

函数是离散数学中最基本的概念之一。值得注意的是：函数是一种特殊的二元关系，主要涉及将一个有限集合进行适当的变换后，转换成另一个有限集合的离散函数，因此，本章讨论的函数的定义域与值域都是离散的情况，是一类应用广泛的重要函数。在本章里，主要介绍三个与函数相关的内容：函数的基本概念、特殊函数以及复合函数与逆函数。

本章主要包括如下内容。

- 函数的基本概念。
- 特殊函数。
- 复合函数与逆函数。

3.1 函数的基本概念

计算机科学中常常将输入和输出的关系看成是一种函数关系。函数在许多应用中起着重要的作用。在离散数学中，任何对象，包括集合都可以看成是自变量或函数值，并且函数仅指单值函数，也没对两个集合的元素做任何特殊限制。

定义 3.1 设 f 是集合 A 到 B 的一个关系，如果对每个 $x \in A$ ，都存在唯一 $y \in B$ ，使得 $(x, y) \in f$ ，则称关系 f 为 A 到 B 的函数（或映射、变换），记为 $f: A \rightarrow B$ 。当 $(x, y) \in f$ 时，通常记为 $y = f(x)$ ，这时称 x 为函数的自变量，称 y 为 x 在 f 下的函数值（或像）。

由函数的定义显然有：

(1) $\text{dom}(f) = A$ ，称为函数 f 的定义域。

(2) $\text{ran}(f) \subseteq B$ ，称为函数 f 的值域， B 称为函数 f 的陪域， $\text{ran}(f)$ 也可记为 $f(A)$ ，并称 $f(A)$ 为 A 在 f 下的像。

(3) $(x, y) \in f, (x, z) \in f \Rightarrow y = z$ 。

(4) $|f| = |A|$ 。

需要注意的是： $f(x)$ 仅表示一个变值，但 f 却代表一个集合，因此有 $f \neq f(x)$ ，不能混淆这两个概念。同时，在定义一个函数时，必须指定函数的定义域、陪域及变换规则，且变换规则要覆盖定义域中所有的元素。

例 3.1 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ，集合 $B = \{a, b, c\}$ ，判断下列各式是否是函数？

(1) $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ 。

(2) $f = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c)\}$ 。

(3) $f = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$ 。

解：根据定义，(1)和(3)满足条件，因此是函数；(2)不是函数，因为在(2)中，集合 A 中

的元素 1 对应集合 B 中的两个元素 a, b , 故不是函数。

例 3.2 判断关系:

$$(1) f_1 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}.$$

$$(2) f_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 2)\}.$$

是否为函数。

解: 根据定义, 有

(1) 对任意的 $x \in \text{dom} f_1$, 都存在唯一的 $y \in \text{ran} f_1$, 使得 $(x, y) \in f_1$ 成立, 因此 f_1 是函数。

(2) 对 $a \in \text{dom} f_2$, 存在不同的 $1 \in \text{ran} f_2, 2 \in \text{ran} f_2$, 使得 $(a, 1) \in f_2$ 与 $(a, 2) \in f_2$ 同时成立, 因此 f_2 不是函数。

例 3.3 (1) 任意集合 A 上的恒等关系 I_A 是一个函数, 常称为恒等函数, 并且 $I_A(x) = x$ (对任意 $x \in A$)。

(2) 自然数集合上的 m 倍关系是一个函数, 若用 f 表示这一关系, 那么 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, 可表示为: $y = f(x) = mx$ 。

如何表示一个函数? 通常有以下三种方法。

(1) **列表法**。由于函数具有“单值性”, 即对任一自变量有唯一确定的函数值, 因此可将其序偶排列成一个表, 将自变量与函数值一一对应起来。列表法一般适用于定义域为有限集合的情况。

(2) **图表法**。用笛卡儿平面上点的集合表示函数。与列表法一样, 图表法一般适用于定义域有限的情况。

(3) **解析法**。用等式 $y = f(x)$ 表示函数, 这时可认为 $y = f(x)$ 为函数的“命名式”, 有别于“ y 是 f 在 x 处的值”。 $y = f(x)$ 具有双重意义, 可依上下文加以区别。

由于函数是关系的一种特殊形式, 因而函数相等的概念、包含的概念, 也就是关系相等的概念及包含概念。

定义 3.2 设函数 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: C \rightarrow D$, 如果 $A = C, B = D$, 并且对任意的 $a \in A$ 或 $a \in C$, 都有 $f(a) = g(a)$, 则称函数 f 与 g 相等, 记作 $f = g$ 。

函数作为一种特殊的二元关系, 其函数相等的定义与关系相等的定义一致, 即相等的两个函数必须有相同的定义域、陪域及序偶集合。因此, 两个函数相等, 一定满足下面两个条件。

$$(1) \text{dom}(f) = \text{dom}(g).$$

$$(2) \forall x \in \text{dom}(f) = \text{dom}(g), \text{ 都有 } f(x) = g(x).$$

定义 3.3 设 A, B, C 是 3 个非空集合, 函数 $f: A \rightarrow B, A \subseteq C$, f 在 $C - A$ 上无定义, 则称 f 是 C 到 B 的偏函数。

定义 3.4 设 A, B, C 是 3 个非空集合, 函数 $f: A \rightarrow B; g: C \rightarrow B$, 如果 $C \subseteq A$, 且对于所有的 $a \in C$, 有 $g(a) = f(a)$, 则称 g 是 f 的限制, f 是 g 的扩充。

如果 g 是 A 到 B 的偏函数, 当对 g 无定义处规定一个值, 即对 g 做一补充定义, 即可构造出 g 的一个扩充。

例 3.4 设 $\mathbf{Z}$ 是整数集, 并定义函数 $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, 设 $f = \{(x, 2x+1) | x \in \mathbf{Z}\}$, 且 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$ 为自然数集合, 求 f 在 $\mathbf{Z}$ 上的限制。

解:先写出 f 的集合表示形式如下:

$$f = \{\cdots, (-1, -1), (0, 1), (1, 3), \cdots\}$$

因此, f 在自然数集 $\mathbf{N}$ 上的限制为

$$g = \{(0, 1), (1, 3), \cdots\}$$

定义 3.5 设 A, B 是非空集合, 所有从 A 到 B 的函数记作 B^A , 读作“ B 上 A ”, 符号化表示为: $B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$ 。

那从 A 到 B 上一共可以定义多少个函数呢? 有如下结论成立。

定理 3.1 设 A, B 是非空有限集合, 则从 A 到 B 共有 $|B|^{|A|}$ 个不同的函数。

证明: 设 $|A| = n, |B| = m$ 。函数 f 是从 A 到 B 的任一函数, 并且 f 由 A 中的 n 个元素的取值唯一确定, 对于 A 中的任一元素, f 在该元素处的取值都有 m 种可能, 因此从 A 到 B 可以定义 $m \cdot m \cdot \cdots \cdot m = m^n = |B|^{|A|}$ 个不同的函数。

例 3.5 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{a, b\}$, 计算 B^A 。

解: 根据定义, 有 $B^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ 。

$$f_1(1) = a, f_1(2) = a, f_1(3) = a; f_2(1) = a, f_2(2) = a, f_2(3) = b;$$

$$f_3(1) = a, f_3(2) = b, f_3(3) = a; f_4(1) = a, f_4(2) = b, f_4(3) = b;$$

$$f_5(1) = b, f_5(2) = a, f_5(3) = a; f_6(1) = b, f_6(2) = a, f_6(3) = b;$$

$$f_7(1) = b, f_7(2) = b, f_7(3) = a; f_8(1) = b, f_8(2) = b, f_8(3) = b。$$

也可以表示成如下形式。

$$f_1 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}; f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}; f_3 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\};$$

$$f_4 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}; f_5 = \{(1, b), (2, a), (3, a)\}; f_6 = \{(1, b), (2, a), (3, b)\};$$

$$f_7 = \{(1, b), (2, b), (3, a)\}; f_8 = \{(1, b), (2, b), (3, b)\}。$$

例 3.6 设集合 $A = \{1, 2\}$, 集合 $B = \{a, b, c\}$, 计算 B^A 。

解: 根据定义, 有 $B^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$ 。

$$f_1(1) = a, f_1(2) = a; f_2(1) = a, f_2(2) = b; f_3(1) = a, f_3(2) = c;$$

$$f_4(1) = b, f_4(2) = a; f_5(1) = b, f_5(2) = b; f_6(1) = b, f_6(2) = c;$$

$$f_7(1) = c, f_7(2) = a; f_8(1) = c, f_8(2) = b; f_9(1) = c, f_9(2) = c。$$

也可以表示成如下形式:

$$f_1 = \{(1, a), (2, a)\}; f_2 = \{(1, a), (2, b)\}; f_3 = \{(1, a), (2, c)\};$$

$$f_4 = \{(1, b), (2, a)\}; f_5 = \{(1, b), (2, b)\}; f_6 = \{(1, b), (2, c)\};$$

$$f_7 = \{(1, c), (2, a)\}; f_8 = \{(1, c), (2, b)\}; f_9 = \{(1, c), (2, c)\}。$$

因为函数是一种特殊的关系, 所以一个函数确定一个关系; 但一个关系不一定确定一个函数, 如例 3.6 中, 从 A 到 B 共有 64 个不同的关系, 但仅有 9 个不同的函数。

定理 3.2 设 A, B, X, Y 是非空集合, $f: X \rightarrow Y$ 且 $A \subseteq f(X), B \subseteq f(X)$, 则

$$(1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)。$$

$$(2) f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)。$$

证明: (1) 先证 $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ 。

对任意的 $y \in f(A \cup B)$, 存在 $x \in A \cup B$, 使得

$$y = f(x)$$

即 $x \in A$ 或 $x \in B$ 时,有 $y = f(x)$,因此 $f(x) \in f(A)$ 或 $f(x) \in f(B)$,即 $y \in f(A) \cup f(B)$,则

$$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$$

再证 $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$ 。

对任意的 $y \in f(A) \cup f(B)$,有 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$,因此在集合 A, B 中至少有一个集合里有一个 x ,使得

$$y = f(x)$$

即 $y = f(x) \in f(A \cup B)$,则

$$f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$$

因此 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ 。

(2) 对任意的 $y \in f(A \cap B)$,存在 $x \in A \cap B$,使得

$$y = f(x)$$

即 $x \in A$ 且 $x \in B$ 时,有 $y = f(x)$,因此 $f(x) \in f(A)$ 且 $f(x) \in f(B)$,即 $y \in f(A) \cap f(B)$,则

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

一般地, $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ 。

例 3.7 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$,集合 $Y = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ 且 $f: X \rightarrow Y$, $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = b$ 。有 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$,则 $f(A \cup B) = \{a, b\}$ 。

因此, $f(A) \cup f(B) = \{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$,即 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ 成立。但是 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 不一定成立。

例 3.8 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$,集合 $Y = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ 且 $f: X \rightarrow Y$, $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = b$ 。有 $A \cap B = \emptyset$,则 $f(A \cap B) = \emptyset$ 。

但是 $f(A) \cap f(B) = \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$,即 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 成立。但是不满足 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 。

定义 3.6 设集合 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 与集合 B ,则对任意 $x \in A$,且 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,其中, $x_i \in A_i, 1 \leq i \leq n$,有 $y \in B$,这时定义 $y = f(x) = f((x_1, x_2, \cdots, x_n))$,则称 f 为 A 到 B 的 n 元函数。

例 3.9 设 A, B 是非空集合, $f: A \times B \rightarrow A$ 的函数,若 $f(a, b) = a$,则 f 是一个二元函数,其中, $a \in A, b \in B$ 。

3.2 特殊函数

函数作为一种关系,也可以进行分类,如果从函数的最基本性质出发,可以讨论单射的、满射的和双射的函数类。本节主要讨论函数的基本性质及几种常用的函数。

定义 3.7 设 $f: A \rightarrow B$ 是一个函数。

(1) 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$,当 $x_1 \neq x_2$ 时,有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 A 到 B 的单射函数或单射,或称一对一的函数。

(2) 如果对任意的 $y \in B$,均有 $x \in A$,使 $y = f(x)$,即 $\text{ran}(f) = B$,则称 f 为 A 到 B 的满射函数或满射,或称 A 到 B 的映上函数。

(3) 如果 f 既是 A 到 B 的单射, 又是 A 到 B 的满射, 则称 f 为 A 到 B 的双射函数或双射, 或称一一对应的函数。

下面通过一个例子来理解这三种函数。

例 3.10 设集合 A, B , 定义函数 $f: A \rightarrow B$, 在图 3.1 中给出了四种不同情形下的函数。

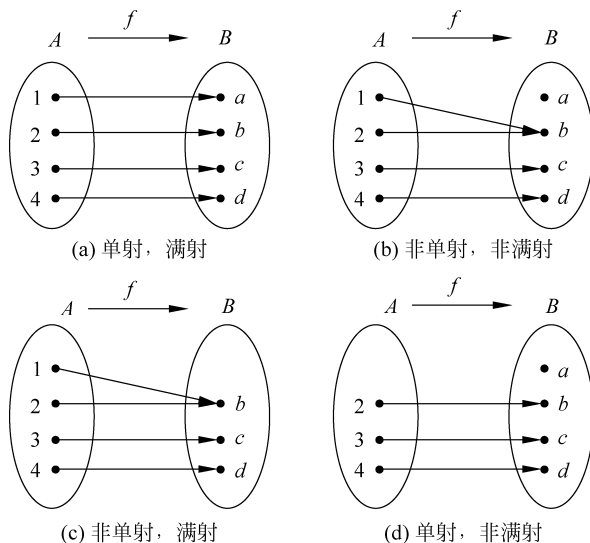


图 3.1 四种情形下的函数

由定义可知: 当集合 A, B 为有限集时, 有

(1) $f: A \rightarrow B$ 是单射的必要条件为 $|A| \leq |B|$ 。

(2) $f: A \rightarrow B$ 是满射的必要条件为 $|A| \geq |B|$ 。

(3) $f: A \rightarrow B$ 是双射的必要条件为 $|A| = |B|$ 。

例 3.11 在实数集上也可以找到这样的函数, 例如, 实数集上的函数 $y = 5^x$ 是单射而非满射, 多项式函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) 是满射而非单射, 一次函数 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 是双射, 但二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 既非单射, 又非满射。

例 3.12 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 找出一个从 A^2 到 A 的函数, 能否找到一个从 A^2 到 A 的满射? 能否找到一个从 A^2 到 A 的单射?

解: 对任意的 $x, y \in A$, 设

$$f(x, y) = \max(x, y)$$

则 f 是一个从 A^2 到 A 的函数, 该函数也是一个从 A^2 到 A 的满射, 因为

$$|A^2| = |A \times A| = 10 \times 10 = 100$$

$$|A| = 10$$

因此 $|A^2| > |A|$, 这是满射函数存在的必要条件。但是找不到一个从 A^2 到 A 的单射, 因为 $|A^2| > |A|$, 不满足单射的必要条件。

例 3.13 设集合 $A = P(\{1, 2, 3\})$, 集合 $B = \{1, 2\}^{\{a, b, c\}}$, 构造双射函数 $f: A \rightarrow B$ 。

解: $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$B = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$, 其中:

$$f_1 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}, f_2 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\},$$

$$f_3 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}, f_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\},$$

$$f_5 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}, f_6 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 2)\},$$

$$f_7 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 1)\}, f_8 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 2)\}。$$

令 $f: A \rightarrow B$, 使得 $f(\phi) = f_1, f(\{1\}) = f_2, f(\{2\}) = f_3, f(\{3\}) = f_4, f(\{1, 2\}) = f_5, f(\{1, 3\}) = f_6, f(\{2, 3\}) = f_7, f(\{1, 2, 3\}) = f_8$ 。

定理 3.3 设 A 和 B 为有限集, 若 $|A| = |B|$, 则 $f: A \rightarrow B$ 是单射的充要条件是 $f: A \rightarrow B$ 为满射。

证明:

必要性: 若 $f: A \rightarrow B$ 是单射, 则 $|A| = |f(A)|$, 因为 $|A| = |B|$, 所以

$$|f(A)| = |B|$$

因此, $B = f(A)$ 。否则, 若存在 $b \in B$ 且 $b \notin f(A)$, 又 B 是有限集, 因此有 $|f(A)| < |B| = |A|$, 与 $|f(A)| = |B|$ 矛盾。因此 $f: A \rightarrow B$ 是满射。

充分性: 若 $f: A \rightarrow B$ 是满射, 根据定义有 $B = f(A)$, 于是

$$|A| = |B| = |f(A)|$$

则 $f: A \rightarrow B$ 。否则, 存在 $x_1, x_2 \in A$, 尽管 $x_1 \neq x_2$, 但仍有 $f(x_1) = f(x_2)$, 因此, $|f(A)| < |A| = |B|$ 与 $|A| = |B| = |f(A)|$ 矛盾, 所以 $f: A \rightarrow B$ 是单射。

定义 3.8 设函数 $f: A \rightarrow B$, 给出几个特殊函数的定义如下。

(1) 若存在 $b \in B$, 使得对任意的 $a \in A$ 都有 $f(a) = b$, 则称 f 是从 A 到 B 的**常值函数**。

(2) 集合 A 上的恒等关系 I_A 称为集合 A 上的**恒等函数**, 即对任意的 $a \in A$, 都有 $I_A(a) = a$ 。

定义 3.9 设 U 是全集, 且 $A \subseteq U$, 函数 $\psi_A: U \rightarrow \{0, 1\}$ 定义为

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

称 ψ_A 是集合 A 的**特征函数**。

由特征函数的定义可知, 集合 A 的每一个子集都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数。因此, 可以利用特征函数来标识集合 A 的不同子集, 及利用特征函数建立函数与集合之间的一一对应关系, 有利于用计算机去解决集合中的问题。

例 3.14 设 $U = \{a, b, c, d\}, A = \{a, b\}$, 则 A 的特征函数为

$$\psi_A: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\psi_A(a) = \psi_A(b) = 1, \psi_A(c) = \psi_A(d) = 0。$$

关于特征函数有下列性质成立。

定理 3.4 设 U 是全集, 且 $A \subseteq U, B \subseteq U$, 则对任意的 $x \in U$, 有

$$(1) \forall x (\psi_A(x) = 0) \Leftrightarrow A = \emptyset$$

$$(2) \forall x (\psi_A(x) = 1) \Leftrightarrow A = U$$

$$(3) \forall x (\psi_A(x) \leq \psi_B(x)) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$(4) \forall x (\psi_A(x) = \psi_B(x)) \Leftrightarrow A = B$$

$$(5) \psi_{A'}(x) = 1 - \psi_A(x)$$

$$(6) \psi_{A \cap B}(x) = \psi_A(x) \cdot \psi_B(x)$$

$$(7) \psi_{A \cup B}(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x) - \psi_{A \cap B}(x)$$

$$(8) \psi_{A-B}(x) = \psi_{A \cap B'}(x) = \psi_A(x) - \psi_A(x) \cdot \psi_B(x)$$

证明: 这里给出(6)的证明,其余的可类似证明。

① 若 $x \in A \cap B$, 有 $x \in A$ 且 $x \in B$, 则 $\psi_A(x) = 1$ 且 $\psi_B(x) = 1$, 于是 $\psi_{A \cap B}(x) = 1 = \psi_A(x) \cdot \psi_B(x)$ 。

② 若 $x \notin A \cap B$, 则 $\psi_{A \cap B}(x) = 0$, 又因为 $x \notin A \cap B$, 则有 $x \notin A$ 或 $x \notin B$, 因此 $\psi_A(x) = 0$ 或 $\psi_B(x) = 0$, 于是 $\psi_A(x) \cdot \psi_B(x) = 0 = \psi_{A \cap B}(x)$ 。

由①, ②有 $\psi_{A \cap B}(x) = \psi_A(x) \cdot \psi_B(x)$ 。

利用集合的特征函数可以证明一些集合恒等式。

例 3.15 利用特征函数证明 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

证明: 对任意的 x , 有

$$\begin{aligned} \psi_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) &= \psi_{A \cup B}(x) \cdot \psi_{A \cup C}(x) \\ &= (\psi_A(x) + \psi_B(x) - \psi_{A \cap B}(x)) \cdot (\psi_A(x) + \psi_C(x) - \psi_{A \cap C}(x)) \\ &= (\psi_A(x) + \psi_B(x) - \psi_A(x) \cdot \psi_B(x)) \cdot (\psi_A(x) + \psi_C(x) - \psi_A(x) \cdot \psi_C(x)) \\ &= \psi_A(x) + \psi_A(x) \cdot \psi_C(x) - \psi_A(x) \cdot \psi_C(x) + \psi_A(x) \cdot \psi_B(x) + \\ &\quad \psi_B(x) \cdot \psi_C(x) - \psi_A(x) \cdot \psi_B(x) \cdot \psi_C(x) - \psi_A(x) \cdot \psi_B(x) - \\ &\quad \psi_A(x) \cdot \psi_B(x) \cdot \psi_C(x) + \psi_A(x) \cdot \psi_B(x) \cdot \psi_C(x) \\ &= \psi_A(x) + \psi_B(x) \cdot \psi_C(x) - \psi_A(x) \cdot \psi_B(x) \cdot \psi_C(x) \\ &= \psi_A(x) + \psi_{B \cap C}(x) - \psi_{A \cap B \cap C}(x) \\ &= \psi_{A \cup (B \cap C)}(x) \end{aligned}$$

因此 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

定义 3.10 设 R 是定义在非空集合 A 上的等价关系, 函数 $f: A \rightarrow A/R, f(x) = [x]_R$, 其中, $[x]_R$ 是 x 关于 R 的等价类, 则称 f 为从 A 到商集 A/R 的自然映射。

显然, 自然映射是一个满射。但是当等价关系不是恒等关系时, 自然映射都不是单射。

例 3.16 设 $A = \{1, 2, 3\}$, 等价关系 $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$, 写出从 A 到商集 A/R 的自然映射。

解: 从 A 到商集 A/R 的自然映射 $f: A \rightarrow A/R, f(1) = f(2) = \{1, 2\}, f(3) = \{3\}$ 。

3.3 复合函数与逆函数

因为函数是一种特殊的关系, 因此关系的复合运算及逆运算也适用于函数, 即函数也可以进行复合运算与逆的运算。

3.3.1 复合函数

定义 3.11 设 A, B, C 是集合, 有函数 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow C$, 则 f 与 g 的复合函数是一个由 A 到 C 的函数, 记作 $g \circ f$, 符号化表示为

$$g \circ f = \{(a, c) \mid x \in A, c \in C, \text{且存在 } b \in B, \text{使得 } (a, b) \in f, (b, c) \in g\}$$

对于 $\forall a \in A$, 有 $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ 。

约定: 只有当两个函数中一个的定义域与另一个的值域相同时, 它们的合成才有意义。当这一要求不满足时, 可利用函数的限制与扩充来弥补。

例 3.17 设 f, g 均为实数集上的函数, $f(x) = x + 1, g(x) = x^2 + 1$, 则

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

而 $f \circ g(x) = f(g(x)) = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2$ 。

例 3.18 设集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的两个函数: $f = \{(a, c), (b, a), (c, c)\}, g = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$, 则

$$f \circ g = \{(a, c), (b, b), (c, c)\}, g \circ f = \{(a, a), (b, c), (c, c)\}$$

一般地, 复合函数是不可交换的, 即 $f \circ g \neq g \circ f$ 。对于复合函数有下列性质成立。

例 3.19 在不含 0 和 1 的实数集上定义函数:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = 1/x, f_3(x) = 1 - x, f_4(x) = 1/(1 - x),$$

$$f_5(x) = (x - 1)/x, f_6(x) = x/(x - 1)$$

证明: (1) $f_2 \circ f_3 = f_4$; (2) $f_3 \circ f_4 = f_6$; (3) $f_5 \circ f_6 = f_2$ 。

证明: (1) $f_2 \circ f_3(x) = f_2(f_3(x)) = f_2(1 - x) = 1/(1 - x) = f_4(x)$

因此 $f_2 \circ f_3 = f_4$ 。

(2) $f_3 \circ f_4(x) = f_3(f_4(x)) = f_3(1/(1 - x)) = 1 - 1/(1 - x) = x/(1 - x) = f_6(x)$

因此 $f_3 \circ f_4 = f_6$ 。

(3) $f_5 \circ f_6(x) = f_5(f_6(x)) = f_5(x/(x - 1))$
 $= ((x/(x - 1) - 1)/(x/(x - 1)))$
 $= 1/x = f_2(x)$

因此 $f_5 \circ f_6 = f_2$ 。

由于二元关系的复合运算满足结合律, 因此函数的复合运算也满足结合律, 所以有

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

对于特殊函数的复合运算有如下定理。

定理 3.5 设集合 A, B, C , 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则

(1) 若 f 与 g 是满射, 则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是满射。

(2) 若 f 与 g 是单射, 则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是单射。

(3) 若 f 与 g 是双射, 则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是双射。

证明: (1) 对于任意的 $c \in C$, 因为 g 是满射, 所以存在 $b \in B$, 使得 $c = g(b)$ 。而对于 $b \in B$, 因为 f 是满射, 所以存在 $a \in A$, 使得 $b = f(a)$ 。于是

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

因此 $g \circ f$ 是满射。

(2) 对于任意的 $a, b \in A$, 如果 $a \neq b$, 则 $f(a) \neq f(b)$ 。又因为 g 是单射, 所以 $g(f(a)) \neq g(f(b))$, 因此 $g \circ f$ 是单射。

(3) 因为 f 与 g 是双射, 即 f 与 g 既是单射又是满射, 由(1)和(2)可知, $g \circ f$ 也既是单射又是满射, 即 $g \circ f$ 是双射。

定理 3.6 设集合 A, B, C , 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则

- (1) 若 $g \circ f$ 是满射, 则 g 是满射。
 (2) 若 $g \circ f$ 是单射, 则 f 是单射。
 (3) 若 $g \circ f$ 是双射, 则 g 是满射且 f 是单射。

证明: (1) 对于任意的 $c \in C$, 因为 $g \circ f$ 是满射, 所以存在 $a \in A$, 使得 $c = g \circ f(a)$, 即 $c = g(f(a))$ 。因此有 $b = f(a) \in B$, 使得 $c = g(b)$, 因此 g 是满射。

(2) 对于 $a, b \in A$, 如果 $f(a) = f(b)$, 又因为 g 是函数, 所以 $g(f(a)) = g(f(b))$, 即 $g \circ f(a) = g \circ f(b)$ 。由于 $g \circ f$ 是单射, 所以 $a = b$, 即 f 是单射。

(3) 因为 $g \circ f$ 是双射, 所以 $g \circ f$ 既是满射又是单射, 由(1)和(2)可知, g 是满射且 f 是单射。

注意: 若 $g \circ f$ 是满射, 则 f 不一定是满射; 若 $g \circ f$ 是单射, 则 g 不一定是单射。

例 3.20 设集合 A, B, C , 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 举例说明。

(1) $g \circ f$ 是满射, 则 f 不是满射。

(2) $g \circ f$ 是单射, 则 g 不是单射。

解: 设 $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}, C = \{c\}$, 定义函数 $f(a_1) = f(a_2) = b_1, g(b_1) = g(b_2) = c$, 则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 为

$$g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) = c$$

可以验证 $g \circ f$ 是满射, 但是 f 不是满射。

(2) 设 $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}, C = \{c_1, c_2\}$, 定义函数 $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_3, g(b_1) = g(b_2) = c_1, g(b_3) = c_2$, 则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 为

$$g \circ f(a_1) = c_1, \quad g \circ f(a_2) = c_2$$

可以验证 $g \circ f$ 是单射, 但是 g 不是单射。

3.3.2 逆函数

函数作为关系可以求取它的逆关系。但是函数的逆关系不一定是函数, 那在什么情况下函数的逆关系可以成为函数呢? 我们做如下定义:

定义 3.12 设集合 A, B , 函数 $f: A \rightarrow B$ 是双射, 函数 $g: B \rightarrow A$ 使得对于每一个元素 $b \in B$, 有 $g(b) = a$, 其中, $a \in A$ 且使得 $f(a) = b$, 则称 g 是 f 的逆函数, 记作 f^{-1} 。若 f 存在逆函数, 则称 f 是可逆的。逆函数也称为反函数。

例 3.21 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}, f: A \rightarrow B, f = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$, 因为 f 不是单射, 因此 f 的逆关系 $\{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$ 不是函数, 但是如果 $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$, 则 f 是双射, f 的逆关系 $f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ 则是 f 的反函数。

定理 3.7 若 f 是从集合 A 到 B 的双射, 则它的逆关系 f^{-1} 是从 B 到 A 的双射。

证明: 因为 f 是双射, 所以逆关系 f^{-1} 是函数。

对于任意的 $a \in A$, 存在唯一的元素 $b \in B$ 使得 $b = f(a)$, 又由逆函数定义知, $a = f^{-1}(b)$, 即 $a \in f^{-1}(B)$, 因为 a 是任意的, 所以 f^{-1} 是满射。

设 $b_1, b_2 \in B$, 且 $b_1 \neq b_2$, 由双射的定义可知, 必有两个元素 $a_1, a_2 \in A$, 且 $a_1 \neq a_2$, 使得 $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$, 于是 $a_1 = f^{-1}(b_1), a_2 = f^{-1}(b_2)$, 且 $f^{-1}(b_1) \neq f^{-1}(b_2)$, 因此 f^{-1} 是单射。

所以 f^{-1} 是从 B 到 A 的双射。

定理 3.8 设集合 $A, B, C, f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 且 f 与 g 都是可逆的, 则

$$(1) (f^{-1})^{-1} = f.$$

$$(2) (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

证明: (1) 由条件可知, f 与 f^{-1} 都是双射, 并且有 $(f^{-1})^{-1}$ 是从 A 到 B 的双射。下面证明 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

对于任意的 $a \in A$, 设 $f(a) = b \in B$, 有 $f^{-1}(b) = a$, 因此 $(f^{-1})^{-1}(a) = b$, 于是 $f(a) = (f^{-1})^{-1}(a)$, 因为 a 是任意的, 因此 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

(2) 从假设可知, 等式两边都是从 C 到 A 的双射。下面证明 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

对于任意的 $c \in C$, 存在 $b \in B$ 与 $a \in A$, 使得 $g^{-1}(c) = b, f^{-1}(b) = a$, 则

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(c) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = f^{-1}(b) = a$$

另外, 又有 $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

因此 $(g \circ f)^{-1}(c) = a$ 。因为 c 是任意的, 所以有

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

例 3.22 设 $\mathbf{R}$ 为实数集, 函数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 1, g(x) = x^2$, 求 $f \circ g, g \circ f$ 。如果 f 与 g 存在逆函数, 求出相应的逆函数。

解: $f \circ g = f(g(x)) = (x^2) + 1 = x^2 + 1$

$$g \circ f = g(f(x)) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

因为 g 不是双射, 因此不存在逆函数。

习 题

1. 下面的关系哪些构成函数? 其中, $(x, y) \in R$ 定义为 $x^2 + y^2 = 1, x, y$ 均为实数。

$$(1) 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$(2) -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

$$(3) -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$(4) x \text{ 任意}, 0 \leq y \leq 1$$

2. 设 $A = \{a, b, c\}$, 问:

(1) A 到 A 可以定义多少种函数?

(2) $A \times A$ 到 A 可以定义多少种函数?

(3) $A \times A$ 到 $A \times A$ 可以定义多少种函数?

(4) A 到 $A \times A$ 可以定义多少种函数?

3. 设 $A = \{0, 1, 2\}, B = \{a, b\}$, 问下列关系哪些是 A 到 B 的函数?

$$(1) f_1 = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$$

$$(2) f_2 = \{(0, a), (1, b), (2, a)\}$$

$$(3) f_3 = \{(0, a), (1, b)\}$$

$$(4) f_4 = \{(0, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

4. 设 f 与 g 是函数, 证明 $f \cap g$ 也是函数。

5. 设 f 与 g 是函数, 且 $f \subseteq g, \text{dom}(g) \subseteq \text{dom}(f)$, 则 $f = g$ 。

6. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, 问下列函数哪些是单射? 哪些是满射? 哪些是双射?

$$(1) f_1 = \{(1, a), (3, b), (2, d), (4, c), (5, e)\}$$

$$(2) f_1 = \{(1, a), (3, a), (2, d), (4, c), (5, d)\}$$

$$(3) f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, d), (4, c), (5, e)\}$$

7. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, 试给出满足下列条件的函数的例子。

(1) 是单射不是满射;

(2) 是满射不是单射;

(3) 不是单射也不是满射;

(4) 既是单射又是满射。

8. 设 f, g, h 都是实数集上的函数, 且 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x^2 - 2$, 求 $f \circ g, g \circ h, f \circ (g \circ h), g \circ (h \circ f)$ 。

9. 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow \rho(A)$, 对于 $b \in B, g(b) = \{x \in A \mid f(x) = b\}$, 证明: 若 f 是 A 到 B 的满射函数, 则 g 是单射函数。

10. 设 f 与 g 是函数, 且 $f(x) = 2x + 1, g(x) = 3x + 2, x \in \mathbf{Z}$ (整数集), 求 $(f \circ g)^{-1}, (g \circ f)^{-1}$ 。

11. 证明: 若 $(g \circ f)^{-1}$ 是一个函数, 则 f 与 g 是单射不一定成立。

12. 设函数 $f: R \times R \rightarrow R \times R, f$ 定义为

$$f(x, y) = (x + y, x - y)$$

(1) 证明 f 是单射;

(2) 证明 f 是满射;

(3) 求逆函数 f^{-1} ;

(4) 求复合函数 $f^{-1} \circ f$ 与 $f \circ f^{-1}$ 。