

6.2.3 测量误差融合案例

在工程中,测量误差会被考虑为服从正态分布。基于这一思想,可以将多个带有误差的测量数据融合在一起,得到一个相对准确的测量值。考虑上述无人机高度测量的例子,如果我们在气压计之外增加一个超声波传感器,如图 6.2.2 所示,假如通过气压计测得的高度 $z_1=50\text{m}$,通过超声波传感器测得的高度 $z_2=52\text{m}$,下面将讨论如何科学地将两者融合在一起并得到一个理论上最优的估计值。

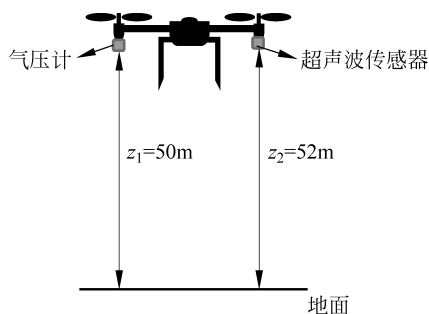


图 6.2.2 数据融合案例

设想这两种传感器的测量精度完全一样,那么可以简单地取它们的平均值作为估计值,即 $\hat{z} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = 51\text{m}$ 。而在现实生活中,每一个传感器都有自己的精度范围,测量时产生的随机误差也不相同。定义这两个传感器的误差分别为

$$e_1 = z_a - z_1 \quad (6.2.8a)$$

$$e_2 = z_a - z_2 \quad (6.2.8b)$$

其中, z_a 是无人机在 k 时刻的真实高度值(下标 a 代表 actual)。在本例中,我们假设气压计的测量误差服从正态分布 $e_1 \sim N(0, \sigma_{e_1}^2)$,其中期望 $E(e_1) = 0$,标准差 $\sigma_{e_1} = 1\text{m}$,当使用气压计的测量结果 $z_1 = 50\text{m}$ 时,其真实结果的概率分布如图 6.2.3(a) 所示,真实值有 99.73% 的可能性会落在 ± 3 个误差的标准差之内,即 47m 与 53m 之间。同理,假设超声波

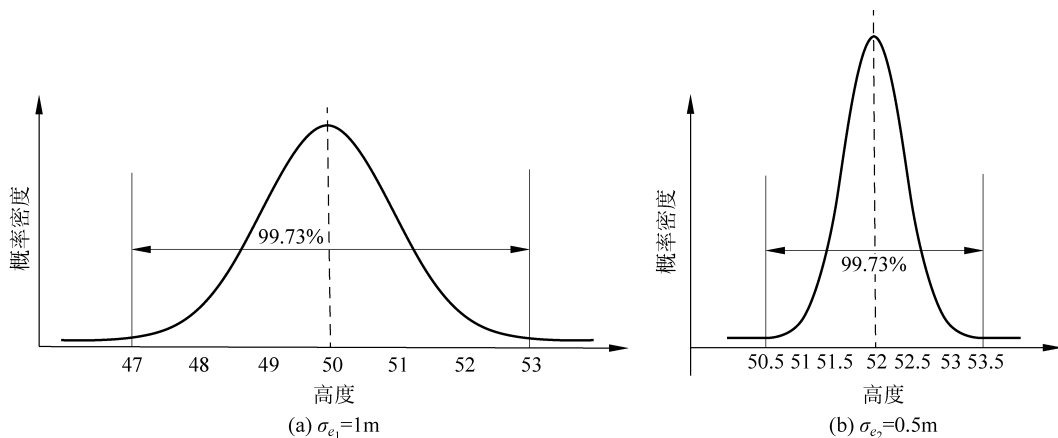


图 6.2.3 气压计与超声波传感器的测量结果概率分布

$$\Rightarrow K^* = \frac{\sigma_{e_1}^2}{\sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_2}^2} \quad (6.2.13a)$$

将 $\sigma_{e_1} = 1$ 和 $\sigma_{e_2} = 0.5$ 代入式(6.2.13a), 可得

$$K^* = \frac{\sigma_{e_1}^2}{\sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_2}^2} = \frac{1}{1^2 + 0.5^2} = 0.8 \quad (6.2.13b)$$

$\sigma_{\hat{e}}^2$ 对 K 的二阶导数为

$$\frac{d^2 \sigma_{\hat{e}}^2}{dK^2} = \frac{d(-2(1-K)\sigma_{e_1}^2 + 2K\sigma_{e_2}^2)}{dK} = 2(\sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_2}^2) > 0 \quad (6.2.13c)$$

因此当 $K^* = \frac{\sigma_{e_1}^2}{\sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_2}^2} = 0.8$ 时, $\sigma_{\hat{e}}^2$ 为最小值。代入式(6.2.9), 可以得到最优估计值

$$\hat{z} = z_1 + K^*(z_2 - z_1) = 50 + 0.8 \times (52 - 50) = 51.6 \quad (6.2.14a)$$

代入式(6.2.12d), 得到最优估计误差的标准差

$$\sigma_{\hat{e}} = \sqrt{(1-K^*)^2 \sigma_{e_1}^2 + (K^*)^2 \sigma_{e_2}^2} = 0.45 \quad (6.2.14b)$$

这一标准差小于每一个传感器单独测量的误差标准差 ($\sigma_{\hat{e}} < \sigma_{e_2} < \sigma_{e_1}$)。数据融合结果如图 6.2.4 所示。

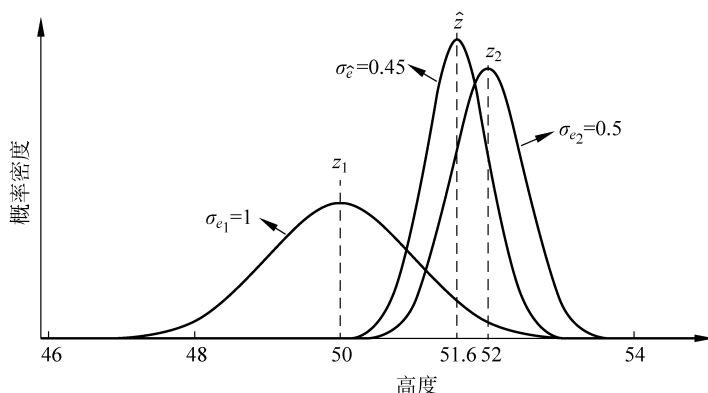


图 6.2.4 数据融合结果

由以上分析可知, 通过数据融合得到的最优估计值 $\hat{z}$ 在两个测量值中间并偏向于 z_2 , 其概率分布的钟形曲线比两组测量的结果都要细长, 这意味着我们使用两个“不太准确”的结果融合出一个相对准确的估计值。这一思想在工程中有非常广泛的应用, 使用多传感器融合可以有效地提高精度和可靠性。

6.2.4 协方差与协方差矩阵——统计学直观理解

在上一小节数据融合的例子中, 两个传感器之间是相互独立的(一个传感器测量的结果不会影响另一个传感器测量的结果), 因此在融合时只需要考虑它们各自的方差即可。但在某种情况下, 两个信号之间存在关联(例如一个信号会放大另一个信号), 在融合时就需要考