第3章

互补波形传统设计方法

3.1 引言

前两章我们讨论了合理设计互补波形的发射顺序和接收端权重 能够显著影响时延-多普勒图像中的旁瓣水平和目标分辨率,并且相 比直接设计波形本身更加容易方便。因此,本章将着重介绍互补波 形的几种传统且常用的发射端与接收端设计方法。

本章的内容安排如下: 3.2 节介绍了格雷互补波形的传统设计 方法,包括标准设计方法、常用的发射端设计方法和接收端设计方 法; 3.3 节是互补波形组传统设计方法的介绍,类似地包括标准设计 方法、常用的发射端设计方法和接收端设计方法; 3.4 节对本章内容 进行了小结。

3.2 格雷互补波形传统设计方法

本节首先介绍格雷互补波形的标准设计方法,然后分别介绍一 阶里德-穆勒序列方法和二项式设计方法这两种发射端和接收端设计 方法。

3.2.1 格雷互补波形标准设计方法

格雷互补波形标准设计方法包括发射端的标准顺序设计和接收 端的标准权重设计两方面。根据式(2.5)(重写如下)

$$z_{P}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} p(n) x(t - nT) + (1 - p(n)) y(t - nT)$$

我们定义 *P*={1,0,1,0,…}(或 *P*={0,1,0,1,…})这样的交替序列 为格雷互补波形的标准发射顺序。

另外,重写式(2.6)所示的接收端用于匹配滤波的信号如下:

 $z_{Q}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} q(n) [p(n)x(t-nT) + (1-p(n))y(t-nT)]$ 我们定义 Q 为一个全 1 序列的情况为标准接收权重序列。

将格雷互补波形按照以上发射顺序和接收权重设计的方法称为 格雷互补波形标准设计方法。在标准发射顺序与接收权重的基础 上,我们可以通过接下来要介绍的格雷互补波形发射端与接收端设 计方法赋予其标准顺序和权重以外的顺序和权值,从而在时延-多普 勒图像中得到不同的旁瓣水平和目标分辨率。

3.2.2 格雷互补波形发射端设计方法

本节主要介绍格雷互补波形的一阶里德-穆勒序列方法。一阶里 德-穆勒序列方法是由 Sofia Suvorova 等于 2007 年提出的一种格雷 互补波形发射端设计方法。该方法基于一阶里德-穆勒序列的编码方 式来确定格雷互补波形的发射顺序,并使得时延-多普勒图像中指定 的某个多普勒值附近的距离旁瓣被抑制到最小值^[1]。

记一阶里德-穆勒序列为 RM(1,N),我们可以通过对一个 2^{M-1} 阶(即行、列数均为 2^{M-1})的沃尔什(Walsh)矩阵 $W_{2^{M-1}}$ [2-3](该矩阵也 有学者称为哈达玛(Hadamard)矩阵^[5-6])进行如下迭代来获得所有 的长度为 $N=2^{M}(M,N\in\mathbb{N})$ 的一阶里德-穆勒序列:

$$\boldsymbol{W}_{2^{m+1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_{2^{m}} & \boldsymbol{W}_{2^{m}} \\ \boldsymbol{W}_{2^{m}} & -\boldsymbol{W}_{2^{m}} \end{bmatrix}, \quad m = 0, 1, \cdots, M - 1 \quad (3.1)$$

其中, $W_{2^0} = 1$ 。

将迭代后的 Walsh 矩阵 W_{2^M}中的所有一1 值替换为 0,那么矩阵 中的每一行(或者每一列,因为该矩阵是一个对称矩阵)均可以表示 一组格雷互补波形的发射顺序,或者换句话说,代表一个 P 序列。因 此,这个二进制的 Walsh 矩阵可以作为一个发射波形顺序库,对于任 意一个在时延-多普勒图像中感兴趣的多普勒值,我们都可以在这个 库中找到一组最佳的波形发射顺序,使得在这个多普勒值附近的距 离旁瓣最小。注意,由于 x 和 y 中包含了相同的信号能量,所以在 Walsh 矩阵中,每一行的传输能量都是相等的。下面介绍根据某个具 体的多普勒值选择最佳波形发射顺序的方法。

设F_D为某个目标的多普勒值,单位为Hz。该多普勒值可以表

示为弧度的形式^[4],即 $\theta_1 = F_D(2\pi T)$,此时单位为 rad。如果 $\theta_1 \notin [0,2\pi]$ rad,那么首先让 $\theta_1 \mod \pm 2\pi$ 直到 $\theta_1 \in [0,2\pi]$ rad。然后,构造 一个二进制序列 $[a_M, a_{M-1}, \cdots, a_1]$,并从 a_1 开始计算:

$$a_{b} = \begin{cases} 1, & \theta_{b} \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi] \text{rad} \\ 0, & \notin (0, \pi/2) \end{cases}$$
(3.2)

注意,从b=2开始,需要在根据式(3.2)计算 $a_b(b=2,3,\dots,M)$ 之前 替换 $\theta_b=2\theta_{b-1}$,并且每次替换后,都需要先让 θ_b 被取余(modded)至 [0,2 π]rad 区间内。

重复上述操作直到获得 θ_M 的值, 然后根据下式计算行数 x:

$$x = \sum_{b=1}^{M} 2^{b-1} a_b \tag{3.3}$$

则 Walsh 矩阵中第 x+1 行的序列就表示可以使时延-多普勒图像中 θ_1 多普勒值附近的距离旁瓣最小的格雷互补波形的发射顺序,如 图 3.1 所示。



图 3.1 使时延-多普勒图像中 θ₁ 多普勒值附近的距离旁瓣最小的格雷 互补波形的发射顺序

例 3.1: 设脉冲数目 N=2³=8,则利用式(3.1)可以得到下面的 Walsh 矩阵 W_{2³}:

$$\boldsymbol{W}_{2^{3}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
(3.4)

其中,将矩阵中的"一1"元素替换为"0"元素的操作可以通过对矩阵的每一个元素进行加1后除以2实现。可以看出,矩阵的第二行表示的是格雷互补波形的标准发射顺序,最后一行表示的是经过PTM设计^[7]的格雷互补波形的发射顺序。图 3.2 展示了当时延和多普勒均为0处存在一个0dB的目标时,利用矩阵中各行所表示的发射顺序得



图 3.2 利用 Walsh 矩阵中不同发射顺序获得的时延-多普勒图像(图中幅度色条的单位为 dB)



图 3.2 (续)

到的时延-多普勒图像(画图所需的各项参数将在 4.2.6 节给出)。从 各子图中可以发现,在零多普勒线附近,PTM 设计具有最好的旁瓣 抑制效果,也就是说相比其他发射顺序,PTM 设计的 $\mathcal{P}(F_{\rm D})$ 在 $F_{\rm D}=0$ 处具有最高阶的导数为 0。根据式(2.18)及文献[8]的讨论可以得 到,PTM 设计的 $\mathcal{P}(F_{\rm D})$ 前 $M_{\rm D}$ 阶导数为 0,其中 $M_{\rm D}=M-1=\log_2 N-1=2$ 。

另外,不同的发射顺序可以使得不同多普勒附近的距离旁瓣被显著抑制。例如,对于一个给定的多普勒值,如 $\theta = 0.75$ rad,可以根据式(3.2)计算得出二进制序列[a_3, a_2, a_1]=[0, 1, 1],即x = 3。因此,式(3.4)所示的 Walsh 矩阵中的第4 行则表示可以使时延-多普勒图像中 θ 附近的旁瓣最小的最佳发射顺序。

图 3.3 给出了在 θ 处不同发射顺序的距离旁瓣对比,为上面的例 子提供了更直观的理解。



图 3.3 θ 处不同发射顺序的距离旁瓣对比

3.2.3 格雷互补波形接收端设计方法

本节主要介绍格雷互补波形接收端的二项式设计方法。二项式 设计方法由 Dang Wenbing 等于 2011 年提出,与其他设计格雷互补 波形的发射顺序(即设计 P 序列)的方法不同的是,二项式方法通过 设计 Q 序列,即在接收端为各个脉冲加上不同的权重后进行匹配 滤波。

在该设计方法中,*P*序列为前面提到的格雷互补波形的标准发射 顺序,即*P*={0,1,0,1,…}; 而*Q*序列满足{q(n)}^{*N*-1}_{$n=0} ={C^{$ *n*}_{*N* $-1}}^{$ *N*-1}_{<math>n=0}, 其中 C^{*n*}_{*N*-1} 表示从 *N*-1个不同脉冲数目中取出*n*个脉冲数目的组合 数。若要保持加权前后各个脉冲的总能量相等,可以设{q(n)}^{*N*-1}_{$n=0} = <math>\epsilon$ { C^{n}_{N-1} }^{*N*-1}_{n=0},其中 $\epsilon = N / \sum_{n=0}^{N-1} C^{n}_{N-1}$ 表示能量归一化因子,这样设计不 会影响距离旁瓣的分布。图 3.4 表示了二项式设计方法的信号处理 流程,其中 $\chi_{BD}(t,F_{D})$ 表示采用二项式设计方法得到的时延-多普勒 图像。</sub></sub>



图 3.4 二项式设计方法的信号处理流程

利用式(2.15)可以将二项式设计方法的P(F_D)表示为

$$\mathcal{P}_{\rm BD}(F_{\rm D}) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{n} C_{N-1}^{n} \exp(j2\pi F_{\rm D} nT)$$
$$= [1 - \exp(j2\pi F_{\rm D} T)]^{N-1} \qquad (3.5)$$

很明显, $\mathcal{P}_{BD}(F_D)$ 的前(N-2)阶导数等于 0,这是采用(P,Q)序列设 计互补波形使其满足互补性的同时能够达到的最高阶数^[9]。而相比 之下标准设计方法的 $\mathcal{P}(F_D)$ 可推导为

$$\mathcal{P}_{\rm std}(F_{\rm D}) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \exp(j2\pi F_{\rm D}nT)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} [-\exp(j2\pi F_{\rm D}T)]^n \qquad (3.6)$$

它仅有前0阶导数等于0,这使得格雷互补波形在时延-多普勒图像 中可以获得相当大的旁瓣抑制区域。事实上,导数等于0的阶数越高,可以获得的旁瓣抑制区域越大、区域内的旁瓣抑制性能越好,但 相对地其多普勒分辨率也越差。

例 3.2: 对于脉冲数目 N=8 的格雷互补波形,二项式设计方法的(P,Q)序列表示为

此时, $\mathcal{P}_{BD}(F_D)$ 为0的导数阶数为N-2=6,具有比PTM设计方法 明显更高的阶数。通过本例还可以发现,二项式设计方法使格雷互 补波形在接收端的第1个脉冲和最后一个脉冲、第2个脉冲和倒数第 2个脉冲……分别具有同样的权重,这样才能保证在匹配滤波时每个 x(t)都有一个与之权重相等的y(t)以满足互补性。因此若要满足互 补性要求,不论采用前面介绍的PTM设计方法还是二项式设计方 法,格雷互补波形发射的脉冲数目均必须为偶数。 图 3.5 直观地比较了格雷互补波形标准采用发射顺序、PTM 设 计方法和二项式设计方法在时延-多普勒图像上的不同旁瓣抑制效果 (画图所需的各项参数将在 4.2.6 节给出)。



图 3.5 格雷互补波形采用:(a)标准设计方法;(b)PTM 设计方法;(c)二项式 设计方法;在时延-多普勒图像上的不同旁瓣抑制效果(图中幅度色条 的单位为 dB)

从图中结果可以发现,三种方法中标准设计方法的旁瓣分布非 常均匀,PTM设计方法在零多普勒线附近获得了一定的旁瓣抑制能 力,而二项式设计方法的旁瓣抑制效果最好,能够获得最大的旁瓣抑 制区域(在本章中表示图像中旁瓣低于一90dB的区域),但相对应地, 标准设计方法和 PTM 设计方法的多普勒分辨性能要显著优于二项 式设计方法。事实上,二项式设计方法通过接收端加权对目标和旁 瓣的能量进行了重新分配,将距离旁瓣的能量从目标附近推到了我 们不感兴趣的时延-多普勒图像的两边。另外,该方法也不可避免地 出现了以下问题:

(1)严重牺牲了目标的多普勒分辨率,这使得两个多普勒较为相近的目标难以被区分开来;

(2)增加了一部分区域的旁瓣能量(虽然通常这部分区域是我们 不感兴趣的区域),导致如果有一个弱目标落在了其他强目标产生的 旁瓣区域,将难以被检测;

(3) 一定程度上损失了目标的 SNR,这也是所有加权类方法共同存在的问题之一。

其中,前两个问题对于格雷互补波形的目标检测,特别是在多目标检测环境下尤为严重。

除二项式设计方法外,我们还可以采用其他[如海明(Hamming) 窗、汉宁(Hanning)窗、布莱克曼(Blackman)窗等]窗函数加权的方法 设计格雷互补波形的接收权重^[10],它们的原理比较相似,得到的结果 也总体上都是能够增大旁瓣抑制区域,但会损失多普勒分辨率,区别 在于不同的加权方法能够获得的旁瓣抑制区域大小和程度以及多普 勒分辨率的损失不一样。例如,图 3.6 展示了采用海明窗设计方法的 时延-多普勒图像,对比图 3.5(c)可以发现,海明窗设计方法相比二项 式设计方法具有更大的旁瓣抑制区域,多普勒分辨率也提高了近一 倍,但旁瓣抑制的程度仅略优于标准设计方法。



图 3.6 格雷互补波形采用海明窗设计方法在时延-多普勒图像上的旁瓣抑制效 果(图中幅度色条的单位为 dB)

3.3 互补波形组传统设计方法

本节阐述互补波形组的标准设计方法以及广义 PTM 设计方法 这种发射端设计方法,然后分析了二项式设计方法等接收端设计方 法应用于互补波形组时的性能。

3.3.1 互补波形组标准设计方法

与格雷互补波形类似,互补波形组的标准设计方法也包括发射端的标准顺序设计和接收端的标准权重设计两方面。重写式(2.32)和式(2.33)如下:

$$z_{P_{\text{sets}}}(t) = \sum_{p_{\text{sets}}(n)=d}^{N-1} a_{d}(t-nT)$$
$$z_{Q_{\text{sets}}}(t) = \sum_{p_{n=0}}^{N-1} q_{\text{sets}}(n)a_{d}(t-nT)$$

 $P_{sets} = \{0, 1, \dots, D-1, 0, 1, \dots, D-1, \dots\}$ (或 $P_{sets} = \{D-1, D-2, \dots, 0, D-1, D-2, \dots, 0, \dots\}$)表示互补波形组的标准发射顺序; Q_{sets} 为 全 1 序列时表示互补波形组的标准权重序列,这与格雷互补波形相同。

很明显,在 D=2 时,式(2.32)与式(2.33)将等价于 2.2.2 节中的式(2.5)与式(2.6)。

3.3.2 互补波形组发射端设计方法

本节主要介绍互补波形组的广义 PTM 设计方法。顾名思义,广 义 PTM 设计方法是对格雷互补波形的 PTM 设计方法的扩展。该方 法的概念早在 2007 年就已由 Stephen Howard 和 Bill Moran 等提 出^[11],但由于结果没有发表,该方法最早公开于文献[12]中,并在文 献[13]中被进一步研究。

广义 PTM 设计方法实际上是设计了一串 P_{GPTM} 序列,通常称 为广义 PTM 序列,用以决定互补波形组的发射顺序,接收端的加权 序列仍为标准权重序列。当发射脉冲数目为 N 时,对于一个由 D 组 二值序列组成的互补波形组来说,广义 PTM 序列的具体生成步骤 包括:

(1) 设序列 S=[0,1,...,N-1];

(2) 将序列 S 中的元素转换为 D 进制数表示,记为 S_D ;

(3) $P_{\text{GPTM}}(n) = \text{mod}[c_d(S_D(n)), D]$ 。其中 $c_d(\cdot)$ 函数表示 将 $S_D(n)$ 的每一位数相加得到的和,例如 $c_d(128) = 1 + 2 + 8 = 11$ 。

例 3.3: 不失一般性,本例中我们以 N=16 的情况来对 D 等于 不同值时生成的广义 PTM 序列进行比较分析,此时,

S = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]

当D=2时,

 $S_D = [0,1,10,11,100,101,110,111,1000,1001,1010,1011,1100,1101,$

1110,1111]

 $P_{\text{GPTM}} = [0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0]$

此时广义 PTM 设计方法退化为基于格雷互补波形的 PTM 设计方法,该 P 序列则表示传统意义上的 PTM 序列^[14]。

当D=3时,

 $S_D = \begin{bmatrix} 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120 \end{bmatrix}$ $P_{\text{GPTM}} = \begin{bmatrix} 0, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 0 \end{bmatrix}$

当D=4时,

 $S_D = [0, 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33]$

 $P_{\text{GPTM}} = [0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 0, 2, 3, 0, 1, 3, 0, 1, 2]$

图 3.7 展示了互补波形组分别采用标准发射顺序、广义 PTM 设 计方法与格雷互补波形对应采用标准发射顺序、PTM 设计方法的旁 瓣抑制效果(画图所需的各项参数将在 4.3.6 节给出,画图时各方法 的发射脉冲数目均为 64)。比较上述对应波形设计方法能够发现,互 补波形组可以获得与格雷互补波形类似的旁瓣抑制效果与多普勒分 辨率。

需要重申的是,图 3.7(a)和图 3.7(b)的结果是采用 2.3.1 节中 定义的"特殊互补波形组"得到的;对应地,我们将"一般互补波形组"



图 3.7 互补波形组分别对应采用:(a)标准发射顺序;(b)广义 PTM 设计 方法与格雷互补波形分别对应采用:(c)标准发射顺序;(d)PTM 设计方法在时延-多普勒图像上的不同旁瓣抑制效果(图中幅度色 条的单位为 dB,注意这里由于使用的脉冲数目 N 和图像显示门限 DL 与图 3.5 中不一样,因此导致图 3.7(c)与图 3.5(a)、图 3.7(d) 与图 3.5(b)出现了不一样的显示效果)

采用标准发射顺序和广义 PTM 设计方法的结果展示如图 3.8 所示。 从该结果可以很明显地看到,一般互补波形组的旁瓣抑制能力比特 殊互补波形组要差很多,并且出现了 4 个疑似的虚假目标。



图 3.8 一般互补波形组分别对应采用:(a)标准发射顺序;(b)广义 PTM 设计方法的时延-多普勒图像(图中幅度色条的单位为 dB)

3.3.3 互补波形组接收端设计方法

在目前已公开发表的文献中,我们很少见到区别于格雷互补波 形单独对互补波形组接收端进行设计的方法。因此,本节将延续在 格雷互补波形中介绍的二项式设计方法与海明窗设计方法这两种接 收端设计方法,将其应用于互补波形组,并分析比较其相较于应用在 格雷互补波形时的旁瓣抑制与目标分辨性能。

与 3.2.3 节对应,本节同样展示二项式设计方法与海明窗设计方法(画图所需的各项参数将在 4.3.6 节给出,画图时各方法的发射脉冲数目均为 64)。首先,将格雷互补波形这两种设计方法的结果展示如图 3.9 所示。

接下来,画出特殊互补波形组这两种设计方法的结果,如图 3.10 所示。可以发现,特殊互补波形组得到的结果与格雷互补波形在同 样的参数条件下完全一致,这说明前面提到的接收端加权类方法对



图 3.9 格雷互补波形分别对应采用:(a)二项式设计方法;(b)海明窗设计 方法的时延-多普勒图像(图中幅度色条的单位为 dB)



图 3.10 特殊互补波形组分别对应采用:(a)二项式设计方法;(b)海明窗 设计方法的时延-多普勒图像(图中幅度色条的单位为 dB)

格雷互补波形和特殊互补波形组均适用。

另外,从图 3.11 所示的一般互补波形组的结果可以对比得到,上述两种设计方法不能很好地抑制一般互补波形组的旁瓣,而且与图 3.10 类似,相比图 3.7 显著损失了多普勒分辨率。



图 3.11 一般互补波形组分别对应采用:(a)二项式设计方法;(b)海明窗 设计方法的时延-多普勒图像(图中幅度色条的单位为 dB)

3.4 本章小结

本章主要讨论互补波形传统设计方法。首先介绍格雷互补波形 传统设计方法,即格雷互补波形的标准设计方法,以及一阶里德-穆勒 序列方法和二项式设计方法这两种发射端和接收端设计方法;然后 类似地介绍互补波形组传统设计方法,并直观地比较了特殊互补波 形组和一般互补波形组在各种设计方法中所具有的不同旁瓣水平。 本章的主要研究工作与结论如下:

(1)总结了格雷互补波形和互补波形组的标准设计方法。格雷 互补波形的标准设计方法即发射顺序为交替序列、接收权重为全1序 列的设计方法;互补波形组的标准设计方法即发射顺序为从任意一 个序列开始往后或往前的循环序列、接收权重为全1序列的设计 方法。 (2)回顾了格雷互补波形的两种常用的发射端和接收端设计方法。一阶里德-穆勒序列方法是通过 Walsh 矩阵的各行(或各列)来确定格雷互补波形发射顺序的方法,该方法可以计算得到在给定多普勒值的附近旁瓣最小的发射顺序。二项式设计方法是通过对格雷互补波形接收权重重新赋值后进行匹配滤波的接收端设计方法,它利用二项式系数对匹配滤波信号进行重新加权,可获得非常好的旁瓣抑制能力,但同样会显著降低多普勒分辨率。

(3)分析讨论了互补波形组常用的发射端和接收端设计方法的 旁瓣抑制性能。广义PTM设计方法是由PTM设计方法扩展而来的 互补波形组发射端设计方法,它可以使互补波形组在零多普勒线附 近一小片区域的旁瓣得到有效抑制。另外,对于互补波形组尚未发 现更多的接收端设计方法,通常仍是沿用格雷互补波形所采用的接 收端设计方法。值得指出的是,本节的对比结果表明,采用一般互补 波形组不论是发射端还是接收端设计方法,其旁瓣抑制能力相比特 殊互补波形组都受到了极大削弱,且由于生成一般互补波形组与生 成特殊互补波形组的成本几乎一样,因此我们可以直观地整理出下 面的论述,即若要使用互补波形组作为雷达目标检测问题中的发射 波形,通常不建议发射一般互补波形组,而应当采用特殊互补波形 组。第5章将通过理论推导对该论述进行进一步阐释。

本章是对互补波形传统设计方法的归纳回顾,为之后的雷达目 标检测互补波形联合设计方法研究提供研究基础与方法对比。

参考文献

[1] Suvorova S, Howard S, Moran B, et al. Doppler resilience, Reed-Müller

codes and complementary waveforms [C]. Conference Record of the Forty-First Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (ASILOMAR),2007: 1839-1843.

- [2] Cai Z, Zhao H, Jia M, et al. An improved Hadamard measurement matrix based on Walsh code for compressive sensing[C]. 9th International Conference on Information, Communications Signal Processing, 2013: 1-4.
- [3] Ho C K, Cheong J H, Lee J, et al. High bandwidth efficiency and low power consumption Walsh code implementation methods for body channel communication [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2014, 62 (9): 1867-1878.
- [4] Richards M A. Fundamentals of radar signal processing [M]. New York: McGraw-Hill Education, 2005.
- [5] Larsen R, Madych W. Walsh-like expansions and hadamard matrices
 [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1976,24 (1): 71-75.
- [6] Gan L, Li K, Ling C. Golay meets Hadamard: Golay-paired Hadamard matrices for fast compressed sensing [C]. IEEE Information Theory Workshop, 2012: 637-641.
- [7] Pezeshki A, Calderbank A R, Moran W, et al. Doppler resilient Golay complementary waveforms [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(9): 4254-4266.
- [8] Dang W, Pezeshki A, Howard S, et al. Coordinating complementary waveforms for sidelobe suppression[C]. Conference Record of the Forty-Fifth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (ASILOMAR), 2011: 2096-2100.
- [9] Dang W, Pezeshki A, Howard S, et al. Coordinating complementary waveforms for suppressing range sidelobes in a Doppler band[J]. Arxiv preprint arxiv. 2001. 09397, 2020: 1-13.
- [10] Levanon N, Cohen I, Itkin P. Complementary pair radar waveformsevaluating and mitigating some drawbacks [J]. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2017, 32 (3): 40-50.
- [11] Howard S, Moran B. Notes on Doppler tolerant complementary waveforms[Z]. 2007. Unpublished notes. Information obtained through private communication with Bill Moran.

- [12] Tang J,Zhang N,Ma Z, et al. Construction of Doppler resilient complete complementary code in MIMO radar[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62 (18): 4704-4712.
- [13] Nguyen H D, Coxson G E. Doppler tolerance, complementary code sets, and generalized Thue-Morse sequences [J]. IET Radar, Sonar &. Navigation, 2016, 10 (9): 1603-1610.
- [14] Allouche J P, Shallit J. The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence[C]. Sequences and their applications, Proceedings of SETA'98, 1999:1-16.