

## 热阴极二极管

## 5.1 引言

最简单的真空电子器件是如图 5.1(a)所示的平面二极管。二极管由阴极和阳极组成,电子从阴极发射,阳极和阴极处于同一个真空腔室。如果阳极相对阴极加正电位,那么当没有电子发射时,在阴极和阳极之间静电势按线性变化,如图 5.1(b)所示。现在假定电子从阴极发射出来,初速度可以忽略,电流密度可以以某种方式控制。在阴极和阳极之间电场的作用下,电子被拉向阳极,电子所带的负的空间电荷降低了电极间的电势,如图 5.1(b)中的虚线所示。如果阴极表面电场是负的,阴极发射出的所有电子均可到达阳极。二极管中的电流由阴极性能决定。当两个电极之间的电势差相反时,则没有电子可以到达阳极。这样,该器件就是一个二极管,它只允许电子从阴极流向阳极。应该注意的是,电路理论中传统的电流方向假定电荷载体是正电荷,因此电流方向是从阳极流向阴极。

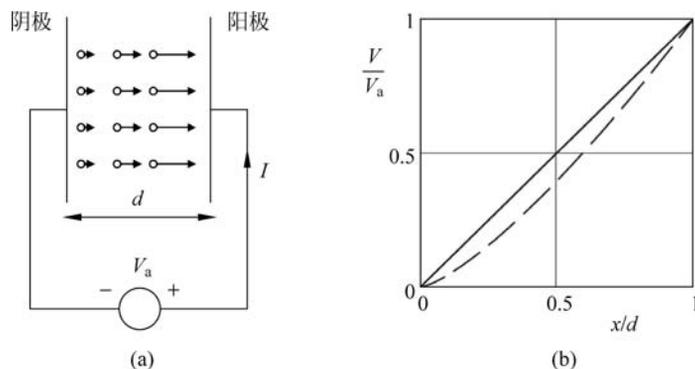


图 5.1 平面真空二极管示意图

(a) 电路图(总框图); (b) 二极管内部静电势分布,空间电荷造成了电势沉降(虚线所示)

随着发射电流密度的增加,电势沉降增加,直到阴极表面电场为 0。这时,通过二极管的电流由器件的几何结构和两极之间的电势差决定,而不是由阴极可提供的发射能力决定。这个二极管就被称为工作在空间电荷限制区,此时,进一步提高阴极发射能力并不能增加电流。

本章讨论平面、圆柱面、球面空间电荷限制二极管的稳态特性,包括电子初始能量效应和相对论效应。当二极管电势差随时间变化时,静态关系可以一直保持到电子穿过二极管所需要的时间和电压变化的时间可比拟的时候为止。这就给二极管的最高工作频率设置了一个限制。5.8节讨论了电子注入平面二极管,5.9节回顾了二维电子束流的二极管特性。

二极管的一种重要形式是电子枪,应该以这样一种方式选择电子枪的电极形状:电子不能打到阳极上,而要穿过阳极中间的孔,然后进入设计好的后面的区域。电子枪是许多微波器件中的一个基本部件。其主要类型的理论和设计将在第9章论述。

### 5.1.1 热阴极二极管的量纲分析

通过量纲分析,可以深入理解热阴极二极管的特性(见1.7.1节)。目的是了解流过二极管的电流如何取决于所加的电压和二极管的几何尺寸。二极管的形状可以非常复杂,但目前假定这个二极管可以用电极间距离和阴极面积来描述。因为这是一个关于带电粒子的动力学问题,它涉及电子的荷质比和真空介电常数 $\epsilon_0$ 。当热初速或相对论效应非常显著时,就必须引入一个与它们的量级相关的参考电压 $V_r$ 。表5.1概括了需要说明这些问题的参量及相应量纲。

表 5.1 热阴极二极管参数

量	符 号	量 纲
电流	$I$	$[\text{ML}^2\text{T}^{-3}\text{V}^{-1}]$
阳极电压	$V_a$	$[\text{V}]$
参考电压	$V_r$	$[\text{V}]$
电极间距	$d$	$[\text{L}]$
面积	$A$	$[\text{L}^2]$
真空介电常数	$\epsilon_0$	$[\text{MLT}^{-2}\text{V}^{-2}]$
电子荷质比	$e/m_0$	$[\text{L}^2\text{T}^{-2}\text{V}^{-1}]$

这些问题涉及7个参数和4个量纲。应用 Buckingham 定理,可以通过3个无量纲方程组来说明。其中两个无量纲的方程组很容易用下面两个式子表示:

$$\Pi_1 = \frac{V_a}{V_r} \quad (5.1)$$

及

$$\Pi_2 = \frac{A}{d^2} \quad (5.2)$$

第三个方程可以假定为如下形式:

$$I = V_r^\alpha L^\beta \epsilon_0^\gamma (e/m)^\delta \quad (5.3)$$

其中,指数项待定。检查量纲的次方,发现:

$$\begin{aligned} M: & 1 = \gamma \\ L: & 2 = \beta + \gamma + 2\delta \\ T: & -3 = -2\gamma - 2\delta \\ V: & -1 = \alpha - 2\gamma - \delta \end{aligned} \quad (5.4)$$

这些方程的解是  $\alpha=1$ ;  $\beta=0$ ;  $\gamma=3/2$ ;  $\delta=1/2$ , 因此, 第三个无量纲方程组为:

$$\Pi_3 = \left( \frac{I}{\epsilon_0 \sqrt{(e/m)V_r^3}} \right) \quad (5.5)$$

无量纲方程组中的任何一个可以由其余方程组的函数来表达, 例如:

$$\Pi_3 = f(\Pi_1, \Pi_2) \quad (5.6)$$

其中,  $f$  是一个待定函数, 它对相似几何结构的所有二极管都是相同的, 因此, 它们可以相互缩尺。

如果热初速效应和相对论效应都不显著, 则不需要  $\Pi_1$ 。式(5.5)中的  $V_r$  可以用  $V_a$  代替, 式(5.6)变为:

$$\Pi_3 = f(\Pi_2) \quad (5.7)$$

对任何几何结构相似的二极管,  $\Pi_2$  是常数, 因此,  $\Pi_3$  也是一个常数。式(5.5)说明二极管中的电流与工作电压的  $3/2$  次方成正比。量纲分析表明, 无论二极管的几何结构如何, 所有不需要引入参考电压的二极管必须遵循  $3/2$  次方定律。Langmuir<sup>[1]</sup> 和 Tsimring<sup>[2]</sup> 也用不同的方法得到同样的结果。

因为许多电子器件遵循  $3/2$  次方定律, 通过它的导流系数( $K$ )可以很方便地描述一个二极管。导流系数  $K$  由下式定义:

$$K = \frac{I}{V_a^{3/2}} \quad (5.8)$$

导流系数  $K$  只取决于二极管的几何结构。可以推断, 所有几何结构相互缩尺的二极管具有相同的导流系数。因为导流系数的典型量级是  $10^{-6} \text{ A} \cdot \text{V}^{-1.5}$ , 常用微朴作为单位 ( $\mu\text{P} = \mu\text{A} \cdot \text{V}^{-1.5}$ )。下面可以看到, 当热初速效应或相对论效应很显著时, 就需要一个参考电压来描述这些问题, 电流不再遵循  $3/2$  次方定律。

### 5.1.2 电流限制

事实上, 所有采用热阴极的真空功率器件, 其发射电流随温度增加而增加(见 18.5 节)。

图 5.2 说明了一个典型的热阴极二极管的  $I-V$  特性曲线。当电压较低时, 二极管处于空间电荷限制区, 发射电流遵循  $3/2$  次方定律。随着电流的增大, 它逐渐达到从阴极上可支取的最大电流, 这个发射电流由肖特基方程给出(见 18.10 节)。它由温度和阴极功函数确定, 只随着阳极电压增大缓慢增长。此时二极管处于温度限制区。

Vaughan<sup>[3]</sup> 提出了一个经验模型说明发射电流从空间电荷限制区过渡到温度限制区:

$$\frac{1}{J^\alpha} = \frac{1}{J_C^\alpha} + \frac{1}{J_S^\alpha} \quad (5.9)$$

式中,  $J_C$  为空间电荷限制区电流密度, 由 Child-Langmuir 方程式(5.16)确定,  $J_S$  为由肖特基方程式(18.10)得到的电流密度,  $\alpha$  是一个经验常数。对于

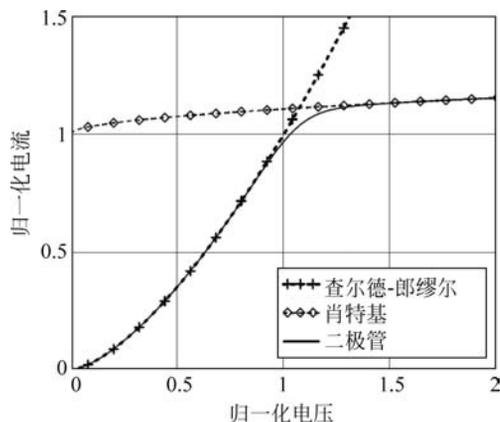


图 5.2 热阴极二极管的  $I-V$  特性曲线, 图中示出了查尔德-郎缪尔区(空间电荷限制区)和肖特基区(温度限制区)

设计良好的二极管(电子枪), $\alpha$ 的典型值范围为6~10。但是,由于表面缺陷或加热不均匀造成发射不均匀的二极管,该值范围可能为2~5。

真空功率器件所用二极管通常设计工作在空间电荷限制区,因为它可以确保:

- 发射电流只取决于阴极电压和二极管的几何结构,而不取决于阴极状态。
- 阴极表面不会由于强电场产生的正离子轰击造成损坏。

如果怀疑阴极发射失效,可以画出 $I-V$ 特性曲线,检测阴极工作点是否低于曲线“拐点”。对于一个特定的阴极,在电流密度和阴极寿命之间有一个取舍。对于要求工作寿命很长的器件(例如用于人造卫星),阴极就被设计为工作在较低的电流密度。而用于回旋管的二极管阴极工作在温度限制区,这样可以通过阴极温度控制电子束流。

## 5.2 平面空间电荷限制二极管

考虑一个由两个平行平面电极组成的二极管,电极间距为 $d$ ,如图5.1所示。在 $x=0$ 处阴极静电电势( $V$ )等于0,在 $x=d$ 处阳极电势为 $V=V_a$ 。这时假定电子从阴极以零能量发射出来,并忽略相对论效应。Child<sup>[4]</sup>和Langmuir<sup>[1]</sup>首先对这个二极管的理论进行了研究。根据能量守恒定律,电子在任意一点的速度为:

$$u = \sqrt{2(e/m_0)V} \quad (5.10)$$

式中, $V$ 是相对阴极的电势。稳态下电流密度恒定,由下式得到:

$$J = \rho u \quad (5.11)$$

式中, $\rho$ 是电荷密度。根据一维泊松方程,与空间电荷密度相关的电势为:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.12)$$

将式(5.10)代入式(5.12),得到:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{J}{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m_0)V}} \quad (5.13)$$

将方程(5.13)两边乘以 $2(dV/dx)$ ,并对 $x$ 积分后得到:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = -\frac{4J}{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m_0)}} \sqrt{V} + C \quad (5.14)$$

式中, $C$ 是常数。施加边界条件,得到:

$$E_a^2 - E_k^2 = -\frac{4J}{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m_0)}} \sqrt{V_a} \quad (5.15)$$

式中, $V_a$ 为阳极相对阴极的电势; $E_a$ 和 $E_k$ 分别为阳极和阴极上的电场强度。当式(5.15)左边最大时,电流密度最大。从图5.1(b)可以看到,当空间电荷密度增加时, $E_a$ 增加, $E_k$ 减小。因此,当 $E_k=0$ 时,可以得到最大可能的电流密度,这符合空间电荷限制电流的情况。当电流为空间电荷限制时, $C=0$ ,再次对式(5.14)积分可以得到:

$$J_C = -\frac{4}{9} \cdot \frac{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m_0)}}{x^2} \cdot V^{\frac{3}{2}} = -K \frac{V^{\frac{3}{2}}}{x^2} \quad (5.16)$$

这就是著名的 Child-Langmuir 定律,其中,  $K = 2.334 \times 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{V}^{-1.5}$ 。注意,式(5.16)中的电流密度是负的,因为通常规定电流沿  $-x$  的方向从阳极流向阴极。Umstattd 等<sup>[5]</sup>给出了这个等式的一个简单的物理起源,从中可以了解到幂次方定律的成因。

式(5.16)可以使用无量纲方程组,按式(5.6)的形式重新写为:

$$\left( \frac{I}{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m)V_r^3}} \right) = -\frac{4}{9} \left( \frac{V_a}{V_r} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{A}{d^2} \right) \quad (5.17)$$

式中,  $I = AJ_c$ ,  $A$  为二极管的横截面积,  $\sqrt{2}$  因子包含在方程左边项中,这样,选择参考电压为  $1.0 \text{ V}$  是合适的。

通过计算可以得到电子在空间电荷限制二极管中的渡越时间。二极管中电势可以由下式得到:

$$V = V_a \left( \frac{x}{d} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (5.18)$$

这样,在阴极上从静止出发的电子速度为:

$$u = \sqrt{\frac{2eV_a}{m_0}} \left( \frac{x}{d} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.19)$$

电子到达阳极需要的时间为:

$$\tau = \frac{1}{u_a} \int_0^d \left( \frac{d}{x} \right)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3d}{u_a} \quad (5.20)$$

式中,  $u_a = \sqrt{2eV_a/m_0}$  为电子到达阳极时的速度。用式(5.20)计算的渡越时间可以与无空间电荷效应时均匀加速进行比较,渡越时间为  $\tau_0 = 2d/u_a$ 。式(5.20)也可以写为:

$$\tau = \frac{K^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt{2e/m_0}} \left( \frac{d}{J_c} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.21)$$

### 5.3 考虑热速度效应的平面二极管

严格来说,5.2 节的分析是非物理学意义的,因为在电场为 0 时没有电子可以离开阴极,而且方程假设阴极表面电荷密度是无限的。实际上电子离开阴极时具有热初速,以便电子可以从阴极上离开。Langmuir<sup>[6-7]</sup>采用了两种方法对这个问题进行了讨论。

第一种方法假定所有电子离开阴极时具有相同的初始速度。这就使得存在反向电场时电子能够移向阳极。因此,在阴极和阳极之间一定存在一个电势梯度为 0 的平面,如图 5.3 所示。在该平面上电子停止运动,形成一个虚阴极,此处电荷密度是无限的,所以该模型与前面的模型一样遭到反对。假定阴极电流密度等于给定温度下的饱和(肖特基)电流密度,则一些电子必然被虚阴极反射,一些电子通过虚阴极到达阳极。这个分析也马上遭到反对,因为没有理由认为具有相同初始速度的电子,在稳态下表现出不同的行为。还有就是难

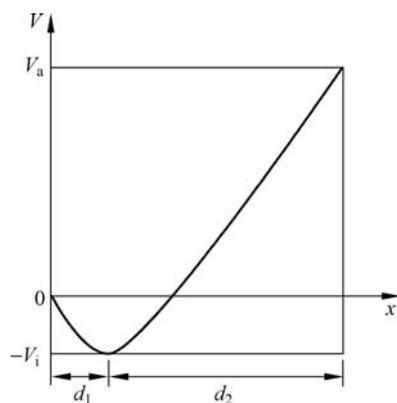


图 5.3 发射速度非零时平面空间电荷限制二极管的电势变化

以理解如何按照阴极温度定义电子初速度<sup>[6]</sup>。因此,当初速为热初速时,该方法失效。但是,5.8节讨论当单一能量电子束注入二极管时,它仍然是讨论发射电流空间电荷限制机理的基础。

第二种方法假定从阴极上发射的电子能量服从麦克斯韦-玻尔兹曼分布。考虑在零电势处的一个电子源,温度为  $T$ ,饱和电流密度为  $J_s$ 。在相对源电势为  $-V$  的电极上收集的电流密度为:

$$J = J_s \exp\left(-\frac{V}{V_T}\right) \quad (5.22)$$

式中,  $V_T = kT/e$  为温度的伏特当量<sup>[6]</sup>。从阴极上发射的能量范围  $(V, V + dV)$  的电流密度可表示为:

$$dJ = \frac{J_s}{V_T} \exp\left(-\frac{V}{V_T}\right) \cdot dV \quad (5.23)$$

当电流为空间电荷限制流时,在阴极和阳极之间存在一个虚阴极,其电势相对阴极为  $-V_m$ 。阳极收集的电流  $(J_a)$  由那些具有足够能量通过虚阴极的电子组成。这样就有:

$$J_a = J_s \exp\left(-\frac{V_m}{V_T}\right) \quad (5.24)$$

在虚阴极两边的电子流必须分别考虑。

### 5.3.1 最低电势与阳极间的电子流

考虑发射出来的初始能量为  $V_i$  的电子在电势最低点的情况。在相对于最低点电势为  $V$  的平面上的电子速度为:

$$u_i = \sqrt{2(e/m_0)(V + V_i)} \quad (5.25)$$

由式(5.23)得到这些电子的电流密度为:

$$dJ_i = \frac{J_a}{V_T} \exp\left(-\frac{V_i}{V_T}\right) \cdot dV_i \quad (5.26)$$

这样,根据式(5.11),在该平面上电荷密度分布为:

$$d\rho_i = \frac{dJ_i}{v_i} = \frac{J_a}{V_T \sqrt{2(e/m_0)(V + V_i)}} \exp\left(-\frac{V_i}{V_T}\right) \cdot dV_i \quad (5.27)$$

对该式在所有可能的  $V_i$  值区间积分,在相对最低点电势为  $V$  的平面的电荷密度为:

$$\rho(V) = \frac{J_a}{V_T} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2(e/m_0)(V + V_i)}} \cdot \exp\left(-\frac{V_i}{V_T}\right) \cdot dV_i \quad (5.28)$$

式(5.28)可写为:

$$\rho(v) = \frac{J_a}{\sqrt{2(e/m_0)V_T}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v + v_i}} \cdot \exp(-v_i) \cdot dv_i \quad (5.29)$$

式中,  $v = V/V_T$  和  $v_i = V_i/V_T$ 。在泊松方程(5.12)中代入  $\rho$  得到:

$$\frac{d^2 v}{dX^2} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v + v_i}} \cdot \exp(-v_i) \cdot dv_i \quad (5.30)$$

归一化位置  $X$  定义为:

$$X = \sqrt{\frac{-J_a}{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m_0)V_T^3}}} \cdot x \quad (5.31)$$

为了方便,设:

$$y^2 = v + v_i \quad (5.32)$$

则式(5.30)可写为:

$$\frac{d^2 v}{dX^2} = 2 \cdot \exp(v) \cdot \int_{\sqrt{v}}^{\infty} \exp(-y^2) \cdot dy \quad (5.33)$$

现在,定义概率函数如下:

$$P(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) \cdot dt \quad (5.34)$$

当  $x \rightarrow \infty$ ,  $P(x) \rightarrow 1$  时,式(5.33)可以写为:

$$\frac{d^2 v}{dX^2} = \sqrt{\pi} \cdot [1 - P(\sqrt{v})] \cdot \exp(v) \quad (5.35)$$

式(5.35)两边乘以  $2(dv/dX)$  积分得到:

$$\left(\frac{dv}{dX}\right)^2 = 2\sqrt{\pi} \int [1 - P(\sqrt{v})] \cdot \exp(v) \cdot dv \quad (5.36)$$

分步积分,并注意到  $v=0$  时  $(dv/dX)=0$ ,得到:

$$\left(\frac{dv}{dX}\right)^2 = 2\sqrt{\pi} \cdot \left[ \exp(v) - 1 - \exp(v)P(\sqrt{v}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{v} \right] \quad (5.37)$$

该表达式与文献[6]中式(11)括号中的项一致,取下面的符号。当设  $\epsilon_0 = 1/4\pi$  (文献[6]中的式(4)),并考虑到单位差异时,右边的常数项与文献[6]中的式(6)一致,Langmuir 的变量与这里用的变量关系为:

$$\xi = \sqrt{2\sqrt{\pi}} \cdot X \quad (5.38)$$

及

$$\eta = v \quad (5.39)$$

### 5.3.2 阴极与最低电势间的电子流

在阴极与电势最低点之间,必须把电流分为两部分来考虑。即能量大于等于  $V_m$  的那些电子能够通过最低点到达阳极,其总电流密度为  $J_a$ 。根据式(5.29),这些电子在相对最低点电势为  $V$  的平面处的电荷密度为:

$$\rho_1(v) = \frac{J_a}{\sqrt{2(e/m_0)V_T}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v+v_i}} \cdot \exp(-v_i) \cdot dv_i \quad (5.40)$$

式中,  $v = V/V_T$ 。

那些能量低于  $V_m$  的电子,将在它们初始能量与电势相等的位置被反射回去。相对阴极电势,任意一点电势为  $(V - V_m)$ ,因此,从阴极位置发射的初始能量为  $V_i$  的电子此时的速度为:

$$u_i = \sqrt{2(e/m_0)(V_i + V - V_m)} \quad (5.41)$$

这样,在虚阴极处,  $V=0$ ,初始能量为  $V_i = V_m$  的电子刚好静止。因为初始能量小于  $V_m$  的电子

将被反射回来,它们对电荷密度贡献两次。因此,在任意平面电荷密度分布为:

$$d\rho_i = \frac{2dJ_i}{v_i} = \frac{2J_s}{V_T \sqrt{2(e/m_0)}(V_i + V - V_m)} \exp\left(-\frac{V_i}{V_T}\right) \cdot dV_i \quad (5.42)$$

在任一平面对该式积分时,应包括所有初始能量可以到达该平面但不能通过电势最低点的电子。这样得到:

$$\rho_2(V) = \frac{2J_s}{V_T} \int_{V_m-V}^{V_m} \frac{1}{\sqrt{2(e/m_0)}(V_i + V - V_m)} \exp\left(-\frac{V_i}{V_T}\right) \cdot dV_i \quad (5.43)$$

在式(5.24)中代入  $J_s$ :

$$\rho_2(V) = \frac{2J_a}{V_T} \int_{-v}^0 \frac{1}{\sqrt{2(e/m_0)}(V + V'_i)} \exp\left(-\frac{V'_i}{V_T}\right) \cdot dV'_i \quad (5.44)$$

式中,  $V'_i = V_i - V_m$ 。式(5.44)可写为:

$$\rho_2(v) = \frac{2J_a}{\sqrt{2(e/m_0)}V_T} \int_{-v}^0 \frac{1}{\sqrt{v + v_i}} \cdot \exp(-v_i) \cdot dv_i \quad (5.45)$$

在不失一般性的情况下,带撇号的积分变量可以省略。任一平面的总电荷密度是  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的总和,该处相对于阴极为的归一化电势为  $v$ 。将式(5.40)和式(5.45)中的电荷密度代入泊松方程(5.13)中,利用式(5.31),得到:

$$\frac{d^2v}{dX^2} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v + v_i}} \cdot \exp(-v_i) \cdot dv_i + 2 \cdot \int_{-v}^0 \frac{1}{\sqrt{v + v_i}} \cdot \exp(-v_i) \cdot dv_i \quad (5.46)$$

式(5.46)可以用概率函数表示为:

$$\frac{d^2v}{dX^2} = \sqrt{\pi} \cdot \exp(v) [1 + P(\sqrt{v})] \quad (5.47)$$

和以前一样,积分后得到:

$$\left(\frac{dv}{dX}\right)^2 = 2\sqrt{\pi} \cdot \left[ \exp(v) - 1 + \exp(v)P(\sqrt{v}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{v} \right] \quad (5.48)$$

结果与文献[6]中的式(11)一致。

式(5.37)和式(5.48)的形式解为:

$$X = (4\pi)^{-\frac{1}{4}} \cdot \int_0^v \frac{dv}{[\exp(v) - 1 \pm \exp(v)P(\sqrt{v}) \mp 2\sqrt{v/\pi}]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.49)$$

该式实质上就是文献[6]中的式(11)。在阴极与最低点之间选取该式中上面的符号,在最低点与阳极之间选取下面的符号。阴极与最低点之间的距离通过选取该式中上面的符号并设置  $V = V_m$  得到。最低点与阳极之间的距离通过选取下面的符号并设置  $V = V_m + V_{ak}$  得到。为了比较,式(5.16)可以重新写为以下形式:

$$\frac{-J_c x^2}{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m_0)} V_T^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{9} \cdot v^{\frac{3}{2}} \quad (5.50)$$

或

$$X = \frac{2}{3} \cdot v^{\frac{3}{4}} \quad (5.51)$$

图 5.4 给出了式(5.49)和式(5.51)的解。除横轴比例不同外,该曲线与文献[7]中的图 42 完全相同,图中阴极在原点左边,阳极在右边。

### 5.3.3 数值计算

不可能通过解析法计算式(5.49)中的积分。文献[6]中得到了用数值法计算的结果列表。当  $v$  值很大时,指数函数的存在会造成数值溢出。在电势最低点与阳极之间的区域,当  $v > 50$  时,在不损失精度的情况下式(5.49)可以近似为:

$$X = (4\pi)^{-\frac{1}{4}} \cdot \int_0^v \frac{dv}{[2\sqrt{v/\pi} - 1]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.52)$$

当  $v > 20$  时,在阴极与最低点之间  $X \rightarrow 1.3565$ 。图 5.4 中给出的解就是在这种情况下得到的(见电子工作表 5.1)。另一方面,式(5.30)和式(5.46)可以使用龙格-库塔法直接积分。两种方法得到的结果相同。

为了计算热阴极二极管的伏安特性曲线,首先注意到由式(5.22)得到的最低点的电势为:

$$V_m = V_T \ln\left(\frac{J_a}{J_s}\right) \quad (5.53)$$

为了图示说明,假定阴极温度为 1300K,这是阴极在微波管中使用的典型温度,则  $V_T = 0.112V$ 。当阳极电流与饱和电流的比值为  $10^{-6}$  时,最低点电势大约为 1.5V,它与典型的极间电势差相比很小。对各个参数的典型值,从阴极到最低点的距离可以用式(5.49)计算。结果示于图 5.5 中,其中画出了最低点与阴极之间的距离相对归一化阳极电流的曲线。可以看出,该距离远小于 1mm,但饱和电流很小时,阳极电流只是饱和电流的很小一部分情况除外。因此预计,除了在很小的二极管间距和很低的电势差情况下,热初速效应可以忽略。这样在图 5.3 中  $d_1$  通常远小于  $d_2$ 。

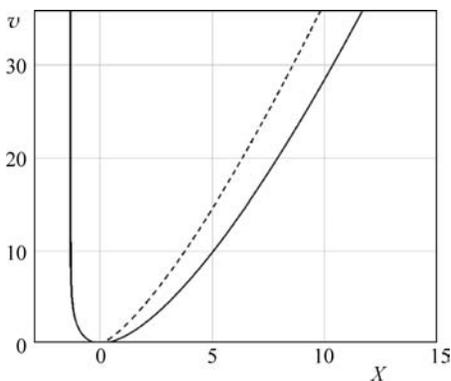


图 5.4 考虑热初速的空间电荷限制二极管中归一化电势和归一化位置的依赖关系,虚线为作为对比的 Child-Langmuir 曲线  
(1931 年美国物理学会版权,经许可,转载自文献[7])

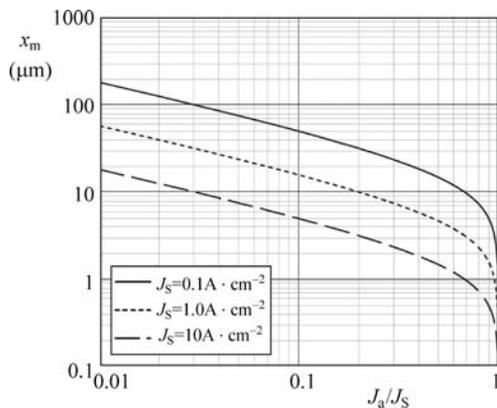


图 5.5 考虑热初速的空间电荷限制二极管中,电势最低点与阴极之间的距离与归一化电流密度的关系曲线

一旦得到  $d_1, d_2$  就可以按下式计算得到:

$$d_2 = d - d_1 \quad (5.54)$$

式(5.49)可以将相对于最低点的阳极电势作为阳极电流的函数进行求解。最后,减去相对于阴极的最低点电势,就可以得到阳极与阴极之间的电势差。

可以注意到,当阳极电流下降时,最低点与阴极之间的电势差增加, $X$  趋于一个常数。但是由式(5.31),可以看到  $x \propto \sqrt{-J_a}$ , 因此,阴极与最低点之间的距离可以不断增加而不受限制。所以,在任意一个二极管中,如果阳极电流足够小,那么最低点将到达阳极。当最低点正好到达阳极时,相对阴极,阳极电势是负的,其值等于最低点的电势。对于更小的阳极电流  $d_2$  是负的,由式(5.22)可以得到阳极电流与阴阳极之间电压的关系。对一系列参数值,这些计算结果示于图 5.6 中。图中给出了归一化电流( $J_a/J_S$ )与阴阳极之间电压的关系曲线,阳极电压被归一化到式(5.16)得到的不考虑热初速时二极管达到饱和电流时的电压。图中以饱和电流作为一个参数给出了 4 种不同的二极管极间距情况下饱和电流的曲线,每个曲线与式(5.16)得到的曲线进行比较。微波管中饱和电流的典型范围为  $1.0 \sim 10 \text{A/cm}^2$ (见第 18 章)。从图 5.6 中明显看出,当二极管极间距大于  $1.0 \text{mm}$  时使用式(5.16)几乎没有误差。例如,当  $J_S = 1.0 \text{A/cm}^2$  且  $d = 1 \text{mm}$  时,阳极电压为  $264 \text{V}$ ,这样,当阳极电压远高于这个值时热初速效应可以忽略。总之,在许多功率真空器件中热初速效应并不显著。栅控器件、栅控电子枪例外,此时控制栅与阴极间的距离可能远小于  $1 \text{mm}$ ,同样例外的还有真空微电子器件。

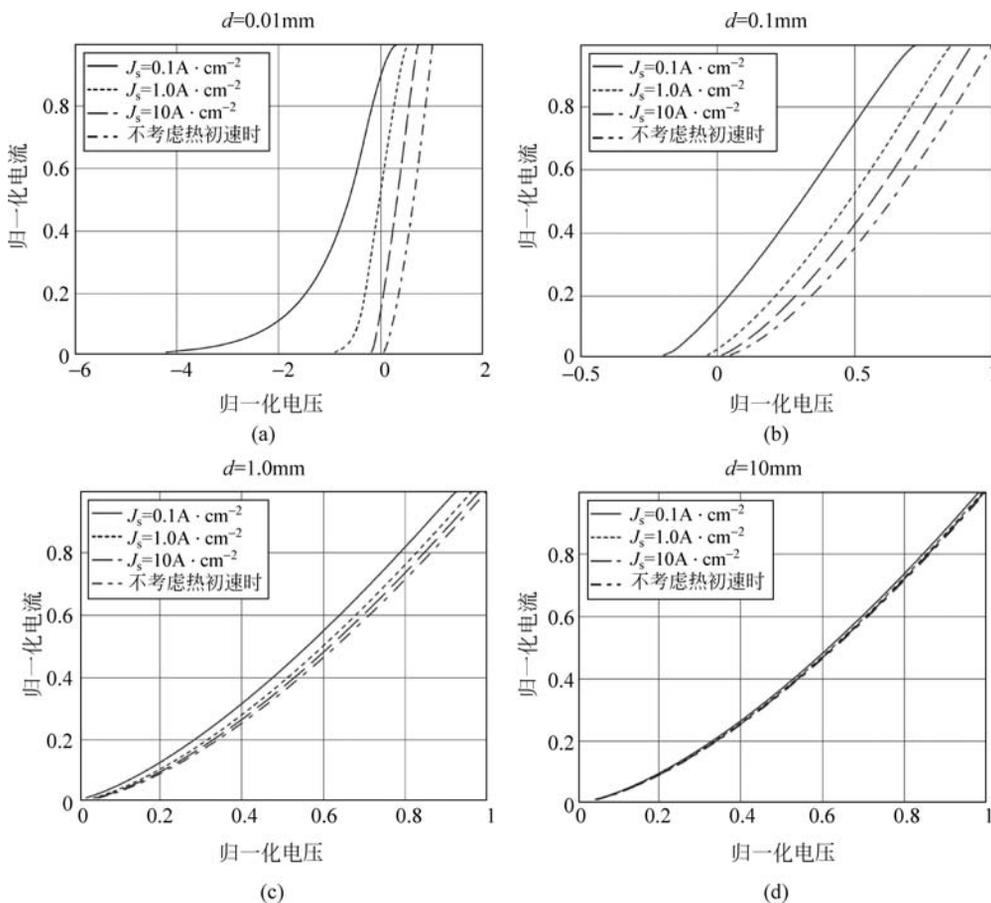


图 5.6 考虑热初速时平面空间电荷限制二极管中归一化电流与阳极电压的关系曲线, 阳极电压被归一化到不考虑热初速时二极管达到饱和电流时的电压

## 5.4 考虑相对论效应的平面二极管

在许多电子管中,阳极与阴极之间的电势差足够大,相对论效应就变得很显著,在这种情况下,式(5.10)被式(1.4)代替为:

$$u = c \left[ 1 - \frac{1}{(1 + V/V_R)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.55)$$

式中,  $V_R = (m_0 c^2 / e) = 511 \text{ kV}$  为以 eV 为单位的电子静止能量<sup>[8-10]</sup>。按照之前得到的同样方法,对于空间电荷限制流,式(5.14)由下式代替:

$$\left( \frac{dV}{dx} \right)^2 = - \frac{2J}{\epsilon_0 c} \cdot \sqrt{2V_R V + V^2} + C \quad (5.56)$$

式中,常数  $C$  为 0。引入归一化变量比较方便:

$$U = \frac{V}{V_R} \quad (5.57)$$

及

$$X = \sqrt{\frac{-J}{2\epsilon_0 c V_R}} \cdot x \quad (5.58)$$

注意,这些变量不同于前面章节所使用的归一化变量。式(5.56)变为:

$$\left( \frac{dU}{dX} \right)^2 = 4\sqrt{2U + U^2} \quad (5.59)$$

它的解形式上可写为:

$$X = \frac{1}{2} \int_0^U (2U + U^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot dU \quad (5.60)$$

该式不能通过解析方法积分。Acton<sup>[8]</sup>、Boers 和 Kelleher<sup>[9]</sup>得到了幂级数形式的解。另一种表示的解是 Zhang 等人利用文献[10]给出的椭圆积分。文献[11]得到了相对论平面二极管中空间电荷限制下电流密度的近似式:

$$J = \frac{2\epsilon_0 m_0 c^2}{ed^2} \cdot \frac{(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}}{(\sqrt{3} - 1)\gamma_0^{-0.392} + 1} \quad (5.61)$$

式中,  $\gamma_0 = (1 + eV_a / m_0 c^2)$ 。对任何电压该式的误差小于 1%。

文献[9]给出的级数可写为:

$$X = (U^2 + 2U)^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{2}{3}U + \frac{1}{21}U^2 + \frac{1 \cdot 3}{21 \cdot 11}U^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-5)(2n-3)}{21 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4n-5)(4n-1)} U^n \right) \quad (5.62)$$

另外,式(5.60)可以直接用数值方法计算出来。当电压很低时,  $U^2$  项以及式(5.60)中的高次幂可以忽略,用解析方法积分计算,得到:

$$X = \frac{1}{3} (2U)^{\frac{3}{4}} \quad (5.63)$$

很容易看出,该式与式(5.16)相同。图 5.7 给出了采用式(5.63)计算的曲线与式(5.60)的数值

计算结果及式(5.62)只取前3项之间的比较。可以看出,对一个给定的 $U$ ,相对论效应使 $X$ 值减少,因此,在给定二极管极间距时电流减小了。级数解是对精确解的一个很好的近似,当 $U < 1.3$ 时,如果考虑前3项(见电子工作表5.1), $X$ 的误差小于1%。

对于一个固定极间距的二极管,电流和 $X^2$ 成正比。由式(5.60)计算的相对论电流与式(5.63)计算的非相对论电流的比如图5.8所示。可以看出,当 $U=1$ 时,式(5.63)高估了大约9%的电流。

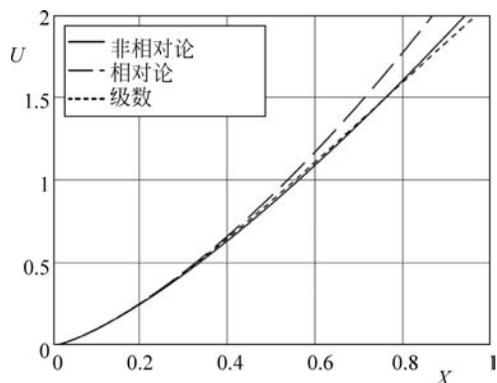


图 5.7 考虑相对论和非相对论效应以及采用式(5.62)级数近似的情况下空间电荷限制平面二极管中归一化电势与归一化位置的关系曲线

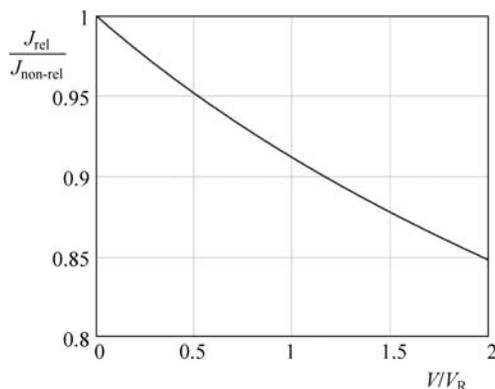


图 5.8 空间电荷限制平面二极管中相对论电流修正与归一化阳极电压的关系曲线

## 5.5 圆柱空间电荷限制二极管

非相对论情况下,当电子初速度为0时,同轴圆柱面间的空间电荷限制流问题在文献[12]中进行了论述,文献[8]对相对论情况进行了论述。对于圆柱形二极管中的对称流,泊松方程为:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.64)$$

每单位长度总电流  $I_L$  与半径无关,因此,电流密度为:

$$J = \frac{I_L}{2\pi r} \quad (5.65)$$

则根据式(5.11)、式(5.55)和式(5.64)得到:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{I_L}{2\pi\epsilon_0 cr} \left[ 1 - \frac{1}{(1+V/V_R)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.66)$$

设  $R=r/r_c$ , 式中  $r_c$  为阴极半径,  $U=V/V_R$ , 上式可写为:

$$\frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} = \frac{k_1}{R} \left( \frac{U+1}{\sqrt{U^2+2U}} \right) \quad (5.67)$$

式中,

$$k_1 = \frac{-I_L r_c}{2\pi\epsilon_0 c V_R} \quad (5.68)$$

当  $R=1$  时,式(5.67)可以用初始条件  $U=0$  及  $dU/dR=0$  通过数值积分。

对非相对论情况,幂级数的解可以通过设:

$$\gamma = \ln R \quad (5.69)$$

并假设电流遵循  $3/2$  次方定律(SI 单位制),得到:

$$I_L = \frac{8\pi\epsilon_0 \sqrt{2(e/m_0)}}{9} \cdot \frac{V^{\frac{3}{2}}}{(r\beta^2)} \quad (5.70)$$

式中, $V$  为半径  $r$  处相对于阴极的电势; $\beta$  为  $R$  的函数<sup>[12]</sup>。得到两个  $\beta$  的级数展开式:

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \gamma^n \quad (5.71)$$

及

$$\beta = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} B_n \gamma^n \quad (5.72)$$

其中,各个系数参见表 5.2。除了  $R < 0.05$  且  $\gamma$  为负值时式(5.72)中的指数函数变得很大时的情况,第二个级数通常比第一个收敛得快。

表 5.2 式(5.71)和式(5.72)的系数值

$n$	$A_n$	$B_n$
0	0.0	0.0
1	+1.0	+1.0
2	-0.40	+0.10
3	+0.916 667	+0.016 667
4	-0.014 242	+0.002 424
5	+0.001 679	+0.000 266
6	-0.000 161	+0.000 026

Acton<sup>[8]</sup>得到了以下非相对论条件下的幂级数解:

$$U = a\gamma^{\frac{4}{3}} (1 + 0.1333\gamma + 0.02444\gamma^2 + 0.0039236\gamma^3 + 0.00052966\gamma^4 + \dots) \quad (5.73)$$

其中,

$$a^3 = \frac{81}{32} \left( \frac{I_L r_0}{2\pi\epsilon_0 c V_R} \right)^2 = \frac{81}{32} k_1^2 \quad (5.74)$$

式(5.70)可以按同样的符号写为:

$$U = a(R^2 \beta^4)^{\frac{1}{3}} \quad (5.75)$$

可以看出,式(5.73)与式(5.75)得到了同样的结果。两式都可以写成类似式(5.6)的无量纲形式。当  $R$  为常数时, $U$  正比于  $a$ ,因此,电流正比于电压的  $3/2$  次方。Langmuir 证明了级数解与式(5.67)直接积分得到的解相同。

在相对论情况下,Acton<sup>[8]</sup>得到了下列幂级数解:

$$U = a\gamma^{\frac{4}{3}} \left( 1 + \frac{2}{15}\gamma + \frac{11}{450}\gamma^2 + \dots \right) + a^2 \gamma^{\frac{8}{3}} \left( \frac{1}{14} + \frac{6}{175}\gamma + \dots \right) \quad (5.76)$$

当  $U < 2$  时该式有效。式(5.76)右边第一个级数与式(5.73)中的级数相同,因此,相对论效应

由右边的第二个级数描述。从式(5.76)中看到,如果将相对论和非相对论情况下  $U$  值的差除以  $a^2$ , 结果应该只是  $R$  的函数。计算结果表明这仅对  $a < 0.1$  时是正确的,由此推断,式(5.76)是  $U$  按  $a$  和  $\gamma$  的二重幂级数展开的一个近似。Zhang 等人<sup>[11]</sup>以同样方式得到了这种情况下的近似表达式,这样,对于平面二极管:

$$J_c = \frac{2\epsilon_0 m_0 c^2}{2(r_c - r_a)^2} \cdot \frac{(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}}{(\sqrt{3} - 1)\gamma_0^{-0.392} + 1} \quad (5.77)$$

式中,  $\gamma_0 = (1 + eV_a/m_0c^2)$ ;  $J_c$  为阴极表面电流密度;  $r_c$  和  $r_a$  分别为阴极和阳极半径。其中的相对论项与式(5.61)相同,对所有电压误差小于 5%,相对论效应轻微时误差小于 1%。当阳极与阴极半径比接近 1 时,精度最高。

用式(5.76)的结果和其他直接积分得到的结果进行比较,当  $a \leq 1$  和  $R > 1$  (见电子工作表 5.2) 时两者符合较好。当  $R < 1$  时,符合度不是很好。例如,  $R = 0.5$  和  $a = 1$ , 由式(5.76)得到  $U$  的值比直接积分得到的值大约大 5%。似乎式(5.76)中的级数没有包含达到较好精度的足够项数。该式也说明相对论情况下  $U$  和  $a$  不成正比,因此,当相对论效应显著时,电流并不遵循 3/2 次方定律。

作为一个例子,图 5.9 给出了当  $a = 1$  时,阳极在阴极外面和里面两种情况下相对论和非相对论下的解之间的比较。由图可见,对于一个给定的  $R$  值,相对论效应使得  $U$  增加。这样,对于给定的几何结构和工作电压,相对论效应使得电流减小。当  $a$  减小时  $U$  减小,因此,只有  $R$  取极大或极小值(阳极在阴极外面取极大值;阳极在阴极里面取极小值)时相对论效应才变得显著。

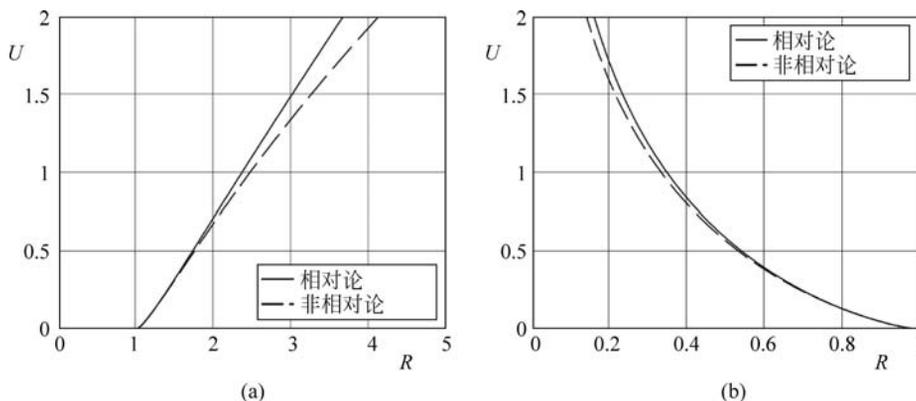


图 5.9 对于一个圆柱空间电荷限制二极管,当  $a = 1$  时相对论和非相对论下的解之间的比较

(a) 阳极在阴极外面; (b) 阳极在阴极里面

## 5.6 球形空间电荷限制二极管

文献[13]和文献[8]分别论述了非相对论情况和相对论情况下当初始电子速度为 0 时同心球面之间的空间电荷限制流问题。对球面二极管对称流,泊松方程可表示为:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.78)$$

总电流  $I$  与半径无关,因此,电流密度为:

$$J = \frac{I}{4\pi r^2} \quad (5.79)$$

则根据式(5.11)、式(5.55)和式(5.78),有:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = - \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c r^2} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + V/V_R)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.80)$$

再次设  $R = r/r_c$ , 式中  $r_c$  为阴极半径,  $U = V/V_R$ , 因此, 式(5.80)可写为:

$$\frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{dU}{dR} = \frac{k_2}{R^2} \cdot \frac{1 + U}{\sqrt{2U + U^2}} \quad (5.81)$$

其中,

$$k_2 = \frac{-I}{4\pi\epsilon_0 c V_R} \quad (5.82)$$

式(5.81)可以使用初始条件  $R=1$  时  $U=0$  和  $dU/dR=0$  进行数值积分。

非相对论条件下可以得到幂级数解, 设:

$$\gamma = \ln R \quad (5.83)$$

假定电流遵循 3/2 次方定律, 因此(SI 单位制):

$$I = \frac{16\pi\epsilon_0 \sqrt{2}(e/m_0)}{9} \cdot \frac{V^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2} \quad (5.84)$$

式中,  $\alpha$  是  $R$  的函数<sup>[13]</sup>。得到如下  $\alpha$  的级数展开式:

$$\alpha = \gamma - 0.3\gamma^2 + 0.075\gamma^3 - 0.0143182\gamma^4 + 0.0021609\gamma^5 - 0.00026791\gamma^6 + \dots \quad (5.85)$$

式(5.84)可以像式(5.75)一样写为:

$$U = a\alpha^{\frac{4}{3}} \quad (5.86)$$

其中,

$$a^3 = \frac{81k_2^2}{32} \quad (5.87)$$

式(5.86)和直接积分得到的结果之间的比较表明, 当  $0.2 < R < 5$  (见电子工作表 5.3) 时它们符合得最好。对这个范围之外的  $R$  值, Langmuir 采用了直接积分。

Acton<sup>[8]</sup> 采用同样方式得到了幂级数解。非相对论情况下:

$$U = a\gamma^{\frac{4}{3}} \left( 1 - \frac{2}{5}\gamma + \frac{3}{25}\gamma^2 + \dots \right) \quad (5.88)$$

当  $U < 2$  时, 相对论情况下:

$$U = a\gamma^{\frac{4}{3}} \left( 1 - \frac{2}{5}\gamma + \frac{417}{25 \times 144}\gamma^2 + \dots \right) + a^2\gamma^{\frac{8}{3}} \left( -\frac{1}{14} + \frac{5}{7 \times 72}\gamma + \dots \right) \quad (5.89)$$

两式右边第一项相似但又不完全相同, 式(5.88)中的项似乎不能把第二项作为相对论修正。这些级数没有包含足够项使得在  $0.5 < R < 2$  范围之外得到很好的精度。

作为一个例子, 图 5.10 给出了当  $a=1$  时阳极在阴极外面和里面两种情况相对论和非相对论下的解之间的比较。与前面的论述一样, 相对论效应使得  $U$  增加。这样, 对于给定的几何结构和电压, 相对论效应使得电流减小。当  $a$  减小时  $U$  减小, 因此, 只有  $R$  取极大值或极小值(阳极在阴极外面取极大值; 阳极在阴极里面取极小值)时, 相对论效应才变得显著。

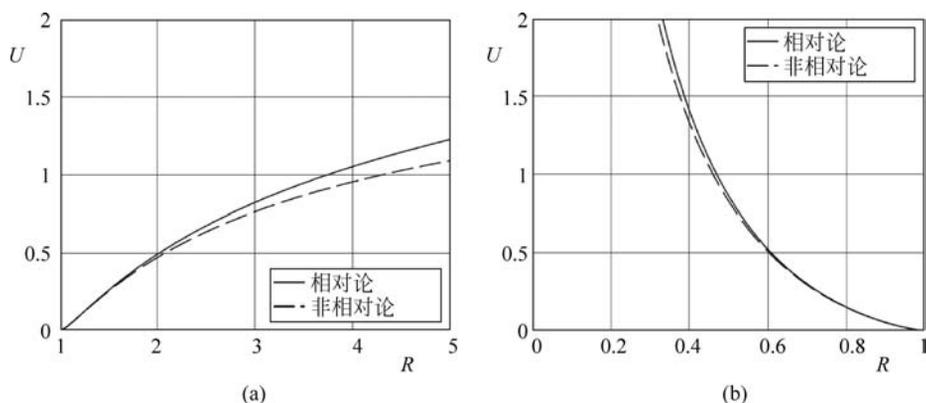


图 5.10 对于一个球面空间电荷限制二极管,当  $\alpha=1$  时相对论和非相对论下的解之间的比较  
(a) 阳极在阴极外面; (b) 阳极在阴极里面

## 5.7 平面二极管渡越时间效应

在前面章节中已经假定,分析空间电荷限制二极管特性时,二极管是静态的。如果电子的渡越时间与电压变化时间可比拟,当加在二极管上的电压随时间变化时,情况就不再如此。当一个低高频电压叠加在一个高直流(DC)电压上时,空间电荷限制二极管的高频特性由 Llewellyn-Peterson 方程描述<sup>[14]</sup>。这对低功率二极管可能是重要的,但在现在这种情况下其重要性有限。大功率二极管通常工作在大信号区,在设计计算时通常应用它们的静态特性。因此,了解在什么条件下静态特性能够有效近似动态状况就很重要。

文献[15]表明,当电子电流在数个电极间流动时:

$$\sum_{k=1}^n V_k i_k = \iiint (\rho v + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \cdot \mathbf{E} dv \quad (5.90)$$

式中,  $V_k$  为第  $k$  电极的电势;  $i_k$  为从外电路流向该电极的电流,对电极产生的场占据的整个体积进行积分。该式可以按能量守恒定律理解。等式左边代表流进该区域的瞬时功率,积分中的两项分别代表电子动能的变化率和存储在电场中势能的变化率。当该式应用于一个电极接地的平面二极管时,则:

$$Vi = A \int (\rho v + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}) E dx \quad (5.91)$$

式中,  $A$  为每个电极的面积。上式表明,在动态条件下,流到每个电极的电流不一定等于落到该电极上的电子流。特别是,在任意电子到达阳极前,一个感应电流已经开始流动了。式(5.91)括号中的项是总电流,其散度为 0。这样,通过任何横截面的总电流通量恒定,只与时间相关。为了得到大信号条件下外部电流与电压之间的关系,必须从电子运动的方程出发,并应用正确的边界条件。

Wang<sup>[16]</sup>研究了真空器件的大信号高频率特性,研究了二极管受到一个短的、抛物线的、脉冲电压幅值  $V_{pk}$ 、脉宽  $2t_0$  时的特性,得到:

$$V(t) = \frac{t}{t_0} \left( 2 - \frac{t}{t_0} \right) V_{pk} \quad (0 \leq t \leq 2t_0) \quad (5.92)$$

该脉冲近似于 B 类或 C 类真空管工作时的单个周期的情况。当  $t \leq 0$  时电极之间没有电子。当  $t > 0$  时,电子以足够速度发射出来,确保阴极表面电场为 0。当  $t > t_0$  时,电压开始下降,在某点发射停止,因为电极场不足以克服空间电荷引起的减速电场。上述分析假定了电极足够近,电磁场的传播延迟可以忽略。图 5.11 给出了电子位置作为时间的函数的曲线。每条曲线用电子的发射时刻  $\tau$  表示。几个有意义的标志时刻如下:

- $t_1$  为在  $t = 0$  时刻发射的电子到达阳极所用时间;
- $t_2$  为阴极停止发射电子的时刻;
- $t_3$  为最后一个电子到达阳极所用时间;
- $t_4$  为最后一个电子离开电极间空间的时刻。

图 5.11 给出了 4 种情况:

(a) 渡越时间与电压脉冲宽度相比可以忽略,二极管状态为准静态。

(b) 渡越时间占有电压脉冲宽度的可观比例时,并非所有电子都能够到达阳极,电流脉冲宽度明显短于电压脉冲宽度。当阴极停止发射后,电子仍然在电极之间的空间保留一段时间。

(c) 在  $t = 0$  时刻发射的电子的渡越时间占有脉冲宽度相当大比例时,在第一个电子到达阳极之前,阴极已经停止发射电子。

(d) 电压很快反转,没有电子能够到达阳极。

我们对情形(a)最感兴趣。当渡越时间较小时,在脉间二极管完全充满电子。当电压较低时,在脉冲起始和结束位置渡越时间最长。Wang 对这种情况进行了详细分析,研究表明,当考虑二次项时,阳极处的运流电流由下式得到:

$$J(t) = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \cdot \frac{V(t)^{\frac{3}{2}}}{d^2} - \frac{2\epsilon_0}{5d} \cdot \frac{dV(t)}{dt} \quad (5.93)$$

上式右边第一项与式(5.16)相同,第二项是在二极管电容中流动的无功电流的 40%,但符号相反。为了研究渡越时间效应开始变得很重要时的时间点,考虑一个施加以下正弦电压的二极管:

$$V(t) = V_a \sin(\omega t) \quad (5.94)$$

式(5.93)中的第一项仅在正半周非零。这种波形可以按傅里叶级数展开,如果只保留一次谐波项,代入式(5.93)中得到近似表达式:

$$\begin{aligned} J(t) &\simeq \frac{4\epsilon_0 V_a u_0}{9d^2} \left[ 0.458 \sin(\omega t) - \frac{9}{10} \beta_e d \cdot \cos(\omega t) \right] \\ &\simeq \frac{\epsilon_0 V_a u_0}{5d^2} [\sin(\omega t) - 2\beta_e d \cdot \cos(\omega t)] \end{aligned} \quad (5.95)$$

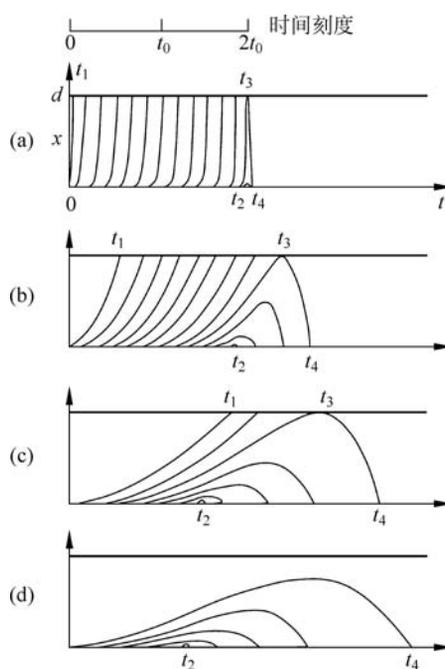


图 5.11 电压由式(5.92)给出时二极管的电子轨迹  
(1941 年 IEEE 版权, 经许可转载自文献[16])

式中,  $\beta_e d = \omega d / u_0$  和  $u_0 = \sqrt{2eV_a / m_0}$ 。渡越时间效应通过括号中的第二项来表征, 其幅度取决于  $\beta_e d$ 。该因子随着频率、二极管极间距增加而增加, 随着加在二极管上的峰值电压增加而减小。因渡越时间效应而增加的电流大约为  $\sqrt{1 + (2\beta_e d)^2}$  倍, 延迟相位为  $2\beta_e d$  倍。因此, 忽略渡越时间效应的条件是  $\beta_e d \ll 1/\sqrt{2}$ 。若要避免渡越时间效应, 该条件可用于指导所要求的极间距的计算。值得注意的是, 式(5.95)只能在渡越时间效应很小时用于计算运流电流。

## 5.8 平面二极管电子注入

在 5.3 节中我们已经看到, 不可能用单一的初始速度来模拟热阴极的发射, 但有时需要考虑这种情况。例如一个导电栅极平面二极管, 它们对电子完全透明。让一束具有均匀电流密度  $J_i$  和速度  $u_0$  的电子垂直于栅网注入其空间, 如图 5.12 所示, 该问题已被许多研究者研究过(见文献[17]和其中引用的文献), 这里选择文献[18]的处理方法。

如果忽略相对论效应, 电子初速由式(5.10)得到:

$$u_0 = \sqrt{2(e/m_0)V_k} \quad (5.96)$$

相对于  $x=0$  处的电极电势, 电子源电势为  $-V_k$ , 则在任一电势为  $V$  的平面处电子速度为:

$$u = u_0 \sqrt{1 + V/V_k} \quad (5.97)$$

应用式(5.11)和式(5.12), 得到:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = - \frac{J_i}{\epsilon_0 u_0 \sqrt{1 + V/V_k}} \quad (5.98)$$

与前面的处理方法一样, 两边乘以  $2(dV/dx)$ , 积分得到:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = - \frac{4J_i V_s}{\epsilon_0 u_0} \cdot \sqrt{1 + V/V_k} + C_1 \quad (5.99)$$

式中,  $C_1$  是常数。引入归一化变量  $U = V/V_k$  比较方便, 并且:

$$X = \sqrt{\frac{-4J_i}{\epsilon_0 u_0 V_k}} \cdot x \quad (5.100)$$

代入式(5.99)得到:

$$\frac{dU}{dX} = \pm (\sqrt{1+U} + \alpha_1)^{\frac{1}{2}} \quad (5.101)$$

式中,  $\alpha_1$  是一个无量纲常数。设  $W = \sqrt{1+U}$ , 二次积分得到:

$$\frac{4}{3} (W - 2\alpha_1)(W + \alpha_1)^{\frac{1}{2}} = \pm X + \alpha_2 \quad (5.102)$$

式中,  $\alpha_2$  为积分的第二个常数。注意到式(5.101)的电势梯度可以为正或为负。如果电势梯度为正, 那么电势将在二极管区间单调增长。然而, 如果电势梯度起始为负, 将有一个电势最低点, 随后电势将单调增长。

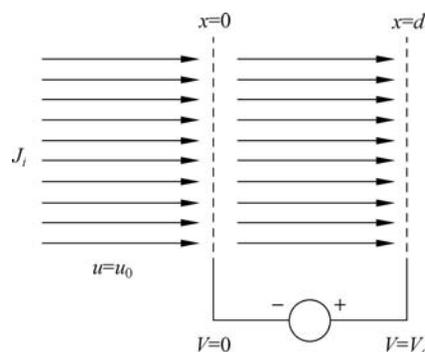


图 5.12 电子注入一个由平行导电栅极构成的二极管

## 1. 单调增长(I 分支)

对应于  $x=d$ , 令  $X=X_a$ , 并令:

$$W_a = \sqrt{1+U_a} = \sqrt{1+V_a/V_k} \quad (5.103)$$

这样, 当  $x=0$  时  $W=1$ 。将这些边界条件代入式(5.102)中, 并取正号, 得到下式:

$$\frac{4}{3}(1-2\alpha_1)(1+\alpha_1)^{\frac{1}{2}} = \alpha_2 \quad (5.104)$$

及

$$\frac{4}{3}(W_a - 2\alpha_1)(W_a + \alpha_1)^{\frac{1}{2}} = X_a + \alpha_2 \quad (5.105)$$

则常数  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  可以确定, 从而, 得到由式(5.102)确定的电势分布(取正号)。

## 2. 负的电势最低点(II 分支)

令最低点位置为  $X=X_m$ 。在  $0 \leq X \leq X_m$  范围内:

$$\frac{4}{3}(W - 2\alpha_1)(W + \alpha_1)^{\frac{1}{2}} = -X + \alpha_3 \quad (5.106)$$

在  $X \geq X_m$  范围:

$$\frac{4}{3}(W - 2\alpha_1)(W + \alpha_1)^{\frac{1}{2}} = X + \alpha_4 \quad (5.107)$$

式中,  $\alpha_3$  和  $\alpha_4$  是新的积分常数。因为  $W$  是连续的, 根据式(5.101), 当  $X=X_m$  时,  $W + \alpha_1 = 0$ , 因此:

$$\alpha_3 = X_m \quad \alpha_4 = -X_m \quad (5.108)$$

将  $\alpha_3$  代入到式(5.106)中, 设当  $X=0$  时  $W=1$ , 得到:

$$\frac{4}{3}(1-2\alpha_1)(1+\alpha_1)^{\frac{1}{2}} = X_m \quad (5.109)$$

设当  $X=X_a$  时  $W=W_a$ , 式(5.107)变为:

$$\frac{4}{3}(W_a - 2\alpha_1)(W_a + \alpha_1)^{\frac{1}{2}} = X_a - X_m \quad (5.110)$$

注入电流的二极管特性可以根据式(5.104)、式(5.105)、式(5.109)和式(5.110)(见电子工作表 5.4)确定。我们注意到, 因  $\alpha_2$  和  $X_m$  为实数, 两个分支都有  $\alpha_1 \geq -1$ 。对于 II 分支, 式(5.101)要求  $\alpha_1 \leq 0$ , 否则电势梯度为 0 时是不可能成立的。对应于上述两种情况, 其解有两个分支。可以方便画出以  $U_a$  为参数的  $X_a$  对  $\alpha_1$  的关系曲线, 如图 5.13 所示。I 分支的解在图中用实线表示, II 分支的解用虚线表示。

对于给定的  $X_a$  和  $U_a$  值, 方程的解可以从常数  $X_a$  和  $U_a$  直线之间的交叉点求出。由图可见, 交叉点数量可以是 0、1 或 2。如果二极管间距固定, 二极管电

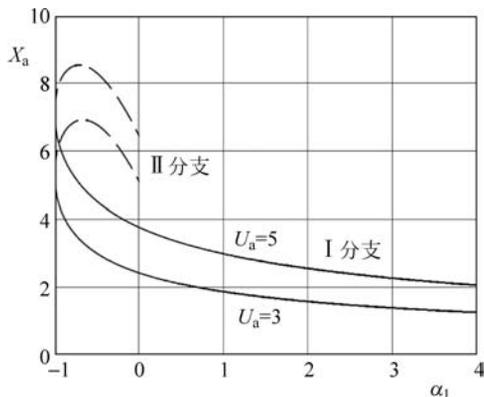


图 5.13 以归一化电势差  $U_a$  为参数时归一化二极管极间距  $X_a$  与  $\alpha_1$  的关系曲线

(1944 年美国物理学会版权, 经许可, 转载自文献[18])

压和注入电压保持恒定,则  $U_a$  为常数。当注入电流逐渐增加时,  $X_a$  从 0 逐渐增加。对于较大的  $\alpha_1$  值,最初与 I 分支只有一个交叉点,二极管电势随  $x$  单调增加。当  $X_a$  增加到某一点时,两个解都有可能:一个在 I 分支,另一个在 II 分支。可以看出,II 分支的解有较高的势能,因此不稳定。最终,在  $\alpha_1 = -1$  时,空间电荷足以产生最低电势,在 II 分支上有两个解,其中对应于  $\alpha_1$  较大负值的解是稳定的。最后,这两个解在常数  $U_a$  曲线的最大值处合并,电流是空间电荷限制流,不再增长。显而易见,在最大值处有:

$$\alpha_1 = -\frac{W_a}{1+W_a} \quad (5.111)$$

将式(5.109)和式(5.111)代入式(5.110)中,对于给定的  $W_a$  值,得到  $X_a$  的最大值为:

$$X_{\max} = \frac{4}{3}(1+W_a)^{\frac{3}{2}} \quad (5.112)$$

上式可以用形式上的物理变量来表示:

$$J_i = -\frac{4}{9} \cdot \frac{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m_0)}}{x^2} V_a^{3/2} (\sqrt{V_k/V_a} + \sqrt{1+V_k/V_a})^3 \quad (5.113)$$

上式可以直接与式(5.16)给出的 Child-Langmuir 定律进行比较。可以看出,当  $V_k \rightarrow 0$  时两个方程完全相同。对于注入电压不为 0 的情况,方程中最后一项大于 1,因此,由于有限的注入速度,能够流过二极管的最大电流增加。注意到最低点的电势总是大于位于电子源处的电势,在二极管中不存在电子达到静止的平面。

当电子注入二极管中,电流通常取决于外部。因此,弄清楚如果试图注入比式(5.113)更大的一个电流会发生什么就很有意义,该问题 Langmuir 研究过<sup>[7]</sup>。附加的空间电荷降低了最低点的电势,因此在  $V = -V_k$  处形成虚阴极,电子达到静止。我们不得不假定所有电子不具有相同的注入速度,有一个由热阴极发射引起的很小的速度分布,结果,一些电子被虚阴极反射,而另一些电子穿过虚阴极被阳极收集。在 3.2.1 节我们看到,对于一个小的速度分布,二极管特性可以用 Child-Langmuir 定律来描述。因此,有理由假定电子部分反射,同时忽略速度分布。假定注入电流密度为  $J_i$ ,阳极处的电流密度为  $J_a$ ,虚阴极形成位置在  $x = x_m$ 。在  $0 \leq x \leq x_m$  区域内,因空间电荷密度不受电子运动方向影响,有效电流密度为  $(2J_i - J_a)$ 。所以,由式(5.16)得到:

$$2J_i - J_a = -\frac{4}{9} \cdot \frac{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m_0)}}{(x_m - x)^2} \cdot (V + V_k)^{\frac{3}{2}} \quad (5.114)$$

上式可写为:

$$X = X_m - \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{J_a}{2J_i - J_a}} \cdot W^{\frac{3}{2}} \quad (5.115)$$

其中,

$$X = \sqrt{\frac{-4J_a}{\epsilon_0 u_0 V_k}} \cdot x \quad (5.116)$$

及

$$W = \sqrt{1 + \frac{V}{V_k}} \quad (5.117)$$

当  $X = 0, W = 1$  时,因此:

$$X_m = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{J_a}{2J_i - J_a}} \quad (5.118)$$

代入式(5.115),在  $0 \leq x \leq x_m$  区域得到:

$$X = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{J_a}{2J_i - J_a}} \cdot (1 - W^{\frac{3}{2}}) \quad (5.119)$$

类似地,在  $x_m \leq x \leq d$  区域,得到:

$$J_a = -\frac{4}{9} \cdot \frac{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m_0)}}{(x - x_m)^2} \cdot (V + V_k)^{\frac{3}{2}} \quad (5.120)$$

上式变为:

$$X = \frac{4}{3} \cdot W^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{J_a}{2J_i - J_a}} \quad (5.121)$$

如果没有反射,那么阳极电流等于注入电流,在阳极处:

$$X_a = \frac{4}{3} (1 + W_a^{\frac{3}{2}}) \quad (5.122)$$

上式与式(5.110)中  $\alpha_1 = 0$  时的结果相同。可以看出,该值小于由式(5.112)得到的  $X$  的空间电荷限制值。如果注入电流增加,在恒定电子速度和阳极电压下,式(5.121)的最后一项减小,因此,阳极电流也减小。特别地,实验可观察到,如果注入电流增加到比空间电荷限制流稍高,阳极电流<sup>[19-20]</sup>就有一个突然的下降。因此,这种二极管的特性是混沌的,这种特性在虚阴极振荡器中被充分利用。关于考虑注入电流的二极管的更多信息在文献[17]和[22]中可以得到。

## 5.9 二维电子流二极管

在许多情况下,二极管中的电子流可以认为是一维的。可是,发射表面必然面积有限,在边缘通常设计一个用来补偿边缘效应的聚焦电极,使得阴极表面产生近似均匀的电流密度。其技术细节将在第9章讨论。

如果没有聚焦电极,那么电子流将根据几何结构变成二维或三维。许多研究者已经采用粒子模拟程序(PIC)研究了 this 特性。文献[23]采用两种不同的模拟方法对平板电极进行了研究,当电子通过其中一个电极表面窄条发射出来时,对于平面电极间的二维电子流,两种模拟方法得到的结果符合得非常好。假定通过阴极发射面的电流密度是均匀的,并且不断增加直到观察到振荡现象。这是用来定义二维流中限制电流的。发射长条中心所形成的虚阴极使得电流被限制。对存在和不存在垂直于电极的均匀磁场两种情况进行了模拟,研究表明,限制流几乎与磁场强度无关。所得到的结果被普遍作为对 Child-Langmuir 定律式(5.16)的一个经验几何修正,得到:

$$\frac{J_{2D}}{J_{1D}} = 0.3145 \left(\frac{d}{w}\right) - 0.0004 \left(\frac{d}{w}\right)^2 \quad (5.123)$$

式中, $d$  为电极间距离; $w$  为发射长条的宽度; $J_{2D}$  为限制电流密度; $J_{1D}$  为一维 Child-Langmuir 定律式(5.16)得到的电流密度。式(5.123)在  $0.1 < w/d < 8$  范围内有效,精度 5%,磁场范围为  $0 \sim 100\text{T}$ 。

对该问题的进一步研究表明,当从阴极上发射的电流密度不均匀时,在长条边缘电流密度有一个尖锐的增长,如图 5.14 所示<sup>[24]</sup>。这是期望看到的结果,因为在长条外的真空区域空间电荷的突然缺失,减小了限制电流的空间电荷电势沉降。当长条宽度与间隙可比拟时,从长条的大部分宽度上得到的电流密度遵循一维 Child-Langmuir 定律,只在长条的最边缘增大。当  $w=2d$  时,除了长条中心,其他位置的电流密度会超过一维 Child-Langmuir 定律得到的电流密度。对较窄的归一化长条宽度,每处电流密度均超过一维 Child-Langmuir 定律得到的电流密度值。

当正对发射长条中心的电极间隙有一个台阶变化时,发射电流密度近似遵循局部真空电场的平方关系,但长条边缘例外。还发现诸如由一个小的非发射聚焦电极引起的长条边缘电场的很轻微的变化,也会对发射电流密度产生重大的影响。

控制空间电荷限制发射的方程比例关系表明,发射初速度为 0 时,  $J_{2D}/J_{1D}$  是  $w/d$  的通用函数<sup>[23]</sup>。该通用函数在文献[25]中导出,它可表示成一级近似:

$$\frac{J_{2D}}{J_{1D}} \cong 1 + \frac{d}{\pi w} = 1 + 0.318 \frac{d}{w} \quad (5.124)$$

该式与式(5.123)的经验表述很接近。当电子从一个半径为  $R$  的环状阴极区域发射出来时,采用同样的方法进行几何修正:

$$\frac{J_{2D}}{J_{1D}} = 1 + \frac{d}{4R} \quad (5.125)$$

特别强调的是,当  $W$  和  $R$  趋于 0 时,式(5.124)和式(5.125)都不能得到正确的极限值。文献[26]总结了这些结果。文献[25]中采用的方法可以扩展到文献[27]中的许多其他情形,包括带有平面平行电极和包括正方形、矩形和多边形的各种形状的有限发射区域。

对于同轴圆筒间的空间电荷限制电流,当电子从其中一个环状带中发射出来时,文献[28]对此进行了研究。模拟忽略电子流的自磁场,并假定发射体表面上电流密度均匀。考虑了会聚流(阳极在阴极里面)和发散流两种情况。发现两种情况可以用同一个经验修正因子来描述:

$$\frac{I_{2D}}{I_{LB}} = 1 + 0.1536 \left(\frac{R}{L}\right) + 0.0183 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \quad (5.126)$$

式中,  $R$  是外电极半径,  $L$  是发射带长度,  $I_{LB}$  是用式(5.70)计算的长度  $L$  上的电流。式(5.126)对  $R/r=3$  和  $10$  ( $r$  是内电极半径)且  $0.2 < L/R < 5$ , 精度要求 2.5% 时有效。式(5.126)不取决于  $R/r$  的原因是: 当  $R/r > 3$  时,式(5.70)中的  $\beta$  值快速接近一个渐近值; 当  $R/r < 3$  时,不再是这种情况,式(5.126)不再有效。对于这种情况的理论解释为如下形式:

$$\frac{I_{2D}}{I_{LB}} = 1 + \frac{4(R-r)}{\pi L} F(R/r) \quad (5.127)$$

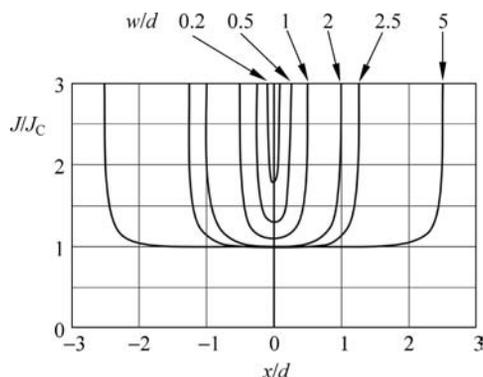


图 5.14 模拟的归一化阴极发射电流密度与位置(归一化到间隙距离)的关系,变量为发射长条宽度( $w$ )和间隙距离( $d$ ),单位 cm。每个曲线标识了相应的( $w/d$ )值

(2001 年美国物理学会版权,经许可转载自文献[24])

式中,  $F(R/r)$  是一个函数(参见文献[27]中的插图), 根据会聚流和发散流的不同情况, 取不同的值。在  $R/r \rightarrow 1$ ,  $F \rightarrow 1/4$  的极限情况下, 对于  $R/r > 1$ , 该值大约是会聚流和发散流的平均值。可以看出, 当  $L/R > 1$  时, 对于  $R/r = 3$  和 10, 式(5.126)和式(5.127)得到类似结果。但是, 当  $R/r$  值较小时, 式(5.126)不趋向于它原本应该的平面限制, 其结果不同。对于  $L/R < 1$ , 每种方法都不精确, 因为都没有考虑发射带边缘的增强发射。

## 参考文献

- [1] I. Langmuir, 'The effect of space charge and residual gases on thermionic currents in high vacuum', *Physical Review*, vol. 2, pp. 450-486, 1913.
- [2] S. E. Tsimring, *Electron Beams and Microwave Vacuum Electronics*. Hoboken, NJ: Wiley, 2007.
- [3] R. Vaughan, 'A synthesis of the Longo and Eng cathode emission models', *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 33, pp. 1925-1927, 1986.
- [4] C. D. Child, 'Discharge from hot CaO', *Physical Review (Series I)*, vol. 32, pp. 492-511, 1911.
- [5] R. J. Umstadtd *et al.*, 'A simple physical derivation of Child-Langmuir space-charge limited emission using vacuum capacitance', *American Journal of Physics*, vol. 73, pp. 160-163, February 2005.
- [6] I. Langmuir, 'The effect of space charge and initial velocities on the potential distribution and thermionic current between parallel plane electrodes', *Physical Review*, vol. 21, pp. 419-435, 1923.
- [7] I. Langmuir and K. T. Compton, 'Electrical discharges in gases Part II: fundamental phenomena in electrical discharges', *Reviews of Modern Physics*, vol. 3, pp. 191-257, 1931.
- [8] E. W. V. Acton, 'The space-charge limited flow of charged particles in planar, cylindrical and spherical diodes at relativistic velocities', *International Journal of Electronics*, vol. 3, pp. 203-210, August 1957.
- [9] J. E. Boers and D. Kelleher, 'Exact solution of Poisson's equation for space-charge-limited flow in a relativistic planar diode', *Journal of Applied Physics*, vol. 40, pp. 2409-2412, 1969.
- [10] H. R. Jory and A. W. Trivelpiece, 'Exact relativistic solution for the one-dimensional diode', *Journal of Applied Physics*, vol. 40, pp. 3924-3926, 1969.
- [11] Y. P. Zhang *et al.*, 'Simple solutions for relativistic generalizations of the Child-Langmuir law and the Langmuir-Blodgett law', *Physics of Plasmas*, vol. 16, p. 044511, April 2009.
- [12] I. Langmuir and K. B. Blodgett, 'Currents limited by space charge between coaxial cylinders', *Physical Review*, vol. 22, pp. 347-356, 1923.
- [13] I. Langmuir, K. B. Blodgett, 'Currents limited by space charge between concentric spheres', *Physical Review*, vol. 24, pp. 49-59, 1924.
- [14] F. B. Llewellyn, 'Vacuum tube electronics at ultra-high frequencies', *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, vol. 21, pp. 1532-1573, 1933.
- [15] C. K. Jen, 'On the induced current and energy balance in electronics', *Proceedings of the I. R. E.*, vol. 29, pp. 345-349, 1941.
- [16] C. C. Wang, 'Large-signal high-frequency electronics of thermionic vacuum tubes', *Proc. IRE*, pp. 200-214, April 1941.
- [17] P. V. Akimov *et al.*, 'The true nature of space-charge-limited currents in electron vacuum diodes: a Lagrangian revision with corrections', *Physics of Plasmas*, vol. 8, pp. 3788-3798, 2001.
- [18] G. Jaffe, 'On the currents carried by electrons of uniform initial velocity', *Physical Review*, vol. 65, pp. 91-98, 1944.
- [19] E. W. B. Gill, 'XCIX. A space charge effect', *Philosophical Magazine Series 6*, vol. 49, pp. 993-1005, 1925.

- [20] V. I. Kuznetsov and E. A. Ya. , ‘Time-dependent regimes of a Bursian Diode I: Stability of steady solutions’, *Plasma Physics Reports*, vol. 36, pp. 226-235, 2010.
- [21] J. Benford *et al.* , *High Power Microwaves*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2007.
- [22] H. Kolinsky and H. Schamel, ‘Arbitrary potential drops between collector and emitter in pure electron diodes’, *Journal of Plasma Physics*, vol. 57, pp. 403-423, 1997.
- [23] J. W. Luginsland *et al.* , ‘Two-dimensional Child-Langmuir law’, *Physical Review Letters*, vol. 77, pp. 4688-4670, 1996.
- [24] R. J. Umstadtd and J. W. Luginsland, ‘Two-dimensional space-charge-limited emission: beam-edge characteristics and applications’, *Physical Review Letters*, vol. 87, p. 145002, 2001.
- [25] Y. Y. Lau, ‘Simple theory for the two-dimensional Child-Langmuir law’, *Physical Review Letters*, vol. 87, p. 278301, 2001.
- [26] J. W. Luginsland *et al.* , ‘Beyond the Child-Langmuir law: a review of recent results on multidimensional space-charge-limited flow’, *Physics of Plasmas*, vol. 9, pp. 2371-2376, May 2002.
- [27] W. S. Koh *et al.* , ‘Three-dimensional Child-Langmuir law for uniform hot electron emission’, *Physics of Plasmas*, vol. 12, p. 053107, 2005.
- [28] K. G. Kostov and J. J. Barroso, ‘Space-charge-limited current in cylindrical diodes with finite-length emitter’, *Physics of Plasmas*, vol. 9, p. 1039, 2002.