: 由表达式可知,当 $n < 0$ 时,单位样值响应 $h(n) = 0$, 则该系统具有因果性。

根据指数序列的求和公式可知,和是否存在与 a 的数值有关。若 $|a| < 1$, 则

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|}, \quad \text{系统是稳定的; 若 } |a| \geq 1, \text{ 则 } \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n \text{ 发散, 系统是不稳定的。}$$

5.5 零状态响应的卷积法



已知序列 $e(n) = \{1, 2, 3, 5\}$, 若用单位样值序列表示, 则为

$$\begin{aligned} e(n) &= \delta(n+1) + 2\delta(n) + 3\delta(n-1) + 5\delta(n-2) \\ &= e(-1)\delta(n+1) + e(0)\delta(n) + e(1)\delta(n-1) + e(2)\delta(n-2) \end{aligned}$$

同理,任意序列可以表示为

$$e(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e(m)\delta(n-m) \quad (5.5-1)$$

式(5.5-1)说明任意序列可分解为不同时刻不同幅度的单位样值序列之和。因而求任意序列通过系统所产生的零状态响应,可以先求出各单位样值序列产生的响应,然后利用系统的线性时不变特性,求出最终的零状态响应。具体分析过程如下。

已知单位样值序列 $\delta(n)$ 通过系统所产生的零状态响应为 $h(n)$, 即

$$\delta(n) \rightarrow h(n)$$

根据系统的时不变性,可得

$$\delta(n-m) \rightarrow h(n-m)$$

再根据系统的齐次性,有

$$e(m)\delta(n-m) \rightarrow e(m)h(n-m)$$

最后由系统的叠加性,可得

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e(m)\delta(n-m) \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e(m)h(n-m) \quad (5.5-2)$$

由此可得

$$e(n) \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e(m)h(n-m) \quad (5.5-3)$$

即激励 $e(n)$ 作用于系统时,产生的零状态响应为

$$r_{zs}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e(m)h(n-m) \quad (5.5-4)$$

式(5.5-4)中激励与单位样值响应之间的运算称为卷积和。

5.5.1 卷积和的定义及计算

任意序列 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 进行如下运算:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m)f_2(n-m) \quad (5.5-5)$$

式(5.5-5)称为卷积和(简称为卷积),卷积和的结果为相同自变量的序列 $y(n)$ 。卷积和运算与连续时间信号中的卷积积分具有类似的运算规律,区别在于此处是对离散量的叠加,因而将积分运算改成了求和运算,卷积和的运算符仍用“*”来表示。根据卷积和的定义,式(5.5-4)可以写为

$$r_{zs}(n) = e(n) * h(n) \quad (5.5-6)$$

式(5.5-6)表明系统零状态响应等于激励和系统单位样值响应的卷积,可用图 5-24 来描述。

根据卷积的定义,卷积的计算过程可分为换元、反褶、移位、相乘及求和这几个步骤。卷积的计算方法包括图解法、解析式法以及对位相乘求和法等。

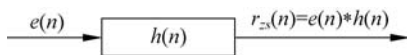


图 5-24 信号经过系统框图

1. 图解法

根据式(5.5-5),从波形运算的角度可以看出,卷积包含以下步骤。

- (1) 换元: 将两个信号的自变量由 n 变为 m , 得到 $f_1(m)$ 和 $f_2(m)$ 的波形;
- (2) 反褶: 将 $f_2(m)$ 的波形反褶得到 $f_2(-m)$ 的波形;
- (3) 移位: 对 $f_2(-m)$ 波形右移 n 个单位, 得到 $f_2(n-m)$ 的波形;
- (4) 相乘: 将 $f_1(m)$ 和 $f_2(n-m)$ 进行对位相乘;
- (5) 求和: 将对位相乘后的各位乘积求和。

由于 n 的不同, 相乘的两个函数会发生变化, 要根据 n 的变化重复步骤(3)~(5), 故两个序列卷积后还是一个关于 n 的序列。

下面通过例题来看一下卷积和的图解过程。

例 5-20 如图 5-25 所示的两个离散时间信号 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$, 用图解法计算卷积和 $y(n) = f_1(n) * f_2(n)$ 。

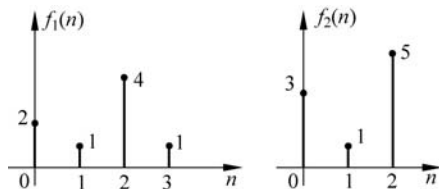


图 5-25 例 5-20 序列波形

解: 图解法的具体步骤如下。

(1) 换元: 将自变量 n 替换为 m , 得到 $f_1(m)$ 和 $f_2(m)$ 的波形, 如图 5-26(a) 和 (b) 所示。

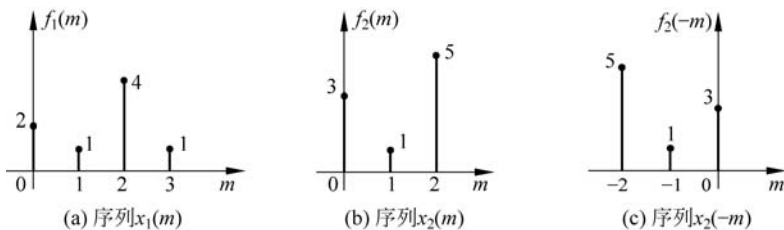


图 5-26 例 5-20 图解法示意图

(2) 反褶: 将 $f_2(m)$ 反褶, 得到 $f_2(-m)$ 的波形, 如图 5-26(c) 所示。

(3) 移位、相乘并求和: 将 $f_2(-m)$ 沿横轴平移, 得出 $f_2(n-m)$ 的波形, 再对 $f_1(m)$ 与 $f_2(n-m)$ 进行对位相乘及求和。 $f_2(n-m)$ 的位置取决于 n 的取值。

当 $n < 0$ 时, $f_2(-m)$ 沿横轴向左移动, 波形如图 5-27(a) 所示。此时 $f_1(m)$ 和 $f_2(n-m)$ 无重叠, $f_1(m)f_2(n-m) = 0$, 故 $y(n) = 0$;

当 $n = 0$ 时, $f_2(n-m)$ 即为 $f_2(-m)$, 波形如图 5-27(b) 所示。

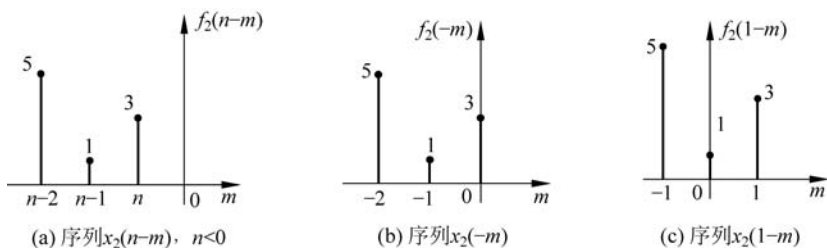


图 5-27 例 5-20 图解法示意图

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m)f_2(-m) = f_1(0)f_2(0) = 6$$

当 $n=1$ 时, $f_2(1-m)$ 波形如图 5-27(c) 所示。

$$y(1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m)f_2(1-m) = f_1(0)f_2(1) + f_1(1)f_2(0) = 2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$$

同理可得, $y(2)=23, y(3)=12, y(4)=21, y(5)=5$ 。

当 $n>5$ 时, $x_1(m)$ 和 $x_2(n-m)$ 无重叠, 故 $y(n)=0$ 。

综上, 卷积和可表示为

$$y(n) = \{ \underset{\uparrow}{6}, 5, 23, 12, 21, 5 \}$$

由以上过程可以看出, 当一个序列固定不动, 另一个序列从左至右沿横轴进行移动过程中, 需要将两个序列在重叠位置上的信号值进行相乘, 然后再将所有乘积求和, 即可以得到该移动值 n 所对应的卷积和。

2. 解析式法

解析式法是直接将序列表达式代入式(5.5-5)进行计算的方法。下面举两个例题具体看一下解析式法的过程。

例 5-21 已知 $f_1(n)=f_2(n)=u(n)$, 求 $y(n)=f_1(n)*f_2(n)$ 。

解: 根据卷积和定义

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m)f_2(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)u(n-m)$$

当 $m \geq 0$ 且 $n-m \geq 0$, 即 $0 \leq m \leq n$ 时, $u(m)u(n-m)=1$, 可得

$$y(n) = \left(\sum_{m=0}^n 1 \right) u(n) = (n+1)u(n)$$

例 5-22 已知 $f(n)=2^n u(n), h(n)=u(n-1)$, 求 $y(n)=f(n)*h(n)$ 。

$$\text{解: } y(n) = f(n)*h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^m u(m)u(n-m-1)$$

当 $m \geq 0$ 且 $n-m-1 \geq 0$, 即 $0 \leq m \leq n-1$ 时, $u(m)u(n-m)=1$, 可得

$$y(n) = \left(\sum_{m=0}^{n-1} 2^m \right) u(n-1) = \frac{1-2^n}{1-2} u(n-1) = (2^n - 1)u(n-1)$$

在解析式法求卷积和的过程中,要注意利用阶跃序列的特性,对求和范围加以限制以便于简化运算。

3. 对位相乘法

对位相乘法巧妙地将图解过程转化为“对位排列”,大大简化了有限长序列的卷积过程。

例 5-23 利用对位相乘法求解例 5-20。

解: 采用左对齐或右对齐的方式将两个序列的值进行排列,然后将序列值逐个对位相乘,最后把同一列上的乘积对位求和,和值不进位,即可得 $y(n)$ 。下面以右对齐为例,介绍求解过程。

$$\begin{array}{rcccccc}
 f_1(n): & & 2 & 1 & 4 & 1 & \\
 f_2(n): & & & 3 & 1 & 5 & \\
 \hline
 & & & 10 & 5 & 20 & 5 \\
 & & 2 & 1 & 4 & 1 & \\
 & 6 & 3 & 12 & 3 & & \\
 \hline
 & 6 & 5 & 23 & 12 & 21 & 5
 \end{array}$$

$f_1(n)$ 的起点为 $n=0$, $f_2(n)$ 的起点同样为 $n=0$, 卷积和 $y(n)$ 的起点为两序列的起点序列号之和, 则 $y(n)$ 的起点也为 $n=0$, 故 $y(n) = \{6, 5, 23, 12, 21, 5\}$ 。一般地, 长度分别为 N 和 M 的两个有限长序列进行卷积后, 卷积和的长度为 $N+M-1$ 。

由对位相乘法可直观看出任意序列 $f(n)$ 与 $\delta(n)$ 卷积还是任意序列本身。

即

$$f(n) * \delta(n) = f(n)$$

图解法、解析式法以及对位相乘法各有优缺点。图解法和对位相乘法形象直观, 而解析式法则直接利用表达式代入卷积和的定义进行计算。在计算卷积和的过程中要注意结合序列的特点灵活选择计算方法。

5.5.2 卷积和的性质

卷积和存在一些运算规律可以简化运算过程。

设序列 $f_1(n)$ 、 $f_2(n)$ 和 $f_3(n)$ 中任意两序列的卷积和均存在, 则卷积和运算存在下列运算规律。

1. 移序

若有 $f(n) = f_1(n) * f_2(n)$, 则有

$$f(n) = f_1(n-m) * f_2(n+m) \quad (5.5-7)$$

$$f(n+m) = f_1(n) * f_2(n+m) = f_1(n+m) * f_2(n) \quad (5.5-8)$$

$$f(n-m) = f_1(n) * f_2(n-m) = f_1(n-m) * f_2(n) \quad (5.5-9)$$

证明：根据定义式，有

$$f_1(n-m) * f_2(n+m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_1(k-m)f_2(n-k+m) \quad (5.5-10)$$

令式(5.5-10)中 $k-m=\lambda$ ，则 $n-k+m=n-\lambda$ ，当 $k=-\infty$ 时， $\lambda=-\infty$ ，当 $k=\infty$ 时， $\lambda=\infty$ ，故上式改写为

$$f_1(n-m) * f_2(n+m) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda)f_2(n-\lambda) = f_1(n) * f_2(n) \quad (5.5-11)$$

式(5.5-8)和式(5.5-9)的证明可以采用类似的方法，在此就不一一加以证明了。

2. 交换律

$$f_1(n) * f_2(n) = f_2(n) * f_1(n) \quad (5.5-12)$$

该性质表明：交换两个序列的位置，不改变卷积和的运算结果。在计算卷积时，可利用该性质，将形式相对复杂的序列自变量替换为 m ，形式相对简单的序列自变量替换为 $n-m$ ，如此可以一定程度地减少运算量和计算复杂度。

证明：

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m)f_2(n-m) \quad (5.5-13)$$

令式(5.5-13)中 $n-m=\lambda$ ，则 $m=n-\lambda$ ，当 $m=-\infty$ 时， $\lambda=\infty$ ，当 $m=\infty$ 时， $\lambda=-\infty$ ，上式可改写为

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} f_2(\lambda)f_1(n-\lambda) = f_2(n) * f_1(n) \quad (5.5-14)$$

证毕。

3. 结合律

$$f_1(n) * f_2(n) * f_3(n) = f_1(n) * [f_2(n) * f_3(n)] \quad (5.5-15)$$

由式(5.5-15)可以看出，要计算多个序列的卷积和，可以改变卷积的运算次序，先计算其中任意两个序列的卷积和，再与第三个序列相卷积，不改变卷积和的最终计算结果。

将结合律运用到系统分析中，其物理意义在于，由若干 LTI 系统级联构成的复合系统，可从系统的角度将其等效成为一个系统，该系统的单位样值响应等于所有级联子系统单位样值响应的卷积，如图 5-28 所示。

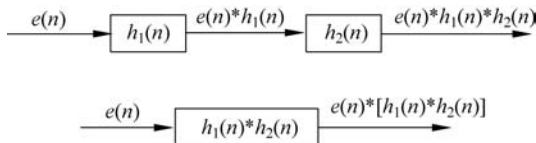


图 5-28 级联系统方框图

4. 分配律

$$f_1(n) * [f_2(n) + f_3(n)] = f_1(n) * f_2(n) + f_1(n) * f_3(n) \quad (5.5-16)$$

该性质说明,先求和再卷积的运算次序可以转变为先卷积再求和。分配律的物理意义在于,由若干 LTI 系统并联构成的复合系统,可以等价为一个系统,该系统的单位样值响应等于所有并联子系统单位样值响应之和,如图 5-29 所示。

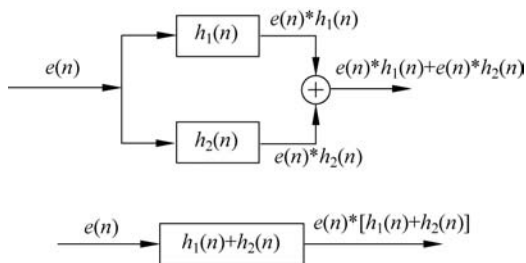


图 5-29 并联系统方框图

例 5-24 已知 $f_1(n) = 2\delta(n) + \delta(n-3)$, $f_2(n) = 3\delta(n) + 5\delta(n-1)$, 求 $y(n) = f_1(n) * f_2(n)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } y(n) &= f_1(n) * f_2(n) = [2\delta(n) + \delta(n-3)] * [3\delta(n) + 5\delta(n-1)] \\ &= 2\delta(n) * 3\delta(n) + \delta(n-3) * 3\delta(n) + 2\delta(n) * 5\delta(n-1) + \delta(n-3) * 5\delta(n-1) \\ &= 6\delta(n) + 10\delta(n-1) + 3\delta(n-3) + 5\delta(n-4) \end{aligned}$$

例 5-25 某复合系统的结构如图 5-30 所示,已知各子系统的单位样值响应分别为 $h_1(n) = \delta(n-1)$, $h_2(n) = u(n) - u(n-3)$, 求该复合系统的 $h(n)$ 。

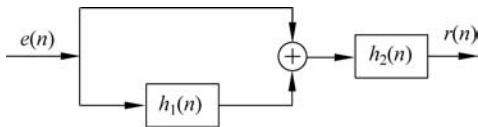


图 5-30 例 5-25 系统框图

解: 根据单位样值响应的定义,当激励为 $\delta(n)$ 时,所产生的零状态响应为 $h(n)$ 。

设 $e(n) = \delta(n)$, 则产生的响应 $r(n)$ 为单位样值响应 $h(n)$, 故

$$\begin{aligned} r(n) &= h(n) = [\delta(n) + \delta(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= h_2(n) + h_1(n) * h_2(n) = u(n) - u(n-3) + \delta(n-1) * [u(n) - u(n-3)] \\ &= [u(n) - u(n-3)] + [u(n-1) - u(n-4)] \\ &= \delta(n) + 2\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3) \end{aligned}$$

利用卷积和的分配律和结合律可以将复杂系统等效为一个整体,利用总的单位样值响应来表征系统的特性,进而统一利用卷积和运算来描述输入、系统单位样值响应及输出三者之间的关系,在已知输入和系统单位样值响应的条件下就可以实现系统零状态响应的分析。

5.5.3 零状态响应的求解

由前述可知,系统的零状态响应等于激励与系统单位样值响应的卷积和。因而若已知系统模型,要求任意激励所产生的零状态响应,需先求出系统的单位样值响应,然后利用激励与单位样值响应的卷积和运算即可求出零状态响应。

例 5-26 某 LTI 离散时间系统的系统框图如图 5-31 所示,激励 $e(n) = 2^n u(n)$,求当 $n \geq 0$ 时系统的零状态响应 $r(n)$ 。

解: (1) 列写系统的差分方程。

根据加法器的输入-输出关系,可得

$$r(n) = e(n) - 3r(n-1) - 2r(n-2)$$

整理得

$$r(n) + 3r(n-1) + 2r(n-2) = e(n)$$

(2) 求系统的单位样值响应。

利用移序算子,写出单位样值响应所对应的算子方程

$$(1 + 3E^{-1} + 2E^{-2})h(n) = \delta(n)$$

$$h(n) = \frac{1}{1 + 3E^{-1} + 2E^{-2}}\delta(n) = \frac{2}{1 + 2E^{-1}}\delta(n) - \frac{1}{1 + E^{-1}}\delta(n)$$

故有

$$h(n) = [2(-2)^n - (-1)^n]u(n)$$

(3) 求系统的零状态响应 $r(n)$ 。

$$\begin{aligned} r(n) &= e(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [2(-2)^m - (-1)^m]u(m)2^{n-m}u(n-m) \\ &= 2^n \left[\sum_{m=0}^n 2(-2)^m \left(\frac{1}{2}\right)^m - \sum_{m=0}^n (-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)^m \right] u(n) \\ &= 2^n \left[2 \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} - \frac{1 - (-1/2)^{n+1}}{1 - (-1/2)} \right] u(n) \\ &= \left[\frac{1}{3}2^n + (-2)^n - \frac{1}{3}(-1)^n \right] u(n) \end{aligned}$$

例 5-27 已知描述某系统的差分方程 $r(n) - 0.9r(n-1) = 0.05e(n)$, $e(n) = u(n)$, 其中 $r(-1) = 1$, 求当 $n \geq 0$ 时系统的响应 $r(n)$ 。

解: (1) 求零输入响应 $r_{zi}(n)$ 。

系统的齐次差分方程为

$$r(n) - 0.9r(n-1) = 0$$

由齐次差分方程,列写特征方程得

$$\lambda - 0.9 = 0$$

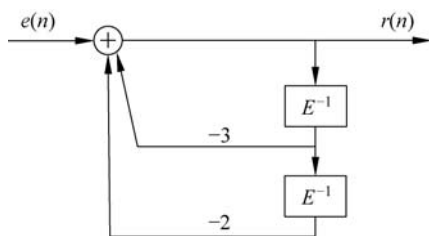


图 5-31 例 5-26 系统框图

由特征根 $\lambda=0.9$, 写出零输入响应的形式为

$$r_{zi}(n) = c \cdot 0.9^n$$

将 $r(-1)=1$ 代入系统的齐次差分方程, 可得

$$r(0) - 0.9r(-1) = 0$$

解得 $r(0)=0.9$, 将其代入零输入响应的表达式, 可得

$$r_{zi}(0) = c \cdot (0.9)^0 = 0.9$$

解得 $c=0.9$, 故可得零输入响应为

$$r_{zi}(n) = 0.9^{n+1} u(n)$$

(2) 求系统的单位样值响应 $h(n)$ 。

求单位样值响应时, 系统模型为

$$h(n) - 0.9h(n-1) = 0.05\delta(n)$$

由于 $h(n)$ 具有与零输入响应相同的形式, 故可表示为

$$\begin{cases} h(n) = k \cdot 0.9^n u(n) \\ h(-1) = 0 \end{cases}$$

将 $h(-1)=0$ 代入求单位样值响应时的系统模型, 得

$$h(0) - 0.9h(-1) = 0.05$$

解得 $h(0)=0.05$, 将其代入单位样值响应的表达式, 得

$$k \cdot 0.9^0 = 0.05$$

解得 $k=0.05$, 故单位样值响应为

$$h(n) = 0.05 \cdot 0.9^n u(n)$$

(3) 求零状态响应 $r_{zs}(n)$ 。

在 $e(n)$ 作用下, 系统的零状态响应为

$$\begin{aligned} r_{zs}(n) &= e(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 0.05 \cdot 0.9^m u(m) u(n-m) = 0.05 \left(\sum_{m=0}^n 0.9^m \right) u(n) \\ &= 0.05 \times \frac{1-0.9^{n+1}}{1-0.9} u(n) = 0.5(1-0.9^{n+1}) u(n) \end{aligned}$$

(4) 求系统的全响应 $r(n)$ 。

$$\begin{aligned} r(n) &= r_{zi}(n) + r_{zs}(n) = 0.9^{n+1} u(n) + 0.5(1-0.9^{n+1}) u(n) \\ &= (0.45 \times 0.9^n + 0.5) u(n) \end{aligned}$$

求解离散时间系统响应时, 既可以采用经典法求解差分方程, 也可以将系统响应分为零输入响应和零状态响应, 再分别求解。其中利用卷积和求零状态响应的方法, 物理意义明确, 同时也是变换域分析法求零状态响应的理论基础。后续将在时域分析的基础上变换分析问题的角度, 通过序列及系统差分方程的 z 变换, 将时域差分方程转换为 z 域代数方程, 将卷积和运算转换为相乘运算, 简化系统分析的过程, 具体内容将在下一章进行讨论。

习题 5

5-1 试画出下列序列的图形：

(1) $f_1(n) = n + 1, -3 < n < 2$;

(2) $f_2(n) = (-1)^n, -2 < n < 4$;

(3) $f_3(n) = \begin{cases} 0, & n > 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n, & n \leq 0 \end{cases}$;

(4) $f_4(n) = \{3, 1, 2, -5, 4\}$ 。

5-2 试画出下列序列的图形：

(1) $f_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n)$;

(2) $f_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n [\delta(n+1) - \delta(n) + \delta(n-1)]$;

(3) $f_3(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} [u(n) - u(n-3)]$;

(4) $f_4(n) = (-2)^n u(-n)$;

(5) $f_3(n) = 2^{n-1} u(n-1)$ 。

5-3 写出图 5-32 所示各序列的表达式。

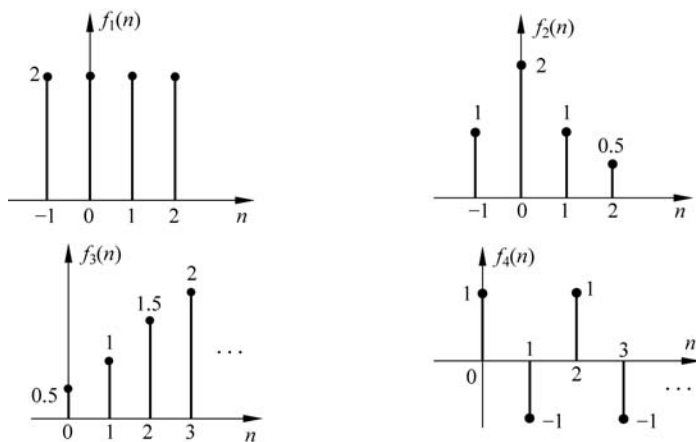


图 5-32 题 5-3 图

5-4 设序列 $f(n) = \{2, 5, 3, 1, -1\}$ ，请画出下列各序列的波形图：

(1) $f_1(n) = f(n+2)$;

(2) $f_2(n) = f(-n+1)$;

(3) $f_3(n) = f(n+2) + f(n-2)$;

$$(4) f_4(n) = f(1-n) + f(n+1);$$

$$(5) f_5(n) = f(n) \cdot f(1-n);$$

$$(6) f_6(n) = f(2n);$$

$$(7) f_7(n) = f\left(\frac{n}{2}\right);$$

$$(8) f_8(n) = f(2n) \cdot f(1-n)。$$

5-5 请绘出下列序列的图形：

$$(1) f_1(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)[u(n) - u(n-8)];$$

$$(2) f_2(n) = (-1)^n u(2n);$$

$$(3) f_3(n) = (n-1)u(n);$$

$$(4) f_4(n) = nu(n-1);$$

$$(5) f_5(n) = n[\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-3)];$$

$$(6) f_6(n) = R_4(n+3);$$

$$(7) f_7(n) = u(-n+5) - u(-n-2);$$

$$(8) f_8(n) = nR_4(n+1)。$$

5-6 判断下列各序列是否是周期序列。若是,请求出其周期 N 。

$$(1) f_1(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$(2) f_2(n) = \cos n;$$

$$(3) f_3(n) = e^{j\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{8}\right)};$$

$$(4) f_4(n) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right) + \cos\left(\frac{1}{7}\pi n\right);$$

$$(5) f_4(n) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right) - \sin\left(\frac{4}{5}\pi n\right)。$$

5-7 试绘出下列离散时间系统的系统框图：

$$(1) r(n) = e(n) + e(n-2);$$

$$(2) r(n) + 3r(n-1) + 2r(n-2) = e(n) + e(n-1)。$$

5-8 试写出图 5-33 所示各系统的差分方程,并指出系统的阶次。

5-9 对于下列系统,试判断系统是否具有线性和时不变性。

$$(1) r(n) = e(n-n_0);$$

$$(2) r(n) = 2e(n) + 1;$$

$$(3) r(n) = [e(n)]^2;$$

$$(4) r(n) = \sum_{m=-\infty}^n e(m);$$

$$(5) r(n) = e^{e(n)};$$

$$(6) r(n) = e(n) \sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6}\right)。$$

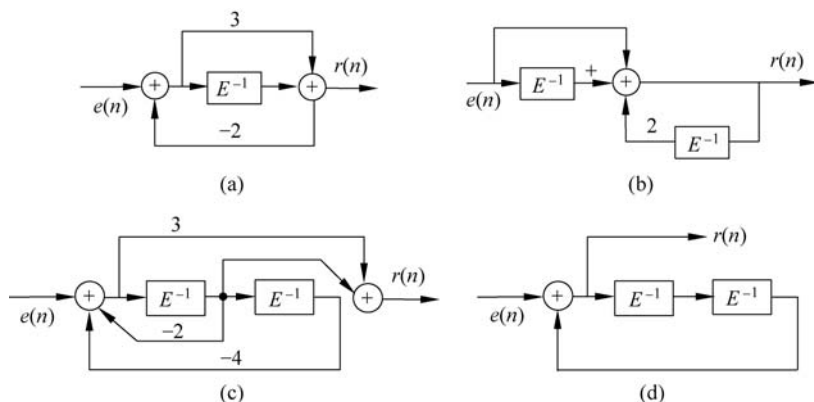


图 5-33 题 5-8 图

5-10 某人向银行贷款 20 万,采取逐月计息偿还方式。从贷款后第 1 个月开始每月定时定额还款,每月固定还款金额 0.4 万元,贷款月息为 β 。设第 n 个月的欠款额为 $y(n)$,试写出 $y(n)$ 满足的方程。

5-11 同一平面上有 k 条直线,均两两相交,但没有三条或三条以上直线交于同一点。问:满足这一条件的 k 条直线能把平面分成多少块?

5-12 已知系统差分方程及边界条件,求 $n \geq 0$ 时系统零输入响应。

(1) $r(n) - \frac{1}{3}r(n-1) = 0, r(0) = 1$;

(2) $r(n) - 2r(n-1) = 0, r(0) = \frac{1}{2}$;

(3) $r(n) + 3r(n-1) + 2r(n-2) = 0, r(-1) = 1, r(-2) = 1$;

(4) $r(n) + 2r(n-1) + r(n-2) = 0, r(-1) = r(-2) = 2$;

(5) $r(n) + r(n-2) = 0, r(0) = 1, r(1) = 3$ 。

5-13 已知 $r(n) - r(n-1) = n, r(-1) = 1$,求 $n \geq 0$ 时系统输出 $r(n)$ 。

5-14 已知 $r(n) + 3r(n-1) + 2r(n-2) = u(n), r(-1) = r(-2) = 1$,求 $n \geq 0$ 时系统输出 $r(n)$ 。

5-15 求下列各离散时间系统的单位样值响应 $h(n)$:

(1) $r(n) - 2r(n-1) = 2e(n)$;

(2) $r(n) - 0.5r(n-1) + 0.06r(n-2) = e(n-1)$;

(3) $r(n) + 3r(n-1) + 2r(n-2) = e(n) - e(n-1)$;

(4) $r(n) + \frac{1}{4}r(n-1) - \frac{1}{8}r(n-2) = e(n)$;

(5) $r(n) = e(n) - e(n-1) - 2e(n-3) + e(n-4)$ 。

5-16 已知下列 LTI 离散时间系统的单位样值响应 $h(n)$,试判断系统的因果性和稳定性,并简要说明理由:

(1) $h(n) = 0.2^n u(n)$;

- (2) $h(n) = \delta(n-1)$;
 (3) $h(n) = nu(n)$;
 (4) $h(n) = 2^n R_5(n)$;
 (5) $h(n) = 3^n u(-n)$;
 (6) $h(n) = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{10}\right)^n \right] u(n)$ 。

5-17 已知某 LTI 离散时间系统的阶跃响应为 $g(n) = [(-2)^n + 1]u(n)$, 求该系统的单位样值响应 $h(n)$ 。

5-18 已知某 LTI 离散时间系统的单位样值响应和激励分别如图 5-34(a)、(b)所示, 画出系统响应 $r(n)$ 的波形。

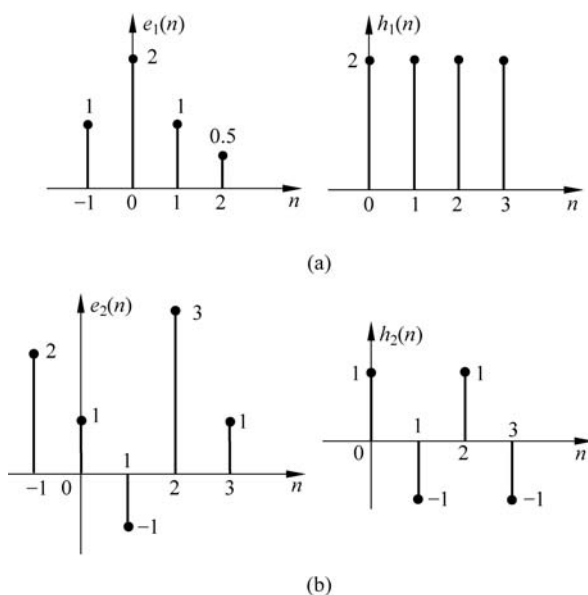


图 5-34 题 5-18 图

5-19 已知某 LTI 离散时间系统的系统框图如图 5-35 所示, 各子系统分别为 $h_1(n) = u(n)$, $h_2(n) = \delta(n-2)$, $h_3(n) = u(n-1)$, 求该系统的单位样值响应。

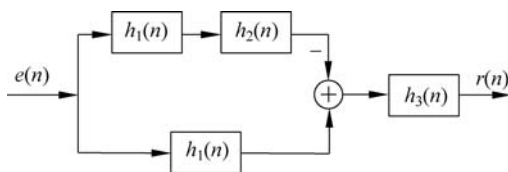


图 5-35 题 5-19 图

5-20 已知系统差分方程为 $r(n) = e(n) - 2e(n-1) - e(n-2)$, 激励 $e(n) = u(n) - u(n-2)$ 。

求: (1) 系统单位样值响应 $h(n)$;

(2) $n \geq 0$ 时零状态响应 $r(n)$ 。

5-21 求下列 LTI 离散时间系统的零输入响应 $r_{zi}(n)$ 、零状态响应 $r_{zs}(n)$ 及全响应 $r(n)$ 。

(1) $r(n) + \frac{1}{3}r(n-1) = e(n), r(-1) = -1, e(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$;

(2) $r(n) - \frac{5}{6}r(n-1) + \frac{1}{6}r(n-2) = e(n) - e(n-1), r(-1) = 0, r(-2) = 1, e(n) = u(n)$ 。

5-22 已知描述某 LTI 离散时间系统的差分方程为

$$r(n) + 5r(n-1) + 6r(n-2) = e(n) - e(n-1)$$

(1) 求系统的单位样值响应；

(2) 判断系统的稳定性；

(3) 请画出该系统的模拟图。

5-23 某离散时间系统的模拟图如图 5-36 所示。

(1) 请写出系统的差分方程；

(2) 求 $h(n)$ ；

(3) 若激励 $e(n) = u(n), r(-1) = 0, r(-2) = 1$, 求响应 $r(n)$ 。

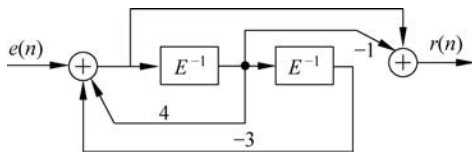


图 5-36 题 5-23 图

5-24 已知二阶 LTI 离散时间系统的单位样值响应为

$$h(n) = (1 + 2 \cdot 3^n)u(n)$$

(1) 请写出该系统的差分方程；

(2) 判断系统的因果、稳定性；

(3) 若激励为 $e(n) = u(n) - u(n-2)$, 求系统的零状态响应 $r(n)$ 。