



通过第1章的学习,我们已经知道了傅里叶变换。傅里叶变换的本质是建立以“时间”为变量的信号与以“频率”为变量的频谱函数之间的变换关系,换言之,傅里叶变换定义了时域和频域之间的一种变换,或者说映射。这里的“时间”和“频率”变量可以取连续值和离散值,从而形成几种形式的傅里叶变换对。离散傅里叶变换是有限长序列的傅里叶变换,它相当于把信号的傅里叶变换进行等间隔采样。离散傅里叶变换除了在理论上具有重要意义之外,由于存在快速算法,在数字信号处理中的应用也越来越广泛。下面首先回顾已学过的连续时间信号的傅里叶变换,然后详细介绍离散傅里叶变换和快速傅里叶变换。

3.1 连续时间信号的傅里叶变换

3.1.1 时间连续频率离散的傅里叶变换

周期为 T 的周期性连续时间函数 $x(t)$, 可以展开成傅里叶级数, 级数的系数为 $X(k\Omega_0)$ 。 $x(t)$ 和 $X(k\Omega_0)$ 组成变换对, 正变换为

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3.1.1)$$

反变换为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (3.1.2)$$

式中, $X(k\Omega_0)$ 是离散频率的非周期函数; $\Omega_0 = 2\pi/T$ 为离散频谱相邻两谱线的角频率间隔; k 为谐波序号。

式(3.1.1)表明, 周期性连续时间信号 $x(t)$ 可分解为由无穷次谐波叠加而成, 级数系数的绝对值 $|X(k\Omega_0)|$ 代表谐波成分的大小。

3.1.2 时间连续频率连续的傅里叶变换

时间连续的非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换的结果是连续的非周期的频谱密度 $X(j\Omega)$, 变换公式为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3.1.3)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3.1.4)$$

式中, Ω 是模拟信号的角频率, 简称模拟角频率, 单位是 rad/s。由此可见, 时域函数的连续性造成了频域函数的非周期性, 而时域的非周期性造成了频谱的连续性。

3.2 离散傅里叶变换及性质

离散傅里叶变换是有限长度序列的傅里叶表示式, 同时它本身也是一个序列, 而不是一个连续函数, 它相当于把信号的傅里叶变换进行频率间隔采样。由于发明了计算离散傅里叶变换的快速算法, 所以, 离散傅里叶变换在离散时间信号分析与处理中应用非常广泛。

3.2.1 序列的傅里叶变换

对于一般序列 $x(n)$, 定义傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3.2.1)$$

式中, ω 为离散信号的圆周频率, 简称圆周频率或数字频率, 单位是 rad。它和模拟角频率 Ω 的关系在下面说明。序列的傅里叶变换也称为离散时间傅里叶变换(DTFT)。

由式(3.2.1)得

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j2\pi n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ &= X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

所以, $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数, 周期为 2π 。

用 $e^{j\omega m}$ 乘以式(3.2.1), 并在 $-\pi \sim \pi$ 内对 ω 积分, 并考虑到虚指函数的正交性, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right) e^{j\omega m} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(m-n) = 2\pi x(m) \end{aligned}$$

所以

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.2.2)$$

这是 DTFT 的反变换公式。式(3.2.1)和式(3.2.2)为序列的傅里叶变换对,即离散时间信号的傅里叶变换对。

我们已经学习了模拟角频率 Ω , 圆周频率 ω , 它们之间的关系如下:

$$\omega = \Omega T_s = 2\pi f / f_s \quad (3.2.3)$$

其中, T_s 为采样时间间隔; $f_s = 1/T_s$ 是采样频率。如果在式(3.2.3)中令

$$f' = f / f_s \quad (3.2.4)$$

则 $\omega = 2\pi f'$, f' 称为归一化频率或相对频率。这样便可得到对离散序列作 DTFT 时频率轴定标的物理解释^[1], 如图 3.2.1 所示。

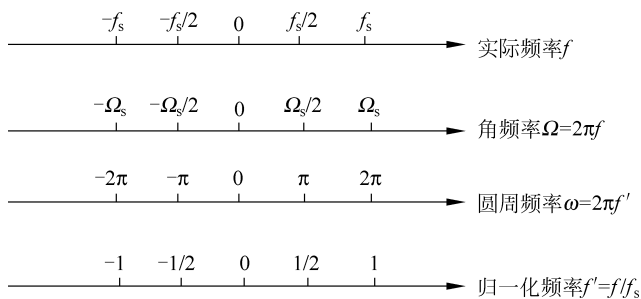


图 3.2.1 四种频率

由于存在以下关系:

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

所以, 序列的傅里叶变换就是单位圆上 ($|z|=1$) 的 z 变换, 故序列的傅里叶变换的一切特性, 皆可由 z 变换得到。表 3.2.1 是序列傅里叶变换的主要性质, 其中, 性质 13~性质 18 是傅里叶变换的对称性质, 它有助于简化运算和求解, 这里做以下说明。

表 3.2.1 序列傅里叶变换的主要性质

序 号	序 列	傅里叶变换
1	$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
2	$h(n)$	$H(e^{j\omega})$
3	$ax(n) + bh(n)$	$aX(e^{j\omega}) + bH(e^{j\omega})$
4	$x(n-m)$	$e^{-j\omega m} X(e^{j\omega})$
5	$a^n x(n)$	$X\left(\frac{1}{a} e^{j\omega}\right)$
6	$x(n) e^{j\omega_0 n}$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
7	$nx(n)$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

续表

序 号	序 列	傅里叶变换
8	$x(n) * h(n)$	$X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
9	$x(n)h(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
10	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
11	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
12	$x^*(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$
13	$\text{Re}[x(n)]$	$X_e(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})}{2}$
14	$\text{jIm}[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})}{2}$
15	$x_e(n) = \frac{x(n) + x^*(-n)}{2}$	$\text{Re}[X(e^{j\omega})]$
16	$x_o(n) = \frac{x(n) - x^*(-n)}{2}$	$\text{jIm}[X(e^{j\omega})]$
17	$x(n)$ 为实序列	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})] \\ \text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})] \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ \arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})] \end{cases}$
18	$x_e(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2}$ ($x(n)$ 为实序列)	$\text{Re}[X(e^{j\omega})]$
19	$x_o(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}$ ($x(n)$ 为实序列)	$\text{jIm}[X(e^{j\omega})]$
20	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$ (Parsval 公式)	
21	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$ (Parsval 公式)	

共轭对称序列定义为满足

$$x_e(n) = x_e^*(-n) \quad (3.2.5)$$

的序列 $x_e(n)$ 。当共轭对称序列是实数时,条件变为 $x_e(n) = x_e(-n)$,即 $x_e(n)$ 为偶对称序列。

共轭反对称序列定义为满足

$$x_o(n) = -x_o^*(-n) \quad (3.2.6)$$

的序列 $x_o(n)$ 。当共轭反对称序列是实数时,条件变为 $x_o(n) = -x_o(-n)$,即

$x_o(n)$ 为奇对称序列。

任意一个序列 $x(n)$ 总可以表示成一个共轭对称序列和共轭反对称序列之和,即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (3.2.7)$$

其中,

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)] \quad (3.2.8a)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)] \quad (3.2.8b)$$

同理, $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 也可分解成共轭对称分量和共轭反对称分量之和,即

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (3.2.9)$$

其中,

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (3.2.10a)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \quad (3.2.10b)$$

由以上的定义可以得到列于表 3.2.1 中的傅里叶变换的一些对称性质。

由第 2 章离散系统的基本概念可知,线性移不变系统单位采样响应 $h(n)$ 和系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 也是一对 DTFT 变换对,即存在如下关系:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (3.2.11)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.2.12)$$

例 3.2.1 设矩形窗

$$d(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases}$$

若 $h(n) = d(n)$, 求 $N=5$ 时系统的频率响应^[2]。

解 由式(3.2.11)得到

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\ &= e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + H_I(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \exp\{\varphi(\omega)\} \quad (3.2.14)$$

可见,矩形窗幅频响应和相频响应分别为

$$|H(e^{j\omega})| = |\sin(\omega N/2) / \sin(\omega/2)| \quad (3.2.15)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = -\omega(N-1)/2 \quad (3.2.16)$$

当 $N=1$ 时, $\varphi(\omega)=0$

$$\text{当 } N=2 \text{ 时, } \varphi(\omega) = \begin{cases} -\omega/2, 0 \leq \omega < \pi \\ -\omega/2 + \pi, \pi \leq \omega < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{当 } N=3 \text{ 时, } \varphi(\omega) = \begin{cases} -\omega, 0 \leq \omega < \frac{2}{3}\pi \\ -\omega + \pi, \frac{2}{3}\pi \leq \omega < \frac{4}{3}\pi \\ -\omega + 2\pi, \frac{4}{3}\pi \leq \omega < 2\pi \end{cases}$$

当 $N=4$ 时, ……

$$\text{所以, } \varphi(\omega) = \begin{cases} -\omega(N-1)/2, 0 \leq \omega < \frac{2\pi}{N} \\ -\omega(N-1)/2 + \pi, \frac{2\pi}{N} \leq \omega < \frac{4\pi}{N} \\ \vdots \\ -\omega(N-1)/2 + (n-1)\pi, \frac{2(n-1)\pi}{N} \leq \omega < \frac{2n\pi}{N} \\ \vdots \\ -\omega(N-1)/2 + (N-1)\pi, \frac{2(N-1)\pi}{N} \leq \omega < 2\pi \end{cases}$$

可见,每隔 $\frac{2\pi}{N}$ 的整数倍相位翻转(频率响应由负变正或由正变负),所以,每隔 $\frac{2\pi}{N}$ 的整数倍相位要加上 π ,如图 3.2.2 所示。

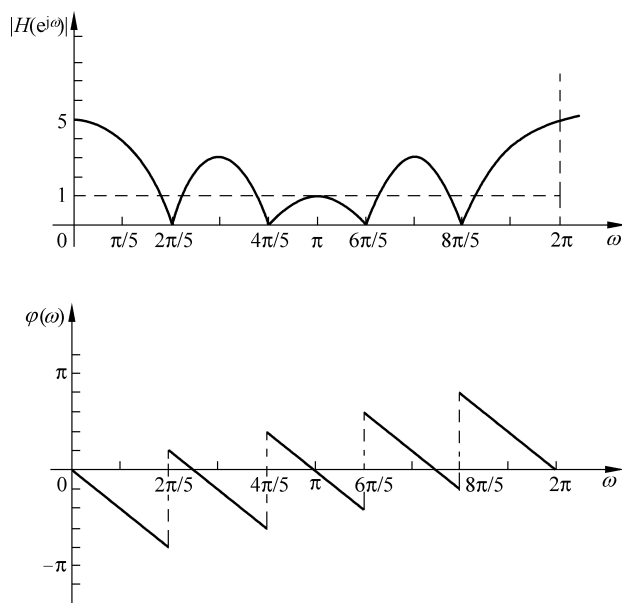


图 3.2.2 矩形窗的频率响应

3.2.2 离散傅里叶变换

有限长序列在数字信号处理中占有很重要的地位,计算机只能处理有限长序列,3.2.1节讨论的序列的傅里叶变换可以分析有限长序列,但是,无法利用计算机进行数值计算。本节以有限长度序列和周期序列之间的关系为出发点推导离散傅里叶变换(DFT)表示式,首先讨论周期序列的傅里叶级数表示式,它相当于有限长度序列的离散傅里叶变换,然后讨论可以作为周期函数一个周期的有限长序列的离散傅里叶变换。

1. 周期序列的离散傅里叶级数(DFS)

设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的周期序列,即^[3]

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN), \quad r \text{ 为任意整数} \quad (3.2.17)$$

周期序列不是绝对可和的,换言之,对于 z 平面内的任意 z 值,其 z 变换都不收敛,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)| |z^{-n}| = \infty$$

所以,周期序列不能用 z 变换表示。

但是,和连续时间周期信号一样,周期序列也可用离散傅里叶级数表示,也就是用周期为 N 的复指数序列表示。

周期为 N 的复指数序列的基频序列为

$$e_1(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$$

k 次谐波序列为

$$e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

由于存在关系

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k+rN)} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}, \quad r \text{ 为任意整数}$$

即

$$e_{k+rN}(n) = e_k(n)$$

所以,离散傅里叶级数的所有谐波中只有 N 个独立分量,这是和连续傅里叶级数不同之处,后者有无穷多个谐波分量。

将 $\tilde{x}(n)$ 展成如下的离散傅里叶级数:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.2.18)$$

式中, N 是常数,选取它是下面的 $\tilde{X}(k)$ 表达式成立的需要; $\tilde{X}(k)$ 是 k 次谐波的系数。下面求解系数 $\tilde{X}(k)$, 要利用下面的性质,即

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为任意整数} \\ 0, & r \text{ 为其他值} \end{cases} \quad (3.2.19)$$

将式(3.2.18)两边同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$, 并对 $n=0 \sim N-1$ 的一个周期内求和, 则得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right] = \tilde{X}(r) \end{aligned}$$

式(3.2.18)的系数 $\tilde{X}(k)$ 为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.2.20)$$

由于

$$\tilde{X}(k + mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k)$$

所以, $\tilde{X}(k)$ 也是一个以 N 为周期的周期序列。时域离散周期序列的离散傅里叶级数的系数仍然是一个周期序列, 因而我们把式(3.2.18)和式(3.2.20)一起称为周期序列的离散傅里叶级数(DFS)对。

习惯上采用以下符号:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \quad W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

这样, 式(3.2.18)、式(3.2.20)又可表示为

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \quad (3.2.21)$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \quad (3.2.22)$$

其中, $\text{DFS}[\cdot]$ 表示离散傅里叶级数的正变换; $\text{IDFS}[\cdot]$ 表示离散傅里叶级数的反变换。

从上面的表示式可以看出, 求和时都只取 N 点序列值。这一事实说明, 一个周期序列虽然是无限长序列, 但是, 只要研究一个周期(有限长序列)的性质, 其他周期的性质也就知道了, 因而周期序列和有限长序列有着本质的联系。

周期序列 $\tilde{X}(k)$ 可以看成是对 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 作 z 变换, 然后将 z 变换在 z 平面单位圆上按等间隔角 $2\pi/N$ 采样而得到的。令

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad (3.2.23)$$

将式(3.2.23)与式(3.2.21)比较得到

$$\tilde{X}(k) = X(z) \Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

所以, $\tilde{X}(k)$ 是在 z 平面单位圆上 N 个等间隔角点上对 $X(z)$ 的采样值。

连同连续时间信号的傅里叶变换和傅里叶级数, 到目前为止, 我们已经学习了四种形式的傅里叶变换, 如图 3.2.3 所示。总之, 若信号在时域是周期的, 那么其频谱一定是离散的, 反之亦然; 同样, 若信号在时域是非周期的, 其频谱一定是连续的, 反之也成立。第四种周期序列的离散傅里叶级数在时域和频域都是离散的, 且都是周期的, 我们可以利用它引出有限长序列的离散傅里叶变换。

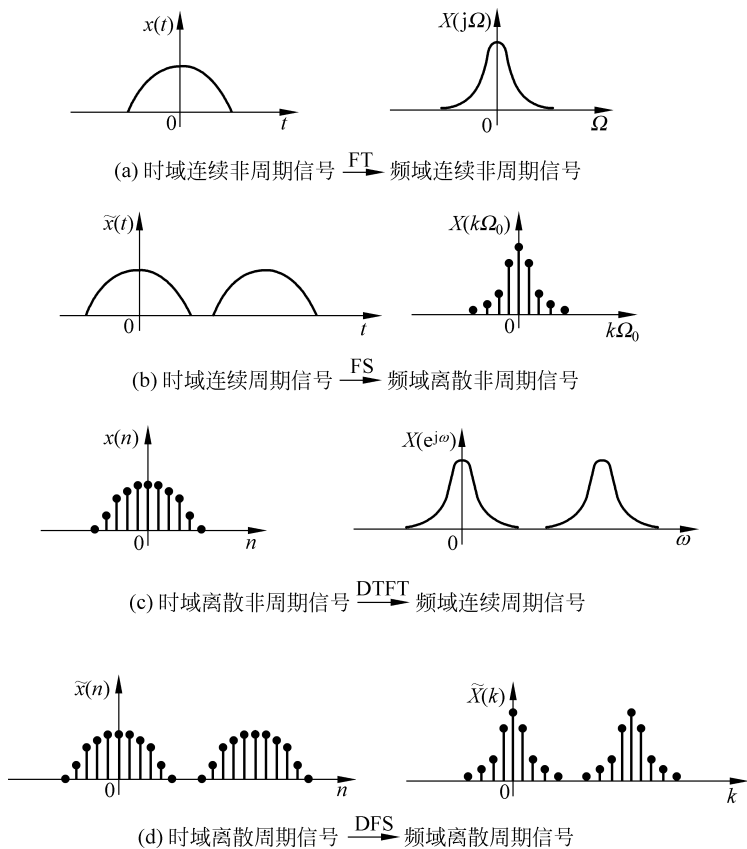


图 3.2.3 四种形式的傅里叶变换

2. 离散傅里叶变换(DFT)的定义

由于周期序列只有有限个序列值有意义, 因而它的离散傅里叶级数表达式也适用于有限长序列, 这就是有限长序列的离散傅里叶变换。如果把长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 看成周期为 N 的周期序列的一个周期, 就可以利用离散傅里叶级数计算有限长序列。

对于一个周期序列 $\tilde{x}(n)$, 定义它的第一个周期的序列值为此周期序列的主值序列(principal value sequence), 用 $x(n)$ 表示, 设周期为 N , 则有

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases} \quad (3.2.24)$$

显然, $x(n)$ 是一个有限长序列, 周期序列 $\tilde{x}(n)$ 可以看作将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓(periodic delay)的结果, 如式(3.2.17)所示。该式可简写为

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N \quad \text{及} \quad x(n) = \tilde{x}(n)d(n) \quad (3.2.25)$$

其中, $d(n)$ 是长度为 N 的矩形序列, 即

$$d(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases} \quad (3.2.26)$$

$((n))_N$ 是余数运算, 也可以记为 $n \bmod N$, 表示以 N 为模对 n 求余数。

例 3.2.2 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 $N=8$ 的序列, 求 $n=19$ 和 $n=-5$ 两数对 N 的余数。

解 由于

$$n=19=3+2 \times 8$$

故 $((19))_8=3$, 又由于

$$n=-5=3+(-1) \times 8$$

故 $((-5))_8=3$, 即

$$\tilde{x}(19)=x(3), \quad \tilde{x}(-5)=x(3)$$

■

同理, 频域周期序列 $\tilde{X}(k)$ 也可看成是对有限长序列 $X(k)$ 的周期延拓, 而有限长序列 $X(k)$ 看成周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列, 即

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N, \quad X(k) = \tilde{X}(k)d(k) \quad (3.2.27)$$

由 DFS 和 IDFS 定义可知, 由于求和运算分别只限定在 $n=0 \sim N-1$ 和 $k=0 \sim N-1$ 的主值区间进行, 故完全适用于主值序列 $x(n)$ 与 $X(k)$ 。由式(3.2.21)和式(3.2.22)可得有限长序列的离散傅里叶变换定义。

正变换:

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.2.28)$$

反变换:

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.2.29)$$

或分别表示成

$$X(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)]d(k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.2.30)$$

$$x(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)]d(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.2.31)$$

$x(n)$ 和 $X(k)$ 是一个有限长序列的离散傅里叶变换对。由于 $x(n)$ 和 $X(k)$ 都是长度为 N 的序列, 都有 N 个独立值, 因而已知其中一个序列, 就能唯一地确定

另一序列。有限长序列的傅里叶变换是作为周期序列的一个周期表示的,也含有周期性的意义。

离散傅里叶变换和前面曾介绍的序列的傅里叶变换都是处理有限长序列的重要工具,它们之间有什么关系呢? 由于序列 $x(n)$ 在单位圆上的 z 变换等于序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 所以, $X(k)$ 是序列傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的等间隔采样值, 采样间隔为 $\omega = 2\pi/N$, 即

$$X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad (3.2.32)$$

该式表明, 序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换结果 $X(k)$ 是连续频谱 $X(e^{j\omega})$ 的等间隔采样。那么, 这种频域的采样需要满足什么条件才能保证由 $X(k)$ 不失真地恢复 $X(e^{j\omega})$ 呢? 设 $X(k)$ 的逆傅里叶变换 $x_a(n)$, 则

$$\begin{aligned} x_a(n) &= \text{IDFT}[X(k)] = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)]d(n) \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{km} \right) W_N^{-nk} \right] d(n) = \tilde{x}(n+rN)d(n) \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

该式表明, $x_a(n)$ 等于 $x(n)$ 以 N 为周期进行延拓后再取主值序列, 其中, N 为绕单位圆一周采样的点数。设 $x(n)$ 长度为 M , 若 $N < M$, 则 $x(n)$ 在进行周期延拓时产生混叠, 从而不能使上式成立, 即不能恢复 $X(e^{j\omega})$ 。由此引出频率采样定理, 即当 $N \geq M$ 时, 才能由频率采样值 $X(k)$ 不失真地恢复 $X(e^{j\omega})$ 。 $X(e^{j\omega})$ 可以由内插式 (3.2.34) 表示:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (3.2.34)$$

其中,

$$\phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2}$$

称为内插函数^[4]。证明从略。

3. 离散傅里叶变换推导图解

为了进一步理解离散傅里叶变换的实质, 下面给出 DFT 推导过程的图解^[1], 如图 3.2.4 所示。设 $x(t)$ 是长度为 T 的连续时间信号, 其傅里叶变换为 $X(j\Omega)$, 理论上它是无限带宽的。如果 $x(t)$ 为无限长, 则可以用长度为 T 的矩形窗截短。

(1) 通过一个周期冲激串去乘待采样的连续时间信号 $x(t)$, 以实现时域采样, 如图 3.2.4(a) 和图 3.2.4(b) 所示。

时域采样的周期冲激串 $p(t)$ 为

$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (3.2.35)$$

式中, T_s 为采样周期。周期冲激串 $p(t)$ 的傅里叶变换为

$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{s k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \quad (3.2.36)$$

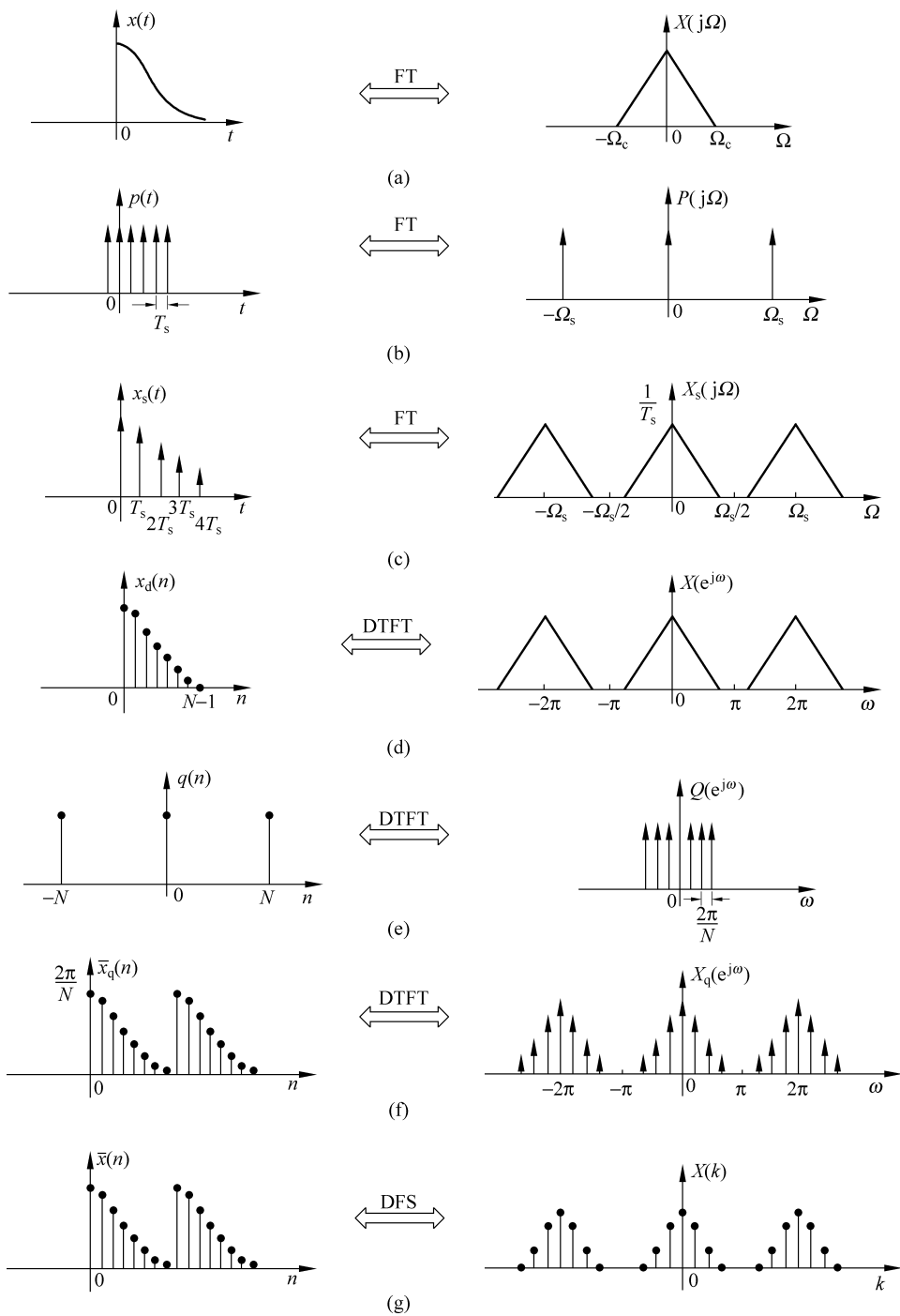


图 3.2.4 DFT 推导图解

其中, $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ 为采样频率。此处, 对周期冲激串做傅里叶变换, 而不是展成傅里叶级数, 目的是为了下面求解采样后信号的傅里叶变换。

采样后的信号为

$$x_s(t) = x(t)p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (3.2.37)$$

根据时域上两个信号的乘积对应于频域上两个信号频谱的卷积, 再乘以 $\frac{1}{2\pi}$, 故有

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\Omega) * P(j\Omega)] \quad (3.2.38)$$

式中, $X_s(j\Omega)$ 为 $x_s(t)$ 的傅里叶变换; $P(j\Omega)$ 为 $p(t)$ 的傅里叶变换。将式(3.2.36)代入式(3.2.38), 于是有

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \left[X(j\Omega) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \right] \quad (3.2.39)$$

因为信号与一个单位冲激函数的卷积就是该信号的移位, 即

$$X(j\Omega) * \delta(\Omega - \Omega_s) = X(j(\Omega - \Omega_s)) \quad (3.2.40)$$

于是

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s)) \quad (3.2.41)$$

这就是说, $X_s(j\Omega)$ 是频率为 Ω_s 的周期函数, 它由一组移位的 $X(j\Omega)$ 的叠加所组成。

但是, 其幅度乘以 $\frac{1}{T_s}$, 如图 3.2.4(c) 所示。设 $X(j\Omega)$ 最高截止频率为 Ω_c , 只要 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$, 采样就不会发生混叠。注意, 图 3.2.4(c) 中左边依然是连续时间信号, 右边是连续的频谱。

下面要将连续时间信号离散化, 即实现

$$x_d(n) = x(nT_s) \quad (3.2.42)$$

这里我们要强调一下用周期冲激串采样后的信号 $x_s(t)$ 与连续时间信号离散化后的信号 $x_d(n)$ 的重要区别^[4]。

(1) $x_s(t)$ 是一个连续信号, 它除了在 T_s 的整数倍有冲激外, 其他值全为零; 而 $x_d(n)$ 只在整数变量 n 上取值 (实际上是引入了时间上的归一化), 它不再明确包含采样周期 T_s 的信息。

(2) $x_s(t)$ 对原连续信号 $x(t)$ 的采样是用冲激强度 (面积) 来表示的, 而 $x_d(n)$ 是有限值。

那么, 离散时间序列 $x_d(n)$ 的傅里叶变换和采样后信号 $x_s(t)$ 的傅里叶变换之间有什么关系呢? 由于

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) \quad (3.2.43)$$

对式(3.2.43)做傅里叶变换,根据 $\delta(t-nT_s)$ 的傅里叶变换是 $e^{-j\Omega nT_s}$,所以,得到采样后信号的频谱为

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-j\Omega nT_s} \quad (3.2.44)$$

现在再对 $x_d(n)$ 做离散时间序列傅里叶变换,即

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-j\omega n} \quad (3.2.45)$$

比较式(3.2.44)和式(3.2.45)可见, $X(e^{j\omega})$ 和 $X_s(j\Omega)$ 有如式(3.2.46)所示的关系:

$$X(e^{j\omega}) = X_s(j\Omega) \Big|_{\Omega=\frac{\omega}{T_s}} \quad (3.2.46)$$

根据式(3.2.41),有

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - 2\pi k)/T_s) \quad (3.2.47)$$

可以看出, $X(e^{j\omega})$ 就是 $X_s(j\Omega)$ 的重复,唯频率坐标有一个尺度变换,即 $X(e^{j\omega})$ 变成了以 2π 为周期的函数。因此, $x_d(n)$ 和 $x(t)$ 之间的频谱关系是通过先把 $x(t)$ 的频谱 $X(j\Omega)$ 按式(3.2.41)进行周期重复,然后,按式(3.2.46)的线性频率尺度变换联系起来的,如图3.2.4(d)所示。频谱周期性重复是冲激串采样转换过程中的第一步结果;而按式(3.2.46)的线性频率尺度变换,可以不严格地看成是由冲激串 $x_s(t)$ 转换到离散时间序列 $x_d(n)$ 时,所引入时间归一化的结果。根据傅里叶变换的时域尺度变换性质,时间轴上有一个 $\frac{1}{T_s}$ 的变换,一定在频率轴上引入一个 T_s 倍的变化。因此, $\omega = \Omega T_s$ 的关系就与从 $x_s(t)$ 到 $x_d(n)$ 的转换过程中,时间轴上有一个 $\frac{1}{T_s}$ 的尺度变换,在概念上是完全一致的^[5]。

(2) 再进行频域采样。与时域采样相似,要在频率上乘一个冲激串,如图3.2.4(e)所示。

$$Q(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (3.2.48)$$

对应于 $Q(\omega)$ 的时域信号为

$$q(n) = \frac{N}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n - mN) \quad (3.2.49)$$

频域采样结果为

$$X_q(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Q(\omega) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (3.2.50)$$

根据频域乘积对应于时域卷积的性质,频域采样后所对应的时域信号为

$$\tilde{x}_q(n) = x_d(n) * q(n) \quad (3.2.51)$$

因为信号与一个单位采样序列的卷积就是该信号的移位,所以, $\tilde{x}_q(n)$ 是周期为 N 的周期函数,它由一组移位的 $x_d(n)$ 的叠加所组成,但是,在幅度上乘以 $\frac{N}{2\pi}$,如图 3.2.4(f) 所示。

数学表达由式(3.2.51a)给出

$$\tilde{x}_q(n) = x_d(n) * \left[\frac{N}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n - mN) \right] = \frac{N}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_d(n - mN) \quad (3.2.51a)$$

可见,如果要时域上不发生混叠,那么, N 不能小于原始的实际数据长度 M ,此即为频率采样定理。

根据频率采样定理, N 要大于原始的实际数据长度 M 。而实际上根据前面的讨论, $x_d(n)$ 是无限长的(因为采样冲激串 $p(t)$ 是无限长的),所以,这里有一个矛盾。这个矛盾只能采用将 $x_d(n)$ 截断来解决。设截断的 $x_d(n)$ 的长度为 M ,那么要求 $N \geq M$ 。

注意,到目前为止,频率还是连续的函数,因为采样后的频率函数为一系列冲激串的叠加。采样后的频率函数为

$$X_q(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) \quad (3.2.52)$$

记 $x_d(n)$ 的周期重复(周期为 N)信号为 $\tilde{x}(n)$,根据以上分析可知

$$\tilde{x}_q(n) = \frac{N}{2\pi} \tilde{x}(n) \quad (3.2.51b)$$

$\tilde{x}_q(n)$ 对应的离散傅里叶变换(DTFT)为 $X_q(e^{j\omega})$,则 $\tilde{x}(n)$ 对应的 DTFT 为

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} X_q(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) \quad (3.2.53a)$$

式(3.2.53a)中的冲激串是连续信号,令

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad (3.2.53b)$$

就得到了离散频谱。

上面我们得到了周期的离散频谱式(3.2.53b),其周期为 N 。可以看出,它应为某一离散周期时间序列的傅里叶级数(DFS)。那么,它对应的时域周期序列是什么呢?根据周期序列 DFS 和离散时间 DTFT 的关系,如果一个周期序列的 DFS 为 $X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$,则它对应的 DTFT 为 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$ 。这与式(3.2.53a)完全吻合。

再根据信号的时域与频域有一一对应的关系,可以得到, $\tilde{X}(k)$ 所对应的时域信号为 $\tilde{x}(n)$,即 $x_d(n)$ 的周期重复,如图 3.2.4(g) 所示。

以上所得到的是一对离散傅里叶级数(DFS),各取一个周期就得到离散傅里叶变换(DFT)。

3.2.3 离散傅里叶变换的性质

本节讨论 DFT 的一些性质,它们本质上和周期序列的概念有关,可以由有限长序列及 DFT 隐含的周期性得到。设有限长序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$, 且

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)], \quad X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$$

1. 线性

$x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 线性组合的离散傅里叶变换等于它们各自离散傅里叶变换的线性组合,即

$$\begin{aligned} X_3(k) &= \text{DFT}[ax_1(n) \pm bx_2(n)] = a\text{DFT}[x_1(n)] \pm b\text{DFT}[x_2(n)] \\ &= aX_1(k) \pm bX_2(k) \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

其中, a, b 为任意常数。若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 长度均为 N , 则所得时间序列的长度也为 N ; 若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 长度分别为 N_1, N_2 , 则所得时间序列的长度取两者中的最大者, 即

$$N = \max(N_1, N_2)$$

例如, 若 $N_1 > N_2$, 取 $N = N_1$, 这时 $x_2(n)$ 需在尾部补上 $N_1 - N_2$ 个零值点, 从而使其长度与 $x_1(n)$ 的长度相等, 再作 $N = N_1$ 点的 DFT。

2. 选频性^[6]

设复序列 $x(n)$ 是对复指数函数 $x(t) = e^{jr\omega t}$ 采样得到的, 即

$$x(n) = e^{jrn\omega T} \quad (3.2.55)$$

其中, r 是整数; T 为采样周期, $\omega T = 2\pi/N$ 。对 $x(n)$ 作傅里叶变换得

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(r-k)/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.2.56)$$

即

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(r-k)n} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(r-k)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(r-k)}} = \begin{cases} N, & r=k \\ 0, & r \text{ 为其他值} \end{cases}$$

这说明复指数函数的采样序列的离散傅里叶变换具有正交性。也就是说, 当输入频率为 $r\omega$ 的正弦波时, 傅里叶变换后的离散频谱中只有一条谱线取值为 N , 其余的都为零。如果输入信号是若干频率不同的正弦波的线性组合, 经过离散傅里叶变换后, 将在不同的谱线位置有对应的输出, 因此, 离散傅里叶变换算法实质上对频率具有选择性, 它相当于频谱分析仪, 对信号处理很有用处。

3. 循环移位

设有限长序列 $x(n)$ 位于 $0 \leq n \leq N-1$ 区间内, 将其左移 m 位, 得到 $x(n+m)$, 这是序列的线性移位, 对这两个序列求 DFT, 前者的求和范围为 $0 \sim N-1$, 后者则为 $-m \sim -m+N-1$, 当 m 不同时, DFT 的求和范围也要改变, 这给位移序列 DFT 的求解带来麻烦。为了解决这个问题, 以方便 DFT 的运算, 要重新定义序列的移位。首先将 $x(n)$ 周期延拓成周期序列 $\tilde{x}(n)$, 然后, 将 $\tilde{x}(n)$ 向左移动 m 位, 再取 $\tilde{x}(n+m)$ 的主值区间 ($0 \leq n \leq N-1$) 上的序列值。

有限长序列 $x(n)$ 向左移动 m 位的循环移位定义为

$$x_m(n) = \tilde{x}((n+m))_N d(n) \quad (3.2.57)$$

如图 3.2.5 所示。

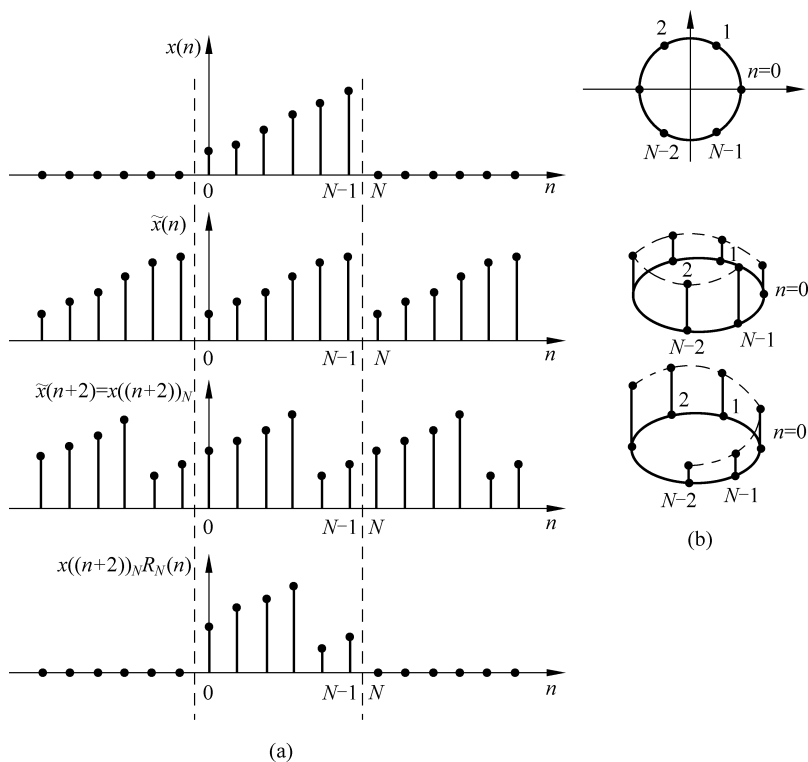


图 3.2.5 循环移位

从图 3.2.5 中可以看出, 有限长序列循环移位始终局限于 $n=0 \sim N-1$ 主值区间内。当某些样本从另一端移出该区间时, 需将这些样本从此区间的另一端循环移回来, 如果我们想象将序列 $x(n)$ 按反时针方向排列在一个 N 等分圆周上, 向左

移动 m 位的循环移位就是将该序列在圆周上顺时针旋转 m 位,如图 3.2.5(b)所示^[3]。

序列循环移位后的 DFT 为

$$X_m(k) = \text{DFT}[x_m(n)] = W_N^{-km} X(k) \quad (3.2.58)$$

证明

$$\begin{aligned} X_m(k) &= \text{DFT}[x_m(n)] = \text{DFS}[x((n+m))_N]d(k) \\ &= W_N^{-km} \text{DFS}[x((n))_N]d(k) = W_N^{-km} \tilde{X}(k)d(k) = W_N^{-km} X(k) \end{aligned}$$

这表明,有限长序列的循环移位,在离散频域中只引入一个和频率成正比的线性相移 $W_N^{-km} = e^{j\frac{2\pi}{N}km}$,对频谱的幅度没有任何影响。

证毕。

同理可得频域的移位特性如下:

$$\text{IDFT}[X(k+l)] = W_N^{ln} x(n) \quad (3.2.59)$$

时间函数乘以指数项 W_N^{ln} ,则 DFT 相当于左移 l 位,这就是调制信号的频谱平移原理,也称调制定理(modulated theorem),它说明时域序列的调制等效于频域的循环移位。

4. 对称性

下面分别讨论三种序列的对称性^[6]。

1) 实序列的对称性

设 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $\tilde{x}(n)$ 是 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓的结果,周期序列 $\tilde{x}(n)$ 可表示为偶对称序列 $\tilde{x}_e(n)$ 和奇对称序列 $\tilde{x}_o(n)$ 之和,即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n) \quad (3.2.60)$$

利用偶函数和奇函数的对称性,有

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}(-n)] \quad (3.2.61a)$$

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}(-n)] \quad (3.2.61b)$$

由于时域周期序列的频谱也具有周期性,它的实部是偶函数,虚部是奇函数,因此, $\tilde{X}(k)$ 具有以下的对称性:

$$\text{Re}[\tilde{X}(k)] = \text{Re}[\tilde{X}(N-k)] \quad (3.2.62a)$$

$$\text{Im}[\tilde{X}(k)] = -\text{Im}[\tilde{X}(N-k)] \quad (3.2.62b)$$

$$|\tilde{X}(k)| = |\tilde{X}(N-k)| \quad (3.2.62c)$$

$$\arg \tilde{X}(k) = -\arg \tilde{X}(N-k) \quad (3.2.62d)$$

对于实序列, $\text{Re}[\tilde{X}(k)]$ 就是偶对称序列 $\tilde{x}_e(n)$ 的 DFS, $\text{Im}[\tilde{X}(k)]$ 就是奇对称序列 $\tilde{x}_o(n)$ 的 DFS。可以推断, $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 也具有类似性质。因此,利用

式(3.2.62)的对称性关系,很容易从一个序列的 DFT 得到两个有关序列的 DFT。

2) 复序列的对称性

周期复序列 $\tilde{x}(n) = \tilde{x}_r(n) + j\tilde{x}_i(n)$, 它的 DFT 是

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} [\tilde{x}_r(n) + j\tilde{x}_i(n)] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \tilde{X}_r(k) + j\tilde{X}_i(k) \quad (3.2.63)$$

其中, $\tilde{X}_r(k) = \text{DFT}[\tilde{x}_r(n)]$, $\tilde{X}_i(k) = \text{DFT}[\tilde{x}_i(n)]$ 都是复数。

式(3.2.63)两边的实部和虚部分别相等,则得到

$$\text{Re}[\tilde{X}(k)] = \text{Re}[\tilde{X}_r(k)] - \text{Im}[\tilde{X}_i(k)] \quad (3.2.64a)$$

$$\text{Im}[\tilde{X}(k)] = \text{Im}[\tilde{X}_r(k)] + \text{Re}[\tilde{X}_i(k)] \quad (3.2.64b)$$

因为实部 $\text{Re}[\tilde{X}(k)]$ 具有对称性,即

$$\begin{aligned} \text{Re}[\tilde{X}(N-k)] &= \text{Re}[\tilde{X}_r(N-k)] - \text{Im}[\tilde{X}_i(N-k)] \\ &= \text{Re}[\tilde{X}_r(k)] + \text{Im}[\tilde{X}_i(k)] \end{aligned} \quad (3.2.65a)$$

虚部具有反对称性,即

$$\begin{aligned} \text{Im}[\tilde{X}(N-k)] &= \text{Im}[\tilde{X}_r(N-k)] + \text{Re}[\tilde{X}_i(N-k)] \\ &= -\text{Im}[\tilde{X}_r(k)] + \text{Re}[\tilde{X}_i(k)] \end{aligned} \quad (3.2.65b)$$

与式(3.2.64)联立求解得

$$\text{Re}[\tilde{X}_r(k)] = \frac{\text{Re}[\tilde{X}(k)] + \text{Re}[\tilde{X}(N-k)]}{2} \quad (3.2.66a)$$

$$\text{Im}[\tilde{X}_r(k)] = \frac{\text{Im}[\tilde{X}(k)] - \text{Im}[\tilde{X}(N-k)]}{2} \quad (3.2.66b)$$

$$\text{Re}[\tilde{X}_i(k)] = \frac{\text{Im}[\tilde{X}(k)] + \text{Im}[\tilde{X}(N-k)]}{2} \quad (3.2.66c)$$

$$\text{Im}[\tilde{X}_i(k)] = \frac{\text{Re}[\tilde{X}(N-k)] - \text{Re}[\tilde{X}(k)]}{2} \quad (3.2.66d)$$

因此,一个复序列的 DFT 可以同时变换成两个序列的 DFT,利用两个频域周期序列的实部的偶对称性和虚部的反对称性,只要计算 $N/2$ 个样本点的值即可,这样运算次数可减少一半。

3) 复序列的共轭对称性

$x(n)$ 的共轭复序列 $x^*(n) = x_r(n) - jx_i(n)$, 它的离散傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{kn} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-kn} \right]^* \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* \\ &= X^*((N-k))_N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (3.2.67)$$

考虑到主值区间的定义,共轭复序列 $x^*(n)$ 的 DFT 可以表示成

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k) \quad (3.2.68)$$

复序列 $x(n)$ 或共轭复序列 $x^*(n)$ 的实部序列 $x_r(n)$ 的 DFT 为

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x_r(n)] &= \frac{1}{2} \text{DFT}[x(n) + x^*(n)] \\ &= \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)] = X_e(k) \end{aligned} \quad (3.2.69)$$

虚部序列 $jx_i(n)$ 的 DFT 为

$$\begin{aligned} \text{DFT}[jx_i(n)] &= \frac{1}{2} \text{DFT}[x(n) - x^*(n)] \\ &= \frac{1}{2} [X(k) - X^*(N-k)] = X_o(k) \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

由式(3.2.69)和式(3.2.70)还可以得到

$$\begin{aligned} X_e^*(N-k) &= \frac{1}{2} [X(N-k) + X^*(N-N+k)]^* \\ &= \frac{1}{2} [X^*(N-k) + X(k)] \\ &= X_e(k) \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

$$-X_o^*(N-k) = X_o(k) \quad (3.2.72)$$

这表明 $X_e(k)$ 具有共轭对称特性, $X_o(k)$ 具有共轭反对称特性。如果把 $X_e(k)$ 分布在 N 等分的圆周上,以 $k=0$ 为原点,则左半圆周上的序列与右半圆周上的序列是共轭对称的,也就是模相等、幅角相反,即

$$\begin{aligned} |X_e(k)| &= |X_e(N-k)| \\ \arg[X_e(k)] &= -\arg[X_e(N-k)] \end{aligned}$$

对 $X_o(k)$ 而言,以 $k=0$ 为原点,则左半圆周上的序列与右半圆周上的序列是共轭反对称的,也就是实部相反、虚部相等,即

$$\begin{aligned} \text{Re}[X_o(k)] &= -\text{Re}[X_o(N-k)] \\ \text{Im}[X_o(k)] &= \text{Im}[X_o(N-k)] \end{aligned}$$

利用共轭对称性,可以用一次 DFT 运算来计算两个实数序列的 DFT,从而达到减少计算量的目的。

5. 循环卷积

前面曾介绍过线性卷积,采用翻转、移位、相乘及求和的计算过程,对于序列 $x(n)$ 和 $h(n)$,其线性卷积的表达式为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

两个周期为 N 的周期序列所进行的卷积,称为周期卷积(periodic convolution),卷积的结果仍是周期为 N 的序列。对于两个周期为 N 的序列 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{h}(n)$ 的周期

卷积 $\tilde{y}(n)$, 有

$$\tilde{y}(n) = \tilde{x}(n) \otimes \tilde{h}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{h}(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x((m))_N h((n-m))_N$$

如果仅将周期卷积的结果截取主值序列, 即

$$y(n) = \tilde{y}(n) d(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x((m))_N h((n-m))_N \right] d(n)$$

而 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{h}(n)$ 的主值序列为 $x(n)$ 和 $h(n)$, 则 $y(n)$ 就称为 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的圆周卷积(circular convolution), 表示为

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x((m))_N h((n-m))_N d(n) \quad (3.2.73)$$

该式所表示的卷积过程可以这样理解: 把序列 $x(n)$ 分布在 N 等分的圆周上, 而序列 $h(n)$ 经翻转后分布在另一个 N 等分的同心圆的圆周上, 一个圆周相对于另一个圆周旋转移位, 在不同的位置上两序列的对应点依次相乘求和, 就得到全部卷积序列, 因此圆周卷积又称为循环卷积。循环卷积与周期卷积的过程是一样的, 前者仅取卷积结果的主值序列。

由以上的分析可以得知, 循环卷积运算有两种方法: 一种方法是, 首先计算周期卷积, 然后取其主值区间 ($0 \leq n \leq N-1$) 内的值; 另一种方法是, 先把 $x(n)$ 的序列值逆时针方向分布在一个圆周(内圆)上, $h(n)$ 按顺时针方向均匀分布在另一个同心圆(外圆)上, 如图 3.2.6(a) 所示, 然后, 求两个圆上相应序列的乘积, 并把 N 项乘积累加起来作为 $n=0$ 时的循环卷积值 $y(0)$ 。若求 $n=1$ 时的值 $y(1)$, 可将外圆 $h(n)$ 固定, 把内圆上的序列 $x(n)$ 顺时针旋转一个单位(或将 $x(n)$ 固定, 把外圆上的序列 $h(n)$ 作逆时针旋转), 然后, 把对应项的乘积累加起来, 即为所求 $y(1)$ 值, 如图 3.2.6(b) 所示。这样依次将内圆序列循环移位一周, 便可求得所有 $y(n)$ 值^[2]。

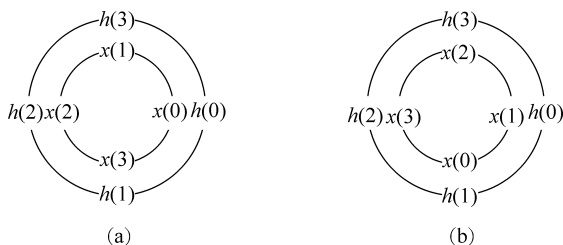


图 3.2.6 序列的循环卷积

接下来讨论时域和频域循环卷积。令 $x(n)$, $h(n)$, $y(n)$ 都是 N 点序列, 其 DFT 分别是 $X(k)$, $H(k)$, $Y(k)$ 。若 $y(n) = x(n) \otimes h(n)$, 则

$$Y(k) = X(k) H(k) \quad (3.2.74)$$

证明 由式(3.2.73)可得

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Y(k) e^{j \frac{2\pi}{N} k n} = y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(n-m)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}km} \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} H(l) e^{j\frac{2\pi}{N}l(n-m)} \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X(k) H(l) e^{j\frac{2\pi}{N}ln} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)i} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}
\end{aligned}$$

式(3.2.74)得证,即两个时域序列的循环卷积 $y(n)$ 的 DFT 等于它们的 DFT 的乘积。

证毕。

同理可以得到频域循环卷积。

若 $y(n) = x(n)h(n)$, 则

$$Y(k) = \frac{1}{N} X(k) \otimes H(k) \quad (3.2.75)$$

即两时域序列乘积的 DFT 等于它们的 DFT 的循环卷积乘以因子 $1/N$ 。

例 3.2.3 设两个有限长序列相等,即

$$x_1(n) = x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求此两序列的循环卷积。

解 序列的 DFT 为

$$X_1(k) = X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

两序列的循环卷积 $y(n)$ 的 DFT 为

$$Y(k) = X_1(k) X_2(k) = \begin{cases} N^2, & k=0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则卷积序列

$$y(n) = N, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

这个例子说明,循环卷积与线性卷积不同之处在于卷积后的序列长度不同,循环卷积的序列长度是 N 而不是 $2N-1$ 。如果对序列 $x_1(n), x_2(n)$ 各补 N 个零值点成为 $2N$ 长序列,则 $2N$ 点的循环卷积相当于两序列的线性卷积。

对于有限长序列,存在线性卷积和循环卷积两种形式的卷积。由于循环卷积与 DFT 相对应,因此,在以后的讨论中可以知道,它可以采用快速傅里叶变换算法(FFT)进行运算,且在运算速度上有很大的优越性。然而,我们在实际应用中遇到的均为线性卷积,例如,信号通过线性系统,系统的输出信号 $y(n)$ 是输入信号 $x(n)$ 与系统单位抽样响应的线性卷积,即

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

若 $x(n), h(n)$ 均为有限长序列,能否用循环卷积实现线性卷积是我们颇为关心的问题。设 $x(n)$ 为 N 点有限长序列, $h(n)$ 为 M 点有限长序列,它们的线性卷积

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)x(n-m),$$

$$0 \leq n \leq N+M-2$$

仍然是一个有限长序列,长度为 $N+M-1$,即

$$y(n) = \begin{cases} y(n), & 0 \leq n \leq N+M-2 \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases}$$

如果直接计算,则需 $N \times M$ 次乘法运算, $(N-1) \times (M-1)$ 次加法运算,当 N 和 M 值较大时,运算量是比较大的。

现在讨论用循环卷积实现线性卷积的条件。设循环卷积的长度为 L ,要用循环卷积实现线性卷积,那么循环卷积的长度 L 必须大于或等于线性卷积的长度 $N+M-1$,即

$$L \geq N+M-1 \quad (3.2.76)$$

如图 3.2.7 所示,否则,循环卷积周期延拓时会产生混叠。因此, $x(n)$, $h(n)$ 必须扩展为 L 点序列,取 $L=N+M-1$,具体步骤如下。

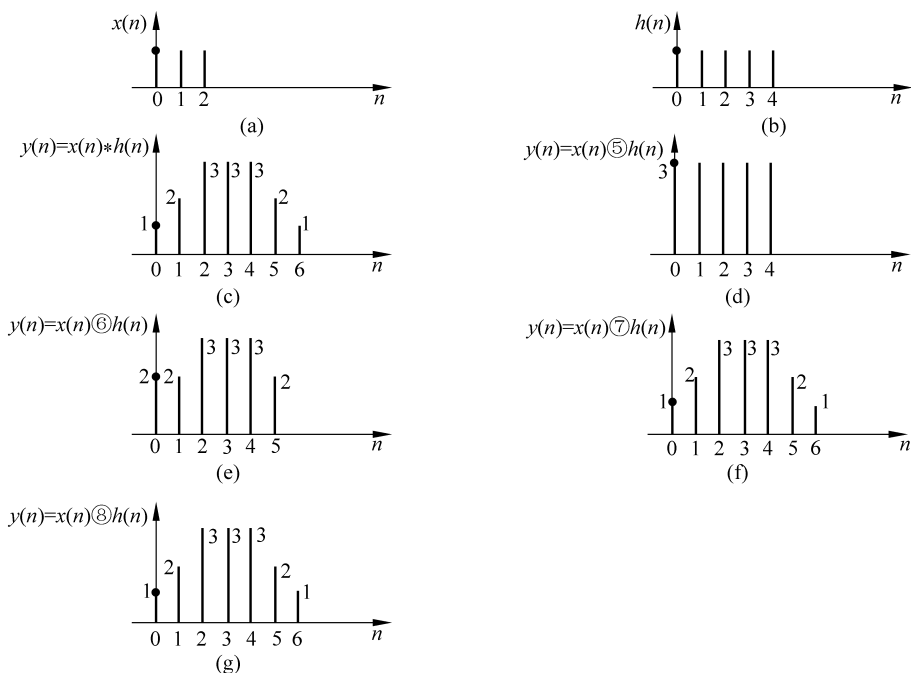


图 3.2.7 有限长序列循环卷积和线性卷积 ($N=3, M=5$)

(1) 将 $x(n)$, $h(n)$ 分别补零增长到 L 点,即

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq L-1 \end{cases} \quad (3.2.77)$$

$$h(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & M \leq n \leq L-1 \end{cases} \quad (3.2.78)$$

(2) 计算 $x(n)$, $h(n)$ 两序列 L 点的循环卷积即等于线性卷积:

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = x(n) * h(n)$$

或者用 DFT 求 $y(n)$, 则

$$y(n) = \text{IDFT}[X(k)H(k)]$$

其中, $X(k)$, $H(k)$ 分别为 $x(n)$, $h(n)$ 的 L 点离散傅里叶变换。用循环卷积实现线性卷积过程如图 3.2.8 所示。

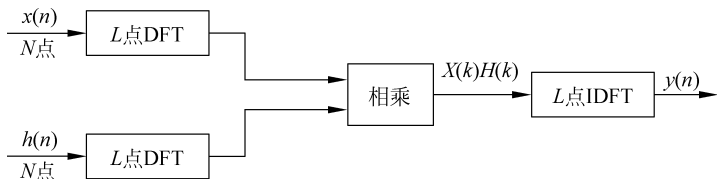


图 3.2.8 用循环卷积实现线性卷积

3.2.4 离散傅里叶变换在应用中的问题

离散傅里叶变换在信号处理中得到广泛应用,利用离散傅里叶变换可以进行谱分析和时域卷积(实现滤波)。但是,由于离散傅里叶变换固有的局限性,当利用离散傅里叶变换作谱分析时可能会出现下面几个问题。

1. 混叠现象

通常待分析的信号 $x(t)$ 是连续信号,为了能应用离散傅里叶变换需要对连续时间信号进行采样。若 $x(t)$ 的频率范围为 $0 \leq f \leq f_m$, 则当 $f_m \geq \frac{1}{2}f_s$ 时,采样信号的频谱中周期延拓分量互相重叠,这就是混叠现象,它会造成 $x(n)$ 的频谱和原始信号的频谱不一致。

解决混叠问题的唯一方法是保证采样频率足够高,以防止频谱混叠,这意味着通常要知道原信号的频率范围,以确定采样频率。若已知信号的最高频率 f_m ,为防止混叠,选定采样频率 $f_s \geq 2f_m$ 。但是,很多情况下可能无法估计信号频率,为确保无混叠现象,可在采样前利用模拟低通滤波器将原信号的上限频率 f_m 限制为采样频率 f_s 的一半,这种滤波器被称为抗混叠滤波器。

对于 DFT 的离散频谱来说,相邻谱线的频率间隔为 Δf ,通常称为频率分辨率,由它可以确定模拟信号 $x(t)$ 的周期,也就是时间长度 T 为

$$T = \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{f_s/N} = \frac{N}{f_s} \quad (3.2.79)$$

由频率分辨率还可以确定 DFT 所需的采样点数 $N = f_s / \Delta f$ 。我们希望 Δf 越小越好,但是, Δf 越小, N 越大,计算量和存储量也随之增大。一般取 N 为 2 的整数次幂,以便使用 FFT 计算,若已给定 N ,可用补零方法使 N 为 2 的整数次幂(在实际应用中,应多采些数据,要尽量避免补零)。

2. 频谱泄漏

信号如果在频域上是带限的,则时域上信号为无限长,但是,离散傅里叶变换却是对有限长序列定义的,因此,为了作离散傅里叶变换,在时域上需要进行截断,使得采样后信号 $x(n)$ 在区间 $[0, N-1]$ 上,这相当于将 $x(n)$ 和矩形窗函数 $d(n)$ 相乘,即

$$x_1(n) = x(n)d(n) \quad (3.2.80)$$

式中, $x_1(n)$ 表示截断后的序列。时域上两个序列的乘积等于频域上两个序列的傅里叶变换的卷积。已知 $d(n)$ 的傅里叶变换

$$D(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[d(n)] = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (3.2.81)$$

显然,矩形窗函数的频谱为 sinc 函数。如果窗谱是 δ 函数,那么,时域窗宽应为无穷宽,实际上等于没有乘窗函数,则卷积结果仍为 $X(e^{j\omega})$ 。现在窗谱是 sinc 函数,有一定宽度, $X(e^{j\omega})$ 和 $D(e^{j\omega})$ 的卷积是 $x_1(n)$ 的 DTFT $X_1(e^{j\omega})$,从而产生了频谱变宽的泄漏现象。

泄漏现象是由截断造成的,改善泄漏可以增加采样点数 N 或采用其他形式的截断函数(通常称为窗函数),这个问题将在功率谱估计中将详细讨论。

泄漏也会引起混叠。由于泄漏使信号的频谱展宽,如果它的高频成分超过了折叠频率($f_s/2$)就造成了混叠,这种可能性在矩形窗截断时尤为明显,因为矩形窗的频谱旁瓣收敛得比较慢。

3. 栅栏效应

用 DFT 计算信号频谱,结果是离散的,即只能给出频谱的采样值,而得不到连续的频谱函数,这就像隔一个“栅栏”观看景象一样,只能在一系列离散点上看到真实的景象,而其他点处却看不到,故称这种效应为“栅栏效应”。减小栅栏效应的一个方法就是要使频域采样更密,即增加频域采样点数 N ,在不改变时域数据的情况下,必然要在时域序列数据的末尾补一些零值点,使 DFT 计算周期内的点数增加,但不改变原有记录数据。频域采样为 $\frac{2\pi}{N}k$, N 增加,必然使采样点间隔更小,谱线更密,原来看不到的谱分量就有可能看到了。补零对原频谱 $X(k)$ 起到插值的作用,使谱的外观更加平滑。

4. 频率分辨率

分辨率是信号处理中的基本概念,频率分辨率是指所用的算法能将信号中两个靠得很近的谱峰保持分开的能力^[4],即为

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T} \quad (3.2.82)$$

式中, $T = NT_s$ 是模拟信号的长度。如果 Δf 不够小,可以通过增加信号的长度使其变小,该分辨率取决于数据窗的长度和形状。窗的长度指的是实际的信号长度,长度越长,分辨率越高。由 DFT 的定义可知,对一个 N 点序列进行 DFT 分析时,相邻谱线的频率间隔为

$$\Delta f = f_s / N \quad (3.2.83)$$

它也是频率分辨率的一种定义,如果 Δf 不够小,可以通过补零的方法改变谱线的间距。但是,补零不能提高真实的频率分辨能力,由于没有增加有效数据长度,原数据的新的信息没有增加,因此,仍不能将信号中靠得很近的谱峰分开。

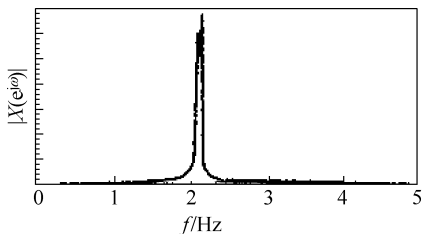
例 3.2.4 设 $x(t)$ 的最高频率 f_m 不超过 3Hz,由采样定理可知,用 $f_s = 10\text{Hz}$,即 $T_s = 0.1\text{s}$ 对其采样,不应发生混叠问题。设 $T = 25.6\text{s}$,即采样所得的 $x(n)$ 的点数为 256,那么,对 $x(n)$ 作 DFT 时,能得到最大频率分辨率^[1],即有

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{10}{256} = 0.0390625\text{Hz}$$

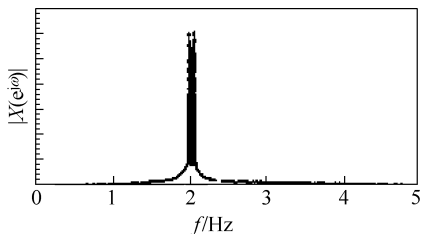
如果信号 $x(t)$ 由三个正弦信号组成,其频率分别是 $f_1 = 2\text{Hz}$, $f_2 = 2.02\text{Hz}$, $f_3 = 2.07\text{Hz}$,即

$$x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_3 t)$$

用 DFT 求其频谱,其幅频特性如图 3.2.9(a)所示。



(a)



(b)

图 3.2.9 幅频特性

显然,由于 $f_2 - f_1 = 0.02 < \Delta f$,所以,不能分辨出由 f_2 产生的正弦分量。由于 $f_3 - f_1 > \Delta f$,所以,能分辨由 f_3 产生的正弦分量。

如果增加点数 N ,即增加数据的长度 N ,如令 $N = 1024$,这时

$$T = 1024 \times 0.1\text{s} = 102.4\text{s}$$

其幅频特性如图 3.2.9(b)所示。

3.3 快速傅里叶变换

3.3.1 FFT 的基本思想

FFT 不是一种新的变换,而是 DFT 的快速算法。由于 DFT 的计算量很大,在应用上受到很大限制,FFT 的出现使 DFT 的运算大大简化,从而使 DFT 在实际中得到广泛应用。

现在分析直接计算 DFT 的运算量。对 N 点有限长序列 $x(n)$ 的 DFT 变换为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (3.3.1)$$

假设 $x(n)$ 是复序列,则 $X(k)$ 也是复数, $X(k)$ 共有 N 个点,所以,整个 DFT 运算需要 N^2 次复数乘法法和 $N(N-1)$ 次复数加法。

快速傅里叶变换能减少运算量的根本原因在于,它不断地把长序列的离散傅里叶变换变为短序列的离散傅里叶变换,再利用系数 W_N^{nk} 的对称性和周期性,即

$$W_N^{(nk+N/2)} = -W_N^{nk} \quad (3.3.2)$$

$$W_N^{kn} = W_N^{n(N+k)} = W_N^{k(n+N)} \quad (3.3.3)$$

将 DFT 运算中的有些项加以合并,达到减少运算工作量的效果。FFT 的算法很多,且有专用的芯片和许多免费程序,在实际应用中,读者可以查阅有关数字信号处理的教材及有关文献。本章只介绍时间抽取(decimation-in-time,DIT)基-2FFT 算法和频率抽取(decimation-in-frequency,DIF)基-2FFT 算法。

3.3.2 时间抽取基-2FFT 算法

对式(3.3.1),令 $N=2^M$, M 为正整数,则可将 $x(n)$ 按奇偶分成两组,即令 $n=2r$ 及 $n=2r+1$, $r=0,1,\dots,N/2-1$,于是

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) (W_N^2)^{rk} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

式中, $W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$ 。于是,有

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk} = A(k) + W_N^k B(k) \quad (3.3.5)$$

式中, $A(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{N/2}^{rk}$, $B(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk}$, $k=0,1,\dots,N/2-1$ 。

这样一个 N 点的 DFT 已被分解成两个 $N/2$ 点的 DFT。如果利用 $A(k), B(k)$ 表达全部的 $X(k)$, 必须要利用系数 W_N^{nk} 的周期性, 即式(3.3.2)及 $A\left(k + \frac{N}{2}\right) = A(k)$,

$B\left(k + \frac{N}{2}\right) = B(k)$, 从而得到

$$\begin{aligned} X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= A\left(k + \frac{N}{2}\right) + W_N^{k+\frac{N}{2}} B\left(k + \frac{N}{2}\right) = A(k) - W_N^k B(k), \\ k &= 0, 1, \dots, N/2 - 1 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

当 $N=8$ 时, $A(k), B(k)$ 及 $X(k)$ 的关系如图 3.3.1 所示。

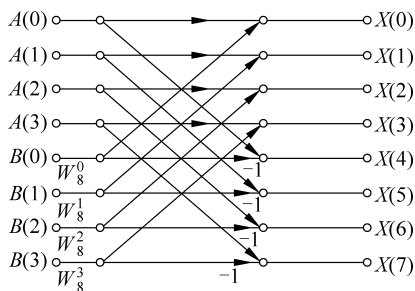


图 3.3.1 $N=8$ 时 $A(k), B(k)$ 及 $X(k)$ 之间关系

当 $A(k), B(k)$ 仍是高复合数($N/2$)的 DFT 时, 可按上述方法继续加以分解, N 点 DFT 可分成 M 级。令 $r=4l$ 及 $r=4l+2, l=0, 1, \dots, N/4-1$, 则 $A(k)$ 表示为

$$\begin{aligned} A(k) &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x(4l) W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/4-1} x(4l+2) W_{N/2}^{(2l+1)k} \\ &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x(4l) W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{N/4-1} x(4l+2) W_{N/4}^{lk} \\ &= C(k) + W_{N/2}^k D(k) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} A\left(k + \frac{N}{4}\right) &= C\left(k + \frac{N}{4}\right) + W_{N/2}^{k+\frac{N}{4}} D\left(k + \frac{N}{4}\right) = C(k) - W_{N/2}^k D(k), \\ k &= 0, 1, \dots, N/4 - 1 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

同理, $B(k)$ 表示为

$$\begin{aligned} B(k) &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x(4l+1) W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/4-1} x(4l+3) W_{N/2}^{(2l+1)k} \\ &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x(4l+1) W_{N/4}^{lk} + \sum_{l=0}^{N/4-1} x(4l+3) W_{N/4}^{lk} \\ &= E(k) + W_{N/2}^k F(k) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

$$B\left(k + \frac{N}{4}\right) = E(k) - W_{N/2}^k F(k) \quad k=0,1,\dots,N/4-1 \quad (3.3.10)$$

若 $N=8$, 这时 $C(k), D(k), E(k), F(k)$ 都是 2 点的 DFT, 无须再分, 即

$$C(0) = x(0) + x(4), E(0) = x(1) + x(5);$$

$$C(1) = x(0) - x(4), E(1) = x(1) - x(5)$$

$$D(0) = x(2) + x(6), F(0) = x(3) + x(7);$$

$$D(1) = x(2) - x(6), F(1) = x(3) - x(7)$$

以上算法是将时间下标 n 按奇、偶不断进行分组, 故称时间抽取算法。上述过程如图 3.3.2 所示, 其基本运算单元如图 3.3.3 所示, 由于运算单元呈蝴蝶形, 又称蝶形运算单元(butterfly computation unit)图, 图中 p, q 为第 m 级蝶形运算单元上、下节点序号, 且 $q-p=2^{m-1}$ 。一个蝶形单元可以将运算量减少至一次复数乘法和两次复数加法, 即输入端先与 W_N^r 相乘, 再与另一输入端分别作加减。第 $m-1$ 级运算($m=1,2,\dots,M$)中, 序号为 p, q 两点只参与这一个蝶形单元的运算, 其输出在第 m 级, 且这一蝶形单元也不再涉及别的点, 这一特点称为“同址运算”。由图 3.3.2 可见, 按 FFT 同址运算的特点, FFT 输出的 $X(k)$ 按自然顺序排列在存储单元中, 即按 $X(0), X(1), \dots, X(7)$ 的顺序排列, 而输入 $x(n)$ 却不是按正常顺序存储的, 而是按 $x(0), x(4), x(2), \dots, x(7)$ 次序排序, 服从所谓的“码位倒置”的规律, 也叫倒位序。分级运算、同址运算和倒位序也是时间抽取基-2FFT 算法, 简称 DIT 基-2FFT 算法的主要特点。

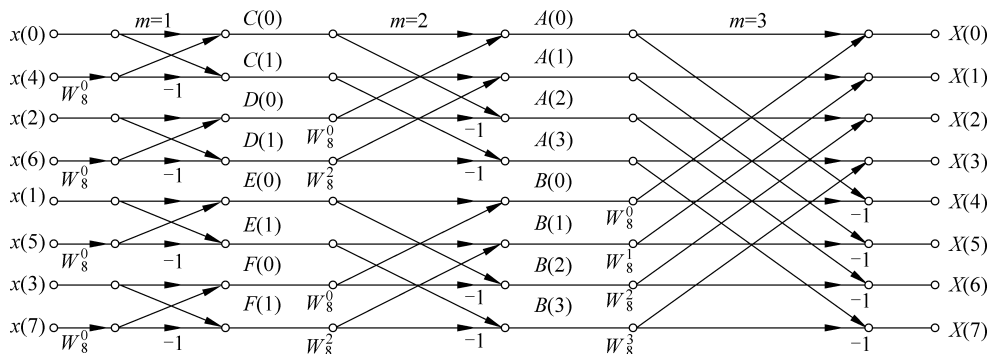


图 3.3.2 8 点 FFT 时间抽取流图

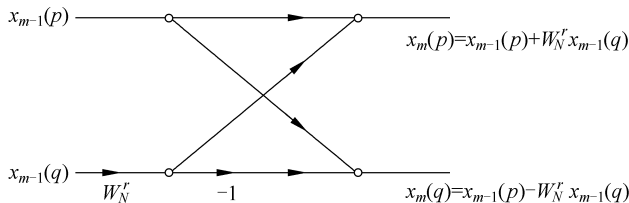


图 3.3.3 第 m 级蝶形单元

从上面的分析中可以看出,DIT基-2FFT共有 M 级运算,每一级都含有 $N/2$ 个蝶形单元,每一个蝶形单元又需要一次复数乘、两次复数加运算,那么,完成 $M = \log_2 N$ 级共需要 $\frac{N}{2} \log_2 N$ 次复数乘法 and $N \log_2 N$ 次复数加法。DIT算法所需的运算量与 $N \log_2 N$ 成正比,而直接运算DFT的运算量与 N^2 成正比,显然,DIT基-2FFT算法大大减少了运算量。

3.3.3 频率抽取基-2FFT 算法

3.3.2节讨论的DIT基-2FFT算法将输入序列 $x(n)$ 按时间下标 n 的奇偶分解为短序列,还有一种FFT算法是将代表频域输出序列的 $X(k)$ 按频率下标 k 的奇偶分解成短序列,称为按频率抽取基-2FFT算法。下面给出算法的简单推导,仍讨论长度为 $N=2^M$ 的序列 $x(n)$ 。首先将 $x(n)$ 按序号分成前后两部分,得

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{nk} W_N^{Nk/2} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + W_N^{Nk/2} x(n + N/2)] W_N^{nk} \quad (3.3.11)
 \end{aligned}$$

式中, $W_N^{Nk/2} = (-1)^k$ 。令 $k=2r, k=2r+1, r=0, 1, \dots, N/2-1$,则

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{nr} \quad (3.3.12)$$

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{nr} W_N^n \quad (3.3.13)$$

令 $g(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right), h(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n$,则

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} g(n) W_{N/2}^{nr} \quad (3.3.14)$$

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n) W_{N/2}^{nr} \quad (3.3.15)$$

由于 $g(n)$ 和 $h(n)$ 是两个 $N/2$ 点序列,所以,式(3.3.14)和式(3.3.15)表示的是 $N/2$ 点DFT运算。 N 点DFT按频率 k 的奇偶分解为两个 $N/2$ 点的DFT。频率抽取法和时间抽取法一样,由于 $N=2^M, N/2$ 仍是一个偶数,所以,可以把每个

$N/2$ 点的 DFT 的输出再进一步分解为奇数组与偶数组, 这样把一个 $N/2$ 点 DFT 分解为两个 $N/4$ 点的 DFT。这两个 $N/4$ 点 DFT 输入也是将 $N/2$ 点 DFT 输入的前一半和后一半分开, 再通过蝶形运算而形成, 类似的分解可以一直进行下去, 直到第 M 次 ($M = \log_2 N$) 分解。第 M 次分解实际上作 2 点 DFT, 2 点 DFT 运算包含一次乘法和二次加法运算。 $N=8$ 时的频率抽取 FFT 如图 3.3.4 所示, 图中每一蝶形运算如图 3.3.5 所示, 其中, p, q 为第 m 级蝶形运算单元的上、下节点序号, 且 $q - p = N/2^m$ 。

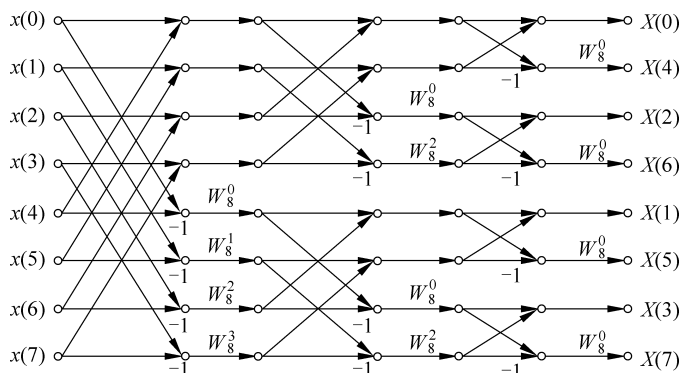


图 3.3.4 8 点 FFT 频率抽取结构图

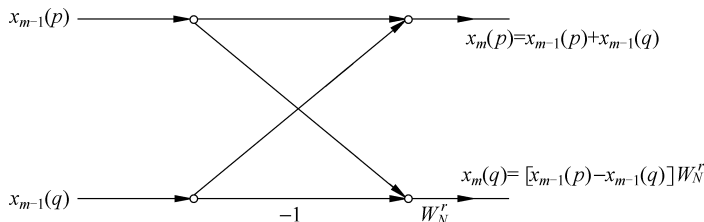


图 3.3.5 第 m 级蝶形单元

由以上的讨论可知, 频率抽取 FFT 算法的运算量与时间抽取 FFT 算法的运算量相同。频率抽取 FFT 算法也具有同址运算的优点, 不过其输入 $x(n)$ 是正序排列, 而输出 $X(k)$ 是倒位序。

前面介绍了两种基本的快速傅里叶变换算法, 下面对它作一些讲解和点评。

FFT 是实现离散傅里叶变换的快速算法, 是一种非常重要的工具。仔细分析 FFT 算法提出的过程, 我们可以发现, 这是一个发现问题、分析问题和解决问题的过程, 是一个不断创新的过程。傅里叶变换可以把时域的信号变换到频域, 也可以把频域的信号变换到时域, 以便从不同的角度更好地观察和分析信号。但是, 必须知道被分析信号的解析表达式。由于在实际应用中, 一般不知道被分析信号的解析表达式, 所以, 只能对实际信号进行采样, 得到离散的信号; 同时, 分析信号的工具是数字计算机, 且只能处理有限长的离散信号, 为此, 人们提出了离散傅里叶变换

(DFT)。DFT 架起了时域与频域之间的桥梁,是信号分析的有力工具。但是,DFT 涉及复数的乘法和加法,其运算量比实数的大;当离散信号的点数多时,运算量将更大,不能满足在实际应用对信号处理实时性的要求。对 DFT 运算量大的问题进行分析发现,运算量与点数的平方成正比。为此,将长度为 N 的离散信号分成两个 $N/2$ 长度的离散信号,再分成四个 $N/4$ 长度的离散信号……以减少计算量;再利用系数的固有特性,对运算过程中的有些项进行合并,从而实现了 DFT 的快速运算,即 FFT。可以从时域对离散信号进行分解,这就是按照时间抽取(DIT)的 FFT 算法;也可以从频域对长的离散信号进行分解,这就是按频率抽取(DIF)的 FFT 算法。可以将离散信号的长度定为 2 的 N 次方,这就是基 2-FFT,也可以将离散信号的长度定为 4 的 N 次方,这就是基 4-FFT。对 FFT 的讲解和点评如表 3.3.1 所示^[13]。

表 3.3.1 FFT 的点评要点

讲解过程	进行点评
DFT 重要、有用;但是,运算量大	发现问题
与 N^2 有关	分析问题
将 N 分解,再利用系数的固有特性进行合并	解决问题
输入乱序、输出顺序,进行倒序	寻找规律
从 DIT 到 DIF;从基-2FFT 到基-4FFT	不断突破

3.3.4 快速傅里叶逆变换

上面讨论的 FFT 算法同样可以用于 IDFT 运算,简称 IFFT,即快速傅里叶逆变换。将 IDFT 的定义公式

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

与 DFT 公式

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

比较可以看出,只要把 DFT 运算中的每一系数 W_N^{kn} 改为 W_N^{-kn} ,并在最后再乘以常数 $1/N$,那么前面所讨论的 FFT 算法就可用来计算 IDFT。当把频率抽取 FFT 算法用于计算 IDFT 时,由于输出变量变成 $x(n)$,相当于按 $x(n)$ 的下标的奇偶来分组,因而改称为按时间抽取 IFFT 算法。同样,当把时间抽取 FFT 算法应用于 IDFT 时,输入变为 $X(k)$,是按 $X(k)$ 的奇偶分组的,故改称为按频率抽取 IFFT 算法。例如,将频率抽取 FFT 算法用于计算 IDFT,作如下修改:把 W_N^{nk} 换成 W_N^{-nk} ;每级运

算中都乘以因子 $1/2$ (将常量 $1/N$ 分解成 M 个 $1/2$ 连乘, 可以防止溢出, 有利于减小量化误差); 输入序列改为自然顺序的 $X(k)$, 输出序列改为倒位序的 $x(n)$, 就可以得到图 3.3.6 所示的 IFFT 结构图。

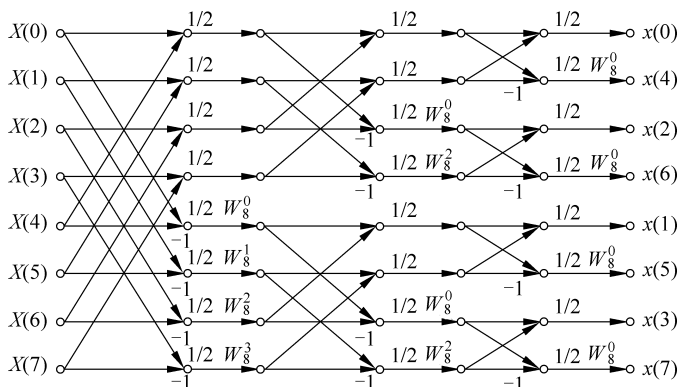


图 3.3.6 按时间抽取的 IFFT 结构 ($N=8$)

另外, 还有一种完全不改变 FFT 计算程序就可以计算 IFFT 的方法。对 IDFT 公式取共轭运算, 有

$$x^*(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right]^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \quad (3.3.16)$$

式(3.3.16)两边再取共轭, 有

$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^* = \frac{1}{N} \{ \text{DFT} [X^*(k)] \}^* \quad (3.3.17)$$

式(3.3.17)说明, 只要先将输入序列 $X(k)$ 取共轭, 然后, 直接利用 FFT 子程序, 最后, 把运算结果取一次共轭, 并乘以系数 $1/N$, 就可以得到 $x(n)$ 的结果。

例 3.3.1 已知有限长序列

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-2) + 3\delta(n-3)$$

按 FFT 运算流图求 $X(k)$, 再用所得的 $X(k)$ 按 IFFT 反求 $x(n)$ [7]。

解 求 DFT 的过程如图 3.3.7 所示, 求 IDFT 的过程如图 3.3.8 所示。

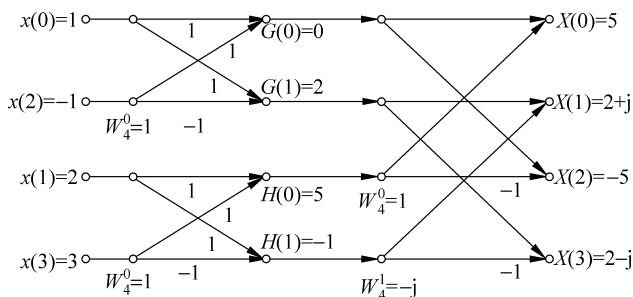


图 3.3.7 FFT 运算

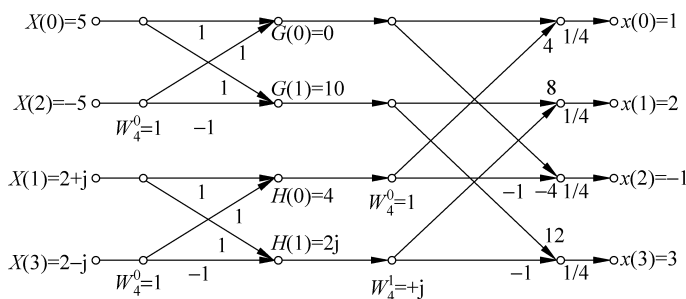


图 3.3.8 IFFT 运算

$X(k)$ 的结果为

$$X(0) = 5, \quad X(1) = 2 + j, \quad X(2) = -5, \quad X(3) = 2 - j$$

3.3.5 快速傅里叶变换的应用

1. 快速卷积

若长度为 N_1 的序列 $x(n)$ 和长度为 N_2 的序列 $h(n)$ 作线性卷积, 得

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

$y(n)$ 也是有限长序列, 长度为 $N_1 + N_2 - 1$, 此卷积运算需要 $N_1 N_2$ 次乘法, 当 $N_1 = N_2 = N$ 时, 需要 N^2 次乘法。

如果用循环卷积实现线性卷积, 需要将两序列补零加长至 $N_1 + N_2 - 1$, 这时, 利用 FFT 技术可以大大减少求卷积所需要的运算工作量, 这种快速卷积运算如图 3.3.9 所示。由图可见, 在快速卷积中需要两次 FFT、一次 IFFT 运算。在一般的数字滤波器中, 由 $h(n)$ 求 $H(k)$ 是预先计算好的, 故实际只需要两次 FFT 运算。若 $N_1 = N_2 = N$, 所需乘法运算次数为

$$2 \times (N/2) \times M + N = N(M + 1)$$

显然, N 值越大, 式中乘法运算次数比 N^2 越小。

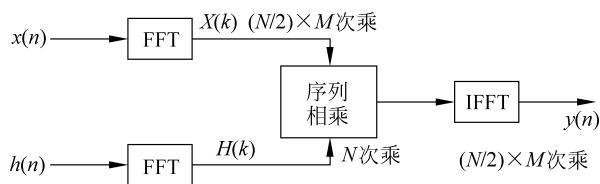


图 3.3.9 快速卷积

快速卷积可以实现信号的实时处理。但是, 在工程实际中, 有时遇到要处理的信号很长, 对于这类信号只能采用分段卷积的方法。

一般代表滤波器特性的 $h(n)$ 是有限长序列, 其长度为 N , 信号 $x(n)$ 的长度 N_1

很大,且 $N_1 \gg N$,将 N_1 分成若干小段,每段长 M ,以 $x_i(n)$ 表示第 i 小段。为完成 $x_i(n)$ 和 $h(n)$ 之间的循环卷积,将 $x_i(n)$ 补零,使其长度达到 $N+M-1$,输入序列为

$$x(n) = \sum_{i=0}^m x_i(n)$$

其中,

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n), & iM \leq n \leq (i+1)M-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad m = \frac{N_1}{M}$$

输出序列为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \left[\sum_{i=0}^m x_i(n) \right] * h(n) = \sum_{i=0}^m [x_i(n) * h(n)] = \sum_{i=0}^m y_i(n)$$

其中, $y_i(n) = x_i(n) * h(n)$ 。由于 $y_i(n)$ 的长度为 $N+M-1$, $x_i(n)$ 的非零值长度为 M ,故相邻的 $x_i(n)$ 必有 $N-1$ 长度的重叠。将 $y_i(n)$ 求和得 $y(n)$,其重叠部分必然相加,这种分段卷积再相加求和的方法称为重叠相加法^[7],如图 3.3.10 所示。

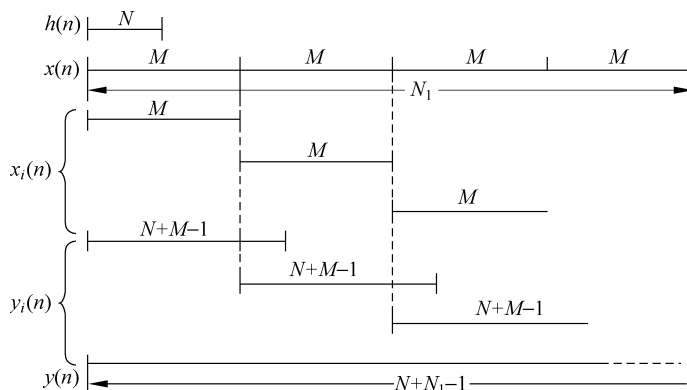


图 3.3.10 重叠相加法

2. 快速相关

快速相关的原理和快速卷积类似,也是借助于 FFT 技术实现。相关运算通常用来确定隐含在可加性噪声中的信号,在时域分析中将进一步讨论。利用相关计算还可以求序列的功率谱。快速相关的实现如图 3.3.11 所示。

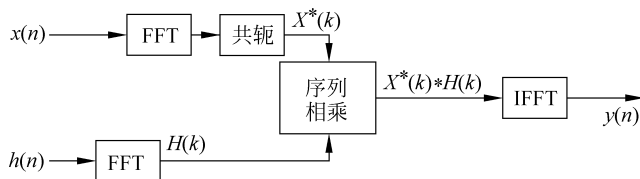


图 3.3.11 快速相关

3.4 与本章内容有关的 MATLAB 函数

本节介绍与傅里叶变换有关的 MATLAB 函数^[8]。

1. fftfilt

该函数用 DFT 实现长序列的卷积,采用重叠相加法,其调用格式为

```
y = fftfilt(h,x)
```

其中, $x(n)$ 的长度为 N ; $h(n)$ 的长度为 M ; 将 $x(n)$ 分成 L 段,程序自动确定对 $x(n)$ 分段的长度。

2. fft

该函数用来实现快速傅里叶变换,其调用格式为

```
X = fft(x) 或 X = fft(x,N)
```

对前者,若 x 的长度是 2 的整数次幂,则按长度实现 x 的快速变换;对后者, N 应为 2 的整数次幂,若 x 的长度小于 N ,则补零,若超过 N ,则舍弃 N 以后的数据。

3. ifft

该函数用来实现快速傅里叶逆变换,调用格式同 `fft`。

例 3.4.1 已知信号 $x(t) = 2\sin(5\pi t) + 5\cos(18\pi t)$,求 N 点 DFT 的幅值谱和相位谱($N=64$)。

解 MATLAB 程序如下:

```
% examp3_1.m
N = 64;                % 设置采样点数
fs = 100;              % 设置采样频率
dt = 1/fs;
n = 0:N-1;
x = 2 * sin(5 * pi * n * dt) + 5 * cos(18 * pi * n * dt);
y = fft(x,N);          % N 点傅里叶变换
mag = 2 * abs(y)/N;     % 计算信号幅值,abs 函数用来求信号的模
pha = angle(y);        % angle 函数用来求相角
f = n * fs/N;          % 计算频率,fs/N 为频率间隔
subplot(121);          % 设置绘图窗口,在一幅图中产生两个窗口 1×2,在第一个窗口画图
plot(f,mag);
title('Magnitude')
subplot(122);          % 在第二个窗口画图
plot(f,pha);
title('Phase')
```

N 点 DFT 的幅值谱和相位谱如图 3.4.1 所示。

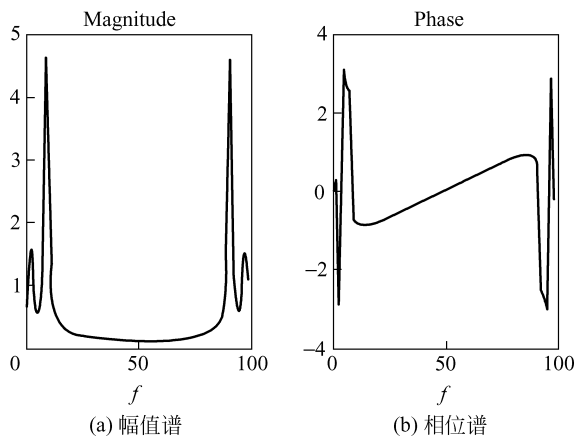


图 3.4.1 幅值谱与相位谱

小结

本章主要介绍离散时间信号分析的重要工具——傅里叶变换。首先回顾了连续时间信号的傅里叶级数和傅里叶变换,然后,从序列的傅里叶变换入手,重点阐述离散傅里叶变换的产生及物理意义,详细介绍了离散傅里叶变换的一些性质,如线性、对称性、循环移位、循环卷积等,利用循环卷积性质可简化线性卷积的运算;进一步分析了 DFT 在实际应用中存在的问题,给出了解决的办法。由于离散傅里叶变换计算量很大,难以实时处理信号,其快速算法——FFT 能大大提高运算速度,因此,本章又介绍了时间抽取基-2FFT 算法和频率抽取基-2FFT 算法的原理、基本实现及 FFT 算法的应用;最后介绍相关的 MATLAB 函数,给出相应的例题。

习题和上机练习

3.1 求序列

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad x(n) = \begin{cases} \beta^{n-n_0}, & n_0 \leq n \\ 0, & n_0 > n \end{cases}$$

的卷积。

3.2 序列 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 求下列各序列的傅里叶变换:

- (1) $e^{j\omega_0 n} x(n)$; (2) $nx(n)$; (3) $x(-n)$; (4) $x^*(n)$;
 (5) $x(n-k)$; (6) $x^2(n)$; (7) $\text{jIm}[x(n)]$ 。

3.3 计算下列信号的傅里叶变换:

- (1) $2^n u(-n)$; (2) $a^{|n|} u(n) \sin(\omega_0 n)$, $|a| < 1$;
 (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n+3) - u(n-2)]$;

$$(4) \cos(18\pi n/7) + \sin(2n); \quad (5) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \delta(n-3k).$$

3.4 已知周期序列

$$x_p(n) = \begin{cases} 10, & 2 \leq n \leq 6 \\ 0, & n = 0, 1, 7, 8, 9 \end{cases}$$

周期 $N=10$, 试求 $X_p(k) = \text{DFS}[x_p(n)]$, 并画出 $X_p(k)$ 的幅度和相位特性。

3.5 已知序列

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

分别求其 10 点和 20 点离散傅里叶变换。

3.6 已知有限长序列 $x(n)$ 的 DFT 为 $X(k)$, 试用频移性质求序列 $x(n)\sin(2\pi n/N)$ 的 DFT。

3.7 对于有限长序列 $x(n)$, 若 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 试证明:

(1) 若 $x(n)$ 满足 $x(n) = -x(N-1-n)$, 则 $X(0) = 0$;

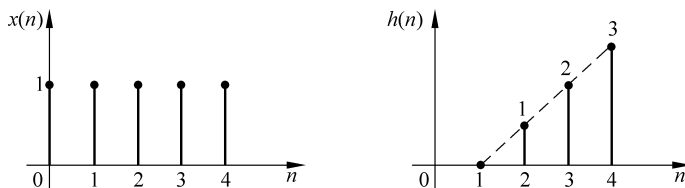
(2) 若 N 为偶数, 且有 $x(n) = x(N-1-n)$, 则 $X\left(\frac{N}{2}\right) = 0$ 。

3.8 已知有限长序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 如图题 3.8 所示, 试画出:

(1) $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积;

(2) $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 5 点循环卷积;

(3) $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 8 点循环卷积。



图题 3.8

3.9 设序列 $x(n)$ 的 DFT 为 $X(k)$, 将它分解为实部和虚部, 即

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$$

证明:

(1) 若序列 $x(n)$ 是实序列, 则 $X_R(k)$ 是偶函数, $X_I(k)$ 是奇函数;

(2) 若序列 $x(n)$ 是纯虚序列, 则 $X_R(k)$ 是奇函数, $X_I(k)$ 是偶函数。

3.10 设 N 点序列 $x(n)$ 的 DFT 为 $X(k)$, 再按 k 对 $X(k)$ 作 DFT 运算, 得到

$$x_1(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{kn}$$

试求 $x_1(n)$ 与 $x(n)$ 的关系。

3.11 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 现将长度扩

大 r 倍(补零增长),得到长度为 rN 的有限长序列

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

求 $\text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

3.12 已知序列 $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 令对其 z 变换 $X(z)$ 在单位圆上 N 等分点采样, 采样值为 $X(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}}$, 求有限长序列 $\text{IDFT}[X(k)]$ 。

3.13 已知有限长序列 $x(n) = \delta(n-2) + 3\delta(n-4)$ 。

(1) 求它的 8 点离散傅里叶变换 $X(k)$;

(2) 已知序列 $y(n)$ 的 8 点离散傅里叶变换 $Y(k) = W_8^{4k} X(k)$, 求序列 $y(n)$;

(3) 已知序列 $m(n)$ 的 8 点离散傅里叶变换 $M(k) = X(k)Y(k)$, 求序列 $m(n)$ 。

3.14 在离散傅里叶变换中产生泄漏和混叠效应的原因是什么? 怎样才能减小这种效应?

3.15 简略推导按时间抽取基 2-FFT 算法的蝶形公式, 并画出 $N=8$ 时的算法流程图, 说明该算法的同址运算特点。

* 3.16 已知两序列

$$x(n) = \begin{cases} (0.9)^n, & 0 \leq n \leq 16 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

编写程序以实现序列的线性卷积和 N 点循环卷积。

* 3.17 对下面信号进行频谱分析, 求幅度谱 $|X(k)|$ 和相位谱 $\theta(k)$ 。

(1) $x_1(t) = a^t$, $a = 0.8$, $0 \leq t \leq 4\text{ms}$, $f_{\max} = 400\text{Hz}$;

(2) $x_2(t) = \sin t/t$, $T = 0.125\text{s}$, $N = 16$ 。

* 3.18 给定信号 $x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + 2\sin(2\pi f_2 t)$, $f_1 = 15\text{Hz}$, $f_2 = 18\text{Hz}$, 现在对 $x(t)$ 采样, 采样点数 $N = 16$, 采样频率 $f_s = 50\text{Hz}$, 设采样序列为 $x(n)$ 。

(1) 编写程序计算 $x(n)$ 的频谱, 并绘图;

(2) 改变采样频率, 得到序列 $x_1(n)$, 计算 $x_1(n)$ 的频谱, 并绘图;

(3) 增大采样点数, 得到序列 $x_2(n)$, 计算 $x_2(n)$ 的频谱, 并绘图;

(4) 采样点数 $N = 64$, 采样频率 $f_s = 300\text{Hz}$, 在采样点后补零得到新序列 $x_3(n)$, 计算 $x_3(n)$ 的频谱, 并绘图。

参考文献

- [1] 胡广书. 数字信号处理理论、算法与实现[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [2] 徐科军, 全书海, 王建华. 信号处理技术[M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2001.
- [3] 程佩青. 数字信号处理教程[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [4] Oppenheim A V, Schaffer R W. Discrete-Time Signal Processing[M]. 3rd ed. Publishing House of Electronics Industry, 2011.
- [5] Oppenheim A V, Willsky A S. Signal and Systems[M]. 2nd ed. Prentice Hall, 1997.

- [6] 何振亚. 数字信号处理的理论与应用(上)[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1983.
- [7] 靳希, 杨尔滨, 赵玲. 信号处理原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [8] 楼顺天, 李博菡. 基于 MATLAB 的系统分析与设计——信号处理[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998.
- [9] 姚天任. 数字信号处理学习指导与题解[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002.
- [10] 谢红梅, 赵健. 数字信号处理常见题型解析及模拟试题[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2001.
- [11] 程佩青. 数字信号处理教程习题分析与解答[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [12] 高西全, 丁玉美. 数字信号处理学习指导[M]. 2 版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2001.
- [13] 徐科军. 以能力为导向讲授研究生信号处理课[J]. 电气电子教学学报, 2019, 41(2): 56-59, 76.