

本章导读：前面章节已经介绍了静电场和静磁场的性质及相应解法，本章将步入时变电磁场领域。时变电磁场是电磁场理论的核心部分，也是学习后续章节的理论基础。其核心内容是电磁场的基本方程，即麦克斯韦方程组。要求学生掌握这些基本方程，电磁场的基本边值条件、坡印亭矢量；理解位移电流、电磁场的矢量势与标量势、洛伦兹条件和达朗贝尔方程、推迟势等概念。后续章节将基于本章内容推导电场与磁场的波动方程，讨论平面电磁波的传输、电磁波的发射等。作为“静”与“动”的过渡章节，大家务必掌握相关内容。

5.1 法拉第电磁感应定律

在静态场的情形下，电场磁场是独立存在的，因此将电场和磁场分开来研究。当电荷、电流随时间变化时，其产生的电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 不仅是空间的函数，也是时间的函数，称为时变电磁场。而且电场和磁场不再相互独立，它们相互依存、相互转化，构成不可分割的统一体。

5.1.1 法拉第电磁感应定律

1831年，英国科学家法拉第首次从实验上发现并总结出电磁感应定律，证明变化的磁场可以产生变化的电场。如果磁场中存在导体构成的闭合回路，当穿过该回路的磁通发生变化时，此回路中将出现感应电动势并引起感应电流。感应电动势大小与磁通时变率成正比关系，且感应电动势在导体回路中引起的感应电流产生的磁场总是阻止回路中磁通的变化（楞次定律）。法拉第电磁感应定律的数学表达式为

$$\mathcal{E} = - \frac{d\psi_m}{dt} \quad (5-1)$$

式中，负号表示感应电动势所引起的感应电流的磁场总是企图阻止回路中磁通的改变。它从一个方面揭示出电现象和磁现象之间的内在联系。如果规定感应电动势的正方向（参考方向）也即感应电流的正方向和磁通的正方向之间符合右手螺旋定则（见图 5-1(a)）。当磁通增加，即 $\frac{d\psi_m}{dt} > 0$ 时，相应感应电流的磁场方向总是与原磁场方向相反（见图 5-1(b)）；当磁通减少，即 $\frac{d\psi_m}{dt} < 0$ 时，相应感应电流的磁场方向总是与原磁场方向相同（见图 5-1(c)）。

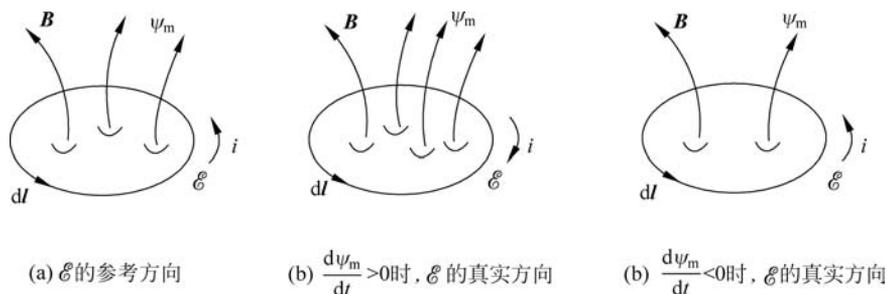


图 5-1 感应电动势与感应电流的正方向和真实方向

法拉第电磁感应定律迈出了电与磁联系的第一步,是电磁理论中最重大的发现之一。一方面,人们依据电磁感应的原理制造出了发电机,从而使电能的大规模生产和远距离输送成为可能;另一方面,电磁感应现象在电工、电子以及电磁测量技术方面都得到了广泛应用。

对于 N 匝线圈的导体回路,当与它交链的磁链发生变化时,由于磁链为 $\Psi = N\psi_m$,该导体回路中的感应电动势应为

$$\mathcal{E}_N = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\psi_m}{dt} \quad (5-2)$$

难点点拨: 由已知磁场求感应电动势时,首先需要做的是规定感应电动势的正方向。方法: 感应电动势产生感应电流的正方向和磁通的正方向之间总是符合右手螺旋定则。

导体回路中出现感应电动势,则必然出现感应电场,该电场并非由电荷所产生,是由其他形式的能量转换而来,且感应电动势等于感应场强沿闭合回路的线积分,即

$$\mathcal{E} = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5-3)$$

法拉第电磁感应定律指出,感应电动势的大小只与磁通对时间的变化率有关,而与引起磁通变化的原因无关。因此,法拉第电磁感应定律既适用于导体回路静止不动而磁场变化的情形(感生电动势),也适用于回路相对于磁场运动(即回路的导体切割磁力线)的情形(动生电动势),或二者兼而有之。另外,法拉第在总结该实验规律时仅局限于导体回路,未能深刻地揭示电磁本质,麦克斯韦提出“涡旋电场”的概念并补充了这一理论,提出变化的磁场激发感应电场的现象不仅发生在导体回路中,而且可以发生在一切媒质内。在任意假设的闭合回路中,只要磁场随时间而变化,就会出现感应电场。后来电磁波的出现完全证实了麦克斯韦对电磁感应定律所作的这一推广的正确性。

5.1.2 感应电动势的计算

1. 感生电动势

如果静止的导体回路处于随时间变化的磁场中,只是磁场随时间变化,回路所包围的面积不变,导体回路中产生的感应电动势,即感生电动势为

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-4)$$

再结合式(5-3),可得

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-5)$$

上式称为法拉第电磁感应定律的积分形式。它表明变化的磁场可以产生变化的电场。这是电场与磁场紧密联系的一个重要方面。对式(5-5)应用斯托克斯定理,可以得到法拉第电磁感应定律的微分形式,即

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5-6)$$

上式表明,感应电场的性质和静电场或稳恒电场完全不同,它是有旋场,变动的磁场是其漩涡源。在静态场的情形下,由于 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$,故有 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。

2. 动生电动势

如果磁场不随时间变化,导体回路在磁场中运动,回路所包围的磁通相应发生变化,回路中也会产生感应电动势,即动生电动势。设导体回路以速度 \mathbf{v} 相对于磁场运动,如图 5-2 所示,当导体回路在 dt 时间内由 l_1 运动到 l_2 时,穿过回路的磁通将发生变化:

$$d\phi_m = \phi_{m2} - \phi_{m1}$$

其中, ϕ_{m1} 与 ϕ_{m2} 分别为回路移动前后穿过此回路的磁通。在 dt 时间内,回路上的任一个线元矢量 $d\mathbf{l}$ 移动了 $\mathbf{v}dt$ 的距离,则它所扫过的面积元矢量为 $d\mathbf{S} = d\mathbf{l} \times \mathbf{v}dt$,面元矢量 $d\mathbf{S}$ 的方向为其外法线方向。当 dt 很小时,可以近似认为穿过面元的磁场是均匀的,穿出此面元的磁通为

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v})dt = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}dt$$

因此,穿出整个回路所扫过面积的磁通为 $\oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}dt$ 。在时变电磁场中,磁通连续性原理仍然成立,其微分形式和积分形式分别为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5-7)$$

和

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5-8)$$

则对图 5-2 中所示的封闭面,根据磁通连续性原理,流入该密闭曲面的净磁通为 0,即

$$\phi_{m1} - \phi_{m2} - \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}dt = 0$$

故有

$$d\phi_m = \phi_{m2} - \phi_{m1} = - \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}dt$$

再结合式(5-1),可得产生的感应电动势即动生电动势为

$$\mathcal{E}_m = - \frac{d\phi_m}{dt} = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5-9)$$

3. 变化的磁场内运动的导体回路

一导体回路在变化的磁场内运动,其产生的感应电动势是上述两种情形的叠加,即

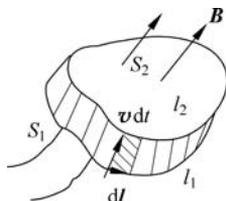


图 5-2 在磁场内运动的导体回路中产生动生电动势

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_m = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5-10)$$

但在实际情况中,一般不会对感生电动势和动生电动势分别求解,通常先求出穿过导体回路的磁通,然后根据式(5-1)或式(5-2)直接求出感应电动势。感应电动势的正方向(即参考方向)和感应电场的方向相同,与磁场的正方向符合右手螺旋定则。

5.1.3 动生电动势的另一种推证方法

前面通过法拉第电磁感应定律得到了动生电动势的表达式式(5-9)。其实还可以通过局外场强积分的方法对此进行简单推证。当一段长为 l 的导体在磁场中以速度 \mathbf{v} 运动时,因为导体中的自由电荷也以速度 \mathbf{v} 相对于磁场运动,因而受到一个洛伦兹力的作用,即

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5-11)$$

此力与磁场方向和运动方向皆垂直,如图 5-3 所示。对这些受力电荷来讲,与处在一个外电场中的情况相类似,此电场对应的强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5-12)$$

这个电场强度显然不是由电荷产生的,不是库仑场,所以称之为局外场。

依据第 3 章的概念,由式(3-13),将局外场沿导体积分,即得到感应电动势的大小:

$$\mathcal{E}_m = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5-13)$$

如果导体形成了闭合回路,则积分的结果就是式(5-9)。

例 5.1 在通有电流 $i = I_m \cos \omega t$ 的长直细导线一侧平行地放置一矩形导线框,如图 5-4 所示。若线框以速度 \mathbf{v} 沿垂直于导线的方向运动,试求线框中的感应电动势。

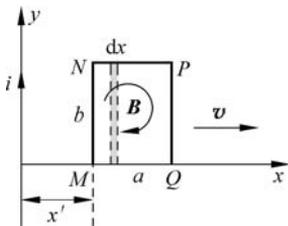


图 5-4 矩形线框在变动的磁场内运动产生的感应电动势

解 可以运用两种方法求得。

方法 1 采用直角坐标系,使载流导线与导线框位于 $z=0$ 的平面内,且线框沿 x 轴正方向运动。设电流 i 沿 y 轴为正方向,于是感应电动势 \mathcal{E} 的正方向在线框中为顺时针方向,如图 5-4 所示。电流 i 在距载流直导线为 x 处所产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} (-\mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi x} \cos \omega t (-\mathbf{e}_z)$$

设 $t=0$ 时,线框的 MN 边距载流直导线为 d 。当 $t=t$ 的瞬时, MN 边位于 $x' = d + vt$,线框的瞬时磁通为

$$\phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{x'}^{x'+a} \frac{b dx}{x} = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{x'+a}{x'} = \frac{\mu_0 I_m b}{2\pi} \ln \frac{a+d+vt}{d+vt} \cos \omega t$$

故感应电动势为

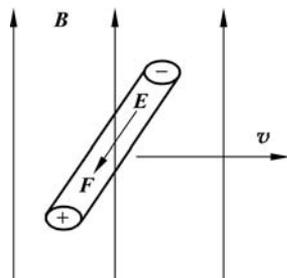


图 5-3 一段导体在磁场中运动产生动生电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\psi_m}{dt} = \frac{\mu_0 I_m b}{2\pi} \left[\omega \ln\left(1 + \frac{a}{d+vt}\right) \sin\omega t + v \left(\frac{1}{d+vt} - \frac{1}{a+d+vt} \right) \cos\omega t \right]$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 线框远离载流导线, $\mathbf{B} \rightarrow 0$, 则 $\mathcal{E} \rightarrow 0$ 。

如果矩形导线框不运动, 则 $v=0$, 导线框中只有感生电动势, 即

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I_m b \omega}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \sin\omega t$$

如果电流不变化, $\omega=0$, 则 $i=I_m$ (常数), 线框中仅有动生电动势, 即

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I_m b v}{2\pi} \left(\frac{1}{d+vt} - \frac{1}{a+d+vt} \right)$$

方法 2 分别求出感生电动势与动生电动势, 然后求和。

令线框在 $t=t$ 的瞬时静止, MN 边位于 $x'=d+vt$, 仅由线框的磁通变化而产生的感生电动势为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{x'}^{x'+a} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 I_m}{2\pi x} \cos\omega t \right) b dx \\ &= \frac{\mu_0 I_m \omega b}{2\pi} \sin\omega t \int_{x'}^{x'+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_m \omega b}{2\pi} \sin\omega t \cdot \ln \frac{x'+a}{x'} \\ &= \frac{\mu_0 I_m \omega b}{2\pi} \sin\omega t \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{d+vt}\right) \end{aligned}$$

由线框的 NP 边与 QM 边满足 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0$, 故运动的导体回路产生的动生电动势为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \int_{IMN} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{IPQ} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{IMN} \frac{\mu_0 i}{2\pi x'} \mathbf{v} d\mathbf{l} - \int_{IPQ} \frac{\mu_0 i}{2\pi(x'+a)} \mathbf{v} d\mathbf{l} \\ &= \frac{\mu_0 i v b}{2\pi} \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x'+a} \right) = \frac{\mu_0 I_m b v}{2\pi} \cos\omega t \left(\frac{1}{d+vt} - \frac{1}{a+d+vt} \right) \end{aligned}$$

因此, 总的感应电动势为

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 I_m b}{2\pi} \left[\omega \ln\left(1 + \frac{a}{d+vt}\right) \sin\omega t + v \left(\frac{1}{d+vt} - \frac{1}{a+d+vt} \right) \cos\omega t \right]$$

可见, 两种方法所得结果相同。

例 5.2 直角坐标系中的 yOz 平面上有一宽和高分别为 a 、 b 的矩形导线框, 轴线在 z 轴上, 假设垂直于导线框加时变磁场 $\mathbf{B} = B_m \cos\Omega t \mathbf{e}_x$, 且导线框绕其轴线以角速度 ω 旋转, 如图 5-5 所示。试求矩形导线框中的感应电动势。

解 设 $t=0$ 时导线框平面的法线与外磁场的方向即 x 轴的夹角为 φ_0 , 当 $t=t$ 时导线框平面的法线的角度为 $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ 。则穿过运动的导线框的磁通为 $\psi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B_m \cos\Omega t \cdot S \cos\varphi = B_m S \cos\Omega t \cos(\varphi_0 + \omega t)$ 其中, $S = ab$ 是导线框的面积。因此, 导线框中所产生的感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\psi_m}{dt} = B_m S [\Omega \sin\Omega t \cos(\varphi_0 + \omega t) + \omega \cos\Omega t \sin(\varphi_0 + \omega t)]$$

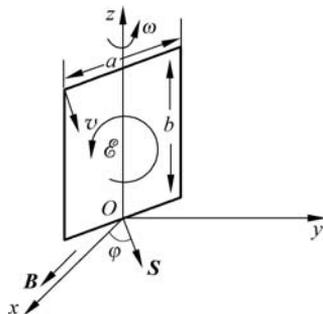


图 5-5 矩形线框在变动的磁场内运动产生的感应电动势

如果 $\omega = \Omega$, 有

$$\mathcal{E} = B_m S \omega \sin(2\omega t + \varphi_0)$$

如果导线框不转动, 则 $\omega = 0$, 有

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i = B_m S \Omega \cos\varphi_0 \sin\Omega t$$

如果磁场不变化, 则 $\Omega = 0$, 这时令 $B = B_m = B_0$ 为常数, 有

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m = B_0 S \omega \sin(\varphi_0 + \omega t)$$

* 5.1.4 再议无线输电

无线输电, 是科学家们正在研发的最新供电技术, 原理是采用无线方式传输电力能量并驱动电器的技术。无线输电技术与无线通信的主要区别是着眼于传输能量, 而非附载于能量之上的信息。这种技术有望用于很多领域, 如海上风力发电站向陆地、向自然环境艰险的地区输电及生活中很多便携设备的无线充电等。

近年来取得较大进展的无线输电技术都基于电磁感应原理, 虽然输电距离较近, 但在小功率短距离输电的情况下具有很大的优势。其原理如图 5-6 所示, 设备由发送端的初级线圈和接收端的次级线圈组成, 初级线圈加载一定频率的交流电, 通过电磁感应在次级线圈中产生一定的电流, 从而实现能量从传输端至接收端的传输。比较新颖的方式是磁场共振式无线输电, 由能量发送装置和能量接收装置组成, 均由铜制线圈制成, 当两个装置调整到相同频率, 或者说在一个特定的频率上共振, 它们就可以交换彼此的能量。这项技术由麻省理工学院(MIT)的研究团队提出, 利用该技术点亮了 2m 外的一盏 60W 的灯泡, 该成果发表在美国《科学》杂志。实验中使用的线圈直径达到 50cm, 无法实现商用化, 因为缩小线圈尺寸时接收功率自然也会下降。

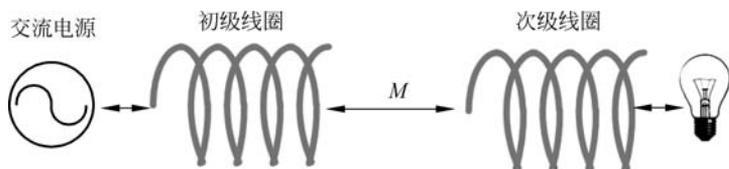


图 5-6 无线输电原理示意图

人们也在探究长距离的无线输电, 如激光束输电和微波输电等。2016 年 10 月, 俄罗斯的火箭宇航“能源”公司的科学家们利用激光束和一个特殊的光电转换装置, 为远在 1.5km 的手机进行了无线充电。但考虑到日常生活的实用性、安全性和空间局域性, 长距离的无线输电还有很长的路要走。

5.2 位移电流和全电流定律

5.1 节的内容说明了变化的磁场可以激发电场, 那么变化的电场是否可以激发磁场呢? 答案是肯定的。

麦克斯韦方程组是电磁理论的基石, 是麦克斯韦在总结前人成果的基础上提出来的。它不仅是对前述理论的简单概括和总结, 而且有创造性的发展, 其最突出的成果就是位移电流的提出。

由法拉第电磁感应定理可知,时变场和静电场不同,电场的旋度不再为0。在麦克斯韦之前的其他理论成果有

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5-14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5-15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5-16)$$

在时变场的情形下,变化的电荷产生变化的电场,高斯定理式(5-14)仍然成立,磁通连续性原理式(5-15)仍然成立,但研究安培环路定律在时变场的适用性时则出现了矛盾。

对稳恒磁场中的安培环路定律式(5-16)两边取散度,因为任一矢量的旋度的散度必等于零,有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5-17)$$

也就是说,在稳恒磁场中稳恒电流总是连续的。

但是在时变场中电荷随时间变化,根据电荷守恒定律,有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5-18)$$

即时变电流不再连续,式(5-17)和式(5-18)相矛盾。因为电荷守恒定律是准确成立的普遍规律,只能认为稳恒磁场的安培环路定律不再适用于时变场,需要对它加以修正,使之满足普遍的电荷守恒定律的要求。

式(5-14)两边对时间求偏导,有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

代入式(5-18),可得

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5-19)$$

这说明上式括号中的矢量是连续的, \mathbf{J} 为自由电流密度(包含传导电流密度 $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$ 和运流电流密度 $\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v}$),本书中基本不涉及运流电流,所以后续章节中 \mathbf{J} 基本单指 \mathbf{J}_c ,读者可以根据上下文理解,而 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 与 \mathbf{J} 具有相同量纲,称之为位移电流密度,即

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5-20)$$

上式是麦克斯韦1862年首次提出的,并认为位移电流和自由电流以同一方式激发磁场。这样,麦克斯韦将安培环路定律修正为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5-21)$$

这样便不会与电荷守恒定律发生矛盾,上式称为全电流定律的微分形式。应用斯托克斯定理,可以得到全电流定律的积分形式

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (5-22)$$

这表明在时变场的情形下,自由电流和时变电场都是磁场的漩涡源,都可以产生磁场。对静态场有 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$,磁场仅由自由电流产生,于是全电流定律又退化为安培环路定律。因此,不

仅变化的磁场可以激发变化的电场,变化的电场也可以激发变化的磁场。后者是电场与磁场紧密联系的另一个重要方面。

因为介质中的电位移矢量 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$, 由式(5-20)可得

$$\mathbf{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (5-23)$$

由此可见,位移电流并不是由自由电荷的运动所产生的。在一般介质中,位移电流由两部分构成:第一项 $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 由电场随时间的变化引起,另一项 $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ 则是极化强度对时间的变化率,它是由介质中束缚电荷在时变电场中的运动所引起的,称为极化电流密度,可用 $\mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ 表示。在真空中, $\mathbf{P} = 0$, 位移电流密度仅由电场随时间的变化决定。

介质中的位移电流密度还可以表示为

$$\mathbf{J}_D = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5-24)$$

因此,位移电流存在于一切媒质中,只要电场随时间变化,便会有位移电流出现,且随频率的升高而增大。由此看来,位移电流只不过是代表电场随时间的变化率的一个假想的电流密度概念而已。

重点归纳: 传导电流是电荷在导电媒质中有规则运动形成的电流; 运流电流是电荷在不导电的空间,如真空或极稀薄气体中有规则运动形成的电流; 位移电流则是由电位移矢量随时间变化形成的,它存在于一切媒质中,只要有变化的电场,便会有位移电流。

和传导电流的计算一样,通过任一截面 S 的位移电流为

$$i_D = \int_S \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{S} \quad (5-25)$$

式(5-19)括号中的电流密度包括传导电流密度 \mathbf{J}_c 、运流电流密度 \mathbf{J}_o 和位移电流密度 \mathbf{J}_D , 合称为全电流密度。由式(5-19)可知,全电流密度是连续的,其对应的积分形式为

$$\oint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5-26)$$

图 5-7 展示了一个由电子管、电阻、电容器及导线构成的交流电路,电子管内通过运流电流,电阻及导线中流过传导电流,而电容器中则通过位移电流。在电路的任何节点或支路上,全电流总是连续的。静态场情况下,位移电流为零,电子管中的运流电流和导体中的传导电流仍然连续。因此,全电流的连续性不论对于时变场或静态场都成立。这是电荷守恒定律的必然结果。

位移电流的引入具有重大意义。它揭示了变化的电场可以产生磁场,表明磁场可以由脱离电荷以外的电场变化来激发; 它和法拉第电磁感应定律一起,揭示了电磁场可以互相激发和转化,并预言了电磁波的存在; 这一假说使古老的电磁学说彻底改变,使人类对电磁现象的认识有了质的飞跃。

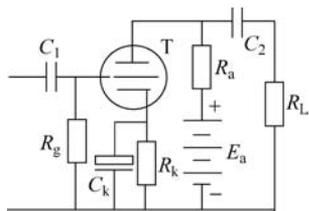


图 5-7 电子管交流电路

例 5.3 已知海水的电导率 $\sigma = 4\text{S/m}$, 相对介电常数 $\epsilon_r = 81$, 假设海水中的电场为 $\mathbf{E} = E_m \cos \omega t \mathbf{e}_x$, $\omega = 2\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$, 计算海水中的位移电流密度和传导电流密度。

解 海水中的传导电流密度为

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} = \sigma E_m \cos \omega t \mathbf{e}_x$$

位移电流密度为

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\omega \epsilon_0 \epsilon_r E_m \sin \omega t \mathbf{e}_x$$

也可以计算得到传导电流和位移电流振幅之比

$$\left| \frac{\mathbf{J}_D}{\mathbf{J}_c} \right| = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\sigma} = \frac{2\pi \times 10^4 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 81}{4} = 1.125 \times 10^{-5}$$

可见在工作频率 $f = 10\text{kHz}$ 时, 海水中传导电流占主导。

例 5.4 由半径为 a 、相距为 d ($d \ll a$) 的圆形极板构成的平行板电容器, 其中的介质是非理想的, 具有电导率 σ 、介电常数 ϵ 和磁导率 μ_0 。假定电容器内的电场是均匀的, 不计边缘效应, 且所加电压 $u = U_m \sin \omega t$ 的角频率 ω 很低。试求电容器中的位移电流、传导电流和导线中的传导电流及两极板间的磁感应强度。

解 采用如图 5-8 所示的圆柱坐标系, 使平行板电容器圆形极板的中心轴与 z 轴重合, 忽略电容器的边缘效应, 且所加电压 u 的频率很低, 则两极板间的电磁场可视为准静态场, 故其中的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{u}{d} \mathbf{e}_z = \frac{U_m}{d} \sin \omega t \mathbf{e}_z$$

电容器两极板间任一点的传导电流密度与位移电流密度分别为

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma U_m}{d} \sin \omega t \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon \omega U_m}{d} \cos \omega t \mathbf{e}_z$$

可以看出, 两个电流密度不随空间坐标变化, 因此, 通过电容器的传导电流和位移电流分别为

$$i_c = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = J_c S = \frac{\sigma S}{d} U_m \sin \omega t = G u$$

$$i_D = \int_S \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{S} = J_D S = \frac{\epsilon \omega U_m}{d} \cos \omega t \cdot S$$

$$= \omega \frac{\epsilon S}{d} U_m \cos \omega t = \omega C U_m \cos \omega t$$

其中, $S = \pi a^2$ 为极板面积, $C = \frac{\epsilon S}{d}$ 和 $G = \frac{\sigma S}{d}$ 分别是圆形平行板电容器的电容和漏电导。

忽略导线的电阻, 由全电流的连续性可得导线中的传导电流为

$$i'_c = i_c + i_D = \frac{\pi a^2 U_m}{d} (\sigma \sin \omega t + \omega \epsilon \cos \omega t)$$

设位移电流沿 z 方向为正。在两极板间取一个半径为 r 且圆心在 z 轴上的圆截面 S ,

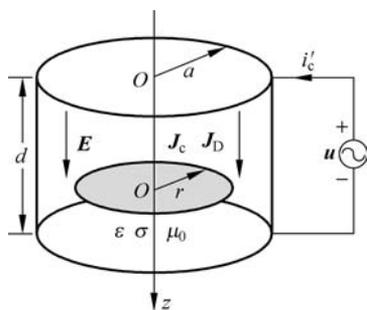


图 5-8 求电容器中的位移电流和磁场

应用全电流定律的积分形式,则有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D) \cdot d\mathbf{S} = \int_0^r (J_c + J_D) 2\pi r dr$$

即

$$H \cdot 2\pi r = \frac{\pi r^2 U_m}{d} (\sigma \sin \omega t + \epsilon \omega \cos \omega t)$$

因此,电容器两极板间的磁场强度和磁感应强度分别为

$$\mathbf{H} = \frac{r U_m}{2d} (\sigma \sin \omega t + \epsilon \omega \cos \omega t) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 r U_m}{2d} (\sigma \sin \omega t + \epsilon \omega \cos \omega t) \mathbf{e}_\varphi$$

如果极板间为理想介质,即 $\sigma=0$,有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \epsilon \omega r U_m}{2d} \cos \omega t \mathbf{e}_\varphi$$

如果 $\sigma \gg \epsilon \omega$,即极板间媒质为良导体,则导体中的位移电流远小于传导电流,故有

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 \sigma r U_m}{2d} \sin \omega t \mathbf{e}_\varphi$$

5.3 麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式

5.3.1 麦克斯韦方程组

1864年,麦克斯韦对时变电磁场中电磁现象的实验规律进行了全面的分析总结,主要创新有:将静电场的高斯定理和稳恒磁场的磁通连续性原理推广到时变场;将法拉第电磁感应定律的适用范围推广到一切媒质中;引入位移电流的概念,将稳恒磁场的安培环路定律修改为适用于时变场的全电流定律;提出了麦克斯韦方程组,依次为第一方程、第二方程、第三方程、第四方程,如下:

微分形式	积分形式	
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$	(5-27)

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$	(5-28)
--	---	--------

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	(5-29)
-------------------------------	--	--------

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$	(5-30)
----------------------------------	--	--------

再加上三个电磁场的辅助方程,即

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5-31)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (5-32)$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (5-33)$$

便构成了完整的麦克斯韦方程组,它对静止媒质中宏观电磁现象的普遍规律做出了高度概括,是电磁场的基本方程,它全面地描述了电场和磁场间的相互联系、电磁场和场源之间的

关系以及电磁场与其所处媒质间的关系。它在宏观电磁场理论中的地位,就如同牛顿定律在经典力学中的地位一样。

由麦克斯韦方程组可见:

(1) 第二方程式(5-28)和第四方程式(5-30)给出了电场的旋度和散度,即电场包括由时变磁场激发的感应电场和自由电荷激发的库仑电场两部分;麦克斯韦第一方程式(5-27)和第三方程式(5-29)给出了磁场的旋度和散度,即磁场也包括自由电流激发的磁场和时变电场激发的磁场两部分;式(5-31)~式(5-33)这3个辅助方程则给出了电磁场与其所处媒质间的关系。

(2) 第一方程式(5-27)与第二方程式(5-28)是麦克斯韦方程组的核心,它们显示了电场和磁场间的相互制约和彼此的紧密联系,从而表明了电磁场变化的主要特征;它们说明时变电场和时变磁场可以互相激发,表明时变电磁场可以脱离场源而独立存在,在空间形成电磁波。麦克斯韦根据时变电磁场的普遍规律,首次从理论上预言了电磁波的存在,并指出光也是一种电磁波,电磁波在真空中的传播速度等于光速。1887年,赫兹所做的电磁波实验以及近代无线电技术的实践完全证实了这个预言的正确性。

(3) 从第一方程式(5-27)和第二方程式(5-28)可知,电场激发的磁场是右旋的(对应 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$),而磁场激发的电场却是左旋的(对应 $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$);电场变化最大处的磁场最大,而磁场变化最大处的电场最大,如图5-9所示。

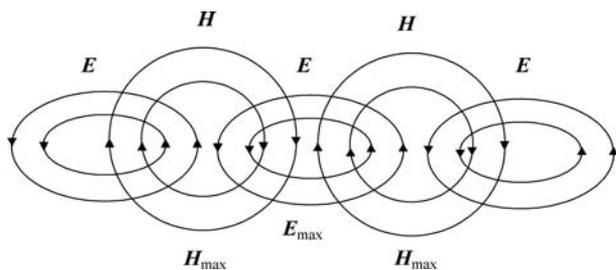


图 5-9 电场与磁场互相激发形成电磁波

(4) 第三方程式(5-29)和第四方程式(5-30)表明磁场和电场本身所具有的规律,即磁通连续性原理和变动的自由电荷可以激发电场的高斯定理。在时变场情形下,空间中磁力线仍为闭合曲线,而电力线则起始于正电荷终止于负电荷。但需要说明的是,在远离场源的无源区域中,电场和磁场的散度都为零,这时电力线和磁力线均为闭合曲线,且相互交链,在空间形成电磁波。

(5) 麦克斯韦方程组中包含了电荷守恒定律。第四方程式(5-30)可由第一方程式(5-27)和电荷守恒定律导出。由式(5-27)有 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$,将电荷守恒定律 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 代入,有 $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0$,则 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho + C$,其中 C 是与时间无关的一个常数。若假设在某一时刻 $\nabla \cdot \mathbf{D}$ 与 ρ 同时为零,则常数 C 必为零,于是得到第四方程式(5-30)。也可由第一方程式(5-27)和第四方程式(5-30)导出电荷守恒定律。同理,第三方

程式(5-29)可由第二方程式(5-28)导出。

(6) 在线性媒质中,麦克斯韦方程组是一组线性微分方程,可以应用叠加原理。

(7) 麦克斯韦方程组是反映宏观电磁现象普遍规律的电磁场基本方程。静电场、稳恒电场和稳恒磁场的基本方程都只不过是麦克斯韦方程组在静态条件下的特例而已。

(8) 麦克斯韦方程的积分形式适用于一切场合,但其微分形式只适用于场量的各个分量连续、可微的情况。

5.3.2 正弦电磁场基本方程的复数形式

在时变电磁场中,场量是空间变量和时间变量的函数。前面所讨论的麦克斯韦方程组适用于任何时间变化规律。本节讨论最重要的一类时变电磁场,正弦电磁场,即场源随时间按正弦或余弦规律变化,它所激发的电磁场的每一个分量也随时间以相同的频率按正弦或余弦规律变化。正弦电磁场也称时谐电磁场,数学形式简单,可用三角函数或指数函数来表述,在实践上也易于产生,是实际问题中最常见的时变电磁场。非正弦电磁场则可以应用傅里叶级数展开法化为正弦电磁场的线性叠加来研究。因此,正弦电磁场中麦克斯韦方程组的表示形式非常重要。

正弦电磁场中的任一场量都随时间做正弦或余弦变化,这就与复数有了关系,可以用复数的实部或虚部来表示,比如,电场强度在直角坐标系内可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z \\ &= E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_x) \mathbf{e}_x + E_{ym} \cos(\omega t + \varphi_y) \mathbf{e}_y + E_{zm} \cos(\omega t + \varphi_z) \mathbf{e}_z \\ &= \operatorname{Re} [E_{xm} e^{j(\omega t + \varphi_x)} \mathbf{e}_x + E_{ym} e^{j(\omega t + \varphi_y)} \mathbf{e}_y + E_{zm} e^{j(\omega t + \varphi_z)} \mathbf{e}_z] \\ &= \operatorname{Re} [(\dot{E}_{xm} \mathbf{e}_x + \dot{E}_{ym} \mathbf{e}_y + \dot{E}_{zm} \mathbf{e}_z) e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (5-34)$$

即

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}]$$

其中,

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{E}_{xm} \mathbf{e}_x + \dot{E}_{ym} \mathbf{e}_y + \dot{E}_{zm} \mathbf{e}_z \quad (5-35)$$

称为电场强度复矢量;

$$\dot{E}_{xm} = E_{xm} e^{j\varphi_x}, \quad \dot{E}_{ym} = E_{ym} e^{j\varphi_y}, \quad \dot{E}_{zm} = E_{zm} e^{j\varphi_z} \quad (5-36)$$

称为电场强度各分量的复振幅。各分量振幅 E_{xm} 、 E_{ym} 、 E_{zm} 和初相角 φ_x 、 φ_y 、 φ_z 都是空间坐标的函数。

有同学可能会有疑问,电场强度随时间做余弦变化,上式做了取实部的操作;如果电场强度随时间正弦变化,是不是该取虚部呢?

事实上,也有教材中使用的是取虚部的操作。但读者务必要记住:无论是取虚部,或者取实部,都是正确、可行的,都可以得到相同的结果。但是对于个人来讲,必须坚持一个选择!要么取实部,要么取虚部,万万不可随意选择。更不可在一道题目里面一会儿取实部,一会儿取虚部。

难点点拨：对于电场强度随时间做正弦变化的情况，可以这样处理：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z \\
 &= E_{xm} \sin(\omega t + \varphi_x) \mathbf{e}_x + E_{ym} \sin(\omega t + \varphi_y) \mathbf{e}_y + E_{zm} \sin(\omega t + \varphi_z) \mathbf{e}_z \\
 &= E_{xm} \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_x + E_{ym} \cos\left(\omega t + \varphi_y - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_y + E_{zm} \cos\left(\omega t + \varphi_z - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_z \\
 &= \operatorname{Re} [E_{xm} e^{j(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2})} \mathbf{e}_x + E_{ym} e^{j(\omega t + \varphi_y - \frac{\pi}{2})} \mathbf{e}_y + E_{zm} e^{j(\omega t + \varphi_z - \frac{\pi}{2})} \mathbf{e}_z] \\
 &= \operatorname{Re} [(-jE_{xm} e^{j\varphi_x} \mathbf{e}_x - jE_{ym} e^{j\varphi_y} \mathbf{e}_y - jE_{zm} e^{j\varphi_z} \mathbf{e}_z) e^{j\omega t}] \\
 &= \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}]
 \end{aligned}$$

也就是说，如果场量按照正弦变化，电场强度也可以写作类似的复数形式。

对于时谐电磁场其他所有场量，也可以运用类似的表达式。这种“简单问题复杂化”的做法有什么好处呢？复数表达式的运用使得数学运算简化，比如将对时间变量的偏微分变为代数运算。例如 $\mathbf{D} = \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{D}}_m e^{j\omega t}]$ ，则有

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{D}}_m e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [j\omega \dot{\mathbf{D}}_m e^{j\omega t}]$$

将各场量都用复数表示，用 $j\omega$ 的因子代替对时间的导数^①，消去方程两边的时间因子 $e^{j\omega t}$ ，并省略了符号 Re 。例如麦克斯韦第一方程式(5-27)可表示为

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathbf{J}}_m + j\omega \dot{\mathbf{D}}_m$$

上式也可以写为

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}}$$

式中， $\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{\mathbf{H}}_m}{\sqrt{2}}$ 、 $\dot{\mathbf{J}} = \frac{\dot{\mathbf{J}}_m}{\sqrt{2}}$ 和 $\dot{\mathbf{D}} = \frac{\dot{\mathbf{D}}_m}{\sqrt{2}}$ ，分别是各对应场量的复数有效值矢量（有时以下标“e”加以区分）。同理可以得到麦克斯韦方程组的复数形式：

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}} \\ \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}} \\ \nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0 \\ \nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho} \end{cases} \quad (5-37)$$

和辅助方程的复数形式：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{H}} \\ \dot{\mathbf{D}} = \epsilon \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{J}}_c = \sigma \dot{\mathbf{E}} \end{cases} \quad (5-38)$$

^① 另一种习惯是把场量表示为 $\mathbf{D} = \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{D}}_m e^{-j\omega t}]$ 的形式，则对时间的导数为 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -j\omega \mathbf{D}$ ，本书一律采用 $e^{j\omega t}$ 的表示法。

可以看出,麦克斯韦方程组写成复数形式后时间因子 t 换成了频率因子 ω ,时域问题转化为频域问题。应该指出,式(5-38)中媒质的介电常数 ϵ 和磁导率 μ 只有在理想介质时才是实数。在高频时有耗介质中这些媒质参量将都是复数,且随频率而变化。

大多数情况下都从频域出发研究电磁问题,因此以后复数形式方程各场量通常省掉表示复数的“ \cdot ”号,但仍表示场量的复数有效值矢量。这并不会引起混淆,因为电磁场的复数形式和瞬时值形式有明显的区别,即具有 $j\omega$ 因子的显然是复数形式,而具有对时间的偏导数 $\frac{\partial}{\partial t}$ 的则是瞬时值形式。

例 5.5 将下列场矢量由复数形式写成瞬时值形式,或作相反的变化。

$$(1) \mathbf{E} = E_0 e^{-j\beta z} \mathbf{e}_x;$$

$$(2) \mathbf{E} = -jE_0 e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y;$$

$$(3) \mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos(\omega t - \beta z) + \mathbf{e}_y E_0 \sin(\omega t - \beta z)。$$

解 (1) 题为复数形式,其瞬时值形式为

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{e}_x E_0 e^{j\omega t} e^{-j\beta z}) = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x$$

(2) 题为复数形式,其瞬时值形式为

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{e}_y E_0 e^{j\omega t} e^{-j\beta z} e^{-j\frac{\pi}{2}}) = E_0 \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_y = E_0 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y$$

(3) 题为瞬时值形式,也可以写作

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x + E_0 \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_y$$

其复数形式为

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-j\beta z} \mathbf{e}_x + E_0 e^{-j\beta z} e^{-j\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}_y = (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_0 e^{-j\beta z}$$

5.3.3 洛伦兹力

电荷能够激发电磁场,反过来电磁场对电荷有作用力。洛伦兹把静态场中的结果推广为普遍情况下电磁场对任意运动的电荷系统的作用力。在时变场情形下,空间中以速度 \mathbf{v} 运动的电荷 Q 在时变电场和时变磁场的共同作用下,它受到的洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5-39)$$

当连续分布的电荷系统以速度 \mathbf{v} 在时变电磁场中运动时,单位体积的电荷系统所受到的洛伦兹力密度可以表示为

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (5-40)$$

近代物理学的实践已证实了式(5-39)和式(5-40)的正确性。麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式正确地反映了宏观电磁场运动的基本规律以及电磁场与带电系统的相互作用规律,因而它们成为宏观电磁理论的基础。

5.4 电磁场的边值关系

麦克斯韦方程的微分形式只适用于场量的各个分量连续、可微的情况。而需要求解的实际问题场域中往往存在几种不同的媒质,在媒质界面上场量不连续,则我们必须回到麦克

斯韦方程的积分形式,通过一定的推算得到时变场的边值关系。

5.4.1 两种媒质间电磁场的边值关系

考虑介电常数与磁导率分别为 ϵ_1, μ_1 和 ϵ_2, μ_2 的两种媒质界面,假设 \mathbf{n} 为分界面上任意位置的法向单位矢量,正方向由媒质 2 指向媒质 1。横跨分界面取一无限窄的小矩形闭合回路,如图 5-10 所示。在该矩形回路上应用全电流定律的积分形式,因为回路无限窄,其包围的面积趋于零,故它所包围的体自由电流和位移电流均趋于零。如果分界面上存在密度为 \mathbf{J}_s 的面电流,其方向与 Δl 垂直,且闭合回路的绕行方向与 \mathbf{J}_s 的方向符合右手螺旋定则,故它所包围的面电流为 $\mathbf{J}_s \Delta l$,于是可得磁场强度 \mathbf{H} 沿此闭合回路的线积分为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{1t} \Delta l - H_{2t} \Delta l = J_s \Delta l$$

即

$$\begin{cases} H_{1t} - H_{2t} = J_s \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \end{cases} \quad (5-41)$$

同理,在矩形回路上利用法拉第电磁感应定律的积分形式

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\psi_m}{dt}$$

由于该矩形回路面积趋于零,穿过它的磁通量 ψ_m 趋于零,于是可得电场强度 \mathbf{E} 沿闭合回路的线积分为 0,如下:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0$$

即

$$\begin{cases} E_{1t} - E_{2t} = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \end{cases} \quad (5-42)$$

横跨分界面取一无限薄的扁平小圆柱闭合面,如图 5-11 所示,由于小圆柱闭合面无限薄,其包围体积趋于零,故它所包围的体电荷也趋于零。如果分界面上存在密度为 ρ_s 的面电荷,则该小圆柱闭合面所包围的电荷为 $\rho_s \Delta S$,在该闭合面上应用高斯定理的积分形式,有

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S = \rho_s \Delta S$$

即

$$\begin{cases} D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n}) = \rho_s \end{cases} \quad (5-43)$$

同样,在该圆柱闭合面上磁通连续性原理的积分形式,可得

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_{1n} \Delta S - B_{2n} \Delta S = 0$$

即

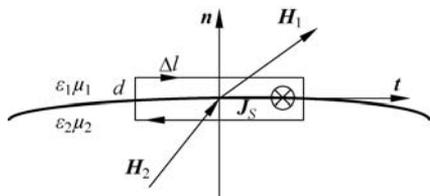


图 5-10 求边界面上 H_t 的边界条件

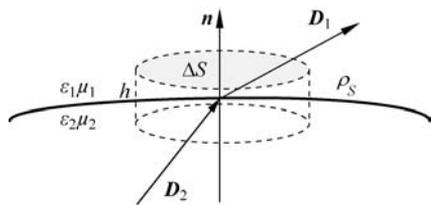


图 5-11 求边界面上 D_n 的边界条件

$$\begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \end{cases} \quad (5-44)$$

由此可见,时变场的边值关系在形式上和静态场相同,为

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \end{cases} \quad (5-45)$$

因此,在两种不同媒质的分界面上,电场强度 \mathbf{E} 的切向分量和磁感应强度 \mathbf{B} 的法向分量总是连续的;磁场强度 \mathbf{H} 的切向分量和电位移矢量 \mathbf{D} 的法向分量发生突变,突变量分别为分界面上的面电流密度 J_s 和电荷面密度 ρ_s 。

5.4.2 两种理想介质间电磁场的边值关系

理想介质是 $\sigma=0$ 的一种无欧姆损耗的简单媒质,两种理想介质的分界面上不存在面电流或面电荷,即 $J_s=0, \rho_s=0$,故由式(5-45)得

$$\begin{cases} H_{1t} - H_{2t} = 0 \\ E_{1t} - E_{2t} = 0 \\ B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ D_{1n} - D_{2n} = 0 \end{cases} \quad (5-46)$$

5.4.3 介质与理想导体间电磁场的边值关系

理想导体 $\sigma=\infty$,若 $\mathbf{E} \neq 0$,由 $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$ 将产生无穷大的电流,故在理想导体内必有 $\mathbf{E}=0$; 而由 $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}$ 可知, $\mathbf{H}=0$,故由式(5-45)可得介质与理想导体分界面上的边值关系为

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s \end{cases} \quad (5-47)$$

由此可见,在理想导体的表面上只有磁场强度的切向分量 H_t 和电位移矢量的法向分量 D_n 。由于 $D_n = \epsilon E_n = \rho_s$,故理想导体表面上的电场强度和电位移矢量分别为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \mathbf{n} \quad (5-48)$$

和

$$\mathbf{D} = \rho_s \mathbf{n} \quad (5-49)$$

由 $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ 中 \mathbf{H} 与 \mathbf{J}_s 矢量关系,容易得到

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}_s \times \mathbf{n} \quad (5-50)$$

和

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_s \times \mathbf{n} \quad (5-51)$$

因此,电场强度 \mathbf{E} 或电位移矢量 \mathbf{D} 总是垂直于理想导体的表面,而磁场强度 \mathbf{H} 或磁感

应强度 \mathbf{B} 总是平行于理想导体的表面,如图 5-12 所示。

对于实际导体, σ 为有限值,导体内部电场与磁场不等于零。但由于高频时的趋肤效应,电流集中于导体表面附近,而且当频率趋于无限大时,电流只分布于导体表面。因此,在高频下用理想导体的边界代替实际导体的边界,可使问题得以简化。即使在频率不很高的情况下,由于实际金属导体的电导率很大,外部的电磁波在导体表面上发生强烈反射,因而进入导体内部的电磁波能量非常小,这时用理想导体的边界代替实际金属导体的表面也不会带来显著的误差。这部分内容第 6 章将做详细分析。

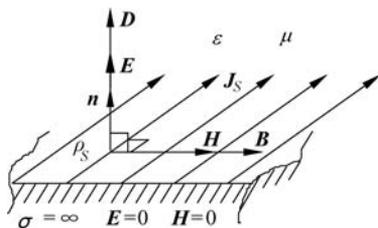


图 5-12 介质与导体分界面上的场量

5.5 电磁场的能量守恒定律与坡印亭矢量

5.5.1 电磁场的能量守恒定律——坡印亭定理

麦克斯韦方程组所反映的最重要的内容是时变电场和时变磁场可以相互激发而形成电磁波从而离开场源向空间传播。电磁场是物质,是能量的携带者,因而电磁波的传播过程也是电磁能量的传播过程。

时变电磁场中电场和磁场都随时间变化,空间各点的电场能量密度、磁场能量密度也随时间变化,电磁能量按一定的分布形式储存于空间,并随着电磁场的运动变化而在空间传输,形成电磁能流。由电磁场的基本方程可以导出电磁场的能量守恒定律和电磁能量的传播规律。运用矢量微分恒等式:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

将麦克斯韦第一方程 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 和第二方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 代入上式,得

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

由于

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu H^2 \right)$$

和

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right)$$

得

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (5-52)$$

因

$$\omega_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (5-53)$$

$$\omega_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (5-54)$$

分别是各向同性的线性媒质中电场和磁场的能量密度。它们之和,即

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \quad (5-55)$$

则是电磁场的能量密度。于是式(5-52)可写为

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad (5-56)$$

将上式对电磁场中的任一体积 V 积分,并利用高斯散度定理,可得

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = -\frac{\partial W}{\partial t} \quad (5-57)$$

其中, S 是包围体积 V 的闭合面。而式中的

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV \quad (5-58)$$

是体积 V 内的电磁场能量。

为了探求式(5-57)的物理意义,注意到 $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$,将该式改写为

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV = -\frac{\partial W}{\partial t} \quad (5-59)$$

式中, $\int_V \frac{J^2}{\sigma} dV$ 是体积 V 内传导电流所引起的损耗功率,即单位时间内的焦耳热损耗。

式(5-59)右端是单位时间内体积 V 中减少的电磁场能量,式(5-59)左端的第二项表示单位时间内热损耗的能量。根据能量守恒定律,单位时间内体积 V 中减少的电磁场能量一部分被热损耗,另一部分能量只能从包围 V 的闭合面 S 流出。因此,式(5-59)左端第一项 $\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ 就表示单位时间内从闭合面 S 流出体积 V 的电磁能量,也即流出闭合面 S 的功率。由此可知,当体积 V 内没有外源时,单位时间内体积 V 内减少的电磁能量 $-\frac{\partial W}{\partial t}$ 一部分转变为热的能量损耗,另一部分穿出包围体积 V 的闭合面 S ,这就是电磁场的能量守恒定律,也称为坡印亭定理。式(5-57)是它的积分形式,而式(5-56)则是它的微分形式。

如果式(5-57)中的体积 V 包括整个空间,则流出无限远处闭合面的电磁场能量为零,于是有

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = -\frac{\partial W}{\partial t} \quad (5-60)$$

这表明场域 V 内单位时间转变为热的能量损耗等于电磁场总能量的减少。

如果场域 V 内还有外源,即存在局外电场强度 \mathbf{E}_e ,则有

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV = -\frac{\partial W}{\partial t} + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_e dV \quad (5-61)$$

式中, $\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_e dV$ 表示体积 V 内的外源提供的功率。这就是普遍情况下电磁场能量守恒定律即坡印亭定理的积分形式,表示单位时间内穿出闭合面 S 的能量和体积 V 内的焦耳热损耗能量等于 V 内单位时间电磁场能量的减少和外源所做的功。

利用高斯散度定理,可由式(5-61)得到坡印亭定理的微分形式,即

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{J^2}{\sigma} = -\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_e \quad (5-62)$$

5.5.2 坡印亭矢量——能流密度矢量

既然 $\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ 是穿出闭合面 S 的功率, 则矢量 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 可解释为穿出闭合面 S 且与面垂直的单位面积的电磁功率。因此, 定义一个矢量

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5-63)$$

称为坡印亭矢量, 它是描述空间电磁能量传播规律的一个重要物理量。

在空间某一点上, \mathbf{S} 的方向是该点能量流动的方向; 其数值是通过与能量流动方向垂直的单位面积的功率, 故它又称为能流密度或功率流。 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 和 \mathbf{S} 三者之间两两垂直, 且符合右手螺旋定则, 如图 5-13 所示。需要指出, 坡印亭矢量即电磁场的能流密度矢量 \mathbf{S} 既是空间坐标的函数, 也是时间的函数, 所以它的值表示穿过单位面积的瞬时功率。

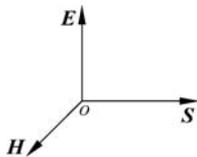


图 5-13 坡印亭矢量与场量的关系

如果电磁场域 V 内无传导电流, 则式(5-56)变为

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad (5-64)$$

上式与电流连续性方程即电荷守恒定律类似, 也称为电磁能流的连续性方程。它表明电磁场能量也像流体一样具有流动的性质, 这是由于电磁场内所储藏的电能和磁能本身的运动而产生的。

5.5.3 正弦场的复数坡印亭矢量与复功率

前面已经定义了坡印亭矢量 \mathbf{S} 。当电场强度 \mathbf{E} 和磁场强度 \mathbf{H} 都随时间变化的时候, 比如正弦电磁场的情况, 坡印亭矢量 \mathbf{S} 也是随时间变化的, 是瞬时值形式。一般情况下并不关注瞬时值形式, 而更关注它在一个周期内的平均值。假设正弦电磁场的瞬时值为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z \\ &= E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_{ex}) \mathbf{e}_x + E_{ym} \cos(\omega t + \varphi_{ey}) \mathbf{e}_y + E_{zm} \cos(\omega t + \varphi_{ez}) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5-65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H_x \mathbf{e}_x + H_y \mathbf{e}_y + H_z \mathbf{e}_z \\ &= H_{xm} \cos(\omega t + \varphi_{hx}) \mathbf{e}_x + H_{ym} \cos(\omega t + \varphi_{hy}) \mathbf{e}_y + H_{zm} \cos(\omega t + \varphi_{hz}) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5-66)$$

它们的复矢量形式为

$$\dot{\mathbf{E}}_m = E_{xm} e^{j\varphi_{ex}} \mathbf{e}_x + E_{ym} e^{j\varphi_{ey}} \mathbf{e}_y + E_{zm} e^{j\varphi_{ez}} \mathbf{e}_z \quad (5-67)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m = H_{xm} e^{j\varphi_{hx}} \mathbf{e}_x + H_{ym} e^{j\varphi_{hy}} \mathbf{e}_y + H_{zm} e^{j\varphi_{hz}} \mathbf{e}_z \quad (5-68)$$

则按照坡印亭矢量的定义, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ &= E_{xm} H_{ym} \cos(\omega t + \varphi_{ex}) \cos(\omega t + \varphi_{hy}) \mathbf{e}_z - E_{xm} H_{zm} \cos(\omega t + \varphi_{ex}) \cos(\omega t + \varphi_{hz}) \mathbf{e}_y - \\ &\quad E_{ym} H_{xm} \cos(\omega t + \varphi_{ey}) \cos(\omega t + \varphi_{hx}) \mathbf{e}_z + E_{ym} H_{zm} \cos(\omega t + \varphi_{ey}) \cos(\omega t + \varphi_{hz}) \mathbf{e}_x + \\ &\quad E_{zm} H_{xm} \cos(\omega t + \varphi_{ez}) \cos(\omega t + \varphi_{hx}) \mathbf{e}_y - E_{zm} H_{ym} \cos(\omega t + \varphi_{ez}) \cos(\omega t + \varphi_{hy}) \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (5-69)$$

可以看出, 坡印亭矢量的六项形式相似, 因此, 仅考虑第一项的平均值, 然后写出全部结果。

显然可知:

$$\frac{1}{T} \int_0^T E_{xm} H_{ym} \cos(\omega t + \varphi_{ex}) \cos(\omega t + \varphi_{hy}) dt = \frac{1}{2} E_{xm} H_{ym} \cos(\varphi_{ex} - \varphi_{hy})$$

其中, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。于是坡印亭矢量在一个周期的平均值 $\bar{\mathbf{S}}$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} = & \frac{1}{2} [E_{xm} H_{ym} \cos(\varphi_{ex} - \varphi_{hy}) \mathbf{e}_z - E_{xm} H_{zm} \cos(\varphi_{ex} - \varphi_{hz}) \mathbf{e}_y - \\ & E_{ym} H_{xm} \cos(\varphi_{ey} - \varphi_{hr}) \mathbf{e}_z + E_{ym} H_{zm} \cos(\varphi_{ey} - \varphi_{hz}) \mathbf{e}_x + \\ & E_{zm} H_{xm} \cos(\varphi_{ez} - \varphi_{hr}) \mathbf{e}_y - E_{zm} H_{ym} \cos(\varphi_{ez} - \varphi_{hy}) \mathbf{e}_x] \end{aligned} \quad (5-70)$$

这就是坡印亭矢量的平均值形式。

对正弦电磁场而言,多数情况下场量都采用复矢量形式,因此直接用复矢量形式计算得到平均坡印亭矢量更具有实际意义。

根据叉乘的定义、复矢量的表示方法,不难看出:

$$\bar{\mathbf{S}} = \operatorname{Re} \mathbf{S}_c = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m^* = \operatorname{Re} \mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e^*$$

其中,

$$\mathbf{S}_c = \frac{1}{2} \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m^* = \mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e^* \quad (5-71)$$

称为复数形式的坡印亭矢量。使用中应该特别注意最大值和有效值的不同。

学过电路分析的同学对上述过程都不应该陌生,正弦稳态电路中的功率计算与上述过程有异曲同工之妙。表 5-1 为其与电磁场的对比。

事实上,如果对于复数形式的坡印亭矢量在空间任意一个闭合曲面上做积分,并考虑麦克斯韦方程组,则有

$$\begin{aligned} -\oint_S \mathbf{S}_c \cdot d\mathbf{S} &= -\oint_S (\mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e^*) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \sigma E_e^2 dV + j\omega \int_V (\mu H_e^2 - \epsilon E_e^2) dV = P + jQ \\ P &= -\operatorname{Re} \oint_S \mathbf{S}_c \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (5-72)$$

和

$$Q = -\operatorname{Im} \oint_S \mathbf{S}_c \cdot d\mathbf{S} \quad (5-73)$$

式(5-72)中的有功功率 P 表示电磁场传播功率的时间平均值即平均功率,无功功率 Q 只是电能和磁能相互转换的一种量度。它们和穿入闭合面 S 内的复数功率组成一个功率三角形,如图 5-14 所示。这时可以看到,电磁场理论与电路理论的对照,是何其相似啊!

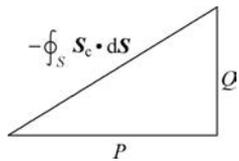


图 5-14 功率三角形

表 5-1 电路与电磁场中参量对照表

电 路		电 磁 场	
物 理 量	正 弦 电 路	物 理 量	正 弦 电 磁 场
电压 $u(t)$	$U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$	电场强度 \mathbf{E}	式(5-65)
电流 $i(t)$	$I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$	磁场强度 \mathbf{H}	式(5-66)
电压相量 \dot{U}_m, \dot{U}_e	$U_m e^{j\varphi_u}, U_e e^{j\varphi_u}$	电场强度复矢量	$\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{E}}_e$, 式(5-67)

续表

电 路		电 磁 场	
物 理 量	正 弦 电 路	物 理 量	正 弦 电 磁 场
电流相量 \dot{I}_m, \dot{I}_e	$I_m e^{j\varphi_i}, I_e e^{j\varphi_e}$	磁场强度复矢量	$\dot{\mathbf{H}}_m, \dot{\mathbf{H}}_e$, 式(5-68)
瞬时功率 $p(t)$	$u(t) \cdot i(t)$	瞬时坡印亭矢量	$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, 式(5-69)
平均功率 P	$\frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$ $U_e I_e \cos(\varphi_u - \varphi_i)$	平均坡印亭矢量 $\bar{\mathbf{S}}$	式(5-70)
相量计算平均功率 P	$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{U}_m \cdot \dot{I}_m^*, \operatorname{Re} \dot{U}_e \cdot \dot{I}_e^*$	复矢量计算平均坡印亭矢量 $\bar{\mathbf{S}}$	$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{\mathbf{E}}_m \times \dot{\mathbf{H}}_m^* = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{E}}_e \times \dot{\mathbf{H}}_e^*$
有功功率 P	$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{U}_m \cdot \dot{I}_m^*, \operatorname{Re} \dot{U}_e \cdot \dot{I}_e^*$	平均坡印亭矢量 $\bar{\mathbf{S}}$	$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{\mathbf{E}}_m \times \dot{\mathbf{H}}_m^* = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{E}}_e \times \dot{\mathbf{H}}_e^*$
无功功率 Q	$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \dot{U}_m \cdot \dot{I}_m^*, \operatorname{Im} \dot{U}_e \cdot \dot{I}_e^*$	复数坡印亭矢量的虚部 Q	$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \dot{\mathbf{E}}_m \times \dot{\mathbf{H}}_m^* = \operatorname{Im} \dot{\mathbf{E}}_e \times \dot{\mathbf{H}}_e^*$
复数功率 S	$\frac{1}{2} \dot{U}_m \cdot \dot{I}_m^*, \dot{U}_e \cdot \dot{I}_e^*$	复数坡印亭矢量 S_c	$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}_m \times \dot{\mathbf{H}}_m^* = \dot{\mathbf{E}}_e \times \dot{\mathbf{H}}_e^*$

例 5.6 已知无源的自由空间中,时变电磁场的电场强度复矢量为

$$\mathbf{E}(z) = E_0 e^{-jkz} \mathbf{e}_x \text{ (V/m)}$$

式中, k, E_0 为常数, 求:

- (1) 磁场强度复矢量;
- (2) 坡印亭矢量的瞬时值;
- (3) 平均坡印亭矢量。

解 (1) 由麦克斯韦第二方程有

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{e}_y = -jkE_0 e^{-jkz} \mathbf{e}_y = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}$$

从而得到

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu_0} E_0 e^{-jkz} \mathbf{e}_y$$

(2) 电场和磁场的瞬时值分别为

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{kE_0}{\omega\mu_0} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_y$$

因此,坡印亭矢量的瞬时值为

$$\mathbf{S}(z, t) = \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{H}(z, t) = \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \mathbf{e}_z$$

(3) 平均坡印亭矢量

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[E_0 e^{-jkz} \mathbf{e}_x \times \frac{kE_0}{\omega\mu_0} e^{jkz} \mathbf{e}_y \right] = \frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0} \mathbf{e}_z$$

例 5.7 同轴线内导体的半径为 r_1 , 外导体的内外半径分别为 r_2 和 r_3 , 内外导体的电导率为 σ , 其中载有等值而异号的电流 I , 两导体间的电压为 U , 内外导体间填充介电常数为 ϵ 的介质。试求同轴线传输的功率及导体中的损耗功率。



动画视频

解 取同轴线的轴线与圆柱坐标系内的 z 轴重合, 并使内导体中的电流沿 z 方向为正, 外导体中的电流则为 $-I$, 如图 5-15 所示。

当 $r \leq r_1$ (内导体内) 时, 电场强度、磁场强度及坡印亭矢量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I}{\pi r_1^2 \sigma} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{H}_i &= \frac{1}{2\pi r} \frac{I}{\pi r_1^2} \cdot \pi r^2 \mathbf{e}_\varphi = \frac{I r}{2\pi r_1^2} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{S}_i &= \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i = -\frac{I^2 r}{2\pi^2 r_1^4 \sigma} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

当 $r=0$ 时, $\mathbf{S}_i=0$, 可见在内导体中 \mathbf{S}_i 沿 $-\mathbf{e}_r$ 方向逐渐减少至零。

当 $r_2 \leq r \leq r_3$ (外导体内) 时, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = -\frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)\sigma} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{H}_e &= \frac{1}{2\pi r} \left[I - \frac{I\pi(r^2 - r_2^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} \right] \mathbf{e}_\varphi = \frac{I(r_3^2 - r^2)}{2\pi r(r_3^2 - r_2^2)} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{S}_e &= \mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e = \frac{I^2(r_3^2 - r^2)}{2\pi^2 r(r_3^2 - r_2^2)^2 \sigma} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

当 $r=r_3$ 时, $\mathbf{S}_e=0$, 可见在外导体中 \mathbf{S}_e 沿 \mathbf{e}_r 方向逐渐减少至零。

当 $r_1 \leq r \leq r_2$ (介质内) 时, 设单位长内导体的带电量为 Q_0 , 则介质中的电场强度既有法向分量 E_r , 又有切向分量 E_z 。这样, 坡印亭矢量 \mathbf{S} 也对应两个分量。于是有 $E_r = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon r}$, 则

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

故 $Q_0 = \frac{2\pi\epsilon U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$, 因此

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \\ \mathbf{H} &= \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi, \quad H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \\ S_z &= E_r H_\varphi = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \end{aligned}$$

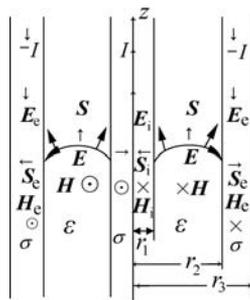


图 5-15 同轴线中的能量传输

上面的 S_z 是介质中传输能量的分量, 将它对内外导体间圆环状的介质截面积分, 考虑到其面元矢量为 $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_z dS$, 则得到同轴线传输的功率, 即

$$P = \int_S S_z \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} = \int_{r_1}^{r_2} S_z \cdot 2\pi r dr = \frac{UI}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = UI$$

这个结果和通常电路中传输功率的表示式相同。但是, 电磁能量并不是通过导线传输的, 而是在内外导体之间的介质中沿着传输线的方向由电源端向负载端传输, 导线只是起着引导能量传输的作用。

由边界条件可以求得介质中内导体外表面附近电场强度的切向分量与坡印亭矢量的法向分量分别为

$$E_z |_{r=r_1} = E_i = \frac{I}{\pi r_1^2 \sigma}$$

和

$$S_r |_{r=r_1} = -E_z H_\varphi |_{r=r_1} = -\frac{I^2}{2\pi^2 r_1^3 \sigma} = S_i |_{r=r_1}$$

因此, 长为 l 的内导体所消耗的功率为

$$P_i = - \int_{S_i} S_r \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{I^2}{2\pi^2 r_1^3 \sigma} \cdot 2\pi r_1 l = I^2 \frac{l}{\sigma \pi r_1^2} = I^2 R_i$$

其中, $R_i = \frac{l}{\sigma \pi r_1^2}$ 是长为 l 的内导体的电阻。由此可见, 内导体中转变为焦耳热的功率是介质中的能流密度的分量通过内导体表面流入的。

在外导体的内表面附近, 同理有

$$E_z |_{r=r_2} = E_e = -\frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)\sigma}$$

和

$$S_r |_{r=r_2} = -E_z H_\varphi |_{r=r_2} = \frac{I^2}{2\pi^2 r_2 (r_3^2 - r_2^2)\sigma} = S_e |_{r=r_2}$$

注意到外导体内表面上的面元矢量为 $d\mathbf{S}_2 = \mathbf{e}_r dS_2$, 则长为 l 的外导体所消耗的功率为

$$P_e = \int_{S_e} S_r \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S}_2 = \frac{I^2}{2\pi^2 r_2 (r_3^2 - r_2^2)\sigma} \cdot 2\pi r_2 l = I^2 \frac{l}{\sigma \pi (r_3^2 - r_2^2)} = I^2 R_e$$

其中, $R_e = \frac{l}{\sigma \pi (r_3^2 - r_2^2)}$ 是长为 l 的外导体的电阻。同样地, 外导体内转变为焦耳热的损耗功率则是介质中的功率流通过外导体的内表面流入的。

5.6 电磁场的矢量势和标量势

5.6.1 电磁场的矢量势和标量势介绍

在有源的情况下, 例如研究天线辐射、波导或谐振腔的耦合等问题时, 应用麦克斯韦方程组直接求解电磁场是很困难的。因此, 与静态场相同, 在时变电磁场的求解中也引入势函数间接求解。

在有源空间,电磁场的麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{cases} \quad (5-74)$$

类似稳恒磁场,由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$,引入电磁场的矢量势即动态矢量势 \mathbf{A} ,满足

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5-75)$$

或

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (5-76)$$

将式(5-75)代入式(5-74)中的第二方程,得

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

即

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5-77)$$

上式括号中的矢量是无旋的,与静电场中电势的引入类似,这里引入动态标量势 ϕ ,令

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

即

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5-78)$$

式中, ϕ 和 \mathbf{A} 分别为时变电磁场的标量势和矢量势。它们均是空间坐标和时间的函数,都是人为引入的辅助函数。如果已知两个辅助函数 ϕ 和 \mathbf{A} 的值,则可以代入式(5-76)和式(5-78)求得 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 。第5.6.2节将由麦克斯韦组的另外两个方程得到两个势函数 ϕ 和 \mathbf{A} 满足的方程,即达朗贝尔方程。

5.6.2 洛伦兹条件与动态势的波动方程——达朗贝尔方程

为了求得势函数 ϕ 和 \mathbf{A} 与场源之间的关系,将式(5-76)代入式(5-74)中的第一方程,并利用矢量微分恒等式,得

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}) = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

将式(5-78)代入上式,有

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \nabla \left(\epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

即

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (5-79)$$

同理,再将式(5-78)代入式(5-74)中的第四方程,得

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = -\varepsilon \nabla \cdot \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho$$

即

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5-80)$$

于是便得到了两个势函数满足的方程式(5-79)和式(5-80),但是这两个方程都包含有 ϕ 和 \mathbf{A} , 是联立方程。

观察 \mathbf{A} 和 ϕ 的引入可知二者都不是唯一的,它们的取值具有一定的任意性。若 ϕ 和 \mathbf{A} 是一组满足方程式(5-79)及式(5-80)的动态势函数,则由下式确定的另一组动态势函数 ϕ' 和 \mathbf{A}' , 即

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla f \end{aligned}$$

它们也是原方程的解,且对应同一电磁场,其中 f 为任一标量函数。显而易见,只有同时已知某矢量的旋度和散度,才能唯一地确定该矢量。而数学上,可以任意地规定其散度值,从而得到一组确定的 \mathbf{A} 和 ϕ 。

顺着这个思路,可以适当地选择 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的值,使得势函数的两个方程进一步简化,若假定

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5-81)$$

则式(5-79)与式(5-80)可分别简化为

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \\ \nabla^2 \phi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \quad (5-82)$$

这是动态势函数的波动方程,称为达朗贝尔方程。由此, \mathbf{A} 与 ϕ 分别满足不同的微分方程,且方程的形式也很对称。两个动态势函数与场源的关系变得简单, \mathbf{A} 只依赖于自由电流密度 \mathbf{J} , 而 ϕ 只依赖于自由电荷密度 ρ 。式(5-81)称为洛伦兹条件即洛伦兹规范条件。方程中 \mathbf{J} 和 ρ 由电荷守恒定律 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 联系着,给定了 \mathbf{J} 也就给定了 ρ 。

上面利用麦克斯韦第二方程、第三方程求得了电磁场的标量势 ϕ 和矢量势 \mathbf{A} , 又用第一方程、第四方程和洛伦兹条件导出了动态势函数的达朗贝尔方程。因此,达朗贝尔方程和洛伦兹条件则是用动态势函数表述的电磁场基本方程。给定场源 \mathbf{J} 和 ρ , 求解动态势函数的达朗贝尔方程,便可得到 \mathbf{A} 和 ϕ 的解,再代入式(5-76)和式(5-78)就可得到 \mathbf{H} 和 \mathbf{E} 。实际上,可以只求 \mathbf{A} 的解,再由洛伦兹条件根据 \mathbf{A} 求得 ϕ 。这样,只要给定电流分布 \mathbf{J} , 就可以得到电磁场的解,此求解过程为

$$\mathbf{J} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \\ \phi \rightarrow \mathbf{E} \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H} \\ \\ \end{array}$$

在无源空间, $\mathbf{J}=0, \rho=0$, 动态势函数的波动方程变为齐次微分方程即

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \phi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \quad (5-83)$$

在静态场的情形下, 动态势函数的达朗贝尔方程退化为势函数的泊松方程 $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ 和 $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ 。在静态场中, 由于 \mathbf{J} 和 ρ 之间没有联系, 故 \mathbf{A} 与 ϕ 彼此独立, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ 分别由 \mathbf{A} 和 ϕ 单独确定。在无源空间, 式(5-83)则退化为拉普拉斯方程 $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$ 与 $\nabla^2 \phi = 0$ 。

对于正弦电磁场, 动态势函数的达朗贝尔方程(5-82)可表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \\ \nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{array} \right. \quad (5-84)$$

式中, $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$, 称为波数。洛伦兹条件式(5-81)则变为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \varepsilon \mu \phi = 0 \quad (5-85)$$

电场强度和磁场强度的表达式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = -\nabla \phi - j\omega \mathbf{A} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \end{array} \right. \quad (5-86)$$

无源空间中正弦电磁场的势函数所满足的方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0 \\ \nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \end{array} \right. \quad (5-87)$$

但在这种情况下不采用势函数求解电磁场, 因为这时 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 也满足相同形式的方程, 该方程称为亥姆霍兹方程, 将在第 6 章进行讨论。

5.7 推迟势和似稳电磁场

5.7.1 达朗贝尔方程的解——推迟势

本小节主要求动态势函数达朗贝尔方程的解。因为两个方程具有相同的形式, 只求出一个方程的解就可以类比出另外一个方程的解。另外, 因为达朗贝尔方程是线性的, 场的叠加原理可以应用到方程的求解中, 即先考虑某一体积元内变化电荷所产生的动态标量势, 然后对所有场源区域积分, 就得到总的动态标量势。

下面先求坐标原点处变化的点电荷 $Q(t)$ 所产生的动态标量势 ϕ , 其电荷密度为 $\rho(\mathbf{r}, t) = Q(t)\delta(\mathbf{r})$, 于是动态标量势 ϕ 所满足的达朗贝尔方程可表示为

$$\nabla^2 \phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{Q(t)}{\epsilon} \delta(\mathbf{r}) \quad (5-88)$$

在球坐标系中求解, 由于点电荷的动态标量势函数具有球对称性, ϕ 与极角 θ 和方位角 φ 无关, 仅为坐标变量 r 和时间 t 的函数。因此, 式(5-88)可写为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{Q(t)}{\epsilon} \delta(\mathbf{r}) \quad (5-89)$$

除原点外, 即 $r \neq 0$ 处, 动态标量势 ϕ 满足齐次波动方程, 即

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (5-90)$$

由于

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial \phi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi + r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2}$$

故式(5-90)又可以写为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

或

$$\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial t^2} \quad (5-91)$$

其中,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (5-92)$$

是电磁波在介质中的传播速度, 称为波速。式(5-91)是关于 $r\phi$ 的一维波动方程, 其解为

$$r\phi = F_1(r - vt) + F_2(r + vt)$$

即

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{F_1(r - vt)}{r} + \frac{F_2(r + vt)}{r} \quad (5-93)$$

式中, $F_1(r - vt)$ 是以速度 v 沿 $+r$ 方向离开波源的球面波, 而 $F_2(r + vt)$ 则是以速度 v 沿 $-r$ 方向朝着波源会聚的球面波。

对于电磁辐射问题, 电磁波由变化的电荷和电流激发在无界媒质中传播, 只需考虑沿 $+r$ 方向行进的球面波。将 $F_1(r - vt)$ 的自变量改为 $\left(t - \frac{r}{v}\right) = t'$, 则

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} = \frac{f_1(t')}{r} \quad (5-94)$$

式中, $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$ 是 r, t 的函数, 具体形式由场源激发时的条件决定。

考虑在静电场中,位于原点的电荷 Q 产生的静电势满足泊松方程 $\nabla^2 \phi = -\frac{Q}{\epsilon} \delta(\mathbf{r})$ 的解为 $\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$ 。推广到时变场,可以证明式(5-88)的解为

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q(t')}{4\pi\epsilon r} = \frac{Q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon r} \quad (5-95)$$

对于有限区域 V' 内以电荷密度 $\rho(x', y', z', t)$ 连续分布的变化电荷,在点 (x', y', z') 处取电荷元 $dQ = \rho dV'$, 设它到场点 $P(x, y, z)$ 的距离为 R , 则电荷元在 P 点所激发的动态标量势可写为

$$d\phi = \frac{\rho\left(x', y', z', t - \frac{R}{v}\right) dV'}{4\pi\epsilon R}$$

根据场的叠加原理, V' 内所有电荷在场点 $P(x, y, z)$ 所激发的总动态标量势为

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho\left(x', y', z', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV' \quad (5-96)$$

同理,在有限区域 V' 内连续分布的变化电流在场点所激发的动态矢量势应为

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}\left(x', y', z', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV' \quad (5-97)$$

对于正弦电磁波,波源在空间所激发的势函数也都是与波源同频率的正弦函数,分别为

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z') e^{j\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)}}{R} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z') e^{j(\omega t - kR)}}{R} dV' \end{aligned} \quad (5-98)$$

和

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z') e^{j(\omega t - kR)}}{R} dV' \quad (5-99)$$

势函数中时间的滞后表现为相位的滞后,滞后时间 $\frac{R}{v}$ 所对应的滞后相位角为 $\omega \frac{R}{v} = \omega \sqrt{\epsilon\mu} R = kR$ 。

总而言之,对于距离波源为 R 的观察点,某一时刻 t 的势函数并不是由 t 时刻波源的电荷和电流决定的,而是由较早时刻 $t' = t - \frac{R}{v}$ 的波源所决定。换言之,电磁波传播一段距离需要一定的时间,而不是瞬间完成的,因此观察点势场的变化滞后于场源的变化,滞后的时间 $t - t' = \frac{R}{v}$ 就是电磁波传播距离 R 所需要的时间。在真空中电磁波的传播速度就是光速 c 。由于观察点处的电磁场决定于较早时刻的场源,因此,场点处的动态标量势 ϕ 和矢量势 \mathbf{A} 称为推迟势。应用推迟势求解电磁波的辐射问题将在第 7 章中介绍。

5.7.2 似稳条件和似稳电磁场

对于正弦电磁场,由式(5-98)与式(5-99)可知,推迟作用体现在相位角滞后 kR ,可见如果波源频率较高或者场点距离波源较远,则推迟作用显著;反之,若波源频率较低或场点距离波源较近,推迟作用不明显。也就是说,如果 $kR \ll 1$,则 $e^{-jkR} \approx 1$,可以不考虑推迟作用。

由 $kR = \frac{\omega}{v}R = \frac{2\pi f}{v}R = 2\pi \frac{R}{\lambda} \ll 1$ 得

$$\begin{cases} R \ll \frac{\lambda}{2\pi} \approx \frac{\lambda}{6} \\ f \ll \frac{v}{2\pi R} \approx \frac{v}{6R} \end{cases} \quad (5-100)$$

这时时变场的分布与静态场的分布相似,满足上述条件的电磁场称为似稳电磁场,也称为缓变场或准静态场,式(5-100)所表示的条件称为似稳条件或近区场条件。由于 $R \ll \frac{v}{6f}$,故似稳区随场的频率升高而缩小。不满足上述条件(即 $f \gg \frac{v}{6R}$)的场则称为迅变场。依距离而言, $R \ll \frac{\lambda}{6}$ 的区域称为近区,近区的电磁波是束缚电磁波。 $R \sim \frac{\lambda}{6}$ 的区域称为感应区,对应的场为感应场。而 $R \gg \frac{\lambda}{6}$ 的区域则称为远区,远区的电磁波是自由电磁波。因此,对于似稳场或近区场可不计推迟作用;而对于迅变场或远区场及感应场则必须考虑推迟作用。

延伸思考: 以计算机系统的核心 CPU 为例,其工作频率大致在 2GHz 左右,工作波长为 15cm, CPU 的尺寸可以大致估计为 5cm 左右。由此看来,对于以 CPU 为代表的大规模集成电路而言,其推迟作用不可忽略! 随着电脑主频的不断提升,芯片尺寸大幅度缩减,这个推迟作用越来越明显。因此,在集成电路、射频电路领域,必须采用电磁波的理论开展设计和分析,而不能采用单纯电路的理论。

这样,动态标量势和矢量势将和静态场的势函数具有相同的形式,分别表示为

$$\begin{cases} \phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z', t)}{R} dV' \\ \mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z', t)}{R} dV' \end{cases} \quad (5-101)$$

对于正弦似稳场或近区场,有

$$\begin{cases} \phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z') e^{j\omega t}}{R} dV' \\ \mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z') e^{j\omega t}}{R} dV' \end{cases} \quad (5-102)$$

在导电媒质中,似稳电场必将引起传导电流密度 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 和位移电流密度 $\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 。对麦克斯韦第一方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

两边取散度,并运用第四方程 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$,有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \quad (5-103)$$

其解为

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-104)$$

式中,

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (5-105)$$

称为弛豫时间。它是自由电荷密度 ρ 衰减到其初始值 ρ_0 的 $\frac{1}{e}$ 所需的时间。金属导体在微波范围的频率下,有 $\epsilon \approx \epsilon_0$ 。若取 $\epsilon_0 \approx 10^{-11} \text{ F/m}$, $\sigma \approx 10^7 \text{ S/m}$,则 $\tau \approx 10^{-18} \text{ s}$ 。因此,在一般情况下,金属导体内部有 $\rho = 0$,即使最初放入密度为 ρ_0 的自由电荷,它也将极快地散开并分布于导电媒质的表面。与静电场的情形相同,在时变场中导电媒质内部没有自由电荷。

5.7.3 电磁理论与电路理论之间的关系

在低频正弦电路中,工作频率很低,不但似稳条件成立,而且满足 $\omega \epsilon \ll \sigma$,即 $\frac{\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right|}{|\mathbf{J}|} = \left| \frac{j\omega \epsilon}{\sigma} \right| = \frac{\omega \epsilon}{\sigma} \ll 1$,导线中的传导电流远大于位移电流,则导线中的位移电流可忽略。麦克斯韦第一方程写为 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$,两边取散度,有 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 或 $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$,即电路各节点上的电流是连续的。由此可得低频正弦电路中的基尔霍夫第一定律(电流定律),即

$$\sum \dot{i} = 0 \quad (5-106)$$

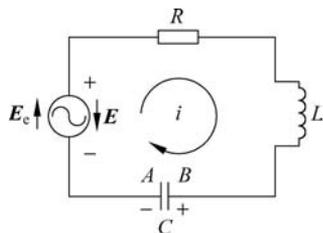


图 5-16 似稳场中的串联电路

图 5-16 展示了一个由电阻 R 、电感 L 和电容 C 所组成的串联电路,满足似稳条件。可由似稳场方程得到低频电路方程。似稳场的场源中的传导电流密度为

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_e)$$

式中, \mathbf{E} 是似稳电场, \mathbf{E}_e 是电源中的局外电场。考虑到 $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$,由上式可得

$$\mathbf{E}_e = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

于是

$$\int_A^B \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$$

即

$$\mathcal{E} = i \int_A^B \frac{dl}{\sigma S} + \int_A^B \frac{\partial \phi}{\partial t} dl + \frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (5-107)$$

上式右端第一项的积分为电路的总电阻,如果略去电源内部和导线的电阻以及电容与电感中的能量损耗,则积分值为 $R = \frac{l}{\sigma S}$, 第一项等于 Ri 。

右端第二项是动态标量势梯度的线积分,积分与路径无关,故只在电容器内部积分,即认为电场全部集中于电容器内,故该项等于电容器两极板间的电压,即 $u_C = \phi_B - \phi_A = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$ 。

右端第三项,由于电容器两极板间的距离很小而近似于闭合回路积分,而 \mathbf{A} 的闭合回路积分是磁通,故该项是感应电动势。但外电路的磁通远小于电感线圈中的磁链,即认为磁场全部集中于电感线圈中,故该项等于电感线圈的电压,即 $u_L = -\mathcal{E}_L = \frac{d\Psi_L}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt}$ 。因此,有

$$\mathcal{E} = Ri + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} \quad (5-108)$$

这就是似稳电路方程。对正弦电磁场,上式为

$$\mathcal{E} = R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C} \dot{I} + j\omega L \dot{I} \quad (5-109)$$

这就是低频串联电路中的第二定律即电压定律。

由此可见,低频电路理论是麦克斯韦电磁理论在一定条件下的近似结果。第一,电路尺寸远小于电磁波的波长即 $R \ll \frac{\lambda}{6}$ 或频率远低于 $f \ll \frac{c}{6R}$, 以满足准静态条件即似稳条件; 第二,认为电路的电场能量和磁场能量分别集中于电容和电感中,并忽略其能量损耗及电路导线损耗。电磁场理论是普遍适用的,但其微分方程较复杂,在一般情况下不易求得严格解。虽然电路理论是一种近似,但低频电路方程是一组代数方程,用它分析与计算问题要简单得多。

因此,求解电磁问题有两种方法,即场的方法和路的方法。场是路的普遍的微观描述,路是场的有条件的简化与宏观体现。当频率升高以致电路尺寸与波长可比拟时,似稳条件不再满足,电场储能和磁场储能的空间已难于分开,除极个别的情形外,似稳电路方程失去适用条件,只有用场的理论来解决。但是,即使在高达微波频率的范围,在一定的条件下,也可以使用电路的方法以简化计算;而在低频范围,有时为了获得电场或磁场的分布,或者电路元件的计算,也使用电磁场的方法。

* 5.8 科技前沿: 麦克斯韦方程组的空间协变性——电磁隐身衣的基本原理

本章已推导得到了麦克斯韦方程组,这是一切电磁现象所遵从的规律! 麦克斯韦方程组是一个线性方程组,满足叠加原理,而且具有空间协变性,即麦克斯韦方程组在不同的坐

标系中具有相同的形式。换言之,即通过坐标变换,不改变其方程的形式。如图 5-17 所示,在图 5-17(a)所示的空间 A 中任取一点 $P(x, y, z)$,按照函数对应法则 $\mathbf{X}' = \mathbf{X}'(\mathbf{X})$,将其映射为图 5-17(b)所示空间 B 中的点 $P'(x', y', z')$ 。其中, $\mathbf{X} = (x, y, z)$, $\mathbf{X}' = (x', y', z')$ 。由麦克斯韦方程的空间协变性,对于频率为 ω 的电磁波,在空间 A 有

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + j\omega \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} &= 0\end{aligned}\quad (5-110)$$

变换到空间 B ,则有

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}' + j\omega \boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{H}' &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}' - j\omega \boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{E}' &= 0\end{aligned}\quad (5-111)$$

式中, $\boldsymbol{\epsilon}$ 、 $\boldsymbol{\mu}$ 、 $\boldsymbol{\epsilon}'$ 、 $\boldsymbol{\mu}'$ 分别表示空间 A 和空间 B 的电磁参数,它们都是矩阵形式,表示的是各向异性的材料。

对照式(5-110)和式(5-111),理论上可以推得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}'(\mathbf{X}') &= \frac{\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A}^T}{\det \mathbf{A}} \\ \boldsymbol{\mu}'(\mathbf{X}') &= \frac{\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A}^T}{\det \mathbf{A}}\end{aligned}\quad (5-112)$$

其中, \mathbf{A} 为雅可比矩阵, $\mathbf{A} = \partial \mathbf{X}' / \partial \mathbf{X}$, 代表着两空间变量的关系,一般情况为 3×3 阶, \mathbf{A}^T 为 \mathbf{A} 的转置矩阵。

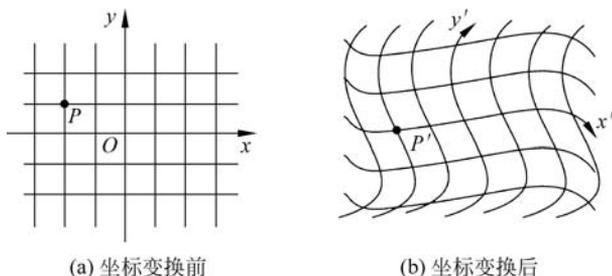


图 5-17 麦克斯韦方程的空间协变性示意图

2006 年,英国物理学家 Pendry 等人提出了电磁隐身的可行性构想,在随后的实验中这个构想得到验证。其理论基础就是麦克斯韦方程组的协变性。图 5-18 展示了 Pendry 等人提出的“隐身衣”的基本原理示意图。图 5-18(b)中用特别设计的电磁材料填充于半径为 R_1 和 R_2 的柱面之间,电磁波将沿着这种“特殊”的媒质流动,绕过隐形区域的物体,之后又回到原来的传播轨迹,从而实现隐形区域中物体的隐形。图 5-18 中带箭头曲线给出了一条电磁波的典型传播路径。事实上,电磁隐形衣的设计也非常简单:假设在空间 X 中有一个任意闭合的曲线(三维空间为曲面),如图 5-18(a)中所示半径为 R_2 的柱面。取其内部任意一点 O ,设想曲线(面)保持不动但 O 点向四周膨胀,并得到另外一个曲线(面),如图 5-18(b)中半径为 R_1 的柱面。这样,原来 O 点的位置,凭空多出一个区域来,这就是隐形区域。而上述膨胀的过程,恰恰可以用空间 A 到 B 的一个坐标变换来表述。根据麦克斯韦方程组的协变性,利用式(5-111)、式(5-112)即可得到隐形衣(两个曲线或曲面之间的区域)的电磁参数。具有这个参数的材料即具有电磁隐形的功能,一般在自然界中并不存在,需要用特殊的方

式加工得到,它们被称为新型人工电磁材料,又叫超材料。上述变换关系称为变换光学原理。

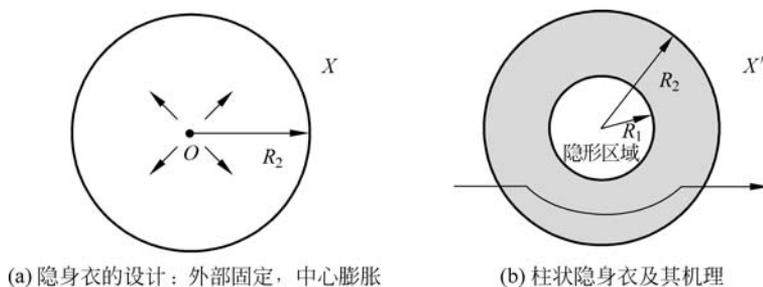


图 5-18 Pendry 等人提出的隐形示意图

变换光学理论最早应用于时变电磁场,后来推广到了静态场,如静态直流场、静磁场、静电场等。第 3 章给出的直流电型隐形装置的设计,就是利用了变换光学的原理。知道了上述原理,还可以设计其他形状的电磁隐形装置,如球形、柱状、椭圆、三角、方形等,甚至还可以设计心形的电磁隐形衣!但其基本原理,都是上面提到的变换光学原理。图 5-18 中给出的就是柱状隐形衣的特例。

利用麦克斯韦方程的空间协变性,不仅可以实现对物体的隐身,而且可以实现幻觉和反隐身等效果。因此,它已经成为 21 世纪初电磁理论与应用领域的研究热点之一。

* 5.9 时变电磁场在生活中的应用

电与磁是大自然中一直存在的现象,例如闪电与磁石。人类很早就知道运用电与磁来改善生活,丰富生命。除了自然存在的电磁场外,人们开发了许多新的电磁用具,如常用的电磁炉、微波炉等家用电器,甚至磁悬浮列车、输变电设备等公共设施,为人们的生活提供了诸多方便;又如电磁炮、电磁秋千、通信卫星、隐身飞机等。时变电磁场的应用可谓无处不在。

5.9.1 电磁炮

电磁炮是利用电磁发射技术制成的一种先进动能杀伤武器。与传统大炮将火药燃气压力作用于弹丸不同,电磁炮是利用电磁系统中电磁场产生的洛伦兹力来对金属炮弹进行加速,使其达到打击目标所需的动能,与传统的火药推动的大炮相比,电磁炮可大大提高弹丸的速度和射程。

电磁炮主要由能源、加速器、开关三部分组成。能源通常采用可蓄存 10~100MJ 能量的装置,实验用的能源有蓄电池组、磁通压缩装置、单极发电机,其中单极发电机是最有前途的能源。加速器是把电磁能量转换成炮弹动能,使炮弹达到高速的装置。开关是接通能源和加速器的装置,能在几毫秒之内把兆安级电流引进加速器中。

按照结构的不同,电磁炮可区分为电磁轨道炮、同轴线圈炮和磁力线重接炮三种。目前发展比较迅速、理论和实践上比较成熟、接近武器化的电磁炮,主要是电磁轨道炮和同轴线圈炮。

1. 电磁轨道炮

电磁轨道炮由两条联接着大电流源的固定平行导轨和一个沿导轨轴线方向可滑动的电

枢组成。发射时,电流由一条导轨流经电枢,再由另一条导轨流回,而构成闭合回路。强大的电流流经两平行导轨时,在两导轨间产生强大的磁场,这个磁场与流经电枢的电流相互作用,产生强大的电磁力,该力推动电枢和置于电枢前面的弹丸沿导轨加速运动,从而获得高速度。

2. 同轴线圈炮

线圈炮又称交流同轴线圈炮,它是电磁炮的最早形式,由环绕于炮膛的一系列固定的加速线圈与环绕于弹丸的弹载运动线圈构成,它是根据通电线圈之间磁场的相互作用原理而工作的。把加速线圈固定在炮管中,当它通入交变电流时,产生的交变磁场就会在弹丸线圈中产生感应电流,感应电流的磁场与加速线圈电流的磁场互相作用,产生磁场力,使弹丸加速运动并发射出去。

5.9.2 电磁秋千

电磁秋千最典型的例子是商店里的招财猫,开关打开后招财猫就能不停地摆手。电磁秋千的电路十分简单,它由装在秋千踏板上的小磁铁和底座里的磁控开关及电磁线圈等电路组成。

图 5-19 中 K 为干簧管,又称磁簧开关,在电路中作为磁控开关; L 为电磁线圈,当秋千踏板位于最低位置时,踏板上小磁铁使干簧管 K 内两簧片磁化吸合,因而有电流通过线圈 L ,并产生磁场,线圈的特定绕向使线圈产生的磁场和踏板磁铁的磁场正好相反,线圈磁场将踏板推向高处。踏板远离干簧管 K 后,使 K 里磁场减弱,两簧片立即脱离复原,线圈 L 中电磁场也随之消失,踏板在重力作用下,又反方向摆回。当越过了干簧管上方时 K 簧片又接通,踏板又被向上推起,就这样往复不止,踏板就前后不停地来回摆动着。发光二极管 LED 和限流电阻 R 串联后并联在线圈 L 的两端,当 L 通电时,LED 也通电发光, L 失电时,LED 也随之熄灭,所以秋千来回摆动时,LED 也就一闪一闪地发光。

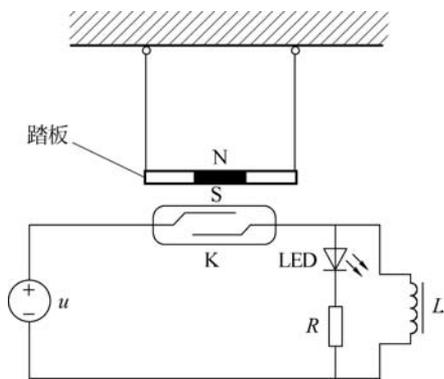


图 5-19 电磁秋千示意图

5.9.3 磁悬浮

磁悬浮技术的主要原理是利用高频电磁场在金属表面产生的涡流来实现对金属物体的悬浮。将金属样品放置在通有高频电流的线圈上时,高频电磁场会在金属材料表面产生一高频涡流,这一高频涡流与外磁场相互作用,使金属样品受到一个磁力的作用。在合适的空间配制下,可使磁力的方向与重力方向相反,通过改变高频源的功率使电磁力与重力相等,即可实现电磁悬浮。一般通过线圈的交变电流频率为 $10^4 \sim 10^5$ Hz。最常见的应用便是磁悬浮列车。

磁悬浮列车利用安装在列车两侧转向架上的悬浮电磁铁和铺设在轨道上的磁铁之间的排斥力,使车体完全脱离轨道,悬浮在距离轨道约 1cm 处,腾空行驶,创造了近乎“零高度”空间飞行的奇迹。

5.9.4 电磁阻尼

在大块导体中,可任意构成许许多多闭合的导体回路,当大块导体在磁场中运动时,所有这些小导体回路都做切割磁感线运动,如图 5-20 所示,因而在回路中形成许多闭合的感应电流,称为涡电流。根据楞次定律,所有这些涡电流受磁场作用的电磁力将阻碍大块导体在磁场中的运动,也就是说,涡电流受到的电磁力是阻力,称为电磁阻尼,由于导体电阻率很小,即使感应电动势不大,也可能产生明显的涡电流,使他们受到的电磁阻力明显。

电磁阻尼被广泛应用于需要稳定摩擦力及制动力的场合,例如万用表、电磁制动机械等。

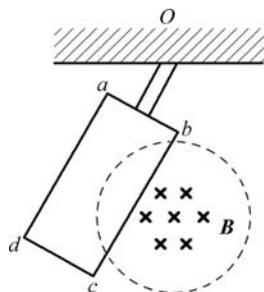


图 5-20 电磁阻尼示例

* 5.10 利用 MATLAB 实现矢量场散度和旋度的可视化

在麦克斯韦方程组中,最主要的两个运算,或者说普通人最不易理解的运算,就是矢量场(如电场或者磁场)的旋度和散度运算。结合 MATLAB 的可视化工具,可以实现对矢量场散度和旋度的绘制,从而加深对这两个运算和电磁理论的理解。

1. MATLAB 中 divergence 函数介绍

divergence 是计算矢量场相对于直角坐标系的散度的函数,其基本格式为:

```
div = divergence(X, V)
```

该函数用于求矢量场 V 关于矢量 X 的散度,此处的 V 和 X 均为三维(或者)向量,前者包含矢量在直角坐标系下的三个(两个)分量;后者则是对应于该矢量的相应位置坐标。

下面的例子给出了利用符号工具箱计算矢量场散度的操作。

```
syms x y z;
divergence([x^2 2 * y z], [x y z]);
```

MATLAB 运行结果为:

```
2 * x + 3
```

MATLAB 环境下,也可以利用数值方法直接计算散度,具体格式如下:

```
div = divergence(x, y, z, u, v, w)
```

该函数用于计算包含分量 u 、 v 和 w 的三维矢量场的散度。数组 x 、 y 和 z 用于定义矢量分量 u 、 v 和 w 的坐标,它们必须是单调的,但不需要间距均匀。 x 、 y 和 z 必须具有相同数量的元素,就像由 meshgrid 生成一样。

本节主要采用的是第一种方法。

2. 矢量场散度的可视化

矢量场的散度反映的是矢量场有无“源”和“汇”。矢量场在某一点的散度大于零,说明矢量场在此处有源(好像水龙头),代表矢量的力线从此处发出;反之,如果散度小于零,说

明矢量场在此处有汇(比如下水道),矢量的力线从外部流入该点;散度等于零,说明矢量的力线从该点穿过。MATLAB可以计算矢量函数的散度并做可视化处理。

下面的例子对矢量函数 $F=[u,v]=[\sin(x+y), \cos(x-y)]$ 进行求散度的操作,并将结果作图显示出来。

```

syms x y z real           % 定义符号变量
F = [ sin(x+y), cos(x-y) ]; % 定义函数 F
g = divergence(F,[x y])   % 求函数 F 的散度,符号形式
divF = matlabFunction(g); % 将散度转换为函数形式
x = linspace(-2.5,2.5,20);
[X,Y] = meshgrid(x,x);    % 定义网格
Fx = sin(X+Y);            % F 的 x 分量
Fy = cos(X-Y);            % F 的 y 分量
div_num = divF(X,Y);      % 散度的数值形式
pcolor(X,Y,div_num);      % 用伪彩色图绘制散度
shading interp;           % 做插值
colorbar;                  % 绘制色条
hold on;                   % 保持绘图叠加模式打开
quiver(X,Y,Fx,Fy,'k','linewidth',1); % 叠加绘制箭头图

```

MATLAB 窗口显示的散度函数结果如下,绘制的图像如图 5-21 所示。

```
g = sin(x - y) + cos(x + y)
```

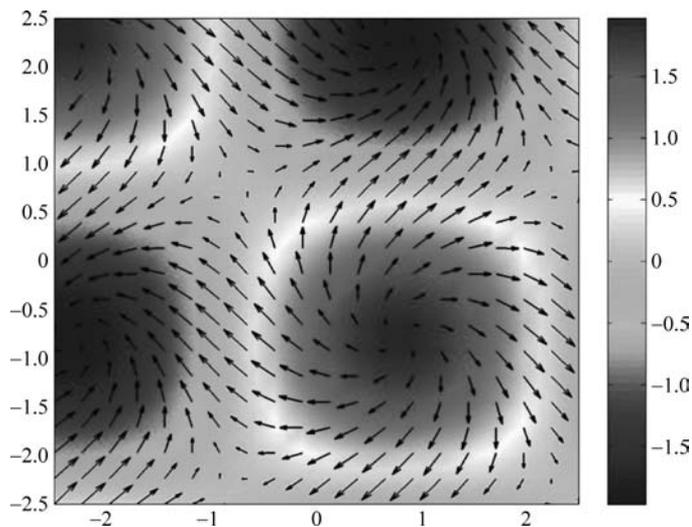


图 5-21 函数 F 的矢量场图及其散度分布图

上面的代码中,首先利用 MATLAB 的符号工具箱函数,对函数 F 进行符号形式的散度计算,然后将得到的散度结果 g 显示在 MATLAB 窗口。同时,利用 matlabFunction 方法将其转换为函数形式。最后,利用 pcolor 和 quiver 函数,将散度和矢量场绘制在一幅图像里面。从图 5-21 可知,散度大于零的地方,即图中的发亮区域,箭头呈现发散的情形,表明在对应的区域有“源”;散度小于零的地方,即图中发暗区域,箭头呈现汇聚状态,表明在该

区域有“汇”。

在麦克斯韦方程组中, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 反映的就是电荷是电位移矢量的“源”: 正电荷处对应电位移矢量从该处发出; 负电荷处电位移矢量汇入该处; 无电荷处电位移矢量在该点连续。而 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 表明磁场是无源场, 磁感应线处处连续, 因此磁通连续的性质成立。

3. MATLAB 中 curl 函数介绍

curl 是 MATLAB 中求矢量函数旋度的函数, 其基本格式为

```
curl(V,X)
```

该函数用于求矢量场 V 关于矢量 X 的旋度, 此处的 V 和 X 均为三维(或二维)向量, 前者包含矢量在直角坐标系下的三个(或两个)分量; 后者则是对应于该矢量的相应位置坐标。

下面的代码用于计算矢量场 V 关于矢量 $X=(x,y,z)$ 的旋度。

```
syms x y z
V = [x^3 * y^2 * z, y^3 * z^2 * x, z^3 * x^2 * y];
X = [x y z];
curl(V,X)
```

MATLAB 显示结果如下

```
ans =
    x^2 * z^3 - 2 * x * y^3 * z
    x^3 * y^2 - 2 * x * y * z^3
    - 2 * x^3 * y * z + y^3 * z^2
```

众所周知, 对一个标量函数的梯度场进行旋度计算, 结果为零。换句话说, 标量函数的梯度场是无旋的。下面的代码就直接利用 MATLAB 验证上述结论的正确性。其中 $\text{gradient}(f, \text{vars})$ 表示对对称量函数 f 取梯度运算。

```
syms x y z
f = x^2 + y^2 + z^2;
vars = [x y z];
curl(gradient(f, vars), vars)
```

MATLAB 显示结果为:

```
ans =
    0
    0
    0
```

4. 矢量场旋度的可视化

下面对二维矢量函数 $F = [\sin(x+y), \cos(x-y)]$ 求其旋度并作图。代码如下

```
syms x y z real % 定义符号变量
F = [ sin(x+y), cos(x-y) ]; % 定义函数 F
G = curl([F,0],[x y z]) % 计算 F 的旋度, 并赋予 G
curlF = matlabFunction(G(3)); % 将 G 的 z 分量转换为函数, 赋予 curlF
```

```

x = linspace(-2.5,2.5,20);
[X,Y] = meshgrid(x,x);           % 定义网格
Fx = sin(X+Y);                  % 计算 F 的 x 分量
Fy = cos(X-Y);                  % 计算 F 的 y 分量
rot = curlF(X,Y);               % 计算旋度的值
pcolor(X,Y,rot);                % 绘制旋度
shading interp;                 % 颜色做插值
colorbar;                       % 绘制色条
hold on;                        % 保持模式打开
quiver(X,Y,Fx,Fy,'k','linewidth',1); % 绘制箭头图,并设置颜色为黑色,线宽为 1

```

首先利用 MATLAB 的符号工具箱函数,对函数 F 进行解析形式的旋度计算,然后将得到的旋度结果 G 转换为函数形式。最后,利用 `pcolor` 和 `quiver` 函数,将二者绘制在一幅图像里面。由于题目给出的是二维函数,因此,其旋度只有 z 分量,其他两个分量为零。

上述程序运行时,窗口输出结果为

```

G =
      0
      0
 - sin(x - y) - cos(x + y)

```

上式表示该函数的旋度的解析表达式,显然是一个矢量,有三个分量。我们关心的是第三个分量,即 z 分量。

将旋度的 z 分量用图形呈现出来,结果如图 5-22 所示。从图中可以看出,旋度大于零的地方,即图中的发亮区域,箭头呈现逆时针旋转的情形;旋度小于零的地方,即图中发黑的区域,箭头呈现顺时针旋转的状态。考虑到图中显示的是 z 方向的旋度(其他两个方向为零),利用右手螺旋定则,可以看出这个现象是正确的,真实反映了相关区域的旋涡源状态。与图 5-21 对比,大家能够更加清晰地了解散度和旋度的区别。

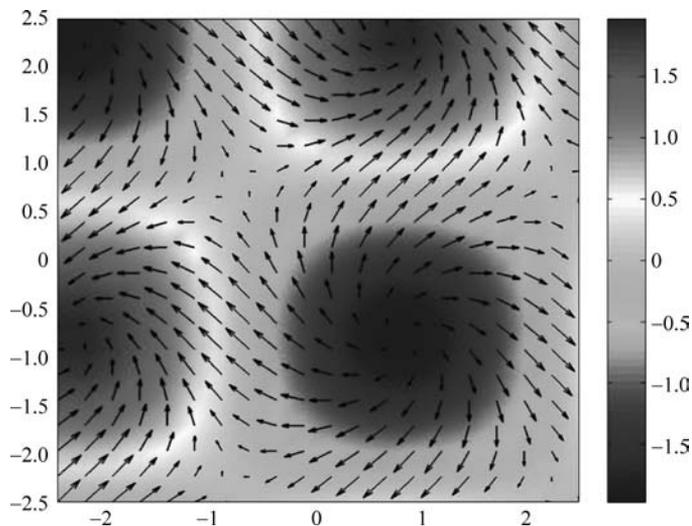


图 5-22 函数 F 的矢量场图及其旋度分布图

在麦克斯韦方程组中, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 该式表明: 电场的旋涡源是磁场随时间的变化率的相反数。有磁场发生变化的地方, 就有旋涡源, 电场围绕该旋涡源旋转。同理 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, 表明电流和电位移矢量的变化率之和, 是磁场强度的旋涡源。在静磁场中, 磁场强度总是围绕着电流旋转, 就是这个性质的一个具体体现。

本章小结

1. 麦克斯韦方程组及辅助方程

积分形式

微分形式

正弦电磁场

$$(1) \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}$$

$$(2) \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$$

$$(3) \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(4) \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

辅助方程: $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$

洛伦兹力: $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

洛伦兹力密度: $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$

2. 电磁场边值关系

媒质分界面	两种媒质分界面	两种介质分界面	介质与理想导体分界面
边值关系	$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s$	$H_{1t} = H_{2t}$	$H_t = J_s$
	$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$	$E_{1t} = E_{2t}$	$E_t = 0$
	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$	$B_{1n} = B_{2n}$	$B_n = 0$
	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$	$D_{1n} = D_{2n}$	$D_n = \rho_s$

3. 坡印亭定理和坡印亭矢量

坡印亭定理:

$$\oint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = -\frac{\partial W}{\partial t} \quad (\text{积分形式})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{微分形式})$$

坡印亭矢量瞬时值: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

正弦电磁场的复数坡印亭矢量: $\mathbf{S}_c = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m^*$

正弦电磁场的复数坡印亭矢量时间平均值:

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{Re} \mathbf{S}_c = \text{Re} \mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c^* = \frac{1}{2} \text{Re} \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m^*$$

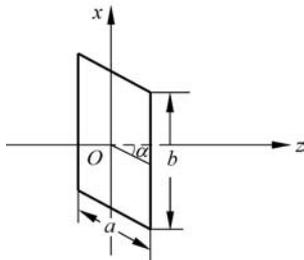
4. 电磁场的矢量势和标量势及其微分方程

势的方程	动态场		静态场	
	时变场	正弦场		
$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$ $\nabla^2 \phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$	$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ $\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ $(k^2 = \omega^2 \epsilon\mu)$	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$		
矢量势和标量势的计算	推迟势(动态势)		静态势	
	$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z', t - \frac{R}{v})}{R} dV'$ $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z', t - \frac{R}{v})}{R} dV'$	$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z') e^{j(\omega t - kR)}}{R} dV'$ $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z') e^{j(\omega t - kR)}}{R} dV'$		$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{R} dV'$ $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{R} dV'$
	似稳场			
$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z', t)}{R} dV'$ $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z', t)}{R} dV'$	$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z') e^{j\omega t}}{R} dV'$ $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z') e^{j\omega t}}{R} dV'$			
场量	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{E} = -\nabla \phi - j\omega \mathbf{A}$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{E} = -\nabla \phi$	

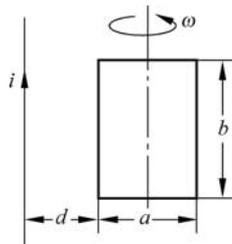
习题

5.1 设沿 $+z$ 方向传输的均匀平面电磁波电场为 $\mathbf{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x$, 一长为 a 、宽为 b 的矩形线圈的轴线在 x 轴上, 且与 xOz 平面夹角为 α (见图 5.1 图)。求该线圈中的感应电动势。

5.2 尺寸为 $a \times b$ 的矩形线圈与长直线电流 i 共面, 且靠近直线电流的边与线电流平行, 二者相距为 d , 线圈以角速度 ω 绕其中心轴旋转, 如题 5.2 图所示。试求下列两种情况下线圈中的感应电动势:



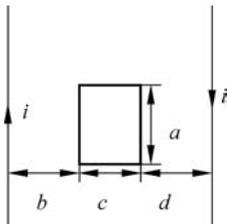
题 5.1 图



题 5.2 图

- (1) $i = I_0$ (常数);
- (2) $i = I_m \cos \Omega t$.

5.3 平行双线与一矩形回路共面,如题 5.3 图所示,设 $a=0.2\text{m}$, $b=c=d=0.1\text{m}$, $i=0.1\cos(2\pi\times 10^7 t)\text{A}$,求回路中的感应电动势。



题 5.3 图

5.4 电子回旋加速器利用空间的交变磁场产生交变电场,从而使带电粒子加速。设加速器中的磁场在圆柱坐标系内只有轴向分量,且只是 r, t 的函数,即 $\mathbf{H}=f(r, t)\mathbf{e}_z$ 。试求在半径为 r 处感应电场的大小与方向。若在某一时间间隔内 $f(r, t)=crt$,其中 C 是常数。试求感应电场强度的具体形式。

5.5 长为 l 的圆柱形电容器,内外电极的半径分别为 r_1 与 r_2 ,其中介质的介电常数为 ϵ 。若两极板间所加的电压 $u=U_m\sin\omega t$,且其角频率 ω 不高,故电场分布与静态场情形相同。试计算介质中的位移电流密度及穿过介质中半径为 r ($r_1 < r < r_2$) 的圆柱形表面的总位移电流;并证明后者等于电容器引线中的传导电流。

5.6 一铜导线中通过 1A 的传导电流,已知铜的介电常数为 ϵ_0 ,电导率为 $\sigma=5.8\times 10^7\text{S/m}$ 。试分别求电流的频率为 10kHz 与 100MHz 时导线中的位移电流。

5.7 一球形电容器内外电极的半径分别为 r_1 与 r_2 ,其间填充介电常数为 ϵ 的介质。若两球面极板间所加的电压 $u=U_m\sin\omega t$,且其角频率 ω 不高。试计算介质中的位移电流密度及穿过介质中半径为 r ($r_1 < r < r_2$) 的球面的总位移电流。

5.8 假设真空中的磁场强度为 $\mathbf{H}=0.01\cos(6\pi\times 10^6 t-2\pi z)\mathbf{e}_y\text{A/m}$,试求与之相应的位移电流密度。

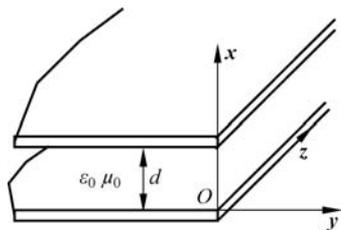
5.9 已知电场强度矢量为

$$\mathbf{E}=E_m[\cos(\omega t-\beta z)\mathbf{e}_x+\sin(\omega t-\beta z)\mathbf{e}_y]$$

其中, E_m 、 ω 及 β 均为常数。试由麦克斯韦方程组确定与之相联系的磁感应强度矢量 \mathbf{B} 。

5.10 试写出下列各场量的复数表示式的瞬时值:

- (1) $\mathbf{E}=E_m e^{-j\beta z}\mathbf{e}_x$;
- (2) $\mathbf{H}=H_m e^{-j(\beta-j\alpha)z}\mathbf{e}_y$;
- (3) $\mathbf{E}=E_m \sin\beta z\mathbf{e}_x$;
- (4) $\mathbf{E}=40(\sqrt{2}-j\sqrt{2})e^{-j20z}\mathbf{e}_x$;
- (5) $\mathbf{H}=(4\mathbf{e}_x+5j\mathbf{e}_y)e^{j(\omega t+\beta z)}$;
- (6) $\mathbf{E}=10e^{-j(6x+8z)}\mathbf{e}_y$ 。



题 5.11 图

5.11 如题 5.11 图所示,已知相距为 d 的两无限大平行导体板间的电场强度为

$$\mathbf{E}=E_m \cos(\omega t-\beta z)\mathbf{e}_x$$

试求两板间的磁场强度和导体板上的感应电荷及电流分布。

5.12 长为 l 、内外半径分别为 r_1 与 r_2 的理想导体同轴线,两端用理想导体板短路。内外导体间填充介电常数为 ϵ 、磁导率为 μ_0 的介质。介质内的电磁场分别为

$$\mathbf{E}=\frac{A}{r}\sin\beta z e^{j\omega t}\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{H}=j\frac{B}{r}\cos\beta z e^{j\omega t}\mathbf{e}_\varphi$$

试确定式中 A, B 间的关系, 并求出 β 和 $r=r_1, r_2$ 及 $z=0, l$ 面上的电荷面密度与面电流密度。

5.13 已知在自由空间传播的均匀平面波的磁场强度为

$$\mathbf{H}(z, t) = 0.8(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)\cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \text{ A/m}$$

- (1) 求此电磁波的电场强度矢量;
- (2) 计算瞬时坡印亭矢量。

5.14 由半径为 a 、相距为 d ($d \ll a$) 的圆形极板构成的平行板电容器, 其中的介质是非理想的, 具有电导率 σ 、介电常数 ϵ 。假定电容器内的电场是均匀的, 可忽略其边缘效应。若电容器有电压为 U_0 的直流电源供电, 试求电容器内任一点的坡印亭矢量, 并验证其中损耗的功率由电源供给。

5.15 在同一空间有可能存在静止电荷的静电场 \mathbf{E} 和永久磁铁的磁场 \mathbf{H} , 这时有可能存在坡印亭矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, 但没有能流。试证明对任一闭合面 S , 则有

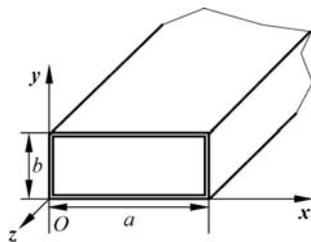
$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

5.16 由理想导体板构成的波导内的电场强度为

$$\mathbf{E} = E_m \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y$$

内部为空气(见图 5.16 图), 试求:

- (1) 波导内的磁场强度和波导壁上的面电流密度;
- (2) 波导内的位移电流密度;
- (3) 波导内的坡印亭矢量的瞬时值和平均值;
- (4) 穿过波导任一横截面的平均功率。



题 5.16 图

5.17 已知时变电磁场中矢量势为 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_m \sin(\omega t - kz)$, 其中 A_m, k 为常数, 求电场强度、磁场强度及坡印亭矢量。

5.18 如果在良导体中存在正弦电磁波, 试证明近似有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{J} = -j\omega \sigma \mathbf{A} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - j\omega \mu \sigma \mathbf{A} &= 0 \quad \text{与} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \end{aligned}$$

5.19 若电磁场矢量势的分量 $A_x = A_y = 0, A_z = f(r)e^{j(\omega t - \beta z)}$, 试求在圆坐标系内场量 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 的表示式。

5.20 在无耗的各向同性媒质中, 电场 \mathbf{E} 满足的方程为 $\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{E} = 0$, 试问在什么条件下 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ 是上述方程的解? 其中 \mathbf{k} 为常矢量, \mathbf{r} 为位置矢径。此电场作为麦克斯韦方程的解的条件是什么?

5.21 若仅考虑远场区, 且设电流沿 z 轴方向流动, 试证明 $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$ 在球坐标系内可以简化为

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu} \sin\theta \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

5.22 长为 l (l 不甚小于波长) 的直导线沿 z 轴放置, 其中心在原点。设直导线上载有沿 $+z$ 方向为正的交变电流, 其复数值为 $I(z) = I_m e^{-j\beta z}$ 。试求在远区任一点处电磁场的矢量势及磁场强度。