第3章

映　射

现实世界中的许多运动变化现象都表现出变量之间的依赖关系。数学上，我们用映射模型描述这种依赖关系，并通过研究映射的性质了解变化的规律。映射是数学中最基本且最重要的概念之一。映射的基本知识在经济学等学科以及现实生活中有着广泛的应用。在高等数学中，映射的概念是从变量的角度提出来的，并且仅在实数集合上讨论，这种映射一般是连续或间断连续的。

在高中阶段，读者应已学习了运用集合和对应的集合语言描述函数的概念，了解建立函数模型的过程和方法，并能初步运用函数的思想理解和处理生活中的简单问题。而函数是两个数集间的一种确定的对应关系，是特殊的映射。所以，当我们将数集扩展到任意的集合时，就可以把函数的概念加以推广，得到映射的概念。

本章主要将连续映射的概念推广到对离散领域的讨论，即将映射看作一种特殊的二元关系。映射的概念是运动变化和对立统一等观点在数学中的具体表现。

本章主要介绍映射的基本内容，通过本章学习，读者将掌握以下内容：

（1）映射的基本概念；

（2）映射的单射、满射和双射性质；

（3）映射的复合运算；

（4）映射的逆运算。

3.1　映射的基本概念

定义 3.1.1　设 X 和 Y 是任意两个集合，f 是一个从 X 到 Y 的二元关系，如果 f 满足对于每一个 $x\in X$，都有唯一的 $y\in Y$ 使得 $<x,y>\in f$，则称关系 f 为 X 到 Y 的**映射**(mapping)，记作

$$f: X\rightarrow Y \text{ 或 } X\xrightarrow{f}Y。$$

当 $<x,y>\in f$ 时，通常记为 $y=f(x)$，且记 $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$。这时称 x 为映射的**原像**，y 为 x 在 f 下的**映像**。集合 X 称为 f 的**定义域**，记作 $\mathrm{dom}f=X$。由所有映像组成的集合称为映射的**值域**，记作 $\mathrm{ran}f\subseteq Y$，即

$$\mathrm{ran}f=\{y\mid(\exists x)(x\in X)\land(y=f(x))\}。$$

由定义 3.1.1 可知，映射与关系的区别在于：映射的定义域为 A，而关系不一定是；映射要求 A 中每个元素只对应一个像，而关系则可以一个元素对应多个像。因而，一个关

系 f 是映射，则 f 应满足：

(1) $D_f=A$；

(2) 若 $f(a)=b_1$ 且 $f(a)=b_2$，则 $b_1=b_2$，即映射具有单值性。

由于映射的单值性是不能倒过来的，因而，映射的逆关系不一定是映射。

例 3.1.1 判断下列关系中哪个能构成映射。

(1) 集合 $X=\{a,b,c,d\}$，$Y=\{1,2,3,4,5,6\}$，f_1,f_2,f_3 分别是 X 到 Y 的二元关系，其中

$f_1=\{<a,2>,<b,5>,<c,1>,<d,4>\}$，

$f_2=\{<a,2>,<b,6>,<d,4>\}$，

$f_3=\{<a,3>,<b,1>,<c,5>,<d,2>,<d,4>\}$。

(2) $f=\{<x_1,x_2> \mid x_1,x_2\in N$，且 $x_1+x_2<10\}$。

(3) $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$Y=\{0,1\}$，

$$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},Y=\{0,1\},$$

f 为 X 到 Y 的关系，对于 X 中的元素 x 为偶数时，$<x,0>\in f$，否则 $<x,1>\in f$。

解 (1) f_1 是 X 到 Y 的映射；f_2 不是 X 到 Y 的映射，因为 X 中的元素 c 与 Y 中的元素都不相关；f_3 也不是 X 到 Y 的映射，因为 X 中的元素 d 与 Y 中的两个元素有关。

(2) f 不能构成映射，因为 x_1 不能取定义域中所有的值，且 x_1 可对应很多 x_2。

(3) f 能构成映射，因为对于每一个 $x\in X$，都有唯一 $y\in Y$ 与之对应。

例 3.1.2 设 $A=\{1,2,3\}$，

$$f=\{<1,1>,<2,1>,<3,2>\},$$
$$g=\{<1,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>\},$$
$$h=\{<1,2>,<2,3>\},$$

试判断 f、g 和 h 是否为 A 到 A 的映射。

解 因为 $D_f=A$ 且 f 具有单值性，所以 f 是映射。

对于 g，因为 $<3,1>\in g$ 且 $<3,2>\in g$，所以 g 不具有单值性，因而 g 不是映射。

对于关系 h，$D_h=\{1,2\}\neq A$，所以 h 不是映射。

定义 3.1.2 设映射 $f:X\to Y$，$g:A\to B$，如果 $X=A$，$Y=B$，且对于所有的 $x\in X$ 和 $x\in A$，有

$$f(x)=g(x),$$

则称**映射 f 和 g 相等**，记作 $f=g$。

定义 3.1.3 对集合 A 和 B，**从 A 到 B 的所有映射的集合**记为 B^A，即

$$B^A=\{f \mid f:A\to B\}。$$

定理 3.1.1 若 A 和 B 是有限集合，$|A|=m$，$|B|=n$，则

$$|B^A|=n^m。$$

证明 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，f 是 A 到 B 的任意映射，则 $D_f=A$，于是

$$f=\{<a_1,f(a_1)>,<a_2,f(a_2)>,\cdots,<a_m,f(a_m)>\}。$$

因为每个 $f(a_i)$ 有 n 种可能，所以 A 到 B 的不同映射共有 n^m 个。

例 3.1.3 设集合 $X=\{x,y,z\}$，$Y=\{a,b\}$，试问 X 到 Y 可以定义多少种不同的

映射？

解 $f(x)$可以取 a 或 b 两个值；当 $f(x)$取定一个值时，$f(y)$又可以取 a 或 b 两个值；而当 $f(y)$取定一个值时，$f(z)$又可以取 a 或 b 两个值。因此，从 X 到 Y 可定义 $2^3=8$ 种不同的映射。

定义 3.1.4 设 f 是 A 到 B 的映射，$A_1\subseteq A$，$B_1\subseteq B$，称

$$f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\}$$

为 A_1 在 f 下的像，称

$$f^{-1}(B_1)=\{x\mid x\in A\wedge f(x)\in B_1\}$$

为 B_1 在 f 下的**完全原像**。

例如，设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，f 是 A 到 B 的映射，且

$$f=\{<1,a>,<2,c>,<3,c>\}。$$

令 $S=\{1,3\}$，$T=\{a,c\}$，则

$$f(S)=\{a,c\},f^{-1}(T)=\{1,2,3\}。$$

定理 3.1.2 设 f 是 A 到 B 的映射，A_1、$A_2\subseteq A$，B_1、$B_2\subseteq B$，则：

(1) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$。

(2) $f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$。

(3) $f(A_1-A_2)\subseteq f(A_1)-f(A_2)$。

(4) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$。

(5) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$。

(6) $f^{-1}(B_1-B_2)=f^{-1}(B_1)-f^{-1}(B_2)$。

(7) $A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$。

(8) $f(f^{-1}(B_1))\subseteq B_1$。

证明 仅证(2)，其他证明留给读者。

对任意的 $y\in f(A_1\cap A_2)$，存在 $x\in A_1\cap A_2$ 使得 $f(x)=y$，则有 $x\in A_1$ 且 $f(x)=y$，$x\in A_2$ 且 $f(x)=y$，于是 $y\in f(A_1)$且 $y\in f(A_2)$，即有 $y\in f(A_1)\cap f(A_2)$，所以

$$f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)。$$

下面通过一个例子说明(2)中的等号不一定成立。

例如，$A=\{1,2\}$，$B=\{a\}$，$f:A\to B$，$f(1)=f(2)=a$，

取 $A_1=\{1\}$，$A_2=\{2\}$，则 $A_1\cap A_2=\varnothing$，

从而 $f(A_1\cap A_2)=\varnothing$，但 $f(A_1)\cap f(A_2)=\{a\}$。

习题 3.1

(A)

1. 设 $X=\{a,b\}$，$Y=\{1,2,3\}$，求从 X 到 Y 和从 Y 到 X 的映射数目。

2. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$，求 B^A。

3. 设 f 指定世界各国的首都，求

(1) f 的定义域；

(2) f(法国);
(3) f(加拿大);
(4) f(俄罗斯)。

(B)

4. 设 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{a,b,c,d,e\}$,请问下列二元关系哪些属于 $A\to B$(A 到 B 映射的集合)?

(1) $R_1=\{<1,a>,<2,b>,<3,c>,<4,d>\}$
(2) $R_2=\{<2,e>,<3,d>,<4,b>\}$
(3) $R_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,c>,<1,d>\}$
(4) $R_4=\{<1,2>,<2,b>,<3,c>,<4,d>\}$
(5) $R_5=\{<1,c>,<2,c>,<3,c>,<4,c>\}$
(6) $R_6=\{<3,e>,<4,d>\}$

(C)

5. (参考北京大学 2000 年硕士生研究生入学考试试题)设 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,则 $|B^A|=$________。

3.2 映射的性质

3.2.1 单射

定义 3.2.1 设映射 $f:X\to Y$,如果对于 X 中的任意两个元素 x_1 和 x_2,当 $x_1\neq x_2$ 时,都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 的**单射**,也称**入射**。

由定义 3.2.1 可得:

$f:A\to B$ 是单射当且仅当对任意的 x_1、$x_2\in A$,若 $x_1\neq x_2$,则有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,当且仅当对任意的 x_1、$x_2\in A$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则有 $x_1=x_2$。

例如,集合 $X=\{a,b,c\}$,$Y=\{1,2,3,4\}$,f 是 X 到 Y 的映射,且有:

$$f(a)=1,f(b)=2,f(c)=3,$$

则 f 就是从 X 到 Y 的单射。

3.2.2 满射

定义 3.2.2 设映射 $f:X\to Y$,如果 $f(X)=Y$,即 Y 中的每一个元素是 X 中一个或多个元素的映像,则称 f 为 X 到 Y 的**满射**。设 $f:X\to Y$ 是满射,即对于任意的 $y\in Y$,必存在 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$ 成立。

由定义 3.2.2 可得:

$f:A\to B$ 是满射$\Leftrightarrow$对任意的 $y\in B$,存在 $x\in A$,使 $f(x)=y$。

例如,集合 $X=\{1,2,3\}$,$Y=\{a,b\}$,f 是 X 到 Y 的映射,且有

$$f(1)=a,f(2)=b,f(3)=b,$$

则 f 是 X 到 Y 的满射，但显然不是单射。

3.2.3　双射

定义 3.2.3　设映射 $f:X\to Y$，如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为 X 到 Y 的**双射**，也称**一一对应映射**。

例如，集合 $X=\{a,b,c\}$，$Y=\{1,2,3\}$，f 是 X 到 Y 的映射，且有

$$f(a)=1,f(b)=3,f(c)=2,$$

则 f 是从 X 到 Y 的双射。

特别地，$\varnothing:\varnothing\to Y$ 是单射，$\varnothing:\varnothing\to\varnothing$ 是双射。

例 3.2.1　确定如下关系是否是映射，若是映射，是否是单射、满射、双射。

(1) 设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，$Y=\{a,b,c,d,e\}$，

$f_1=\{<1,a>,<2,c>,<3,e>\}$，

$f_2=\{<1,a>,<2,e>,<3,c>,<4,b>,<5,c>\}$，

$f_3=\{<1,a>,<2,e>,<3,b>,<4,c>,<5,d>\}$。

(2) 设 $X=Y=\mathbf{R}$（实数集合）

$f_1=\{<x,x^2>\mid x\in\mathbf{R}\}$，

$f_2=\{<x,\mathrm{e}^x>\mid x\in\mathbf{R}\}$，

$f_3=\{<x,x+2>\mid x\in\mathbf{R}\}$。

解　(1) f_1 不是 X 到 Y 的映射，因为 $\mathrm{dom}f_1=\{1,2,3\}\neq X$；

f_2 是从 X 到 Y 的映射，但 $f_2(3)=f_2(5)=c$，$\mathrm{ran}f_2=\{a,b,c,e\}\neq Y$，因此 f_2 既非单射也非满射；

f_3 是从 X 到 Y 的双射。

(2) f_1 是从 X 到 Y 映射，但 $f_1(1)=f_1(-1)=1$，因此它不是单射，又因为该映射的最小值是 0，所以 $\mathrm{ran}f_1$ 是区间$[0,+\infty)$，不是整个实数集，因此它也不是满射；

f_2 是从 X 到 Y 的单射；

f_3 是从 X 到 Y 的双射。

定义 3.2.4　设映射 $I_X:X\to X$ 满足 $I_X(x)=x$，则称 I_X 为 X 上的**恒等映射**。

定义 3.2.5　(1) 设 $f:X\to Y$，如果存在 $y\in Y$ 使得对所有的 $x\in X$ 都有 $f(x)=y$，则称 f 为**常映射**。

(2) X 上的恒等关系 I_x 就是 X 上的恒等映射，对于所有的 $x\in X$，都有 $I_x(x)=x$。

(3) 设 $f:X\to X$，对于任意的 $x_1,x_2\in X$，如果 $x_1<x_2$，则有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，就称 f 为**单调递增**的；如果 $x_1<x_2$，则有 $f(x_1)<f(x_2)$，就称 f 为**严格单调递增**的。类似地，也可以定义**单调递减**和**严格单调递减**的映射。它们统称为**单调映射**。

一般情况下，一个映射是满射和是单射之间没有必然的联系，但当 A 和 B 都是有限集时，则有如下的定理。

定理 3.2.1　设 X 和 Y 为有限集，若 X 和 Y 的元素个数相同，即 $|X|=|Y|$，f 是从 X 到 Y 的映射，则 f 是单射，当且仅当 f 是满射。

证明 必要性：设 f 是单射，则 $|X|=|f(X)|=|Y|$，从 f 的定义可知 $f(X)\subseteq Y$，而 $|f(X)|=|Y|$，又因为 $|Y|$ 是有限的，故 $f(X)=Y$，因此由 f 是单射推出 f 是满射。

充分性：设 f 是满射，根据满射定义 $f(X)=Y$，于是 $|X|=|Y|=|f(X)|$。因为 $|X|=|f(X)|$ 且 $|X|$ 是有限的，故 f 是单射，因此由 f 是满射推出 f 是单射。

这个定理必须在有限集情况下才成立，在无限集上不一定成立，如 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$（整数集），$f(x)=2x$，在这种情况下整数映射到偶整数，显然这是一个单射，但不是满射。

习题 3.2

（A）

1. 判断下列各个映射是否单射：

(1) 对地球上的每个人赋予其对应的年龄数字；

(2) 对世界上的每一个国家赋予其首都的纬度和经度；

(3) 对世界上有总统的各个国家注明其总统。

2. 考虑映射 $f(x)=2^x$，$g(x)=x^3-x$，$h(x)=x^2$，判断它们是否为单射、满射。

3. 下列映射中，(　　)是满射，(　　)是单射，(　　)是双射，(　　)是一般映射。

A. $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=x^2+2$

B. $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=x(\mathrm{mod}\ 3)$（$x$ 除以 3 的余数）

C. $f:\mathbf{N}\to\{0,1\}$，$f(x)=\begin{cases}1, & x\in 偶数集\\ 0, & x\in 奇数集\end{cases}$

D. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=2x-5$

（B）

4. 设 $\mathbf{N}$ 为自然数集合，定义 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的映射 f 和 g 如下：对于任意的 $x\in\mathbf{N}$，$f(x)=x+1$，$g(x)=\max\{0,x-1\}$。试证明 f 是单射而不是满射，g 是满射而不是单射。

（C）

5.（参考北京大学 1998 年硕士生研究生入学考试试题）设 $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x,y)=xy$，求 $f(\langle\mathbf{N}\times\{1\}\rangle)$，并说明 f 是否为单射、满射、双射。

3.3 映射的复合运算

由于映射是一种特殊的关系，下面讨论两个映射的复合关系。

定理 3.3.1 设 X，Y，Z 是集合，f 是 X 到 Y 的二元关系，g 是 Y 到 Z 的二元关系，当 f 和 g 都是映射时，则复合关系 $f\circ g$ 是 X 到 Z 的映射。

定义 3.3.1 设映射 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，经 f 和 g 复合后的映射称为**复合映射**，记作 $g\circ f$，它是 X 到 Z 的映射，若 $x\in X$，$Y\in Y$，$z\in Z$，且

$$f(x)=y,\quad g(y)=z,$$

则

$$g \circ f(x) = z。$$

需注意的是，当复合关系是一个复合映射时，在其表示标记中颠倒 f 和 g 的位置而写成 $g \circ f$，这是为了与通常意义下复合映射的表示方法保持一致。

例 3.3.1 设集合 $X=\{x,y,z\}$，$Y=\{a,b,c,d\}$，$Z=\{1,2,3\}$，f 是 X 到 Y 的映射，g 是 Y 到 Z 的映射，其中

$$f(x)=c, f(y)=b, f(z)=c,$$
$$g(a)=2, g(b)=1, g(c)=3, g(d)=1,$$

求复合映射 $g \circ f$。

解 易知 $g \circ f$ 是 X 到 Z 的映射，且

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(c) = 3,$$
$$g \circ f(y) = g(f(y)) = g(b) = 1,$$
$$g \circ f(z) = g(f(z)) = g(c) = 3。$$

定理 3.3.2 若映射 $g: A \to B$ 和 $f: B \to C$ 是双射，则 $f \circ g: A \to C$ 是双射。

证明 对任意的 $z \in C$，由 $f: B \to C$ 是双射，即 $f: B \to C$ 是满射，则存在 $y \in B$ 使 $f(y)=z$。

对于 $y \in B$，由 $g: A \to B$ 是双射，即 $g: A \to B$ 是满射，则存在 $x \in A$ 使 $g(x)=y$，于是有 $f \circ g(x) = f(g(x)) = z$。所以 $f \circ g$ 是满射。

对任意的 x_1、$x_2 \in A$，若 $x_1 \neq x_2$，由 $g: A \to B$ 是双射，即 $g: A \to B$ 是单射，则 $g(x_1) \neq g(x_2)$。

又由 $f: B \to C$ 是双射，即 $f: B \to C$ 是单射，则 $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$，于是 $f \circ g(x_1) \neq f \circ g(x_2)$。所以 $f \circ g$ 是单射。

综上可知，$f \circ g$ 是双射。

由于映射的复合仍是一个映射，因此同样可求 3 个映射的复合，并且和二元关系的合成一样，映射的复合运算也满足结合律。

定理 3.3.3 设映射 $f: A \to B$，$g: B \to C$，$h: C \to D$，则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f。$$

证明 因为 $f: A \to B$，$g: B \to C$，$h: C \to D$，由定理 3.3.1 可知，$h \circ (g \circ f)$ 和 $(h \circ g) \circ f$ 都是 A 到 D 的映射。

对任意的 $a \in A$，有

$$h \circ (g \circ f)(a) = h \circ (g \circ f(a)) = h(g(f(a))) = (h \circ g) \circ f(a),$$

所以

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f。$$

例 3.3.2 设 $\mathbf{R}$ 是实数集，f，g，h 都是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射，其中

$$f(x) = x+2, g(x) = x-2, h(x) = 3x,$$

求 $g \circ f$，$h \circ (g \circ f)$，$(h \circ g) \circ f$。

解 $g \circ f(x) = g(x+2) = (x+2)-2 = x$，

$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(x) = 3x$，

$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g) f(x) = h(g(f(x)))$

$=h(g(x+2))=h((x+2)-2)=h(x)=3x$。

定理 3.3.4 设 f 和 g 为映射，$g \circ f$ 是 f 和 g 的复合映射，则：

(1) 若 f 和 g 是满射，则 $g \circ f$ 是满射；

(2) 若 f 和 g 是单射，则 $g \circ f$ 是单射；

(3) 若 f 和 g 是双射，则 $g \circ f$ 是双射。

证明 (1) 设 $f:X \to Y$，$g:Y \to Z$，则 $g \circ f:X \to Z$。由于 g 是满射，对于 Z 中任意元素 $z \in Z$，必有 $y \in Y$，使得 $g(y)=z$。

对于 $y \in Y$，又因为 f 是满射，所以也必有 $x \in X$，使得 $f(x)=y$。

因此，对于 Z 中任意元素 z，必有 $x \in X$，使得 $g \circ f(x)=z$，

所以 $g \circ f$ 是满射。

(2) 由于 f 和 g 都是单射，因此对于任意 $x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，必有

$$f(x_1) \neq f(x_2), g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)),$$

即当 $x_1 \neq x_2$ 时，必有

$$g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2),$$

所以 $g \circ f$ 是单射。

(3) 由(1)、(2)证明结果即可得证。

定理 3.3.5 设 f 和 g 为映射，$g \circ f$ 是 f 和 g 的复合映射，若设映射 $f:X \to Y$，$g:Y \to Z$，$g \circ f$ 是 f 和 g 的复合映射，则：

(1) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射；

(2) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射；

(3) 若 $g \circ f$ 是双射，则 f 是单射，g 是满射。

证明 设 $g:A \to B$，$f:B \to C$，由定理 3.3.1 知，$f \circ g$ 为 A 到 C 的映射。

(1) 对任意的 $z \in C$，因 $f \circ g$ 是满射，则存在 $x \in A$ 使 $f \circ g(x)=z$，即 $f(g(x))=z$。

由 $g:A \to B$ 可知 $g(x) \in B$，于是有 $y=g(x) \in B$，使得 $f(y)=z$。

因此，f 是满射。

(2) 对任意的 x_1、$x_2 \in A$，若 $x_1 \neq x_2$，则由 $f \circ g$ 是单射得 $f \circ g(x_1) \neq f \circ g(x_2)$，于是 $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$，必有 $g(x_1) \neq g(x_2)$。所以，g 是单射。

(3) 由(1)、(2)得证。

在定理 3.3.5 中，$f \circ g$ 是满射时，g 不一定是满射；$f \circ g$ 是单射时，f 不一定是单射。例如，设 $A=\{a\}$，$B=\{b,d\}$，$C=\{c\}$，

$$g:A \to B, f:B \to C, g=\{\langle a,b \rangle\}, f=\{\langle b,c \rangle, \langle d,c \rangle\}。$$

则 $f \circ g=\{\langle a,c \rangle\}$，$f \circ g$ 是双射，但 g 不是满射，f 不是单射。

习题 3.3

(A)

1. 下列命题正确的有(　　)。

A. 若 g,f 是满射，则 $g \circ f$ 是满射。　　B. 若 $g \circ f$ 是满射，则 g,f 都是满射。

C. 若 $g \circ f$ 是单射，则 g，f 都是单射。　　D. 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射。

2. 设映射 $f: R \times R$，定义为 $f\langle x, y\rangle = \langle x+y, x-y\rangle$，求复合映射 $f \circ f$。

3. 给定 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$。试证明：若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射。

4. 若 $T \to U$，f 是单射，$g: S \to T$，$h: S \to T$，满足 $f \circ g = f \circ h$，试证明：$g = h$。

5. 给出映射 f, g, h 的实例：$f: T \to U$，$g: S \to T$，$h: S \to T$，$f \circ g = f \circ h$，但 $g \neq h$(B)。

（B）

6. 设 $f: A \to B$，$g: B \to C$，若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射，并举例说明 g 不一定是单射。

（C）

7.（参考北京大学 1993 年硕士生研究生入学考试试题）设映射 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$，定义为 $f(x) = \langle x, x+1\rangle$，请判断 f 是否为单射、满射或双射，并说明理由。

3.4 映射的逆运算

任何关系都存在逆关系，一个关系的逆关系不一定是映射，一个映射的逆关系也不一定是映射。

定理 3.4.1 设 $f: X \to Y$ 是一个双射，则 f 的逆关系 f^{-1} 是 Y 到 X 的双射。

证明 对任意的 y_1、$y_2 \in B$，若 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$，则 $f(x) = y_1$，$f(x) = y_2$。因为 $f: A \to B$ 是映射，则 $y_1 = y_2$。所以 f^{-1} 是单射。

对任意 $x \in A$，必存在 $y \in B$ 使 $f(x) = y$，从而 $f^{-1}(y) = x$，所以 f^{-1} 是满射。

综上可得，$f^{-1}: B \to A$ 是双射。

例如，设 $X = \{x, y, z\}$，$Y = \{a, b, c\}$，$f: X \to Y$，且

$$f = \{\langle x, a\rangle, \langle y, c\rangle, \langle z, b\rangle\},$$

则

$$f^{-1} = \{\langle a, x\rangle, \langle c, y\rangle, \langle b, z\rangle\}。$$

定义 3.4.1 设 $f: X \to Y$ 是一个双射，其逆关系 f^{-1} 称为 f 的**逆映射**，也记作 f^{-1}。

若映射 f 使得 $f(a) = b$，则存在逆映射 f^{-1}，使得 $f^{-1}(b) = a$。即 $\langle a, b\rangle \in f$，则 $\langle b, a\rangle \in f^{-1}$，因此 f^{-1} 逆映射是 f 的逆关系。

定理 3.4.2 设 $f: X \to Y$ 是一个双射，则

$$(f^{-1})^{-1} = f。$$

证明 由定理 3.4.1 可知，$f^{-1}: Y \to X$，且是双射，因此它的逆映射 $(f^{-1})^{-1}$ 必然存在，而且也是双射。

并且对于任意 $x \in X$，有

$$f: x \to f(x),\ f^{-1}: f(x) \to x,\ (f^{-1})^{-1}: x \to f(x)。$$

显然，$(f^{-1})^{-1} = f$ 成立。

定理 3.4.3 设 $f: X \to Y$ 是一个双射，则

(1) $f^{-1} \circ f = I_X$

(2) $f \circ f^{-1} = I_Y$。

(3) $f=I_Y \circ f=f \circ I_X$。

证明 (1) 因为 $f: X \to Y$ 是一个双射，所以 $f^{-1}: Y \to X$，故 $f^{-1} \circ f: X \to X$。对于任意 $x \in X$，必存在 $y \in Y$，使得 $f(x)=y$，且 $f^{-1}(y)=x$，因此，

$$f^{-1} \circ f(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x,$$

故 $f^{-1} \circ f=I_X$ 成立。

例 3.4.1 设 $X=\{1,2,3\}$，$Y=\{a,b,c\}$，f 是 X 到 Y 的双射，且

$$f=\{<1,a>,<2,c>,<3,b>\},$$

求 f^{-1} 和 $f \circ f^{-1}$ 和 $f^{-1} \circ f$。

解 由于 f 是双射，因此由逆映射的定义可得

$$f^{-1}=\{<a,1>,<c,2>,<b,3>\}。$$

同理可得

$$f \circ f^{-1}=\{<a,a>,<c,c>,<b,b>\},$$
$$f^{-1} \circ f=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}。$$

定理 3.4.4 设 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 均为双射，则

$$(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}。$$

证明 因为 f，g 是双射，所以 $g \circ f$ 是 X 到 Z 的双射，$g \circ f$ 存在逆映射，且 $(g \circ f)^{-1}$ 是 Z 到 X 的双射；同样，f^{-1} 和 g^{-1} 也是双射，所以，$f^{-1} \circ g^{-1}$ 也是 Z 到 X 的双射。

要证 $(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}$，即证对于 Z 中任意元素 z，有

$$(g \circ f)^{-1}(z)=f^{-1} \circ g^{-1}(z)$$

因为 g^{-1} 是 Z 到 Y 的双射，对于 $z \in Z$，有唯一元素 $y \in Y$，使得 $g^{-1}(z)=y$，同理，对于 $y \in Y$，有唯一元素 $x \in X$，使得 $f^{-1}(y)=x$，由此可得 $f^{-1} \circ g^{-1}(z)=x$。

由于

$$g \circ f(x)=g(f(x))=g(y)=z,$$

所以，

$$(g \circ f)^{-1}(z)=x。$$

由此证得

$$(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}。$$

习题 3.4

(A)

1. 映射 $f: A \to B$ 可逆的充要条件是(　　)。

A. $A=B$　　B. A 与 B 有相同的基数

C. f 为满射　　D. f 为双射

2. 对于 $A=\{r,s,t\}$，$B=\{x,y,z\}$，已知 $f: A \to B$，其中 $f=\{<r,y>,<s,z>,<t,x>\}$，判断 f 是否可逆，若可逆则求其逆。

3. 设 $f: R \to R$ 定义为 $f(x)=2x-3$，现在 f 是一对一且满足满射。因此，f 有一个逆映射 f^{-1}，求 f^{-1} 的一个表达式。

4. 证明 $f(x)=2^x$ 是一个可逆映射。

5. 设 f,g,h 均为实数集 $\mathbf{R}$ 上的映射，且 $g\circ f=h\circ f$，则若 $f=($　　$)$，一定能推出 $g=h$。

A. $\{<x,x^2>|x\in\mathbf{R}\}$　　B. $\{<x,x^3-x>|x\in\mathbf{R}\}$

C. $\{<x,2x>|x\in\mathbf{R}\}$　　D. $\{<x,|x|>|x\in\mathbf{R}\}$

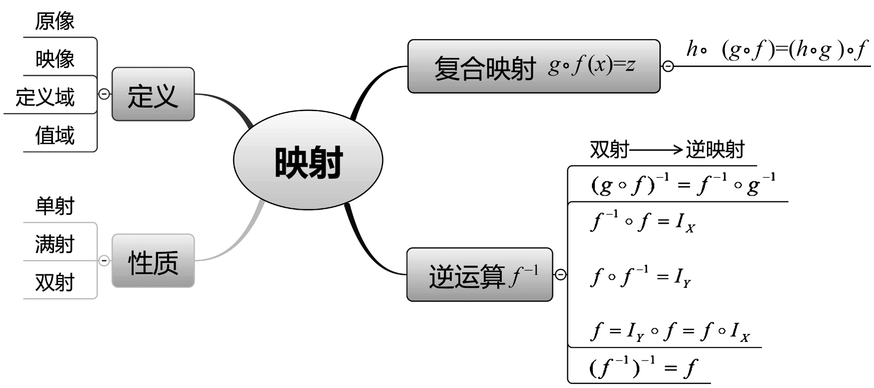
（B）

6. 设 $f:A\to B$ 是一个映射，记 f^{-1} 为 f 的逆关系，$f\circ g$ 为 f 和 g 的复合关系，试证明：当且仅当 $f^{-1}\circ f=I_B\circ f=I_B$ 时，f 是满射。

（C）

7.（参考北京大学 1997 年硕士生研究生入学考试试题）设 $A=\{1,2,3\}$，$f\in A^A$，且 $f(1)=f(2)=1$，$f(3)=2$，定义 $G:A\to P(A)$，$G(x)=f^{-1}(x)$。计算 ran$G$。

*3.5　映射的思维导图



完整版思维导图

*3.6　映射的算法思想

映射是集合论中的一个十分重要的概念。通过该组实验，学生应能更加深刻地理解映射的概念和性质，并掌握映射性质的判定等。

3.6.1　映射的判定

判断任意一个关系是否为映射，若是映射，判定其是否为单射、满射或双射。

设 A 和 B 为集合，$f\subseteq A\times B$，若对任意的 $x\in A$，都存在唯一的 $y\in B$ 使得 xfy 成立，则称 f 为从 A 到 B 的映射。

设 f 是 A 到 B 的映射，若 ran$f=B$（或 $f(A)=B$），则称 f 是 A 到 B 的满射；若对任意的 x_1、$x_2\in A$，$x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是 A 到 B 的单射；若 f 既是满射

又是单射，则称 f 是 A 到 B 的双射。

在程序中集合用列举法表示，关系用集合表示。

例如，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$，A 到 B 上的关系

$$f=\{<1,a>,<2,b>,<3,c>\}。$$

3.6.2 求满射

设有限集合 A 和 B，且 $|A|=m$，$|B|=n$，求有多少映射满足从 A 到 B 上的满射。

根据映射的定义可知，从 A 到 B 上的映射必有 $m \geqslant n$，否则不是映射。利用公式：

$$F=C_n^n \cdot n^m - C_n^{n-1} \cdot (n-1)^m + C_n^{n-2} \cdot (n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1} C_n^1 \cdot 1^m$$

其解即为所求。

3.7 本章小结

本章介绍了映射的基本概念，并给出映射作为特殊二元关系的不同之处。然后，讲述了具有不同性质的 3 种特殊映射：单射、满射和双射，以及如何从定义入手，判断和证明映射具有某种特殊性质，并给出了几个常用的映射。之后，介绍了复合映射和逆映射，给出了相关的定理以及证明。最后给出映射的思维导图和部分算法思想描述。通过本章的学习，读者应能够进一步加强对映射和相关知识的理解，为后续的学习和应用打下很好的基础。

第二部分 数理逻辑

逻辑是研究推理的科学。早在 17 世纪,莱布尼茨就提出一种设想:能否使人们的推理不依赖对推理过程中命题含义的思考,而用计算代替思维来完成推理过程。莱布尼茨希望能用数学方法来研究思维,数理逻辑就是在这种思维下产生的。用希尔伯特的话来说,数理逻辑是把数学上的形式化方法应用到逻辑领域的结果。

所谓数学的方法,就是用一套数学的符号系统来描述和处理思维的形式与规律,避免歧义性。因此,数理逻辑又称为符号逻辑。推理是研究前提和结论之间的关系以及思维的规律,即符号化的过程。

数理逻辑和电子计算机的发展有着密切的联系,它为机器证明、自动程序设计、计算机辅助设计等计算机应用和理论研究提供了必要的理论基础。

从本章开始,我们用两章的篇幅介绍数理逻辑最基本的内容:命题逻辑和谓词逻辑。

第4章

命题逻辑

任何基于命题分析的逻辑统称为命题逻辑，命题是研究思维规律的科学中一项基本要素，它是一个判断的语言表达。

本章主要介绍命题逻辑的基本内容。通过本章学习，读者将掌握以下内容：

(1) 命题的基本概念；

(2) 否定、合取、析取、不可兼析取、条件、双条件、与非、或非和条件否定联结词；

(3) 命题公式的定义、符号化、解释、真值表和类型；

(4) 命题公式的逻辑等值的定义、基本的逻辑等值式、等值演算和对偶定理；

(5) 析取(合取)范式、主析取(主合取)范式及其应用；

(6) 命题公式的逻辑蕴涵的定义、证明方法和基本的逻辑蕴涵式；

(7) 全功能联结词；

(8) 命题逻辑推理理论和规则、判断有效结论的常用方法。

4.1 命　　题

在数理逻辑中，为了表达概念，陈述理论和规则，常常需要应用语言进行描述，但是日常使用的自然语言往往在叙述时不够确切，也易产生二义性，因此就需要引入一种目标语言，这种目标语言和一些公式符号就形成了数理逻辑的形式符号体系。所谓**目标语言**就是表达判断的一些语言的汇集，而判断就是对事物有肯定或否定的一种思维形式，因此能表达判断的语言是陈述句，它称作**命题**。一个命题具有一个“值”，称为真值。真值只有“真”和“假”两种，分别记作 True(真)和 False(假)，符号表示为 T 和 F。

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句。在自然语言中，只有具有确定真值的陈述句才是命题，一切没有判断内容的句子，以及无所谓是非的句子，如感叹句、疑问句、祈使句等都不能作为命题。

不能再被分解成更简单的语句的命题称为**原子命题**。原子命题是命题逻辑中最基本的单位。当命题变元表示原子命题时，该变元称为**原子变元**。所有这些命题都应具有确定的真值。一个命题变元不是命题，因为它的真值不能确定。但一旦我们用一个具体的命题取代它时，它的真值就确定了，这时称对命题变元进行指派。

人的思维活动是靠自然语言来表达的。然而，由于自然语言易产生二义性，用它来表示严格的推理就不合适了。为了解决这一问题，人们在数理逻辑中引进了符号语言。

如果一个句子是命题,它必须满足以下条件:

(1) 该句子是具有判断性的陈述语句;

(2) 它有确定的真值,非真即假。

判定一个语句是否是命题,并不是一定要知道其真假值,我们只关心它“是否具有真假值”这个事实。也就是说,对一个语句,有时可能无法确定它的真假,但是它的确有真假,那么这个语句就是命题。例如下面4个语句都是命题。

(1) 珠海是中国最大的城市。

(2) 今天是星期一。

(3) 所有素数都是奇数。

(4) $1+1=2$。

例 4.1.1 判断下列语句是否为命题,若是命题,判断其真值。

(1) 10是素数。

(2) $f(x)=x^2$ 在闭区间$[a,b]$上连续。

(3) 北京是中国的首都。

(4) $1001+11=1100$。

(5) 请勿喧哗!

(6) 你记住了吗?

(7) 这个风景真美呀!

(8) $x+y=7$。

解 (1)~(4)是命题,因为它们都是具有真假意义的陈述句。(1)是假命题,(2)(3)是真命题,(4)在二进制中为真,在十进制中为假,故需要根据所处环境才能确定真值。

(5)~(8)都不是命题,(5)是祈使句,(6)是疑问句,(7)是感叹句。在(8)中,x,y 是变量,无法判断其真值。

由于命题只有真、假两个真值情况,所以命题逻辑也称为二值逻辑。如果一个命题是真的,它的真值就是1;如果一个命题是假的,它的真值就是0。

同理,人们也用“1”代表一个抽象的真命题,用“0”代表一个抽象的假命题。

例 4.1.2 判断下列语句是否为命题。

(1) 其他星球上有生命存在。

(2) 我正在说谎。

解 (1) 语句在目前可能无法确定其真值,但从本质而论,这句话是有真假值的,所以也被认为是命题。

(2) 语句不是命题,是悖论。在判断一个句子是否为命题时,首先从语法上判断它是否为陈述句。但是,有一些“自指谓”的陈述句不属于命题,因为这种“自指谓”的陈述句产生悖论。所谓“自指谓”指其结论对自身而言真假矛盾。对于(2)语句,当它为假时,它便是真;当它为真时,它便是假。

命题通常使用大写字母 $A,B,\cdots,Z$ 及其带下标的大写字母或数字表示,如 A_1,R 等,例如 A_1:我是一名大学生。

表示命题的符号称为命题标识符,在这个例子中,A_1 即为命题标识符。

一个命题标识符如表示确定的命题，则称它为命题常元。一个仅表示任意命题位置，没有指定具体内容的命题标识符称为命题变元。

例如，如果 P 表示"今天有雨"，则 P 是命题常元。

习题 4.1

（A）

1. 下列语句是命题的有（　　）

A. 明年中秋节的晚上是晴天。　　B. $x+y>0$。

C. $xy>0$，当且仅当 x 和 y 都大于 0。　　D. 我正在说谎。

2. 下列各命题中真值为真的命题有（　　）

A. $2+2=4$ 当且仅当 3 是奇数。

B. $2+2=4$ 当且仅当 3 不是奇数。

C. $2+2\neq4$ 当且仅当 3 是奇数。

D. $2+2\neq4$ 当且仅当 3 不是奇数。

3. 下列语句不是命题的有（　　）

A. $x=13$。

B. 离散数学是计算机系的一门必修课。

C. 鸡有 3 只脚。

D. 太阳系以外的星球上有生物。

E. 你打算考硕士研究生吗？

4. 下列语句是命题的有（　　）

A. 2 是素数。　　B. $x+5>6$。

C. 地球外的星球上也有人。　　D. 这朵花多好看呀！

5. 设 $S=\{N,Q,R\}$，下列命题正确的是（　　）

A. $2\in N$，$N\in S$，则 $2\in S$。　　B. $N\subset Q$，$Q\in S$，则 $N\subset S$。

C. $N\subset Q$，$Q\subset R$，则 $N\subset R$。　　D. $\varnothing\subset N$，$\varnothing\subset S$，则 $\varnothing\subset N\cap S$。

（B）

6. 给定语句如下。

(1) 15 是素数(质数)。

(2) 10 能被 2 整除，3 是偶数。

(3) 你下午有会吗？若无会，请到我这儿来！

(4) $2x+3>0$。

(5) 只有 4 是偶数，3 才能被 2 整除。

(6) 明年 5 月 1 日是晴天。

以上 6 个语句中，是原子命题的为（　　），是复合命题的为（　　），是真命题的为（　　），是假命题的是（　　），真值待定的命题是（　　）。

（C）

7.（参考北京大学1990年研究生入学考试试题）下列句子哪些是命题？是命题的句子哪些是原子命题（简单命题）？哪些是复合命题？

（1）你喜欢看电影吗？

（2）大熊猫主要分布在我国东北。

（3）$2+x=5$。

（4）$2+3>1$。

（5）小王和小李是同学。

（6）别讲话了！

（7）这朵花真美丽。

（8）李梅能歌善舞。

（9）只要我有时间，我就来看你。

（10）只要你不怕困难，你才能战胜困难。

4.2 联　结　词

在自然语言中，由一些简单的陈述句，通过“或”“与”“但是”等一些联结词组成较复杂的句子称为复合语句。这种联结词的使用一般没有很严格的定义，因此有时显得不很确切。

在命题逻辑中，由原子命题通过特定的联结词构成的陈述句称为复合命题，联结词是复合命题中的重要组成部分。原子命题和复合命题都是命题。

例如，P：今天晚上我在家看电视或出去看电影。

4.2.1 否定联结词 $\neg$

定义 4.2.1 设 P 是一个命题，命题“P 是不对的”称为 P 的**否定**，记作“$\neg P$”，读作“非 P”。$\neg P$ 是真的，当且仅当 P 是假的。

例如，P：吉林大学是中国最大的大学。

$\neg P$：吉林大学不是中国最大的大学。

命题 P 取值为真时，命题 $\neg P$ 取值为假；命题 P 取值为假时，命题 $\neg P$ 取值为真。

命题 $\neg P$ 的取值也可以用一个表 4.2.1 来定义，其构造类似于集合的成员表。表中“1”和“0”分别标记该列命题取值为真和为假，“$\neg$”相当于自然语言中的“非”“不”“没有”等否定词。

表 4.2.1　$\neg P$ 运算表

P	$\neg P$
0	1
1	0

4.2.2　合取联结词∧(与)

定义 4.2.2　设 P,Q 是两个命题,命题"P 并且 Q"称为 P,Q 的**合取**,记作 $P \wedge Q$,读作"P 且 Q"。虽然 $P \wedge Q$ 是真的,当且仅当 P 和 Q 都是真的。

"∧"是自然语言中"并且""既……又……""和""以及""不仅……而且……""虽然……但是……"等词的逻辑抽象。命题 $P \wedge Q$ 的取值可以用表 4.2.2 定义。

表 4.2.2　$P \wedge Q$ 运算表

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

在自然语言中,用联结词连接的两个陈述句在内容上总是存在着某种联系,也就是说整个句子是有意义的。在数理逻辑中,我们关心的是复合命题与构成复合命题的各原子命题间的真值关系,即抽象的逻辑关系,并不关心各语句的具体内容。因此,内容上毫无联系的两个命题也能组成具有确定真值的复合命题。

例如,P:$2 \times 2 = 5$。

　　Q:雪是黑的。

则 $P \wedge Q$:$2 \times 2 = 5$ 并且雪是黑的。

4.2.3　析取联结词∨(或)

定义 4.2.3　设 P,Q 是两个命题,命题"P 或者 Q"称为 P,Q 的**析取**,记作 $P \vee Q$,读作"P 或 Q"。规定 $P \vee Q$ 是真的,当且仅当 P,Q 中至少有一个是真的。命题 $P \vee Q$ 的取值可以用表 4.2.3 定义。

表 4.2.3　$P \vee Q$ 运算表

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例如,P:今天下雨。

　　Q:今天刮风。

则 $P \vee Q$:今天下雨或者刮风。

★在很多情况下，自然语言中的“或者”一词包含了“不可兼”的意思。例如，“我到北京出差或者到广州度假”表示的是二者只能居其一，非此即彼，不会同时成立。按照联结词“$\vee$”的定义，当 P，Q 都为真时，$P\vee Q$ 也为真，因此，“$\vee$”所表示的“或”是“可兼或”，对于“不可兼或”，我们不可以用$\vee$来表示。

4.2.4 不可兼析取联结词$\overline{\vee}$（异或）

定义 4.2.4 设 P，Q 是两个命题，则复合命题 $P\overline{\vee}Q$ 称为 P 和 Q 的**不可兼析取**，也称为**异或**，当且仅当 P 与 Q 的真值不相同时，$P\overline{\vee}Q$ 的真值为 1，否则，$P\overline{\vee}Q$ 的真值为假。命题 $P\overline{\vee}Q$ 的取值可以用表 4.2.4 表示。

表 4.2.4 $P\overline{\vee}Q$ 运算表

P	Q	$P\overline{\vee}Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

例如，设 P：今天晚上我在家看电视。

Q：今天晚上我在家看电影。

则 $P\overline{\vee}Q$：今天晚上我在家看电视或出门看电影。

在数理逻辑中用联结词“$\overline{\vee}$”（异或）表示“不可兼或”。由于

$$P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q),$$

所以，$\overline{\vee}$可以用$\vee$，$\wedge$，$\neg$表示，故我们不把它当作基本联结词。

联结词“$\overline{\vee}$”有以下性质。

(1) **交换律**：$P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow Q\overline{\vee}P$。

(2) **结合律**：$(P\overline{\vee}Q)\overline{\vee}R\Leftrightarrow P\overline{\vee}(Q\overline{\vee}R)$。

(3) **分配律**：$P\wedge(Q\overline{\vee}R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\overline{\vee}(P\wedge R)$。

(4) $(P\overline{\vee}Q)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$。

(5) $(P\overline{\vee}Q)\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$。

(6) $P\overline{\vee}P\Leftrightarrow 0$；$0\overline{\vee}P\Leftrightarrow P$；$1\overline{\vee}P\Leftrightarrow\neg P$。

例 4.2.1 设 P、Q、R 为命题公式。如果 $P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow R$，则 $P\overline{\vee}R\Leftrightarrow Q$，$Q\overline{\vee}R\Leftrightarrow P$。

证明 如果 $P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow R$，则

$P\overline{\vee}R\Leftrightarrow P\overline{\vee}P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow F\overline{\vee}Q\Leftrightarrow Q$，

$Q\overline{\vee}R\Leftrightarrow Q\overline{\vee}P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow Q\overline{\vee}Q\overline{\vee}P\Leftrightarrow F\overline{\vee}P\Leftrightarrow P$。

$P\overline{\vee}Q\overline{\vee}R=R\overline{\vee}R\Leftrightarrow F$。