

第3章

基于反馈的二阶有源滤波器的 分析与设计

20 世纪 20—60 年代,实际应用的滤波器主要是由电阻、电感和电容构成的无源滤波器。在 20 世纪 50 年代人们已经认识到,用有源电路替代电感在减小体积和降低成本方面具有潜在的优势,用电阻、电容和晶体管构成的电路也可以实现无源网络的频率特性,但是当时这种有源滤波器还不能完全达到实用要求。20 世纪 60 年代中期,高质量集成运算放大器走向商品化,有源 RC 滤波器获得了很大的发展。

有源滤波器的优点主要有:尺寸小,重量轻;采用集成工艺可以大批量生产,价格低,可靠性高;可以提供增益;可以与数字电路集成在同一芯片上。有源滤波器的不足之处主要是:适用频率范围受有源器件有限带宽的限制;受元件值的容差和漂移的影响较大,即灵敏度相对来说比较高。

二阶有源 RC 滤波电路是高阶有源滤波电路的基础。二阶有源滤波电路的设计方法有多种,本章主要介绍基于反馈结构的二阶有源滤波电路的设计。

3.1 实际运算放大器

3.1.1 实际运算放大器的模型

运算放大器(简称运放)是组成滤波电路的一个重要的有源器件,其性能直接影响有源 RC 滤波器的整体特性。理想运放模型取运放的增益无穷大,然而实际运放的增益只能是有限值,而且与频率有关,工作在小信号状态下的实际运放的开环增益特性可以近似用单极点网络函数表示

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + s/\omega_0} \quad (3-1-1)$$

式中, A_0 表示运放的直流增益, ω_0 为 3dB 截止角频率,对应的 Bode 图如图 3-1-1 所示。

通常情况下,运放的直流增益可达 100dB,3dB 截止频率 $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ 只有几赫兹或几十赫兹。在分析电路时,若角频率 $\omega \gg \omega_0$,式(3-1-1)可进一步化简为

$$A(s) = \frac{A_0 \omega_0}{s} = \frac{1}{s\tau} \quad (3-1-2)$$

式中, $A_0 \omega_0$ 为增益带宽乘积, $A_0 \omega_0$ 的倒数定义为运放的时间常数 τ ,理想运放的 τ 等于零。

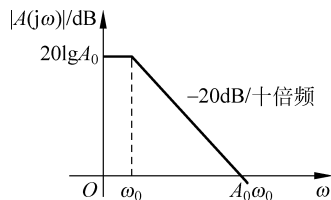


图 3-1-1 运放单极点模型 Bode 图

3.1.2 实际运算放大器电路分析

在有源滤波电路中常用反相放大器、同相放大器和积分器,接下来进行具体分析。

1. 反相放大器

反相放大器的电路如图 3-1-2 所示。

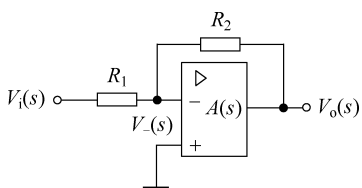


图 3-1-2 反相放大器

运算放大器的同相输入端电位 $V_+(s)$ 为 0, 反相输入端电位 $V_-(s)$ 可利用叠加定理分析得

$$V_-(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_i(s) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o(s) \quad (3-1-3)$$

实际运算放大器的输入-输出有如下关系:

$$V_o(s) = A(s)[V_+(s) - V_-(s)] \quad (3-1-4)$$

将 $V_+(s)$ 及 $V_-(s)$ 代入式(3-1-4)可分析出该反相放大器的增益为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_2 A(s)}{R_1 + R_2 + R_1 A(s)} = -\frac{K}{1 + \frac{1+K}{A(s)}} \quad (3-1-5)$$

当运算放大器为理想的情况下, $A(s) \rightarrow \infty$, 则

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = -\frac{R_2}{R_1} = -K \quad (3-1-6)$$

即 $K = R_2/R_1$ 为由理想运算放大器构成的反相放大器的增益的负值。

若工作角频率 $\omega \gg \omega_0$, 将式(3-1-2)代入式(3-1-5), 可得

$$H(s) = \frac{-K}{1 + (1+K)s\tau} \quad (3-1-7)$$

2. 同相放大器

同相放大器的电路如图 3-1-3 所示。

运算放大器的同相输入端电位 $V_+(s)$ 为 $V_i(s)$, 反相输入端电位 $V_-(s)$ 可由下式分析:

$$V_-(s) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o(s) \quad (3-1-8)$$

将 $V_+(s)$ 及 $V_-(s)$ 代入式(3-1-4), 可分析出该同相放大器的增益为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{A(s)(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_1 A(s)} = \frac{K}{1 + \frac{K}{A(s)}} \quad (3-1-9)$$

当运算放大器为理想的情况下, $A(s) \rightarrow \infty$, 则

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = K \quad (3-1-10)$$

即 $K = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ 为由理想运算放大器构成的同相放大器的增益。

若工作角频率 $\omega \gg \omega_0$, 将式(3-1-2)代入式(3-1-9), 可得

$$H(s) = \frac{K}{1 + Ks\tau} \quad (3-1-11)$$

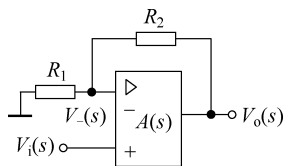


图 3-1-3 同相放大器

3. 反相积分器

反相积分器的电路如图 3-1-4 所示。

运算放大器的同相输入端电位 $V_+(s)$ 为 0, 反相输入端电位 $V_-(s)$ 可利用叠加定理分析得

$$V_-(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V_i(s) + \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} V_o(s) \quad (3-1-12)$$

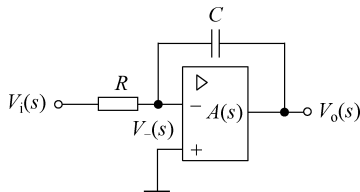


图 3-1-4 反相积分器

将 $V_+(s)$ 及 $V_-(s)$ 代入式(3-1-4), 可分析出该反相积分器的增益为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{A(s)} \left(s + \frac{1}{RC} \right)} \quad (3-1-13)$$

当运算放大器为理想的情况下, $A(s) \rightarrow \infty$, 则

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = -\frac{1}{sRC} \quad (3-1-14)$$

若工作角频率 $\omega \gg \omega_0$, 将式(3-1-2)代入式(3-1-13), 可得

$$H(s) = \frac{-\frac{1}{sRC}}{1 + \frac{\tau}{RC} + s\tau} \quad (3-1-15)$$

3.2 双线性转移函数和双二次转移函数

在滤波器综合设计中常用的转移函数有双线性函数和双二次函数两种, 由线性无源 RLC 元件构成的二端口网络的转移函数 $H(s)$ 满足无源网络的网络函数的一般性质, 这些性质是:

- (1) $H(s)$ 是 s 的实系数有理函数;
- (2) $H(s)$ 的全部极点位于 s 左半平面, 或为虚轴上的单阶极点;
- (3) $H(s)$ 的零点可以在 s 平面的任何位置;
- (4) 复数极点必共轭成对出现, 复数零点也必共轭成对出现。

3.2.1 双线性转移函数

分子、分母均为 s 的一次式的转移函数称为双线性转移函数, 其一般形式如下:

$$H(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + \omega_0} \quad (3-2-1)$$

式中, ω_0 表示滤波器的截止频率, 分子系数 a_0 和 a_1 的不同形式决定了滤波器的不同

类型。

现分别研究双线性转移函数分子多项式系数的几种特殊取值的情形。

1. $a_0 \neq 0, a_1 = 0$ (低通滤波器)

当 $a_0 \neq 0, a_1 = 0$ 时, 对应为低通滤波器, 其转移函数为

$$H(s) = \frac{a_0}{s + \omega_0} \quad (3-2-2)$$

令 $s = j\omega$, 有

$$H(j\omega) = \frac{a_0}{j\omega + \omega_0} \quad (3-2-3)$$

因此该转移函数的幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{|a_0|}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \quad (3-2-4)$$

由式(3-2-4)可以看出, 随着 ω 的加大, $|H(j\omega)|$ 单调减小, 因此式(3-2-2)对应为低通滤波器的转移函数。

对式(3-2-4)取常用对数再乘以 20, 可得到以 dB 为单位的增益函数

$$G(\omega) = 20 \lg |H(j\omega)| = 20 \lg \left| \frac{a_0}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \right| \text{ (dB)} \quad (3-2-5)$$

利用 MATLAB 画出其幅频特性如图 3-2-1(a) 所示 [式(3-2-1)中 $a_0 = 10, a_1 = 0, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$], 可以看出这是一个低通滤波器的增益特性。

当 $\omega = 0$ 时, 增益函数达到其最大值 $G(0) = 20 \lg \left| \frac{a_0}{\omega_0} \right| = 20 \text{ (dB)}$, 称为直流增益。

当 $\omega = \omega_0$ 时, 增益函数为

$$G(\omega_0) = 20 \lg \left[\left| \frac{a_0}{\omega_0} \right| / \sqrt{2} \right] = 20 \lg \left| \frac{a_0}{\omega_0} \right| - 3 = G(0) - 3 = 17 \text{ (dB)} \quad (3-2-6)$$

此时, 增益较 $\omega = 0$ 时下降了 3dB, 因此 $0 \sim \omega_0$ 的频带宽度称为 3dB 带宽。

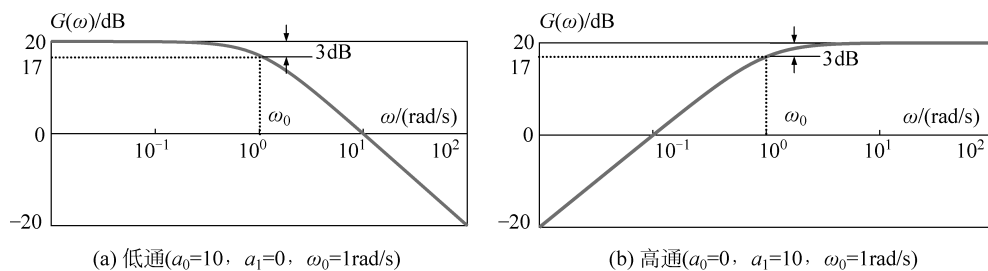


图 3-2-1 双线性转移函数的幅频特性

2. $a_0=0, a_1 \neq 0$ (高通滤波器)

当 $a_0=0, a_1 \neq 0$ 时, 对应为高通滤波器, 其转移函数为

$$H(s) = \frac{a_1 s}{s + \omega_0} \quad (3-2-7)$$

幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{|a_1 \omega|}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \quad (3-2-8)$$

由式(3-2-8)可以看出, 随着 ω 的加大, $|H(j\omega)|$ 单调增加, 因此式(3-2-7)对应为高通滤波器的转移函数。

增益函数为

$$G(\omega) = 20 \lg \left| \frac{a_1 \omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \right| \text{ (dB)} \quad (3-2-9)$$

利用 MATLAB 画出其幅频特性如图 3-2-1(b) 所示 [式(3-2-1)中 $a_0=0, a_1=10, \omega_0=1 \text{ rad/s}$], 可以看出这是一个高通滤波器的增益特性。

当 $\omega=0$ 时, 增益函数 $G(0) = 20 \lg \left| \frac{a_1 \omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \right| = 0 \text{ (dB)}$, 即在直流时传输信号为零。

当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 增益函数 $G(\infty) = 20 \lg |a_1| = 20 \text{ (dB)}$ 。

当 $\omega=\omega_0$ 时, 增益函数为

$$G(\omega_0) = 20 \lg \left| \frac{a_1}{\sqrt{2}} \right| = G(\infty) - 3 = 17 \text{ (dB)} \quad (3-2-10)$$

此时, 较高频增益 $G(\infty)$ 时下降了 3dB。

3. $a_0 = -a_1 \omega_0$ (全通滤波器)

当 $a_0 = -a_1 \omega_0$ 时, 对应为全通滤波器, 其转移函数为

$$H(s) = \frac{a_1 (s - \omega_0)}{s + \omega_0} \quad (3-2-11)$$

幅频特性为

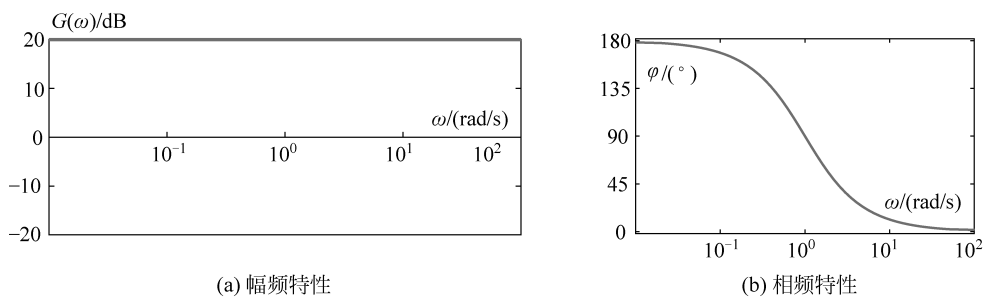
$$|H(j\omega)| = |a_1| \quad (3-2-12)$$

由式(3-2-12)可以看出, $|H(j\omega)|$ 与 ω 无关, 因此式(3-2-11)对应为全通滤波器的转移函数。

增益函数为

$$G(\omega) = 20 \lg |a_1| \text{ (dB)} \quad (3-2-13)$$

利用 MATLAB 画出其幅频特性和相频特性如图 3-2-2 所示 [式(3-2-1)中 $a_0=10, a_1=-10, \omega_0=1 \text{ rad/s}$], 可以看出这是一个全通滤波器的增益特性。

图 3-2-2 双线性转移函数的频率特性(全通 $a_0=10, a_1=-10, \omega_0=1\text{rad/s}$)

3.2.2 双二次转移函数

分子、分母均为 s 的二次式的转移函数称为双二次转移函数,其一般形式为

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (3-2-14)$$

式中, ω_0 和 Q 分别表示 $H(s)$ 的极点频率和品质因数。

现分别研究双二次转移函数分子多项式系数的几种特殊取值的情形。

1. $a_0 \neq 0, a_1 = a_2 = 0$ (低通滤波器)

当 $a_0 \neq 0, a_1 = a_2 = 0$ 时, 对应为低通滤波器, 其转移函数为

$$H(s) = \frac{a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{a_0}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (3-2-15)$$

式中, ω_0 称为低通滤波器的截止频率。

$H(s)$ 的幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{|a_0|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}} \quad (3-2-16)$$

当 $\omega=0$ 时, $|H(j0)| = \frac{|a_0|}{\omega_0^2}$; 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $|H(j\infty)| \rightarrow 0$ 。

令 $\frac{d}{d\omega} |H(j\omega)| = 0$, 可求出 $|H(j\omega)|$ 出现极大值时的频率以及极大值分别为

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (3-2-17)$$

$$|H(j\omega)|_{\max} = |H(j\omega_{\max})| = \frac{|a_0| Q}{\omega_0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (3-2-18)$$

由式(3-2-17)知,仅当 $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ 即 $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $|H(j\omega)|$ 才会出现极大值。当 $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时电路的响应称为最大平坦响应。由式(3-2-17)还可以看出, Q 值越高, $\omega_{\max}$ 越接近于 ω_0 。通常,当 $Q > 5$ 时,可认为 $\omega_{\max} \approx \omega_0$ 。

利用 MATLAB 画出不同 Q 值情况下式(3-2-15)所表示的双二次转移函数的幅频特性,如图 3-2-3(a)所示[当式(3-2-14)中 $a_0 = 10, a_1 = a_2 = 0, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ 时],可以看出这是一个低通滤波器的增益特性。

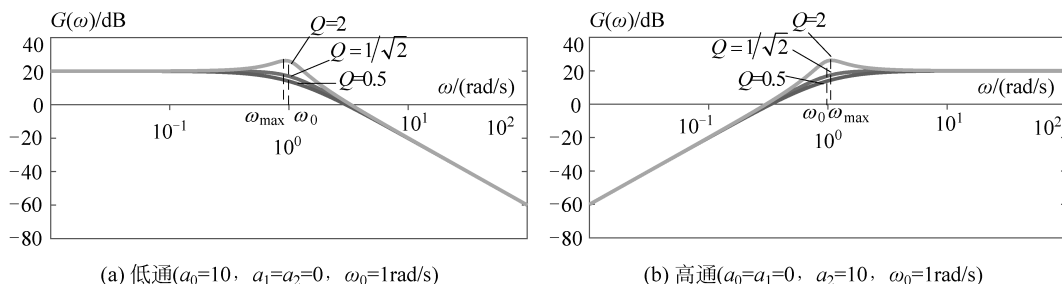


图 3-2-3 双二次转移函数的幅频特性

2. $a_0 = a_1 = 0, a_2 \neq 0$ (高通滤波器)

当 $a_0 = a_1 = 0, a_2 \neq 0$ 时,对应为高通滤波器,其转移函数为

$$H(s) = \frac{a_2 s^2}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{a_2 s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (3-2-19)$$

式中, ω_0 称为高通滤波器的截止频率。

$H(s)$ 幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{|a_2| \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}} \quad (3-2-20)$$

当 $\omega = 0$ 时, $|H(j0)| = 0$; 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $|H(j\infty)| \rightarrow |a_2|$ 。

令 $\frac{d}{d\omega} |H(j\omega)| = 0$, 可求出 $|H(j\omega)|$ 出现极大值时的频率以及极大值分别为

$$\omega_{\max} = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad (3-2-21)$$

$$|H(j\omega)|_{\max} = |H(j\omega_{\max})| = \frac{|a_2| Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (3-2-22)$$

由式(3-2-21)知,仅当 $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ 即 $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $|H(j\omega)|$ 才会出现极大值。

利用 MATLAB 画出不同 Q 值情况下式(3-2-19)所表示的双二次转移函数的幅频特性,如图 3-2-3(b)所示[当式(3-2-14)中 $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 10, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ 时],可以看出这是一个高通滤波器的增益特性。

3. $a_0 = a_2 = 0, a_1 \neq 0$ (带通滤波器)

当 $a_0 = a_2 = 0, a_1 \neq 0$ 时,可实现带通滤波器,其转移函数为

$$H(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{a_1 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (3-2-23)$$

幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{|a_1| \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}} \quad (3-2-24)$$

当 $\omega = 0$ 和 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $|H(j0)| = |H(j\infty)| = 0$; 当 $\omega = \omega_0$ 时, $|H(j\omega)|$ 出现极大值为

$$|H(j\omega)|_{\max} = |H(j\omega_0)| = \frac{|a_1| Q}{\omega_0} \quad (3-2-25)$$

带通滤波器的幅频特性中极大值对应的频率称为中心频率,故式(3-2-23)表示的二阶带通滤波函数的中心频率为 ω_0 。二阶带通滤波器不失真地传送信号的频率范围称为通频带,通频带通常用 3dB 带宽来表征,即增益函数由峰值下降 3dB(对应幅频特性 $|H(j\omega)|$ 下降至峰值的 $1/\sqrt{2}$)的频带宽度,利用式(3-2-24)可分析出 3dB 带宽的边界频率 ω_1 和 ω_2 分别为

$$\omega_1 = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q} \right) \quad (3-2-26)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q} \right) \quad (3-2-27)$$

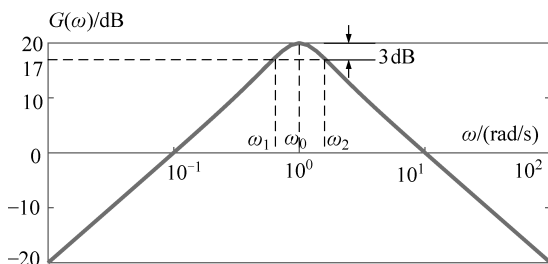
因此其 3dB 带宽 BW 为

$$\text{BW} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3-2-28)$$

利用 MATLAB 画出式(3-2-23)所表示的双二次转移函数的幅频特性,如图 3-2-4 所示[当式(3-2-14)中 $a_0 = a_2 = 0, a_1 = 10, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}, Q = 1$ 时],可以看出这是一个带通滤波器的增益特性。

4. $a_0 \neq 0, a_1 = 0, a_2 \neq 0$ (带阻滤波器)

当 $a_0 \neq 0, a_1 = 0, a_2 \neq 0$ 时,可实现带阻滤波函数,其转移函数为

图 3-2-4 双二次转移函数的幅频特性(带通 $a_0 = a_2 = 0, a_1 = 10, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}, Q = 1$)

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = a_2 \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (3-2-29)$$

式中, ω_z 称为带阻滤波器的零点频率。

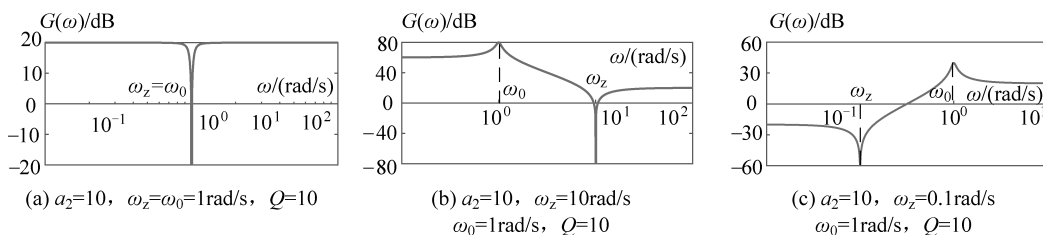
幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{|a_2(\omega_z^2 - \omega^2)|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}} \quad (3-2-30)$$

当 $\omega = \omega_z$ 时, $|H(j\omega_z)| = 0$; 当 $\omega = 0$ 时, 直流增益 $|H(j0)| = |a_2| \frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}$; 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 高频增益 $|H(j\infty)| = |a_2|$ 。

根据零点频率 ω_z 与极点频率 ω_0 的相对大小, 可分为以下三种情况:

(1) 当 $\omega_z = \omega_0$ 时, 直流增益等于高频增益, 即 $|H(j0)| = |H(j\infty)| = |a_2|$, 这种情况称为标准陷波。利用 MATLAB 画出其对应的幅频特性, 如图 3-2-5(a) 所示 [当式(3-2-29)中 $a_2 = 10, \omega_z = \omega_0 = 1 \text{ rad/s}, Q = 10$ 时]。

图 3-2-5 $a_0 \neq 0, a_1 = 0, a_2 \neq 0$ 时双二次转移函数的幅频特性

(2) 当 $\omega_z > \omega_0$ 时, 直流增益大于高频增益, 即 $|H(j0)| > |H(j\infty)|$, 这种情况称为低通陷波。利用 MATLAB 画出其对应的幅频特性, 如图 3-2-5(b) 所示 [当式(3-2-29)中 $a_2 = 10, \omega_z = 10 \text{ rad/s}, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}, Q = 10$ 时]。

(3) 当 $\omega_z < \omega_0$ 时, 直流增益小于高频增益, 即 $|H(j0)| < |H(j\infty)|$, 这种情况称为高通陷波。利用 MATLAB 画出其对应的幅频特性, 如图 3-2-5(c) 所示 [当式(3-2-29)中 $a_2 = 10, \omega_z = 0.1 \text{ rad/s}, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}, Q = 10$ 时]。

5. $a_0 = a_2 \omega_0^2, a_1 = -a_2(\omega_0/Q)$ (全通滤波器)

当 $a_0 = a_2 \omega_0^2, a_1 = -a_2(\omega_0/Q)$ 时, 可实现全通滤波函数, 其转移函数

$$H(s) = a_2 \frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (3-2-31)$$

幅频特性为

$$|H(j\omega)| = |a_2| \quad (3-2-32)$$

由式(3-2-32)可以看出, $|H(j\omega)|$ 与 ω 无关, 即对所有的频率分量的传输能力是相同的, 因此式(3-2-31)对应为全通滤波器的转移函数。

利用 MATLAB 画出其幅频特性和相频特性如图 3-2-6 所示 [当式(3-2-14)中 $a_0 = 10, a_1 = -10, a_2 = 10, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}, Q = 1$ 时], 可以看出这是一个全通滤波器的增益特性。

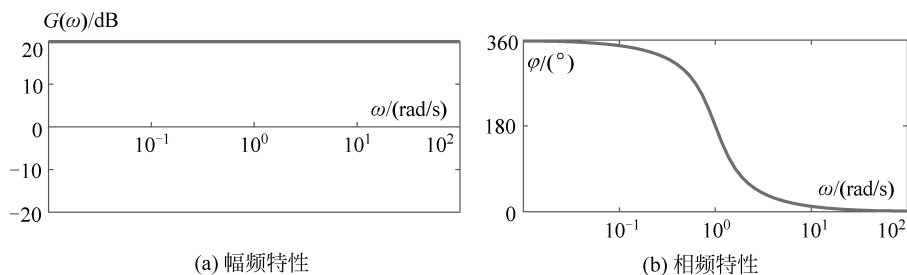


图 3-2-6 双二次转移函数的频率特性 (全通 $a_0 = 10, a_1 = -10, a_2 = 10, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}, Q = 1$)

3.3 基于反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构

实现双二次转移函数的有源滤波器称为双二次型有源滤波器, 它是实现高阶有源滤波器的基本电路, 常简称为“二阶节”或“双二次节”。二阶节可由一个运放或者多个运放和 RC 元件构成, 本节介绍由一个运放和 RC 元件构成的二阶节。按照 RC 网络反馈方式的不同, 可将双二次型有源 RC 滤波器分为正反馈和负反馈两种电路结构。

3.3.1 基于正反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构

1. 电路结构

基于正反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构如图 3-3-1 所示, 其中的 RC 无源网络是一个四端网络, 输入信号 $V_i(s)$ 接入 2 端, 输出信号 $V_o(s)$ 接回 3 端经 RC 无源网络从 1 端反馈回运算放大器的同相输入端, 构成正反馈。为保证运算放大器工作在

线性区, 电路中需要引入负反馈, 这是由输出电压信号 $V_o(s)$ 经分压后反馈到运算放大器的反相输入端来实现的, 因此如图 3-3-1 所示的电路为一种混合反馈结构。

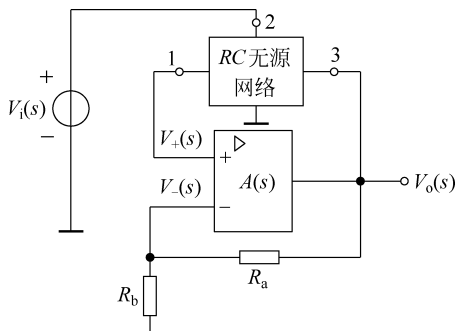


图 3-3-1 基于正反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构图

2. 转移函数

对于图 3-3-1 中的 RC 无源网络来说, 该网络有两个输入[2 端的 $V_2(s) = V_i(s)$ 与 3 端的 $V_3(s) = V_o(s)$]和一个输出[1 端的 $V_1(s) = V_+(s)$], 在此定义 RC 无源网络的前馈转移函数 $T_{12}(s)$ 和反馈转移函数 $T_{13}(s)$ 分别为

$$T_{12}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{V_3(s)=0} \quad (3-3-1)$$

$$T_{13}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_3(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (3-3-2)$$

由叠加定理知, 运算放大器的同相输入端电位 $V_+(s)$ 可表示为

$$V_+(s) = T_{12}(s)V_i(s) + T_{13}(s)V_o(s) \quad (3-3-3)$$

分析反相输入端电位 $V_-(s)$ 可得

$$V_-(s) = \frac{R_b}{R_a + R_b} V_o(s) \quad (3-3-4)$$

对于实际运算放大器来说, 其输入-输出有如下关系:

$$V_o(s) = A(s)[V_+(s) - V_-(s)] \quad (3-3-5)$$

将式(3-3-3)和式(3-3-4)代入式(3-3-5), 可分析出该滤波器的增益为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{KT_{12}(s)}{1 - KT_{13}(s) + \frac{K}{A(s)}} \quad (3-3-6)$$

式中, $K = 1 + R_a/R_b$, 为负反馈支路中电阻 R_a 和 R_b 的分压系数。

运算放大器为理想的情况下, $A(s) \rightarrow \infty$, 则

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = \frac{KT_{12}(s)}{1 - KT_{13}(s)} \quad (3-3-7)$$

将 RC 网络的前馈转移函数 $T_{12}(s)$ 和反馈转移函数 $T_{13}(s)$ 分别写为两个多项式

之比

$$T_{12}(s) = \frac{N_{12}(s)}{D_{12}(s)} \quad (3-3-8)$$

$$T_{13}(s) = \frac{N_{13}(s)}{D_{13}(s)} \quad (3-3-9)$$

一般情况下,同一网络的不同转移函数的极点是相同的,即分母多项式是相同的,令 $D_{12}(s) = D_{13}(s) = D(s)$,故

$$T_{12}(s) = \frac{N_{12}(s)}{D(s)} \quad (3-3-10)$$

$$T_{13}(s) = \frac{N_{13}(s)}{D(s)} \quad (3-3-11)$$

将式(3-3-10)和式(3-3-11)代入式(3-3-7)有

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = \frac{KN_{12}(s)}{D(s) - KN_{13}(s)} \quad (3-3-12)$$

式(3-3-12)表明,当运算放大器为理想的情况下,RC 网络前馈转移函数 $T_{12}(s)$ 的零点即滤波器转移函数 $H(s)$ 的零点,RC 网络的极点、反馈转移函数 $T_{13}(s)$ 的零点及因子 K 共同决定 $H(s)$ 的极点。

3. RC 无源网络的实现

图 3-3-1 中的 RC 无源网络常用梯形网络来实现,其一般电路结构如图 3-3-2(a)所示。

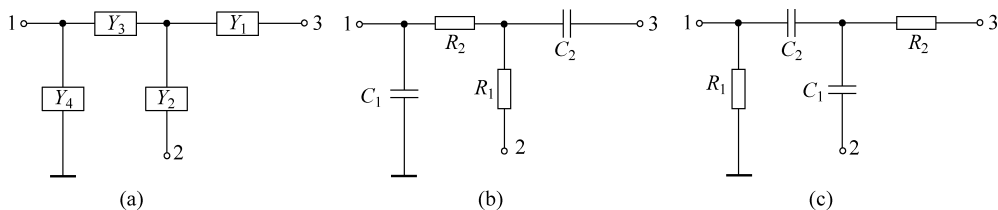


图 3-3-2 适用于图 3-3-1 所示结构的 RC 无源梯形网络 1

可分析图 3-3-2(a)所示梯形网络的前馈转移函数和反馈转移函数分别为

$$T_{12}(s) = \frac{N_{12}(s)}{D(s)} = \frac{Y_2 Y_3}{Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4} \quad (3-3-13)$$

$$T_{13}(s) = \frac{N_{13}(s)}{D(s)} = \frac{Y_1 Y_3}{Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4} \quad (3-3-14)$$

结合式(3-3-12)、式(3-3-13)和式(3-3-14),可分析出运算放大器为理想的情况下,由图 3-3-2(a)所示 RC 梯形网络构成的如图 3-3-1 所示滤波器的转移函数 $H(s)$ 可表示为

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = \frac{KY_2 Y_3}{(1-K)Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4} \quad (3-3-15)$$

图 3-3-2(b)和图 3-3-2(c)给出了 2 种与图 3-3-2(a)结构相同,并适用于图 3-3-1 所示结构中的 RC 无源梯形网络。

对比图 3-3-2(a)和图 3-3-2(b),有 $Y_1 = sC_2$ 、 $Y_2 = 1/R_1$ 、 $Y_3 = 1/R_2$ 、 $Y_4 = sC_1$,代入式(3-3-15),可分析出运算放大器为理想的情况下,由图 3-3-2(b)所示 RC 梯形网络构成的如图 3-3-1 所示滤波器的转移函数 $H(s)$ 可表示为

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = K \frac{1}{s^2 + s \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C_2} + \frac{1-K}{R_2 C_1} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (3-3-16)$$

由式(3-3-16)可以看出,此时构成二阶低通滤波器。

对比图 3-3-2(a)和图 3-3-2(c),有 $Y_1 = 1/R_2$ 、 $Y_2 = sC_1$ 、 $Y_3 = sC_2$ 、 $Y_4 = 1/R_1$,代入式(3-3-15),可分析出运算放大器为理想的情况下,由图 3-3-2(c)所示 RC 梯形网络构成的如图 3-3-1 所示滤波器的转移函数 $H(s)$ 可表示为

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = K \frac{s^2}{s^2 + s \left[\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_1} + \frac{1-K}{R_2 C_1} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (3-3-17)$$

由式(3-3-17)可以看出,此时构成二阶高通滤波器。

图 3-3-3(b)所示网络亦适用于图 3-3-1 所示结构中的 RC 梯形网络,该网络依然是梯形网络,其一般形式如图 3-3-3(a)所示,是以图 3-3-2(a)所示梯形网络为基础,在中间节点和地之间接入了 Y_5 。

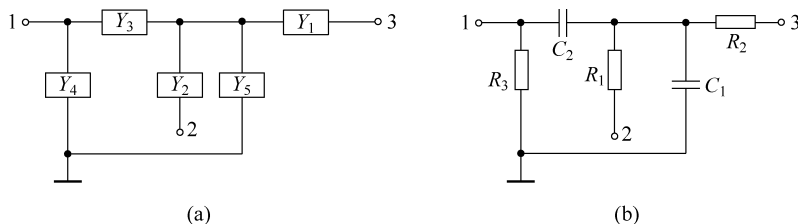


图 3-3-3 适用于图 3-3-1 所示结构的 RC 无源梯形网络 2

可分析图 3-3-3(a)所示梯形网络的前馈转移函数和反馈转移函数分别为

$$T_{12}(s) = \frac{N_{12}(s)}{D(s)} = \frac{Y_2 Y_3}{Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5 + Y_4 Y_5} \quad (3-3-18)$$

$$T_{13}(s) = \frac{N_{13}(s)}{D(s)} = \frac{Y_1 Y_3}{Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5 + Y_4 Y_5} \quad (3-3-19)$$

对比图 3-3-3(a)和图 3-3-3(b),有 $Y_1 = 1/R_2$ 、 $Y_2 = 1/R_1$ 、 $Y_3 = sC_2$ 、 $Y_4 = 1/R_3$ 、 $Y_5 = sC_1$ 。结合式(3-3-12)、式(3-3-18)和式(3-3-19),可分析出当运算放大器为理想的情况下,由图 3-3-3(b)所示 RC 梯形网络构成的如图 3-3-1 所示滤波器的转移函数 $H(s)$ 可表示为

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = \frac{s \frac{K}{R_1 C_1}}{s^2 + s \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C_1} + \frac{1}{R_3} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) - K \frac{1}{R_2 C_1} \right] + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_3 C_1 C_2}} \quad (3-3-20)$$

由式(3-3-20)可以看出,此时构成二阶带通滤波器。

3.3.2 基于负反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构

1. 电路结构

基于负反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构如图 3-3-4 所示,其中的 RC 无源网络是一个四端网络,输入信号 $V_i(s)$ 接入 2 端,输出信号 $V_o(s)$ 接回 3 端经 RC 无源网络从 1 端反馈回运算放大器的反相输入端,构成负反馈。

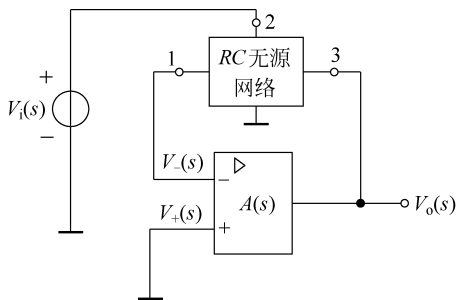


图 3-3-4 基于负反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构图

2. 转移函数

图 3-3-4 所示结构中的 RC 无源网络,同样定义前馈转移函数 $T_{12}(s)$ 和反馈转移函数 $T_{13}(s)$ 与式(3-3-1)和式(3-3-2)相同。

利用叠加定理,运算放大器的反相输入端电位 $V_-(s)$ 可表示为

$$V_-(s) = T_{12}(s)V_i(s) + T_{13}(s)V_o(s) \quad (3-3-21)$$

图 3-3-4 所示电路中同相输入端电位 $V_+(s) = 0$, 将 $V_+(s)$ 及式(3-3-21)代入式(3-3-5)所示的实际运算放大器的输入-输出关系表达式,可分析出该滤波器的增益为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{T_{12}(s)}{T_{13}(s) + \frac{1}{A(s)}} \quad (3-3-22)$$

当运算放大器为理想的情况下, $A(s) \rightarrow \infty$, 则

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = - \frac{T_{12}(s)}{T_{13}(s)} \quad (3-3-23)$$

将式(3-3-10)和式(3-3-11)代入式(3-3-23)有

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = -\frac{N_{12}(s)}{N_{13}(s)} \quad (3-3-24)$$

式(3-3-24)表明,当运算放大器为理想的情况下,RC 网络前馈转移函数 $T_{12}(s)$ 的零点即滤波器转移函数 $H(s)$ 的零点,RC 网络反馈转移函数 $T_{13}(s)$ 的零点即滤波器转移函数 $H(s)$ 的极点。

3. RC 无源网络的实现

负反馈结构单运放双二次型有源 RC 滤波器中常用的 RC 无源网络是桥 T 形网络,其一般电路结构如图 3-3-5(a)所示。

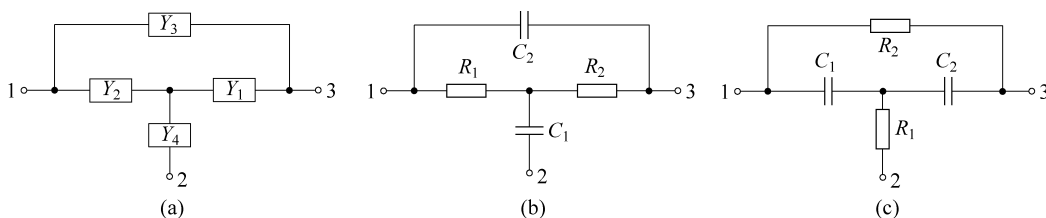


图 3-3-5 适用于图 3-3-4 所示结构中的 RC 无源桥 T 形网络 1

可分析图 3-3-5(a)所示桥 T 形网络的前馈转移函数和反馈转移函数分别为

$$T_{12}(s) = \frac{N_{12}(s)}{D(s)} = \frac{Y_2 Y_4}{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4} \quad (3-3-25)$$

$$T_{13}(s) = \frac{N_{13}(s)}{D(s)} = \frac{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + Y_3 Y_4}{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4} \quad (3-3-26)$$

结合式(3-3-24)、式(3-3-25)和式(3-3-26),可分析出当运算放大器为理想的情况下,由图 3-3-5(a)所示 RC 桥 T 形网络构成的如图 3-3-4 所示滤波器的转移函数 $H(s)$ 可表示为

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = -\frac{Y_2 Y_4}{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + Y_3 Y_4} \quad (3-3-27)$$

图 3-3-5(b)和图 3-3-5(c)给出了 2 种与图 3-3-5(a)结构相同,并适用于图 3-3-4 所示结构中的 RC 无源桥 T 形网络。

对比图 3-3-5(a)和图 3-3-5(b),有 $Y_1 = 1/R_2$ 、 $Y_2 = 1/R_1$ 、 $Y_3 = sC_2$ 、 $Y_4 = sC_1$,代入式(3-3-27),可分析出当运算放大器为理想的情况下,由图 3-3-5(b)所示 RC 梯形网络构成的如图 3-3-4 所示滤波器的转移函数 $H(s)$ 可表示为

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = -\frac{s \frac{1}{R_1 C_2}}{s^2 + s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C_1} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (3-3-28)$$

由式(3-3-28)可以看出,此时构成二阶带通滤波器。

对比图 3-3-5(a)和图 3-3-5(c),有 $Y_1 = sC_2$ 、 $Y_2 = sC_1$ 、 $Y_3 = 1/R_2$ 、 $Y_4 = 1/R_1$,代入

式(3-3-27),可分析出当运算放大器为理想的情况下,由图 3-3-5(c)所示 RC 梯形网络构成的如图 3-3-4 所示滤波器的转移函数 $H(s)$ 可表示为

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = - \frac{s \frac{1}{R_1 C_2}}{s^2 + s \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (3-3-29)$$

由式(3-3-29)可以看出,此时构成二阶带通滤波器。

图 3-3-6(b)和图 3-3-6(c)所示网络亦适用于图 3-3-4 所示结构中的 RC 梯形网络,该网络依然是桥 T 形网络,其一般形式如图 3-3-6(a)所示,是以图 3-3-5(a)所示桥 T 形网络为基础,在中间节点和地之间接入了 Y_5 。

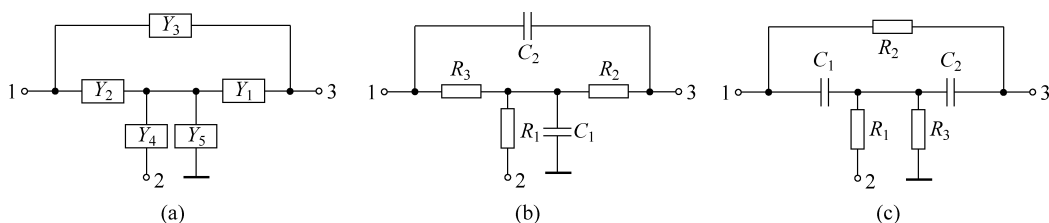


图 3-3-6 适用于图 3-3-4 所示结构中的 RC 无源桥 T 形网络 2

可分析图 3-3-6(a)所示梯形网络的前馈转移函数和反馈转移函数分别为

$$T_{12}(s) = \frac{N_{12}(s)}{D(s)} = \frac{Y_2 Y_4}{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5} \quad (3-3-30)$$

$$T_{13}(s) = \frac{N_{13}(s)}{D(s)} = \frac{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5}{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5} \quad (3-3-31)$$

对比图 3-3-6(a)和图 3-3-6(b),有 $Y_1 = 1/R_2$ 、 $Y_2 = 1/R_3$ 、 $Y_3 = sC_2$ 、 $Y_4 = 1/R_1$ 、 $Y_5 = sC_1$ 。结合式(3-3-24)、式(3-3-30)和式(3-3-31),可分析出当运算放大器为理想的情况下,由图 3-3-6(b)所示 RC 梯形网络构成的如图 3-3-4 所示滤波器的转移函数 $H(s)$ 可表示为

$$H(s) \big|_{A(s) \rightarrow \infty} = - \frac{\frac{1}{R_1 R_3 C_1 C_2}}{s^2 + s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{1}{C_1} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad (3-3-32)$$

由式(3-3-32)可以看出,此时构成二阶低通滤波器。

对比图 3-3-6(a)和图 3-3-6(c),有 $Y_1 = sC_2$ 、 $Y_2 = sC_1$ 、 $Y_3 = 1/R_2$ 、 $Y_4 = 1/R_1$ 、 $Y_5 = 1/R_3$ 。结合式(3-3-24)、式(3-3-30)和式(3-3-31),可分析出运算放大器为理想的情况下,由图 3-3-6(c)所示 RC 梯形网络构成的如图 3-3-4 所示滤波器的转移函数 $H(s)$ 可表示为

$$H(s) \Big|_{A(s) \rightarrow \infty} = - \frac{s \frac{1}{R_1 C_2}}{s^2 + s \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{1}{R_2 C_1 C_2}} \quad (3-3-33)$$

由式(3-3-33)可以看出,此时构成二阶带通滤波器。

3.4 基于反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器的分析与设计

3.4.1 低通有源 RC 滤波器的分析与设计

1. 基于正反馈的单运放双二次型低通有源 RC 滤波器的分析与设计

将图 3-3-2(b)所示 RC 梯形网络引入图 3-3-1 所示基于正反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构中,即得到如图 3-4-1(a)所示的低通有源 RC 滤波器,该滤波器称为 Sallen-Key(萨伦凯)低通滤波器,可进一步整理为如图 3-4-1(b)所示电路。

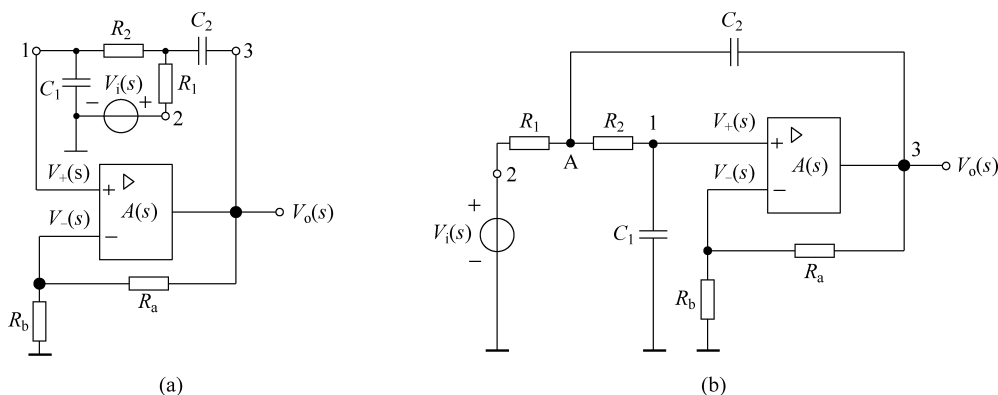


图 3-4-1 Sallen-Key 低通滤波器

3.3.3 节从系统结构的角对于该滤波器的传递函数已有分析,其结果如式(3-3-16)所示。除此之外,也可以直接对图 3-4-1(b)所示电路进行分析。为简化分析,把运算放大器看作理想的,由理想运放的虚短和虚断特性,可将同相输入端电位 $V_+(s)$ 及反相输入端电位 $V_-(s)$ 表示为

$$V_+(s) = V_-(s) = \frac{R_b}{R_a + R_b} V_o(s) \quad (3-4-1)$$

由理想运放的虚断特性可知 R_2 和 C_1 近似串联,有

$$V_+(s) = \frac{\frac{1}{sC_1}}{R_2 + \frac{1}{sC_1}} V_A(s) \quad (3-4-2)$$

结合式(3-4-1)和式(3-4-2)可分析出节点 A 的电位 $V_A(s)$ 为

$$V_A(s) = \frac{R_b(1 + sR_2C_1)}{R_a + R_b}V_o(s) \quad (3-4-3)$$

列写节点 A 的 KCL 方程,有下式成立

$$sC_2[V_o(s) - V_A(s)] + \frac{V_i(s) - V_A(s)}{R_1} + \frac{V_+(s) - V_A(s)}{R_2} = 0 \quad (3-4-4)$$

将式(3-4-1)和式(3-4-3)代入式(3-4-4),可得图 3-4-1(b)所示 Sallen-Key 低通滤波器的转移函数为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = K \frac{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + s \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C_2} + \frac{1-K}{R_2C_1} \right] + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \quad (3-4-5)$$

式中, $K = 1 + R_a/R_b$ 为负反馈支路中电阻 R_a 和 R_b 的分压系数。

观察发现,式(3-4-5)与在 3.3.3 节的分析结果[式(3-3-16)]相同。为便于对比分析,将式(3-2-15)所示的二阶低通滤波器转移函数的一般形式重写如下:

$$H(s) = H_0 \frac{\omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2} \quad (3-4-6)$$

对比式(3-4-5)和式(3-4-6),可得图 3-4-1(b)所示低通滤波器的设计方程为

$$\omega_p = \omega_z = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \quad (3-4-7)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{(R_1 + R_2)C_1 + (1-K)R_1C_2} \quad (3-4-8)$$

$$H_0 = K = 1 + \frac{R_a}{R_b} \quad (3-4-9)$$

为设计图 3-4-1(b)所示 Sallen-Key 低通滤波器,可以根据指标 ω_p 、 Q_p 和 H_0 直接基于式(3-4-7)、式(3-4-8)和式(3-4-9)求取元件值。但待确定的参数共有 5 个, R_1 、 R_2 、 C_1 、 C_2 和 K ,关系式只有 3 个,因此在选择元件值时有一定的自由度。但这样设计出的电路元件值分散性较大,实际设计中还有一些技巧,下面介绍两种设计方案。

设计方案 1。

- ① 为减小元件值的分散性,取 $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$,选取适当的电容值 C ;
- ② 基于式(3-4-7),根据给定的指标 ω_p 和已确定的电容值 C 确定电阻值 R ;
- ③ 基于式(3-4-8),根据给定的指标 Q_p 以及已确定的 C 和 R 确定 K ;
- ④ 基于式(3-4-9),根据求出的 K 值确定电阻值 R_a 和 R_b 。

设计方案 2。

允许元件值有一定的分散性,取 $R_1 = R$, $R_2 = \beta R$, $C_1 = C$, $C_2 = \alpha C$,其中 β 称为电阻比, α 称为电容比,代入式(3-4-7)和式(3-4-8),有下式成立

$$\beta = \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2Q_p} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{4Q_p^2} + (K-1)\alpha - 1} \right]^2 \quad (3-4-10)$$

为使 β 为实数,需要

$$\frac{\alpha}{4Q_p^2} + (K - 1)\alpha - 1 \geq 0 \quad (3-4-11)$$

K 值通常取 1 或 2,当 $K=1$ [图 3-4-1(b)所示电路中用短路替代 R_a 并除去 R_b]时,要求 $\alpha \geq 4Q_p^2$,由于电容比 α 与 Q_p^2 有关,因此 $K=1$ 只能用于 Q_p 较低的滤波器设计。当 $K=2$ 时,要求 $\alpha \geq 4Q_p^2/(1+4Q_p^2)$,显然,对 Q_p 较大的电路,电容比并不大。

设计方案 2 的步骤如下:

- ① 选取适当的 K 值,基于式(3-4-11),根据给定的指标 Q_p 确定电容比 α ;
- ② 基于式(3-4-10),根据给定的指标 Q_p 以及已确定的 K 和 α 确定电阻比 β ;
- ③ 选取适当的电容值 C ,即取 $C_1=C, C_2=\alpha C$,取 $R_1=R, R_2=\beta R$,基于式(3-4-7),根据给定的指标 ω_p 以及已确定的 α, β 和 C 确定 R ;
- ④ 基于式(3-4-9),根据选取的 K 值确定电阻值 R_a 和 R_b 。

【例 3-4-1】 已知 Sallen-Key 低通滤波器如图 3-4-1(b)所示,要求设计该滤波器使得其指标分别为 $\omega_p=10^4 \text{ rad/s}, Q_p=1/\sqrt{2}$ 。

解: 设计方案 1。

- ① 取 $R_1=R_2=R, C_1=C_2=C$,选取 $C=1 \text{ nF}$ 。
- ② 将给定的指标 ω_p 及 $C_1=C_2=C=1 \text{ nF}$ 代入式(3-4-7),确定电阻值 R 。

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \frac{1}{RC} \Rightarrow R = \frac{1}{\omega_p C} = \frac{1}{10^4 \times 10^{-9}} = 10^5 (\Omega) = 100 (\text{k}\Omega)$$

- ③ 将给定的指标 Q_p 及 $C_1=C_2=C=1 \text{ nF}, R_1=R_2=R=100 \text{ k}\Omega$ 代入式(3-4-8),确定 K 。

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{(R_1 + R_2)C_1 + (1 - K)R_1 C_2} = \frac{RC}{2RC + (1 - K)RC} = \frac{1}{3 - K}$$

$$\Rightarrow K = 3 - \frac{1}{Q_p} = 3 - \sqrt{2} = 1.586$$

- ④ 为减小元件值的分散性,取 $R_b=R=100 \text{ k}\Omega$,将 K 及 R_b 代入式(3-4-9),确定电阻值 R_a 。

$$K = 1 + \frac{R_a}{R_b} \Rightarrow R_a = R_b(K - 1) = 10^5 \times (1.586 - 1) = 5.86 \times 10^4 (\Omega) = 58.6 (\text{k}\Omega)$$

利用 Multisim 对所设计的电路进行仿真,相应仿真电路及结果如图 3-4-2 所示。由其幅频特性图测出通带增益为 4.006dB,对应 $20\lg(K) = 20\lg(1.586) = 4.006\text{dB}$; 测出截止频率(增益为 $4.006 - 3 = 1.006\text{dB}$ 处对应频率)约为 1.588kHz,对应 $\omega_p = 10^4 \text{ rad/s}$,因此该设计满足设计需求。在仿真电路中直接采用波特测试仪(Bode Plotter)进行传递函数的频率特性分析,也可以使用 Multisim 的交流扫描(AC Sweep)分析功能进行讨论。

设计方案 2。

- ① 选取 $K=1$,代入式(3-4-11),得 $\alpha \geq (4Q_p^2 = 2)$,取 $\alpha=2$ 。
- ② 将 Q, K 和 α 代入式(3-4-10),确定电阻比 β 。

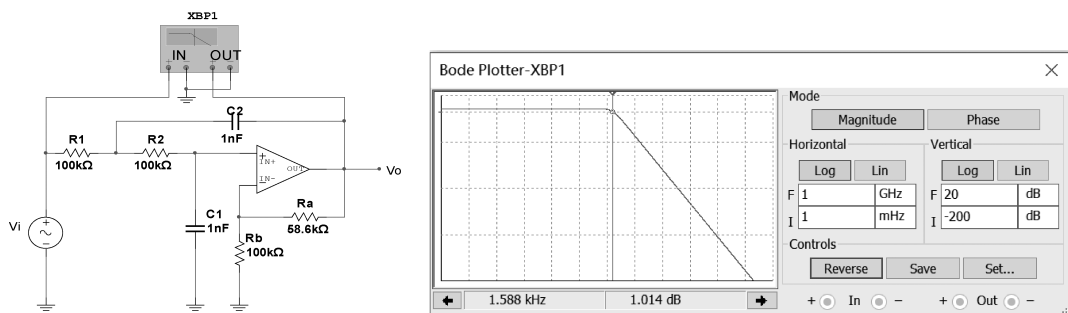


图 3-4-2 例 3-4-1 按设计方案 1 所设计电路的仿真电路及仿真结果

$$\beta = \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{4Q^2} + (K-1)\alpha - 1} \right]^2 = 1$$

③ 选取 $C = 1\text{nF}$, 则 $C_1 = C = 1\text{nF}$, $C_2 = \alpha C = 2\text{nF}$, 取 $R_1 = R$, 则 $R_2 = R$, 将 ω_p 、 C_1 和 C_2 代入式(3-4-7), 确定电阻值 R 。

$$\begin{aligned} \omega_p &= \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}} \Rightarrow R = \frac{1}{\omega_p \sqrt{C_1 C_2}} \\ &= \frac{1}{10^4 \times 10^{-9} \times \sqrt{2}} = 7.071 \times 10^4 (\Omega) = 70.71 (\text{k}\Omega) \end{aligned}$$

④ 基于式(3-4-9), 根据选取的 K 值, 确定电阻值 R_a 和 R_b 。 $K = 1$, 可用短路替代 R_a 并除去 R_b 。

利用 Multisim 对所设计的电路进行仿真, 相应仿真电路及结果如图 3-4-3 所示。由其幅频特性图测出通带增益为 0dB , 对应 $20\lg(K) = 20\lg(1) = 0\text{dB}$; 测出截止频率(增益为 $0 - 3 = -3\text{dB}$ 处对应频率)约为 1.588kHz , 对应 $\omega_p = 10^4 \text{rad/s}$, 因此该设计满足了设计需求。

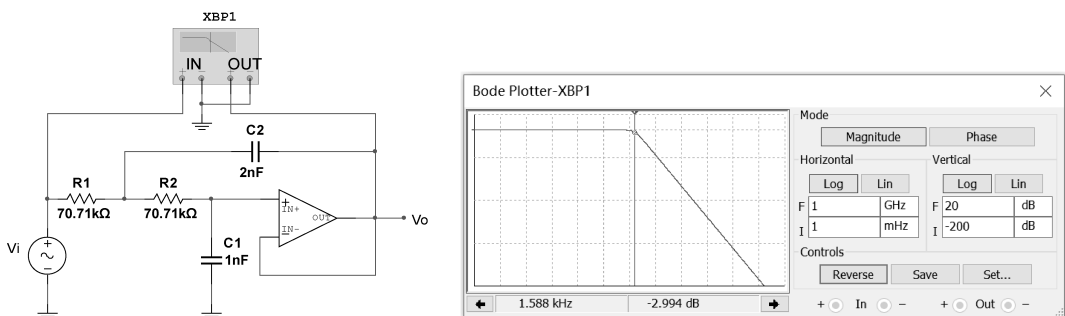


图 3-4-3 例 3-4-1 按设计方案 2 所设计电路的仿真电路及仿真结果

对于不同的设计方案, 可以通过对比灵敏度来衡量性能好坏。基于式(3-4-7)和式(3-4-8)所示的设计方程, 可求取该滤波器的无源灵敏度为

$$S_{R_1}^{\omega_p} = S_{R_2}^{\omega_p} = S_{C_1}^{\omega_p} = S_{C_2}^{\omega_p} = -0.5 \quad (3-4-12)$$

$$S_{R_a}^{\omega_p} = S_{R_b}^{\omega_p} = 0 \quad (3-4-13)$$

$$S_{R_1}^{Q_p} = -S_{R_2}^{Q_p} = -0.5 + Q_p \sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}} \quad (3-4-14)$$

$$S_{C_2}^{Q_p} = -S_{C_1}^{Q_p} = -0.5 + Q_p \left[\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \right] \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad (3-4-15)$$

$$S_{R_a}^{Q_p} = -S_{R_b}^{Q_p} = (K-1)Q_p \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}} \quad (3-4-16)$$

由式(3-4-14)和式(3-4-15)可以看出 $S_{R_i}^{Q_p}$ 和 $S_{C_i}^{Q_p}$ ($i=1,2$) 直接与电路的 $Q_p \sqrt{C_1/C_2}$ 值有关,当 Q_p 值较大时,为了降低无源灵敏度,需要增大电容比 $\alpha = C_2/C_1$ 。

2. 基于负反馈的单运放双二次型低通有源 RC 滤波器的分析与设计

将图 3-3-6(b)所示 RC 无源网络引入图 3-3-4 所示基于负反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构中,即得到如图 3-4-4 所示的低通有源 RC 滤波器,该滤波器为多端负反馈(Multiple Feedback, MFB)低通滤波器,又称无限增益多路反馈低通滤波器。

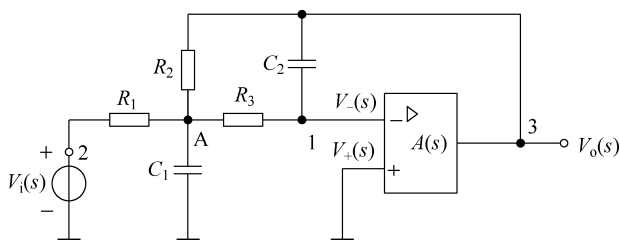


图 3-4-4 基于负反馈的单运放双二次型低通有源 RC 滤波器

3.3.3 节从系统结构的角度对于该滤波器的传递函数已有分析,其结果如式(3-3-32)所示。除此之外,也可以直接对图 3-4-4 所示电路进行分析。为简化分析,将运算放大器看作理想的,由理想运放的虚短特性知电路中同相输入端电位 $V_+(s)$ 和反相输入端电位 $V_-(s)$ 相等,可表示为

$$V_+(s) = V_-(s) = 0 \quad (3-4-17)$$

列写节点 A 的 KCL 方程,有下式成立:

$$\frac{V_o(s) - V_A(s)}{R_2} + \frac{V_i(s) - V_A(s)}{R_1} + \frac{V_-(s) - V_A(s)}{R_3} - sC_1 V_A(s) = 0 \quad (3-4-18)$$

将式(3-4-17)代入式(3-4-18),可得该低通滤波器的转移函数为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-\frac{1}{R_1 R_3 C_1 C_2}}{s^2 + s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{1}{C_1} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad (3-4-19)$$

观察发现,式(3-4-19)与 3.3.3 节的分析结果[式(3-3-32)]相同。

对比式(3-4-6)和式(3-4-19),可得该滤波器的设计方程为

$$\omega_p = \omega_z = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad (3-4-20)$$

$$Q_p = \frac{R_1 \sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) C_2} \quad (3-4-21)$$

$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1} \quad (3-4-22)$$

对于该低通滤波器的设计可以参照 Sallen-Key 低通滤波器的设计方法。

3.4.2 带通有源 RC 滤波器的分析与设计

1. 基于正反馈的单运放双二次型带通有源 RC 滤波器的分析与设计

将图 3-3-3(b)所示 RC 梯形网络引入图 3-3-1 所示电路结构中,整理后可得如图 3-4-5 所示的 Sallen-Key 带通滤波器。

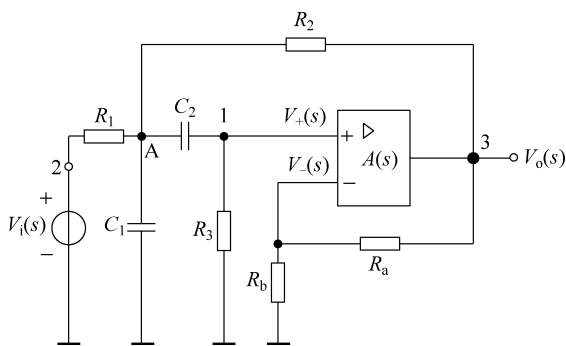


图 3-4-5 Sallen-Key 带通滤波器

3.3.3 节从系统结构的角度对于该滤波器的传递函数已有分析,其结果如式(3-3-20)所示。除此之外,也可以直接对图 3-4-5 所示电路进行分析。为简化分析,把运算放大器看作理想的,由理想运放的虚短和虚断特性,可将同相输入端电位 $V_+(s)$ 及反相输入端电位 $V_-(s)$ 表示为

$$V_+(s) = V_-(s) = \frac{R_b}{R_a + R_b} V_o(s) \quad (3-4-23)$$

由理想运放的虚断特性可知 C_2 和 R_3 近似串联,有

$$V_+(s) = \frac{R_3}{R_3 + \frac{1}{sC_2}} V_A(s) \quad (3-4-24)$$

结合式(3-4-23)和式(3-4-24)可分析出节点 A 的电位 $V_A(s)$ 为

$$V_A(s) = \frac{R_b(1 + sR_3C_2)}{sR_3C_2(R_a + R_b)}V_o(s) \quad (3-4-25)$$

列写节点 A 的 KCL 方程,有

$$\frac{V_o(s) - V_A(s)}{R_2} + \frac{V_i(s) - V_A(s)}{R_1} + sC_2[V_+(s) - V_A(s)] - sC_1V_A(s) = 0 \quad (3-4-26)$$

将式(3-4-23)和式(3-4-25)代入式(3-4-26),可得该 Sallen-Key 带通滤波器的转移函数为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s \frac{K}{R_1C_1}}{s^2 + s \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C_1} + \frac{1}{R_3} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) - K \frac{1}{R_2C_1} \right] + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_3C_1C_2}} \quad (3-4-27)$$

式中, $K = 1 + R_a/R_b$ 为负反馈支路中电阻 R_a 和 R_b 的分压系数。

观察发现,式(3-4-27)与 3.3.3 节的分析结果[式(3-3-20)]相同。为便于对比分析,将式(3-2-23)所示的二阶带通滤波器转移函数的一般形式重写如下:

$$H(s) = H_0 \frac{\frac{\omega_z}{Q_z}s}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2} = H'_0 \frac{s}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2} \quad (3-4-28)$$

对比式(3-4-27)和式(3-4-28),可得滤波器的设计方程为

$$\omega_p = \sqrt{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_3C_1C_2}} \quad (3-4-29)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_3C_1C_2}}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C_1} + \frac{1}{R_3} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) - K \frac{1}{R_2C_2}} \quad (3-4-30)$$

$$H'_0 = \frac{K}{R_1C_1} \quad (3-4-31)$$

对于该带通滤波器的设计可以参照 Sallen-Key 低通滤波器的设计方法。

2. 基于负反馈的单运放双二次型带通有源 RC 滤波器的分析与设计

将图 3-3-6(c)所示 RC 无源网络引入图 3-3-4 所示基于负反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构图中,得到如图 3-4-6 所示的带通有源 RC 滤波器,该滤波器为 Delyiannis(德利雅尼斯)带通滤波器。与图 3-3-4 所示结构电路不同的是该电路中还引入了正反馈,这是由输出电压信号 $V_o(s)$ 经分压后反馈到运算放大器的同相输入端来实现的,因此 Delyiannis 带通滤波器为混合反馈结构,这是为了使电路在 R_2/R_1 受到限制的情况下实现高 Q 值。

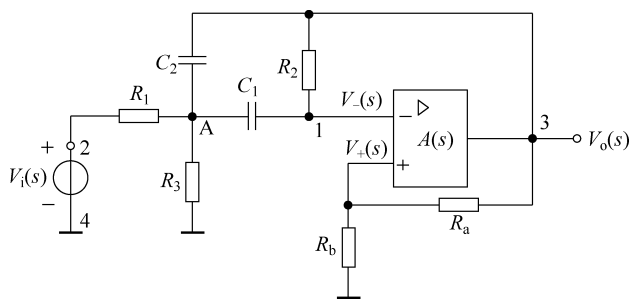


图 3-4-6 Delyiannis 带通滤波器

为简化分析,把运算放大器看作理想的,由理想运放的虚短和虚断特性,可将同相输入端电位 $V_+(s)$ 及反相输入端电位 $V_-(s)$ 表示为

$$V_+(s) = V_-(s) = \frac{R_b}{R_a + R_b} V_o(s) \quad (3-4-32)$$

由理想运放的虚断特性可知 C_1 和 R_2 近似串联,利用叠加定理有如下关系成立:

$$V_-(s) = \frac{R_2}{R_2 + 1/(sC_1)} V_A(s) + \frac{1/(sC_1)}{R_2 + 1/(sC_1)} V_o(s) \quad (3-4-33)$$

将式(3-4-32)代入式(3-4-33),可求取节点 A 的电位 $V_A(s)$ 为

$$V_A(s) = \left[\frac{R_b(1 + sR_2C_1)}{s(R_a + R_b)R_2C_1} - \frac{1}{sR_2C_1} \right] V_o(s) \quad (3-4-34)$$

列写节点 A 的 KCL 方程,有下式成立

$$\frac{V_i(s) - V_A(s)}{R_1} - \frac{V_A(s)}{R_3} + sC_1[V_-(s) - V_A(s)] + sC_2[V_o(s) - V_A(s)] = 0 \quad (3-4-35)$$

将式(3-4-32)和式(3-4-34)代入式(3-4-35),可得该 Delyiannis 带通滤波器的转移函数为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{s \frac{\gamma}{R_1 C_2}}{s^2 + s \left[\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) + (1 - \gamma) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{1}{C_2} \right] + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{1}{R_2 C_1 C_2}} \quad (3-4-36)$$

式中, $\gamma = 1 + (R_b/R_a)$, $K = 1 + (R_a/R_b)$ 。

观察发现,式(3-4-36)与 3.3.3 节的分析结果[式(3-3-33)]有部分不同,不同的原因是电路中的正反馈导致的。若令图 3-4-6 中的 $R_a = \infty$ 和 $R_b = 0$,则电路中的正反馈不复存在,与图 3-3-4 所示结构电路相同。此时, $\gamma = 1 + (R_b/R_a) = 1$,将其代入式(3-4-36),所得到的传递函数则与式(3-3-33)完全相同。

对比式(3-4-28)和式(3-4-36),可得该 Delyiannis 带通滤波器的设计方程为

$$\omega_p = \sqrt{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{1}{R_2 C_1 C_2}} \quad (3-4-37)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) \frac{1}{R_2 C_1 C_2}}}{\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + (1-\gamma) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) \frac{1}{C_2}} \quad (3-4-38)$$

$$|H'_0| = \frac{\gamma}{R_1 C_2} \quad (3-4-39)$$

若允许元件值有一定的分散性,令 $R = R_1 // R_3$, $R_2 = \beta R$, $C_1 = C$, $C_2 = \alpha C$, 则该 Delyiannis 带通滤波器的设计方程为

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha R^2 C^2}} \quad (3-4-40)$$

$$Q_p = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + (1-\gamma) \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} \quad (3-4-41)$$

$$|H'_0| = \frac{\gamma}{\alpha R_1 C} \quad (3-4-42)$$

由以上设计方程,可分别求得该带通滤波器的设计公式为

$$R_2 = \frac{1}{C \omega_p} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (3-4-43)$$

$$\gamma = 1 + \frac{1 + \alpha - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{Q_p}}{\beta} \quad (3-4-44)$$

$$R_1 = \frac{\gamma}{\alpha |H'_0| C} \quad (3-4-45)$$

$$R_3 = \frac{1}{\frac{\beta}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \quad (3-4-46)$$

因此该带通滤波器的设计步骤为

- ① 给定 C, α, β 的值;
- ② 按式(3-4-43)、式(3-4-44)、式(3-4-45)和式(3-4-46)依次确定 R_2, γ, R_1 及 R_3 ;
- ③ 根据 γ 值确定 R_a 和 R_b 。

【例 3-4-2】 已知 Delyiannis 带通滤波器如图 3-4-6 所示,要求设计该滤波器使得其指标分别为 $f_p = 4\text{kHz}$, $Q = 20$, $|H_0| = 10$, 设 $C_1 = C_2 = 10\text{nF}$, $\beta = 1.9305$ 。

解: ① 由题意知 $C = 10\text{nF}$, $\alpha = 1$ 。

② 将相关参数代入式(3-4-43)、式(3-4-44)、式(3-4-45)和式(3-4-46),依次确定 R_2, γ, R_1 及 R_3 分别为 $R_2 = 5.528\text{k}\Omega$, $\gamma = 2$, $R_1 = 15.23\text{k}\Omega$, $R_3 = 3.492\text{k}\Omega$ 。

③ 根据 γ 值确定 R_a 和 R_b 。

由 $\gamma = 1 + (R_b/R_a) = 2$, 知 $R_a = R_b$, 在本例中取 $10\text{k}\Omega$ 。

利用 Multisim 对所设计的电路进行仿真,相应仿真电路及结果如图 3-4-7 所示。由

其幅频特性图测出滤波器的中心频率约为 4kHz,在该频率处增益为 19.979dB 时对应 $20\lg K = 20\lg 10 = 20\text{dB}$,因此该设计满足了设计需求。

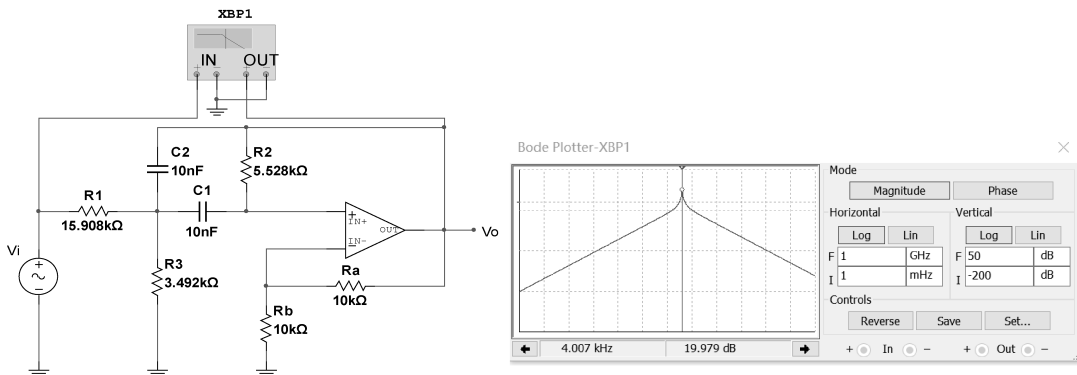


图 3-4-7 例 3-4-2 所设计电路的仿真电路及仿真结果

从该例可看出,尽管 Q 值较大,但最大电阻比并不大。此外, H_0 值还可以独立地加以指定。Delyiannis 带通滤波器的设计也可先指定 γ 值,然后再确定 β 值,相关公式从略。

3.4.3 高通有源 RC 滤波器的分析与设计

高通有源 RC 滤波器的设计方法大致有两种:

一是将相应 RC 无源网络引入基于正反馈或负反馈的单运放双二次型有源 RC 滤波器电路结构图中组成高通滤波器。

二是以低通有源 RC 滤波器为基础,直接将其变换为高通有源 RC 滤波器,这种方法称为 RC-CR 变换法。

RC-CR 变换法将 RC 低通滤波器中的电阻 R 替换为 $1/R\omega_p$ (F) 的电容,电容 C 替换为 $1/C\omega_p$ (Ω) 的电阻,即可直接将其变换为高通有源 RC 滤波器,其变换条件为

$$R_H = \frac{1}{C_L \omega_{Lp}} \quad (3-4-47)$$

$$C_H = \frac{1}{R_L \omega_{Lp}} \quad (3-4-48)$$

式中,下标为 L 的参数为低通原型电路的参数,下标为 H 的参数为变换以后的高通电路的参数。

以图 3-4-8(a)所示的 Sallen-Key 低通滤波器为例,进行 RC-CR 变换后所得电路如图 3-4-8(b)所示,该电路为 Sallen-Key 高通滤波器。

注意,低通滤波器中的 RC 无源网络需要进行 RC-CR 变换,而其放大电路部分[图 3-4-8(a)中的电阻 R_a 和 R_b]不需要进行变换。

图 3-4-8(b)所示滤波器的分析过程与 Sallen-Key 低通滤波器相同,在运放为理想的

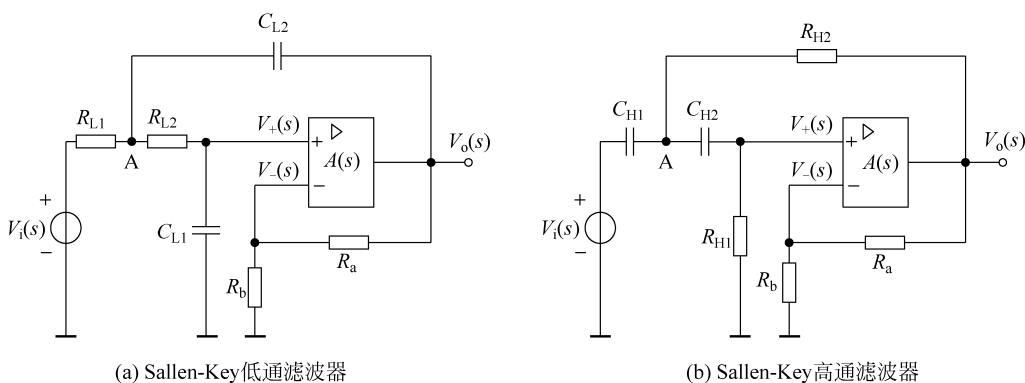


图 3-4-8 RC-CR 变换

情况下,可分析出其转移函数为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Ks^2}{s^2 + s \left[\frac{1}{R_{H1}} \left(\frac{1}{C_{H1}} + \frac{1}{C_{H2}} \right) + \frac{1-K}{R_{H2}C_{H1}} \right] + \frac{1}{R_{H1}R_{H2}C_{H1}C_{H2}}} \quad (3-4-49)$$

式中, $K=1+R_a/R_b$ 为负反馈支路中电阻 R_a 和 R_b 的分压系数。

【例 3-4-3】 用 RC-CR 变换法综合实现如图 3-4-8(b) 所示的 Sallen-Key 高通滤波器,要求其指标分别为 $\omega_p=10^4 \text{ rad/s}$, $Q_p=1/\sqrt{2}$ 。

解: ① 对应低通滤波器的设计

选图 3-4-8(a) 所示的 Sallen-Key 低通滤波器,以 Sallen-Key 低通滤波器设计方案 1 进行设计,其指标要求与例 3-4-1 相同,分析过程详见例 3-4-1,所设计的元件参数分别为 $C_{L1}=C_{L2}=1 \text{ nF}$, $R_{L1}=R_{L2}=R_b=100 \text{ k}\Omega$, $R_a=58.6 \text{ k}\Omega$ 。

② 高通滤波器的设计

由图 3-4-8(a) 所示的 Sallen-Key 低通滤波器通过 RC-CR 变换得到的 Sallen-Key 高通滤波器如图 3-4-8(b) 所示。

根据式 (3-4-47) 和式 (3-4-48) 的变换条件可以求得图 3-4-8(b) 所示电路的元件值为

$$R_{H1}=R_{H2}=\frac{1}{C_L\omega_p}=\frac{1}{10^{-9}\times 10^4}=10^5(\Omega)=100(\text{k}\Omega)$$

$$C_{H1}=C_{H2}=\frac{1}{R_L\omega_p}=\frac{1}{10^5\times 10^4}=10^{-9}(\text{F})=1(\text{nF})$$

利用 Multisim 对所设计的电路进行仿真,相应仿真电路及结果如图 3-4-9 所示。由其幅频特性图测出通带增益为 4.006dB,对应 $20\lg K=20\lg 1.586=4.006\text{dB}$; 测出截止频率(增益为 $4.006-3=1.006\text{dB}$ 处对应频率)约为 1.588kHz,对应 $\omega_p=10^4 \text{ rad/s}$,因此该设计满足了设计需求。

3.4.4 带阻有源 RC 滤波器的分析与设计

将双 T 形 RC 网络引入图 3-4-1 所示电路中可得到如图 3-4-10 所示的带阻有源 RC

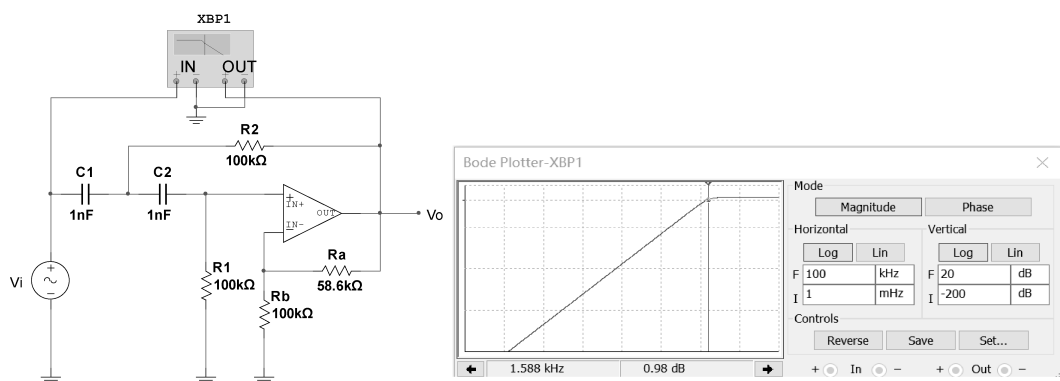


图 3-4-9 例 3-4-3 所设计电路的仿真电路及仿真结果

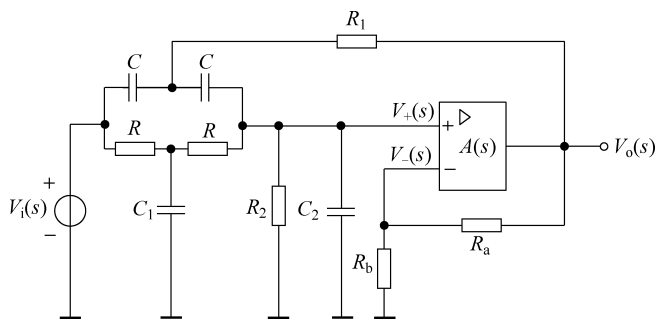


图 3-4-10 带阻有源 RC 滤波器

滤波器,又称为有源 RC 陷波滤波器。

图 3-4-10 中, $R_1 = \frac{R}{2}$, $R_2 = \frac{R}{\beta}$, $C_1 = 2C$, $C_2 = \alpha C$, $K = 1 + \frac{R_a}{R_b}$, 在运放为理想的情况下, 该滤波器的转移函数为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K}{1 + 2\beta} \frac{s^2 + \frac{1}{R^2 C^2}}{s^2 + s \frac{4 - 2K + 2(\alpha + \beta)}{RC(1 + 2\alpha)} + \frac{1 + 2\beta}{R^2 C^2 (1 + 2\alpha)}} \quad (3-4-50)$$

为便于对比分析, 将式 (3-2-29) 所示的二阶带阻滤波器转移函数的一般形式重写如下:

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = H_0 \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2} \quad (3-4-51)$$

对比式 (3-4-48) 和式 (3-4-49), 可得该滤波器的设计方程为

$$\omega_z = \frac{1}{RC} \quad (3-4-52)$$

$$\omega_p = \omega_z \sqrt{\frac{1+2\beta}{1+2\alpha}} = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{1+2\beta}{1+2\alpha}} \quad (3-4-53)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{(1+2\alpha)(1+2\beta)}}{4-2K+2(\alpha+\beta)} \quad (3-4-54)$$

$$H_0 = \frac{K}{1+2\beta} \quad (3-4-55)$$

若取 $\beta=0$, 即去除电阻 R_2 , 此时 $\omega_p < \omega_z$, 则图 3-4-10 所示电路为低通陷波滤波器, 将 $\beta=0$ 代入式(3-4-52)、式(3-4-53)、式(3-4-54)和式(3-4-55), 可求得 $\beta=0$ 时该滤波器的设计公式为

$$R = \frac{1}{\omega_z C} \quad (3-4-56)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_z^2}{\omega_p^2} - 1 \right) \quad (3-4-57)$$

$$C_2 = \alpha C \quad (3-4-58)$$

$$K = 2 + \alpha - \frac{1}{2Q_p} \sqrt{1+2\alpha} \quad (3-4-59)$$

若取 $\alpha=0$, 即去除电容 C_2 , 此时 $\omega_p > \omega_z$, 则图 3-4-10 所示电路为高通陷波滤波器, 将 $\alpha=0$ 代入式(3-4-52)、式(3-4-53)、式(3-4-54)和式(3-4-55), 可求得 $\alpha=0$ 时该滤波器的设计公式为

$$R = \frac{1}{\omega_z C} \quad (3-4-60)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} - 1 \right) \quad (3-4-61)$$

$$R_2 = R/\beta \quad (3-4-62)$$

$$K = 2 + \beta - \frac{1}{2Q_p} \sqrt{1+2\beta} \quad (3-4-63)$$

【例 3-4-4】 试设计如图 3-4-10 所示有源 RC 陷波滤波器, 要求 $Q_p=10$, $\omega_p=2 \times 10^5 \text{ rad/s}$, $\omega_z=10^5 \text{ rad/s}$, 设 $C=500 \text{ pF}$ 。

解: 由于 $\omega_p > \omega_z$, 因此该滤波器为高通陷波滤波器。

取 $\alpha=0$, 即去除电阻 C_2 , 基于式(3-4-60)、式(3-4-61)、式(3-4-62)和式(3-4-63)的设计公式得各元件参数分别为 $R=20 \text{ k}\Omega$, $\beta=1.5$, $R_2=13.33 \text{ k}\Omega$, $K=3.4$, 若取 $R_a=24 \text{ k}\Omega$, 则 $R_b=10 \text{ k}\Omega$ 。按照图 3-4-10 的要求 $R_1=R/2$, $C_1=2C$ 得 R_1 和 C_1 分别为 $R_1=10 \text{ k}\Omega$, $C_1=1000 \text{ pF}$, 所设计电路如图 3-4-11 所示。

利用 Multisim 对所设计的电路进行仿真, 相应仿真电路及结果如图 3-4-12 所示。由其幅频特性图测出该滤波器的零点频率约为 15.884 kHz , 对应 $\omega_z=10^5 \text{ rad/s}$, 极点频率约为 31.768 kHz , 对应 $\omega_p=2 \times 10^5 \text{ rad/s}$, 因此该设计满足了设计需求。

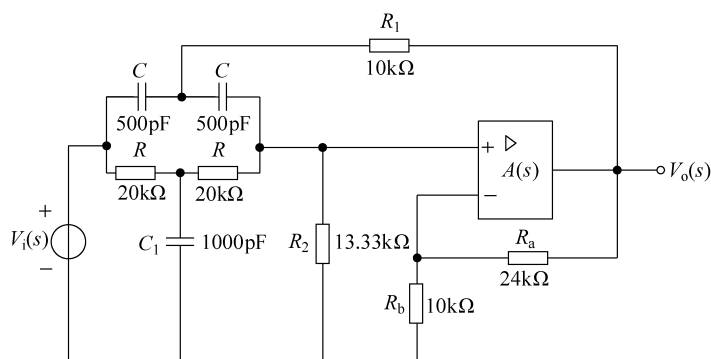


图 3-4-11 例 3-4-4 所设计电路

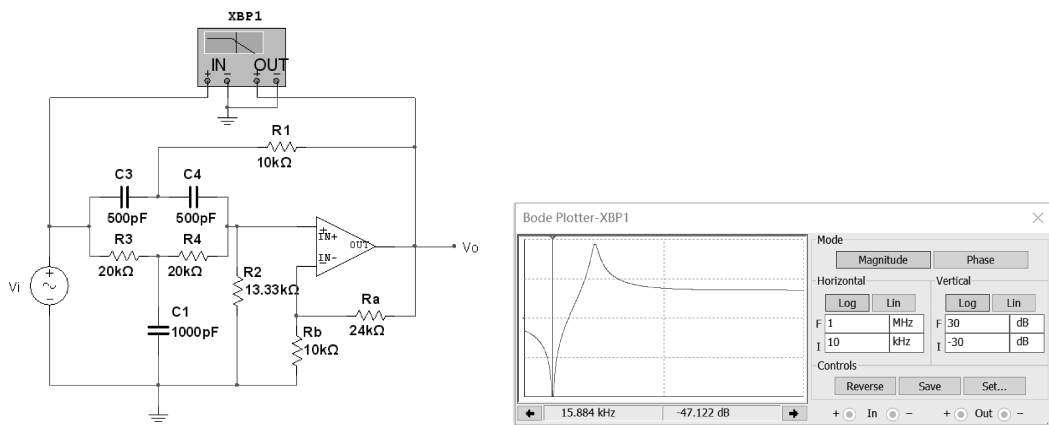
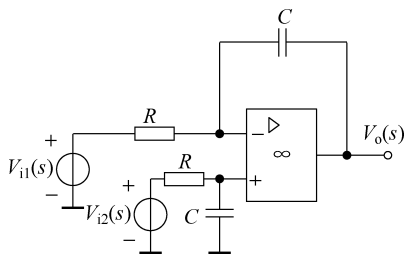


图 3-4-12 例 3-4-4 所设计电路的仿真电路及仿真结果

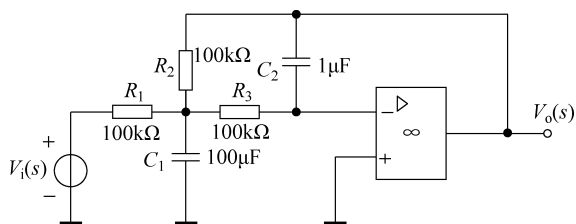
习题三

3-1 假设题图 3-1 所示电路中的运算放大器为理想的,求解其输出电压 $V_o(s)$ 。

3-2 假设题图 3-2 所示电路中的运算放大器为理想的,试求解该电路的转移函数 $V_o(s)/V_i(s)$,并求该电路极点频率 ω_p 的无源灵敏度。



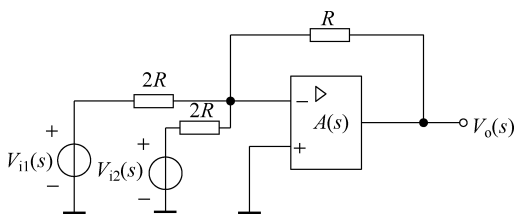
题图 3-1



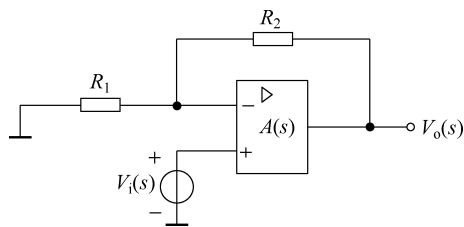
题图 3-2

3-3 反相加法器电路如题图 3-3 所示,其中的运算放大器符合单极点模型,求输出电压 $V_o(s)$ 的表达式。

3-4 同相放大器如题图 3-4 所示, $R_1=100\Omega$, $R_2=1\text{M}\Omega$, 运算放大器符合单极点模型 $A(s)=\frac{A_0\omega_0}{s+\omega_0}$, 其中运算放大器的直流增益 $A_0=10^4$, 3dB 带宽 $\omega_0=100\text{rad/s}$ 。求该同相放大器的闭环直流增益和带宽。

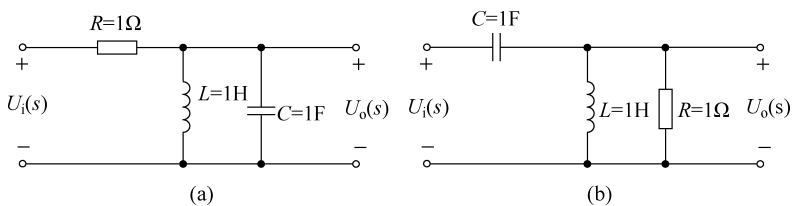


题图 3-3



题图 3-4

3-5 求题图 3-5 所示滤波电路的转移函数、幅频特性和相频特性的表达式,并确定该滤波电路的类型。



题图 3-5

3-6 试设计 Sallen-Key 二阶低通滤波器,要求 $f_p=2\text{kHz}$, $Q_p=10$ 。①取 $R_1=R_2$, $C_1=C_2$; ②取 $C_1=C_2$, $K=2$ 。

3-7 试设计 Sallen-Key 二阶低通滤波器,并求 ω_p 和 Q_p 对各无源元件的灵敏度。选取 $Q_p=10$, $\omega_p=100\text{rad/s}$, $C_1=C_2=1\mu\text{F}$ 。

3-8 试设计 Delyiannis 二阶带通滤波器使其转移函数为

$$H(s) = -\frac{2 \times 10^4 s}{s^2 + 2000s + 10^8}$$

设滤波器中运算放大器的同相输入端直接接地,两电容值相同。

3-9 用 RC-CR 变换法综合高通滤波器函数

$$H(s) = K \frac{s^2}{s^2 + s + 100}$$

要求采用 Sallen-Key 高通滤波电路来实现, Sallen-Key 低通滤波器设计时取 $R_1=R_2=R$, $C_1=C_2=C$ 。