第3章 随机过程的线性变换

在电子系统中，通常需要将信号经过一系列的变换，才能提取到有用的信息。变换可以看作信号通过系统，所以随机过程的变换就是分析随机过程通过系统后的响应。系统一般分为线性系统和非线性系统两大类，因此随机过程的变换也分为线性变换和非线性变换两大类。本章着重介绍随机过程的线性变换。

3.1 变换的基本概念和基本定理

3.3.1 变换的基本概念

视频

1. 变换的定义

给定一个随机过程 $X(t)$，按照某种法则 T，对它的每个样本函数 $x(t)$，都指定一个对应函数 $y(t)$，就得到一个新的随机过程 $Y(t)$，记为

$$Y(t)=T[X(t)] \tag{3.1.1}$$

T 就称为从随机过程 $X(t)$ 到 $Y(t)$ 的变换，$Y(t)$ 是随机过程 $X(t)$ 经过变换后的结果。

随机过程的变换也可以用系统的观点解释。如图 3.1 所示，假定系统是按照法则 T 定义的，则 $Y(t)$ 就可以看作随机过程 $X(t)$ 通过系统后的响应。

图 3.1 随机过程变换示意图

变换有确定性变换和随机性变换两种。对于某个试验结果 e_i，对应一个特定的时间函数 $x(t,e_i)$，用这个信号作为系统的输入，可以得到一个特定的输出函数 $y(t,e_i)$，这个函数是 $Y(t)$ 对应于 e_i 的一个样本。于是，系统对随机输入的响应与确定性信号的响应是相同的，所谓随机性主要表现在输入上，而不是变换本身。按这种方式解释的变换称为确定性变换。即，若 e_1 和 e_2 是二个试验结果，且 $x(t,e_1)=x(t,e_2)$，则 $y(t,e_1)=y(t,e_2)$，称 T 是确定性变换，否则称为随机性变换。本章只介绍确定性变换。

2. 线性变换

定义：设有任意两个随机变量 A_1 和 A_2 及任意两个随机过程 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$，若满足

$$L[A_1X_1(t)+A_2X_2(t)]=A_1L[X_1(t)]+A_2L[X_2(t)] \tag{3.1.2}$$

则称 L 是线性变换。

对于线性变换 L，$Y(t)=L[X(t)]$，若

$$Y(t+\varepsilon)=L[X(t+\varepsilon)] \tag{3.1.3}$$

其中 ε 为任意常数，即输入的时延对输出也只产生一个相应的时延，则称 L 是线性时不变的。在后面的讨论中，除特别说明外，线性变换都是指线性时不变变换。

3.3.2 线性变换的基本定理

下面针对线性变换给出两个基本定理，这两个定理描述了随机过程经过线性变换后数字特征的变化。

定理 1：设 $Y(t)=L[X(t)]$，其中 L 是线性变换，则

$$E[Y(t)]=L\{E[X(t)]\} \tag{3.1.4}$$

或者写成

$$m_Y(t)=L[m_X(t)] \tag{3.1.5}$$

即随机过程经过线性变换后，其输出的数学期望等于输入的数学期望通过线性变换后的结果。

由于

$$E[Y(t)]=E\{L[X(t)]\}=L\{E[X(t)]\} \tag{3.1.6}$$

可见，若把 L 和 E 看作算子，则 L 和 E 这两个算子是可以交换次序的。

定理 1 可以用大数定理加以证明。设第 i 次试验时得到样本函数 $x_i(t)$，将其加到系统的输入端，而在输出端得到一个样本函数 $y_i(t)$，

$$y_i(t)=L[x_i(t)] \tag{3.1.7}$$

在 n 次重复试验后，可以得到 n 个样本函数 $y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)$，则 $Y(t)$ 的样本均值为

$$\begin{aligned}\overline{Y(t)}&=\frac{1}{n}[y_1(t)+y_2(t)+\cdots+y_n(t)]\\&=\frac{1}{n}\{L[x_1(t)]+L[x_2(t)]+\cdots+L[x_n(t)]\}\\&=L\left\{\frac{1}{n}[x_1(t)+x_2(t)+\cdots+x_n(t)]\right\}\\&=L\{\overline{X(t)}\}\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

当 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的方差有限时，根据大数定理，当 $n\to\infty$ 时，

$$\overline{X(t)}\to E[X(t)],\quad \overline{Y(t)}\to E[Y(t)]$$

所以

$$E[Y(t)]=L\{E[X(t)]\}$$

定理 2：0 设 $Y(t)=L[X(t)]$，其中 L 是线性变换，则

$$R_{XY}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)] \tag{3.1.9}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]=L_{t_1}L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)] \tag{3.1.10}$$

其中 L_{t_1} 表示对 t_1 做 L 变换，L_{t_2} 表示对 t_2 做 L 变换。

证明：因为

$$X(t_1)Y(t)=X(t_1)L[X(t)]=L[X(t_1)X(t)]$$

$$E[X(t_1)Y(t)]=E\{L[X(t_1)X(t)]\}=L\{E[X(t_1)X(t)]\}$$

令 $t=t_2$，可得

$$R_{XY}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]$$

同理可证

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]$$

联合上面两式，得

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]$$

以上两个定理是线性变换的两个基本定理，它给出了随机过程经过线性变换后，输出的均值和相关函数的计算方法。

从两个定理可知，对于线性变换，输出的均值和相关函数可以分别由输入的均值和相关函数确定。推广而言，对于线性变换，输出的 k 阶矩可以由输入的相应阶矩来确定。如

$$E[Y(t_1)Y(t_2)Y(t_3)]=L_{t_1}L_{t_2}L_{t_3}\{E[X(t_1)X(t_2)X(t_3)]\} \tag{3.1.11}$$

假定系统是线性时不变的，由线性时不变的基本特性和两个基本定理可以看出，若 $X(t)$ 是严格平稳的，则 $Y(t)$ 也是严格平稳的。若 $X(t)$ 是广义平稳的，则 $Y(t)$ 也是广义平稳的。

3.2 随机过程通过线性系统分析

随机过程通过线性系统分析的中心问题是：给定系统的输入函数和线性系统的特性，求输出函数，由于输入是随机过程，所以输出也是随机过程，对于随机过程，一般很难给出确切的函数形式，因此，通常只分析随机过程通过线性系统后输出的概率分布特性和某些数字特征。线性系统既可以用冲激响应描述，也可以用系统传递函数描述，因此，随机过程通过线性系统的常用分析方法也有两种：冲激响应法和频谱法。

3.2.1 冲激响应法

视频

设有如图 3.2 所示线性系统，其中 $h(t)$ 为系统的冲激响应。

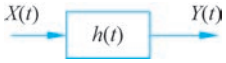

图 3.2 线性系统示意图

根据线性系统的理论，输出 $Y(t)$ 为

$$\begin{aligned}Y(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=h(t)*X(t)\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

若用 $L=h(t)*$ 表示与冲激响应的卷积，即 $Y(t)=L[X(t)]$，很容易证明，L 是线性变换，由线性变换的定理 1，输出的均值为

$$m_Y(t)=L[m_X(t)]=h(t)*m_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}m_X(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.2.2}$$

若 $X(t)$ 为平稳随机过程，则

$$m_Y=\int_{-\infty}^{+\infty}m_Xh(\tau)\mathrm{d}\tau=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{d}\tau=m_XH(0) \tag{3.2.3}$$

其中 $H(0)$ 为系统的传递函数在 $\omega=0$ 时的值。

由定理 2，输入和输出的互相关函数为

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1,t_2)&=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]=h(t_2)*R_X(t_1,t_2)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)R_X(t_1,t_2-u)\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

输出的自相关函数为

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]=h(t_1)*R_{XY}(t_1,t_2)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.5}$$

结合式(3.2.4)与式(3.2.5),得

$$R_Y(t_1,t_2)=h(t_1)*R_{XY}(t_1,t_2)=h(t_1)*h(t_2)*R_X(t_1,t_2) \tag{3.2.6}$$

同理可证,

$$R_{YX}(t_1,t_2)=h(t_1)*R_X(t_1,t_2) \tag{3.2.7}$$
$$R_Y(t_1,t_2)=h(t_2)*R_{YX}(t_1,t_2) \tag{3.2.8}$$

输入输出相关函数之间的关系如图 3.3 所示。

若 $X(t)$是平稳随机过程,则

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1,t_2-u)h(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1-t_2+u)h(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+u)h(u)\mathrm{d}u$$

其中 $\tau=t_1-t_2$,即

$$R_{XY}(\tau)=h(-\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.9}$$

同理,

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(t_1-t_2-u)h(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u$$

即

$$R_Y(\tau)=h(\tau)*R_{XY}(\tau) \tag{3.2.10}$$

所以

$$R_Y(\tau)=h(\tau)*h(-\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.11}$$

类似地,

$$R_{YX}(\tau)=h(\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.12}$$
$$R_Y(\tau)=h(-\tau)*R_{YX}(\tau) \tag{3.2.13}$$

平稳随机过程通过线性系统后输入输出相关函数之间的关系如图 3.4 所示。

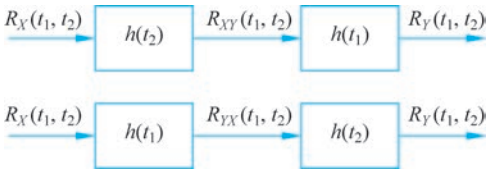

图 3.3 随机过程通过线性系统输入输出相关函数之间的关系

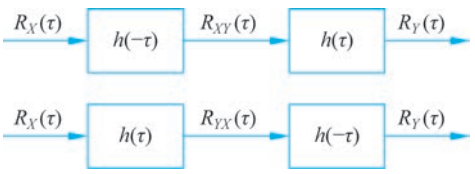

图 3.4 平稳随机过程通过线性系统输入输出相关函数之间的关系

视频

3.2.2 频谱法

所谓频谱法,就是利用系统的传递函数分析输出的统计特性。对于平稳随机过程,

对式(3.2.9)～式(3.2.11)两边同时做傅里叶变换，可得

$$G_{XY}(\omega)=H^{*}(\omega)G_X(\omega) \tag{3.2.14}$$

$$G_Y(\omega)=H(\omega)G_{XY}(\omega) \tag{3.2.15}$$

$$G_Y(\omega)=H(\omega)H^{*}(\omega)G_X(\omega)=|H(\omega)|^2G_X(\omega) \tag{3.2.16}$$

同理，

$$G_{YX}(\omega)=H(\omega)G_X(\omega) \tag{3.2.17}$$

$$G_Y(\omega)=H^{*}(\omega)G_{YX}(\omega) \tag{3.2.18}$$

3.2.3 计算举例

视频

【例 3.1】 设有图 3.5 所示的 RC 电路，假定输入为零均值的平稳随机过程，自相关函数分别为

(1) $R_X(\tau)=(N_0/2)\delta(\tau)$

(2) $R_X(\tau)=e^{-\beta|\tau|}$

求输出 $Y(t)$ 的自相关函数。

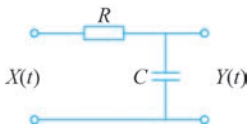

图 3.5 RC 电路

解： RC 电路的冲激响应为

$$h(t)=\alpha e^{-\alpha t}U(t),\quad \alpha=1/RC$$

其中 $U(t)$ 为单位阶跃函数，系统的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}$$

(1) $R_X(\tau)=(N_0/2)\delta(\tau)$。采用冲激响应法，由式(3.2.11)，得

$$R_Y(\tau)=h(\tau)*h(-\tau)*[(N_0/2)\delta(\tau)]=(N_0/2)h(\tau)*h(-\tau)$$

$$=(N_0/2)\int_{-\infty}^{+\infty}h(u+\tau)h(u)du$$

当 $\tau>0$ 时，$R_Y(\tau)=\dfrac{N_0}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha(\tau+u)}\alpha e^{-\alpha u}du=\dfrac{N_0\alpha}{4}e^{-\alpha\tau}$

利用相关函数的偶函数特性，可得

$$R_Y(\tau)=\frac{N_0\alpha}{4}e^{-\alpha|\tau|}$$

(2) $R_X(\tau)=e^{-\beta|\tau|}$。采用频谱法，$X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

由式(3.2.16)，可得

$$G_Y(\omega)=G_X(\omega)|H(\omega)|^2=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\left[\alpha\cdot\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}-\beta\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right]$$

求上式的傅里叶反变换,可得

$$R_Y(\tau)=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|})$$

【例 3.2】 求随机相位信号通过线性系统后的自相关函数。设有图 3.6 所示线性系统,信号 $S(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$,其中 a 和 ω_0 均为常数,Φ 为$(0,2\pi)$区间上均匀分布的随机变量,求输出信号的自相关函数。

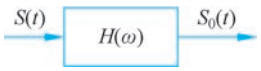

图 3.6 信号通过线性系统示意图

解: 根据线性系统的理论,输出信号可以表示为 $S_0(t)=a|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t+\Phi+\arg H(\omega_0))$,其中$|H(\omega_0)|$表示系统传递函数在 ω_0 处的幅度值,$\arg H(\omega_0)$表示系统传递函数在 ω_0 处的相角。输出的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_{S_0}(\tau)&=E[S_0(t+\tau)S_0(t)]\\&=E\{a^2\,|\,H(\omega_0)\,|^2\cos[\omega_0(t+\tau)+\Phi+\arg H(\omega_0)]\cos[\omega_0 t+\Phi+\arg H(\omega_0)]\}\\&=\frac{1}{2}a^2\,|\,H(\omega_0)\,|^2E\{\cos[\omega_0(t+\tau)+\omega_0 t+2\Phi+2\arg H(\omega_0)]+\cos\omega_0\tau\}\\&=\frac{1}{2}a^2\,|\,H(\omega_0)\,|^2\cos\omega_0\tau\end{aligned}$$

输出信号的平均功率为 $R_{S_0}(0)=\frac{1}{2}a^2|H(\omega_0)|^2$。

视频

3.3 随机序列通过离散线性系统

3.3.1 基本关系

设有图 3.7 所示的离散线性系统。

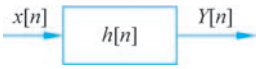

图 3.7 离散线性系统

离散线性系统的单位样值响应为 $h[n]$,系统传递函数 $H(\omega)$与单位样值响应之间是离散时间傅里叶变换对的关系,即

$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-jn\omega}\tag{3.3.1}$$

或者用 z 变换可表示为

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]z^{-n}\tag{3.3.2}$$

随机序列 $X[n]$通过线性系统后,输出 $Y[n]$为

$$Y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]X[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[n-k]X[k]=h(n)*X(n)\tag{3.3.3}$$

可以把式(3.3.3)用变换形式表示,即

$$Y[n]=L(X[n])\tag{3.3.4}$$

其中 $L=h[n]*$,很容易验证 L 是线性变换,根据线性变换的定理 1,输出的均值为

$$m_Y[n]=L(m_X[n])=h[n]*m_X[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]m_X[n-k] \tag{3.3.5}$$

同理，根据线性变换的定理2，可得

$$\begin{aligned}R_{XY}(n_1,n_2)&=L_{n_2}(R_X[n_1,n_2])=h[n_2]*R_X[n_1,n_2]\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]R_X[n_1,n_2-k]\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

$$\begin{aligned}R_Y(n_1,n_2)&=L_{n_1}(R_{XY}[n_1,n_2])=h[n_1]*R_{XY}[n_1,n_2]\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]*R_{XY}[n_1-k,n_2]\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

将式(3.3.6)代入式(3.3.7)，得

$$R_Y(n_1,n_2)=h[n_1]*h[n_2]*R_X[n_1,n_2] \tag{3.3.8}$$

若输入 $X(n)$ 为平稳随机序列，由式(3.3.5)可得

$$m_Y=m_X\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]=m_XH(0) \tag{3.3.9}$$

其中 $H(0)$ 是系统传递函数 $H(\omega)$ 在 $\omega=0$ 的值。由式(3.3.6)可得

$$R_{XY}(n_1,n_2)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]R_X[n_1,n_2-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]R_X[n_1-n_2+k]$$

令 $m=n_1-n_2$，可得

$$R_{XY}[m]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]R_X[m+k]=h[-m]*R_X[m] \tag{3.3.10}$$

同理，由式(3.3.7)可得

$$R_Y[m]=h[m]*R_{XY}[m]=h[-m]*h[m]*R_X[m] \tag{3.3.11}$$

对式(3.3.10)和式(3.3.11)分别做离散时间傅里叶变换，可得

$$G_{XY}(\omega)=H(-\omega)G_X(\omega) \tag{3.3.12}$$

$$G_Y(\omega)=H(\omega)G_{XY}(\omega)=|H(\omega)|^2G_X(\omega) \tag{3.3.13}$$

若用 z 变换表示，则

$$G_{XY}(z)=H(z^{-1})G_X(z) \tag{3.3.14}$$

$$G_Y(z)=H(z)G_{XY}(z)=H(z)H(z^{-1})G_X(z) \tag{3.3.15}$$

【例3.3】 图像边缘检测。边缘检测在图像处理中具有重要作用，如机场与机场周边的环境、公路路面与公路两边的区域具有不同的灰度等级，一阶差分运算是边缘检测简单实用的方法。一阶差分运算定义为 $Y[n]=X[n]-X[n-1]$，求输出 $Y[n]$ 的均值和自相关函数。

解： 定义差分算子 $L(X[n])=X[n]-X[n-1]$，很显然，L 是线性变换。由式(3.3.5)可得 $Y[n]$ 的均值为

$$m_Y[n]=L[m_X(n)]=m_X[n]-m_X[n-1]$$

由式(3.3.6)可得输入与输出的互相关函数为

$$R_{XY}[n_1,n_2]=L_{n_2}(R_X[n_1,n_2])=R_X[n_1,n_2]-R_X[n_1,n_2-1]$$

输出的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_Y[n_1,n_2]&=L_{n_1}(R_{XY}[n_1,n_2])=R_{XY}[n_1,n_2]-R_{XY}[n_1-1,n_2]\\&=R_X[n_1,n_2]-R_X[n_1,n_2-1]-R_X[n_1-1,n_2]+R_X[n_1-1,n_2-1]\end{aligned}$$

若 $X[n]$为平稳随机序列,且自相关函数为 $R_X[n_1,n_2]=a^{|n_1-n_2|}$,$0<a<1$,则 $E(Y[n])=0$

$$R_{XY}[n_1,n_2]=R_X[n_1-n_2]-R_X[n_1-n_2+1]=a^{|n_1-n_2|}-a^{|n_1-n_2+1|}$$

$$\begin{aligned}R_Y[n_1,n_2]&=R_{XY}[n_1,n_2]-R_{XY}[n_1-1,n_2]\\&=a^{|n_1-n_2|}-a^{|n_1-n_2+1|}-a^{|n_1-1-n_2|}+a^{|n_1-n_2|}\\&=2a^{|n_1-n_2|}-a^{|n_1-n_2+1|}-a^{|n_1-n_2-1|}\end{aligned}$$

即 $Y[n]$的自相关函数为

$$R_Y[m]=2a^{|m|}-a^{|m+1|}-a^{|m-1|}$$

输入和输出的自相关函数如图 3.8 所示,还可以看出,输入序列 $X[n]$是有相关性的,经过差分变换后,输出的相关性减弱了,因此,差分器有去相关的作用。

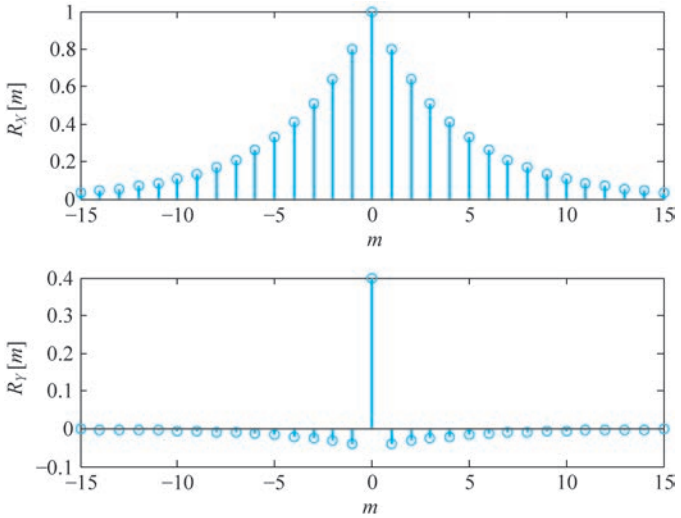

图 3.8　图像边缘检测器输入和输出的自相关函数

3.3.2　常用时间序列模型

视频

1. AR 模型

设有如下差分方程描述的离散线性系统,

$$X[n]=aX[n-1]+W[n] \tag{3.3.16}$$

系统如图 3.9 所示,其中 $W[n]$为平稳白噪声,方差为 σ^2,式(3.3.16)也称为一阶 AR(Autoregressive)模型,由 AR 模型所产生的随机过程称为 AR 过程。

首先考虑一阶 AR 模型的单位样值响应 $h[n]$,单位样值响应是当输入 $W[n]=\delta[n]$

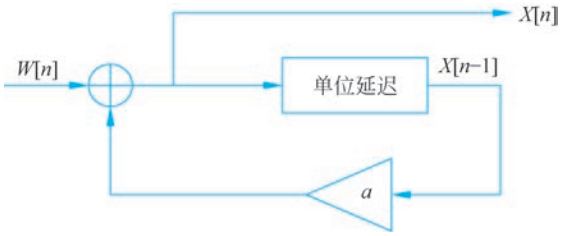

图 3.9　一阶 AR 模型

时系统的输出，即

$$h[n]=ah[n-1]+\delta[n]=a^2h[n-2]+a\delta[n-1]+\delta[n]$$
$$=\delta[n]+a\delta[n-1]+a^2\delta[n-2]+\cdots$$

或者写成

$$h[n]=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{3.3.17}$$

系统稳定的条件是$|a|<1$。系统的传递函数为

$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}=\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} \tag{3.3.18}$$

假定$|a|<1$，由于输入$W[n]$的均值为零，所以，$X[n]$的均值亦为零。由式(3.3.11)，$X[n]$的自相关函数为

$$R_X[m]=h[-m]*h[m]*R_W[m]=h[-m]*h[m]*\sigma^2\delta[m]$$
$$=\sigma^2h[-m]*h[m]=\sigma^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[m+k]h[k]$$

由于自相关函数是偶函数，所以可以先考虑$m\geqslant 0$的情况，有

$$R_X[m]=\sigma^2\sum_{k=0}^{+\infty}a^{m+k}a^k=\frac{\sigma^2a^m}{1-a^2}$$

综合$m<0$的情况，有

$$R_X[m]=\frac{\sigma^2a^{|m|}}{1-a^2} \tag{3.3.19}$$

可见一阶 AR 过程的自相关函数是无限长度的。

下面再用频谱法求解，由式(3.3.13)，有

$$G_X(\omega)=|H(\omega)|^2G_W(\omega)=\frac{\sigma^2}{|1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}|^2}=\frac{\sigma^2}{1+a^2-2a\cos\omega} \tag{3.3.20}$$

式(3.3.16)可以推广到N阶差分方程：

$$X[n]=a_1X[n-1]+a_2X[n-2]+\cdots+a_NX[n-N]+W[n] \tag{3.3.21}$$

称为N阶 AR 模型，对应的$X[n]$称为N阶 AR 过程，N阶 AR 过程的功率谱为

$$G_X(\omega)=|H(\omega)|^2G_W(\omega)=\frac{\sigma^2}{\left|1-\sum_{k=1}^{N}a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}\right|^2} \tag{3.3.22}$$

在实际中,可以利用观测到的数据,估计模型的参数,用一个 AR 模型对一个时间序列建模。

2. MA 过程

设有如下差分方程描述的离散线性系统:

$$X[n]=b_0W[n]+b_1W[n-1] \tag{3.3.23}$$

系统如图 3.10 所示,其中 $W(n)$ 为平稳白噪声,方差为 σ^2,式(3.3.21)也称为一阶 MA(Moving Average)模型,由 MA 模型所产生的随机过程称为 MA 过程。

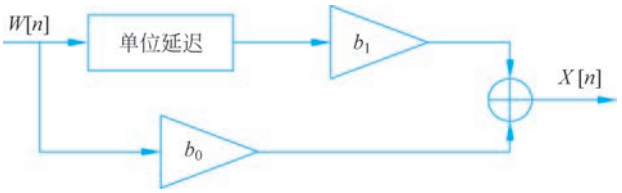

图 3.10　一阶 MA 模型

当 $W[n]=\delta[n]$ 时,系统的响应为单位样值响应,即

$$h[n]=b_0\delta[n]+b_1\delta[n-1] \tag{3.3.24}$$

可见系统的单位样值响应是有限长度的,系统的传递函数为

$$H(\omega)=b_0+b_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} \tag{3.3.25}$$

输出的均值为

$$E(X[n])=b_0E(W[n])+b_1E(W[n-1])=0$$

由式(3.3.11)可得一阶 MA 过程的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_X[m]&=h[-m]*h[m]*R_X[m]\\&=(b_0\delta[-m]+b_1\delta[-m-1])*(b_0\delta[m]+b_1\delta[m-1])*\sigma^2\delta[m]\\&=\sigma^2(b_0b_1\delta[m+1]+(b_0^2+b_1^2)\delta[m]+b_0b_1\delta[m-1])\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

一阶 MA 过程的功率谱为

$$\begin{aligned}G_X(\omega)&=\sigma^2[b_0b_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+b_0^2+b_1^2+b_0b_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}]\\&=\sigma^2[2b_0b_1\cos\omega+b_0^2+b_1^2]\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

式(3.3.23)可以推广到 M 阶 MA 过程:

$$X[n]=b_0W[n]+b_1W[n-1]+\cdots+b_MW[n-M] \tag{3.3.28}$$

很显然,M 阶 MA 过程的均值仍为零,可以证明,当 $m\geqslant 0$ 时,MA 过程的自相关函数为

$$R_X[m]=\begin{cases}\sigma^2\sum\limits_{k=m}^{M}b_kb_{k-m}, & 0\leqslant m\leqslant M\\ 0, & m>M\end{cases} \tag{3.3.29}$$

由自相关函数的性质,可得当 $m<0$ 时,$R_X[m]=R_X[-m]$。

3. ARMA 模型

组合 AR 模型和 MA 模型可以构成 ARMA 模型如下:

$$a_0X[n]+a_1X[n-1]+a_2X[n-2]+a_NX[n-N]$$
$$=b_0W[n]+b_1W[n-1]+\cdots+b_MW[n-M] \tag{3.3.30}$$

称 $X[n]$为 ARMA(N,M)(Autoregressive/Moving Average)过程。ARMA 系统的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{N}b_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}}{\sum_{k=0}^{M}a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}} \tag{3.3.31}$$

ARMA 过程的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\sigma^2\left|\frac{\sum_{k=0}^{N}b_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}}{\sum_{k=0}^{N}a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}}\right|^2 \tag{3.3.32}$$

【例 3.4】 设有 ARMA(2,2)模型，

$$X[n]+1.4X[n]+0.5X[n-2]=W[n]-0.2W[n-1]-0.1W[n-M]$$

其中 $W(n)$是零均值单位方差的平稳白噪声，求该过程的功率谱。

解：系统的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{1-0.2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-0.1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{1+1.4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+0.15\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}$$

由式(3.3.13)可得功率谱为

$$G_X(\omega)=\left|\frac{1-0.2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-0.1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{1+1.4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+0.15\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}\right|^2$$

在实际中，AR 模型、MA 模型或者 ARMA 模型都可以用来描述实际的过程，三种模型各有所长，从功率谱的角度来分析，AR 模型适合描述功率谱有尖峰而没有深谷的随机过程，MA 模型适合描述功率谱有深谷而没有尖峰的随机过程，ARMA 模型适合描述功率谱既有深谷又有尖峰的随机过程。

3.4 最佳线性滤波器

视频

在许多回波探测型的电子系统(如雷达、声呐、红外探测等)中，一个基本的问题是如何在噪声背景中检测微弱信号，接收机输出的信噪比越高，越容易发现目标。同样，信噪比在通信系统中是系统有效性的一个度量，信噪比越大，信息传输发生错误的概率越小，因此我们很自然会想到以输出信噪比最大作为准则设计接收机，一般说来，能给出最大信噪比的接收机，其系统的性能也是最好的，因此，本节介绍的最佳线性滤波器是许多接收机的重要组成部分。

3.4.1 输出信噪比最大的最佳线性滤波器

如图 3.11 所示线性系统，假定系统的输入波形为

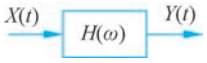

图 3.11　线性系统示意图

$$X(t)=s(t)+w(t) \tag{3.4.1}$$

其中 $s(t)$ 是确知信号，$w(t)$ 是零均值平稳随机过程，它的功率谱密度为 $G_w(\omega)$。

根据线性系统的理论，输出 $Y(t)$ 可表示为

$$Y(t)=s_0(t)+w_0(t) \tag{3.4.2}$$

其中

$$s_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{3.4.3}$$

式中，$S(\omega)$ 是输入信号 $s(t)$ 的频谱，$H(\omega)$ 是系统的传递函数，$w_0(t)$ 是输出的噪声，它的功率谱密度为

$$G_{w_0}(\omega)=G_w(\omega)\,|\,H(\omega)\,|^2 \tag{3.4.4}$$

输出噪声的平均功率为

$$E[w_0^2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_w(\omega)\,|\,H(\omega)\,|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{3.4.5}$$

定义在某个时刻 $t=t_0$ 时滤波器输出端信号的瞬时功率与噪声的平均功率之比(简称信噪比)为

$$d_0=\frac{s_0^2(t_0)}{E[w_0^2(t)]} \tag{3.4.6}$$

将式(3.4.3)和式(3.4.5)代入式(3.4.6)，得

$$d_0=\frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)H(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}G_w(\omega)\,|\,H(\omega)\,|^2\,\mathrm{d}\omega} \tag{3.4.7}$$

我们的任务是设计一个线性系统，使得输出的信噪比达到最大。可以证明(参见习题 3.14)，当

$$H(\omega)=cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}/G_w(\omega) \tag{3.4.8}$$

时，输出信噪比 d_0 达到最大，式中 c 为任意常数，把这个最大的信噪比记为 d_m。将式(3.4.8)代入式(3.4.7)可得最大的信噪比为

$$d_\mathrm{m}=\frac{1}{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}|\,S(\omega)\,|^2\,\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}G_w(\omega)\,\mathrm{d}\omega} \tag{3.4.9}$$

将式(3.4.8)代入式(3.4.3)得到输出信号为

$$s_0(t)=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\,S(\omega)\,|^2}{G_w(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega \tag{3.4.10}$$

由式(3.4.10)可以看出，当 $t=t_0$ 时，输出信号达到最大。

下面从物理意义上解释上面的几个公式。滤波器的幅频特性为

$$|\,H(\omega)\,|=c\,|\,S(\omega)\,|/G_w(\omega) \tag{3.4.11}$$

$|H(\omega)|$ 实际上是对输入信号的频谱进行加权，由滤波器的幅频特性可以看出，最佳线性

滤波器幅频特性与信号频谱的幅度成正比，与噪声的功率谱密度成反比，对于某个频率点，信号越强，该频率点的加权系数越大，噪声越强，加权越小。可见，最佳线性滤波器的幅频特性有抑制噪声的作用。

再考察滤波器的相频特性。由式(3.4.8)得

$$\arg H(\omega) = -\arg S(\omega) - \omega t_0 \tag{3.4.12}$$

相频特性由两项组成，第一项与信号的相频特性反相，第二项与频率呈线性关系，为一时间延迟项，由式(3.4.3)得

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)||H(\omega)| e^{j[\arg S(\omega)+\arg H(\omega)+\omega t]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)||H(\omega)| e^{j[\arg S(\omega)-\arg S(\omega)-\omega t_0+\omega t]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)||H(\omega)| e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \end{aligned}$$

可以看出，滤波器的相频特性 $\arg H(\omega)$ 起到了抵消输入信号相角 $\arg S(\omega)$ 的作用，并且使输出信号 $s_0(t)$ 的全部频率分量的相位在 $t=t_0$ 时刻相同，达到了相位相同、幅度相加的目的。而噪声是平稳随机过程，各频率分量的相位是随机的，$\arg H(\omega)$ 不影响噪声的功率，即滤波器对信号的各频率分量起到幅度同相相加的作用，而对噪声的各频率分量起到功率相加的作用，综合而言，信噪比得到提高。

3.4.2 匹配滤波器

视频

式(3.4.8)是针对一般的平稳噪声，若噪声是白噪声，这时的最佳滤波器称为匹配滤波器。即匹配滤波器是在白噪声环境下以输出信噪比作为准则的最佳线性滤波器。由式(3.4.8)可得，匹配滤波器的传递函数为

$$H(\omega) = cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \tag{3.4.13}$$

对式(3.4.13)做傅里叶反变换可得冲激响应为

$$h(t) = cs^*(t_0 - t) \tag{3.4.14}$$

即匹配滤波器的冲激响应是输入信号的共轭镜像。对于实信号，

$$h(t) = cs(t_0 - t) \tag{3.4.15}$$

即当 $c=1$ 时，$h(t)$ 与 $s(t)$ 关于 $t_0/2$ 呈偶对称关系。

匹配滤波器具有如下一些重要的性质和特点。

1. 输出的最大信噪比与输入信号的波形无关

由于白噪声的功率谱为一个常数，由式(3.4.9)可得

$$d_m = \frac{1}{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega}{N_0/2} = \frac{2E}{N_0} \tag{3.4.16}$$

其中，E 代表信号的能量，由式(3.4.16)可以看出，最大信噪比只与信号的能量和噪声的强度有关，与信号的波形无关。

2. t_0 应该选在信号 $s(t)$ 结束之后

由式(3.4.15)可以看出,若要求系统是物理可实现的,则 t_0 必须选择在信号结束之后才能满足 $h(t)=0, t<0$。这从物理概念上也很好理解,对于物理可实现系统,因为只有 t_0 选在信号结束之后,才能把信号的能量全部利用上,信噪比才能达到最大。若 t_0 不是选在信号结束之后,则由式(3.4.15)确定的 $h(t)$ 在 $t<0$ 时不为零,若将 $h(t)$ 当 $t<0$ 的部分截断为零,这时的滤波器就不是最佳的。

3. 匹配滤波器对信号幅度和时延具有适应性

在回波探测型系统中,发射信号的波形是已知的,接收信号通常在幅度上有一定的衰减,并且在时间上有一定的时延,若发射信号为 $s(t)$,则接收信号为 $s_1(t)=as(t-\tau)$,$s_1(t)$ 的频谱为

$$S_1(\omega)=aS(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}$$

对 $s_1(t)$ 的匹配滤波器的传递函数 $H_1(\omega)$ 为

$$\begin{aligned}H_1(\omega)&=cS_1^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_1}=caS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t_1-\tau)}\\&=caS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t_1-\tau-t_0)}=aH(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t_1-\tau-t_0)}\end{aligned}$$

其中 $H(\omega)=cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$ 是 $s(t)$ 信号的匹配滤波器,t_0 为 $s(t)$ 信号结束的时间,若取 $t_1=t_0+\tau$,即取信号 $s_1(t)$ 结束的时间,这时 $H_1(\omega)=aH(\omega)$,a 相当于放大系数,它只影响输出信号的相对大小,对信号和噪声的作用是相同的,$H_1(\omega)$ 也可使输出信噪比达到最大。因此,若按照发射信号设计匹配滤波器,当接收信号有一定的衰减和时延时,对接收信号同样是匹配的。

注意,匹配滤波器对信号的频移不具有适应性。即若有一个信号的频谱为

$$S_2(\omega)=S(\omega+\omega_\mathrm{d})$$

ω_d 可以看作目标由于运动产生的多普勒频移,则对应的匹配滤波器为

$$H_2(\omega)=cS^*(\omega+\omega_\mathrm{d})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

可见 $H_2(\omega)$ 与 $H(\omega)$ 是不同的。

视频

【例 3.5】 单个矩形脉冲的匹配滤波器。

设脉冲信号为

$$s(t)=\begin{cases}a, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\0, & \text{其他}\end{cases}\tag{3.4.17}$$

其中 a 是已知常数,求匹配滤波器的传递函数和输出波形。

解: 信号的频谱为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^\tau a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{a}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau})\tag{3.4.18}$$

取匹配滤波器的时间 $t_0=\tau$,由式(3.4.13),矩形脉冲信号的匹配滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{ca}{-\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}=\frac{ca}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau})\tag{3.4.19}$$

它的冲激响应为

$$h(t)=cs(t) \tag{3.4.20}$$

冲激响应与信号只相差一个比例因子。匹配滤波器的输出信号为

$$s_0(t)=s(t)*h(t)=cs(t)*s(t)=\begin{cases} ca^2t, & 0\leqslant t\leqslant \tau \\ ca^2(2\tau-t), & \tau\leqslant t\leqslant 2\tau \\ 0, & 0 \end{cases} \tag{3.4.21}$$

可以看出，输入信号是矩形波，而输出信号变成了三角波（见图 3.12），因此，信号经过匹配滤波器以后出现了变形，对于雷达和声呐系统而言，重要的是要检测到目标，信号波形出现变形并不影响检测目标。滤波器的实现如图 3.13 所示。

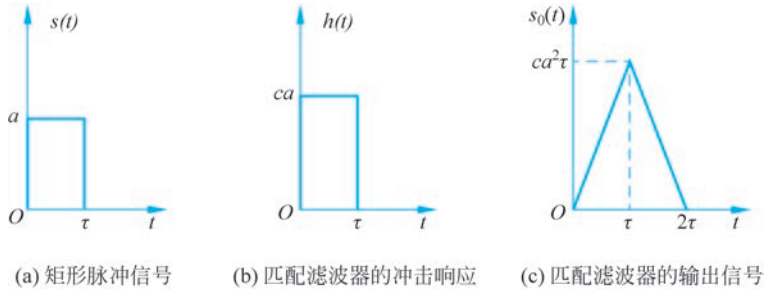

图 3.12　矩形脉冲的匹配滤波器

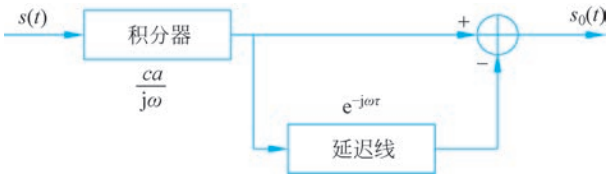

图 3.13　矩形脉冲信号匹配滤波器实现框图

【例 3.6】 矩形脉冲串信号的匹配滤波器。

设矩形脉冲串信号为

$$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}s_1(t-kT) \tag{3.4.22}$$

式中，$s_1(t)$是如式(3.4.17)所示的单个矩形脉冲信号，T 为脉冲的重复间隔，信号的频谱为

$$S(\omega)=\sum_{k=0}^{M-1}S_1(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega T} \tag{3.4.23}$$

$s(t)$的匹配滤波器为

$$H(\omega)=cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}=c\sum_{k=0}^{M-1}S_1^*(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

取 $t_0=(M-1)T+\tau$，则

$$H(\omega)=c\sum_{k=0}^{M-1}S_1^*(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega[(M-1)T+\tau]}=cS_1^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1-k)T} \tag{3.4.24}$$

可见匹配滤波器可表示为

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega) \tag{3.4.25}$$

匹配滤波器的组成如图 3.14 所示,其中

$$H_1(\omega)=cS_1^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \tag{3.4.26}$$

$H_1(\omega)$是单个矩形脉冲信号的匹配滤波器,由于矩形脉冲串信号是由单个矩形信号经周期延拓得到的,将单个矩形脉冲信号称为矩形脉冲串信号的子脉冲,$H_1(\omega)$称为子脉冲匹配滤波器。而 $H_2(\omega)$为

$$H_2(\omega)=\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1-k)T}=1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)T} \tag{3.4.27}$$

它是由延迟单元和求和器构成的,通常称为相参积累器,它的作用是调整脉冲串信号的相位,使其在 $t_0=(M-1)T+\tau$ 实现同相相加。

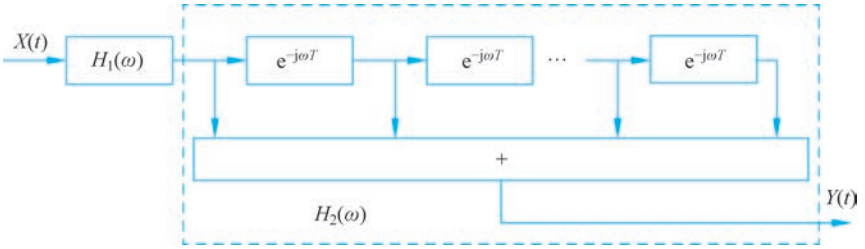

图 3.14　矩形脉冲串信号的匹配滤波器

由于矩形脉冲串信号的能量是单个矩形脉冲信号能量的 M 倍,由式(3.4.16),匹配滤波器输出的最大信噪比为

$$d_{\mathrm{m}}=\frac{2E}{N_0}=\frac{2ME_1}{N_0}=M\frac{2E_1}{N_0}=Md_1 \tag{3.4.28}$$

式中,E_1 代表单个矩形脉冲信号的能量,d_1 代表子脉冲匹配滤波器输出的最大信噪比。由式(3.4.28)可以看出,矩形脉冲串信号匹配滤波器输出的最大信噪比是单个矩形脉冲信号的 M 倍,即信噪比提高了$(M-1)$倍,信噪比的提高得益于相参积累器的作用。式(3.4.25)和式(3.4.28)可以推广到任意的脉冲串信号。

3.4.3　广义匹配滤波器

下面进一步讨论式(3.4.8)。假定噪声具有有理的功率谱,由式(2.5.8),它可以分解为

$$G_w(\omega)=G_w^+(\omega)G_w^-(\omega)=G_w^+(\omega)[G_w^+(\omega)]^* \tag{3.4.29}$$

则式(3.4.8)可以写成

$$H(\omega)=cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}/G_w(\omega)=\frac{1}{G_w^+(\omega)}c\left[\frac{S(\omega)}{G_w^+(\omega)}\right]^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

$$=H_1(\omega)H_2(\omega) \tag{3.4.30}$$

其中

$$H_1(\omega)=\frac{1}{G_w^+(\omega)},\quad H_2(\omega)=cS'^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} \tag{3.4.31}$$

式中

$$S'(\omega)=S(\omega)/G_w^+(\omega) \tag{3.4.32}$$

它是 $s(t)$ 信号经过滤波器 $H_1(\omega)$ 后输出的信号。而平稳噪声通过 $H_1(\omega)$ 后，输出噪声的功率谱为

$$G_{w'}(\omega)=G_w(\omega)\mid H_1(\omega)\mid^2=G_w(\omega)\frac{1}{G_w^+(\omega)}\frac{1}{[G_w^+(\omega)]^*}=1$$

可见 $w'(t)$ 是白噪声，则 $H_2(\omega)$ 就可以看作白噪声环境下的匹配滤波器，只不过现在匹配的信号是 $s'(t)$ 而不是 $s(t)$。很显然，$H_1(\omega)$ 是物理可实现的滤波器，而 $H_2(\omega)$ 有可能是物理不可实现的，若取物理可实现部分 $H_{2c}(\omega)$，则滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_{2c}(\omega)=\frac{1}{G_w^+(\omega)}\left[\frac{cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}}{G_w^-(\omega)}\right]^+ \tag{3.4.33}$$

式中 $[\ ]^+$ 表示取物理可实现部分。若用拉普拉斯变换表示，则式(3.4.33)可表示为

$$H(s)=H_1(s)H_{2c}(s)=\frac{1}{G_w^+(s)}\left[\frac{cS(-s)\mathrm{e}^{-st_0}}{G_w^-(s)}\right]^+ \tag{3.4.34}$$

式(3.4.33)或式(3.4.34)称为广义匹配滤波器，它的实现结构如图 3.15 所示。

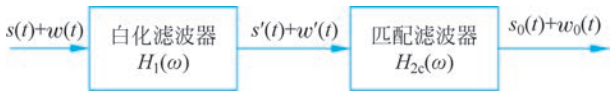

图 3.15　广义匹配滤波器结构

【例 3.7】 设信号为

$$s(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t/2}-\mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

噪声的功率谱为 $G_w(\omega)=1/(1+\omega^2)$，求广义匹配滤波器的传递函数。

解：首先将噪声功率谱用拉普拉斯变换表示为

$$G_w(s)=\frac{1}{1-s^2}=\frac{1}{(1+s)(1-s)}$$

所以，

$$G_w^+(s)=\frac{1}{1+s},\quad G_w^-(s)=\frac{1}{1-s},\quad H_1(s)=\frac{1}{G_w^+(s)}=1+s$$

信号的拉普拉斯变换为

$$S(s)=\frac{1}{1/2+s}-\frac{1}{1+s}=\frac{1}{(1+2s)(1+s)}$$

$$H_2(s)=\frac{cS(-s)\mathrm{e}^{-st_0}}{G_n^-(s)}=\frac{c}{1-2s}\mathrm{e}^{-st_0}$$

求 $H_2(s)$的拉普拉斯反变换的冲激响应为

$$h_2(t)=\begin{cases}\frac{c}{2}\mathrm{e}^{(t-t_0)/2}, & -\infty<t\leqslant t_0\\ 0, & t>t_0\end{cases}$$

很显然,$h_2(t)$在 $t<0$ 时不为零,因此 $H_2(s)$不是物理可实现的滤波器,若取物理可实现部分,则

$$h_{2c}(t)=\begin{cases}\frac{c}{2}\mathrm{e}^{(t-t_0)/2}, & 0<t\leqslant t_0\\ 0, & t<0\text{ 或 }t>t_0\end{cases}$$

对应的传递函数为

$$H_{2c}(s)=\int_0^{t_0}\frac{c}{2}\mathrm{e}^{(t-t_0)/2}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{c}{1-2s}(\mathrm{e}^{-st_0}-\mathrm{e}^{-t_0/2})$$

则 $s(t)$的广义匹配滤波器为

$$H(s)=H_1(s)H_{2c}(s)=c\frac{1+s}{1-2s}(\mathrm{e}^{-st_0}-\mathrm{e}^{t_0/2})$$

视频

3.5 信号处理实例——线性调频信号的匹配滤波器

早期脉冲雷达所用信号多是简单矩形脉冲信号,这时脉冲信号能量 $E=PT$,P 为脉冲功率,T 为脉冲宽度。当要求雷达探测目标的作用距离增大时,应该加大信号能量 E。增大发射机的脉冲功率是一个途径,但它受到发射管峰值功率及传输线容量等因素的限制,只能有一定的范围。在发射机平均功率允许的条件下,可以通过增大脉冲宽度的 T 的办法来提高信号能量。而距离分辨力取决于所用信号的带宽 B。B 越大,距离分辨力越好。对于简单矩形脉冲,信号带宽 B 与其脉冲宽度 T 满足 $BT\approx1$ 的关系,因此采用宽脉冲时必然降低其距离分辨力。因此,脉冲宽度 T 的大小会受到明显的限制。提高雷达的探测能力和保证必需的距离分辨力这对矛盾,在简单脉冲信号中很难解决,因此有必要寻找和采用较为复杂的信号形式。

如果在宽脉冲内采用附加频率或相位调制以增加信号带宽 B,则在接收时用匹配滤波器进行处理,可将长脉冲压缩到 $1/B$ 的宽度,这样既可使雷达用长脉冲去获得大能量,又可以得到短脉冲所具备的距离分辨力。这种信号称为脉冲压缩信号或大时宽带宽信号,线性调频信号就是一种典型的大时宽带宽信号,其脉宽 T 和带宽 B 的乘积大于 1,一般采用 $BT\gg1$。

3.5.1 线性调频信号

线性调频信号是通过非线性相位调制或线性频率调制(LFM)来获得大时宽带宽积的,又称为 chirp 信号,这是研究得最早而应用最广泛的一种脉冲压缩信号。采用这种信

号的雷达可以同时获得远作用距离和高距离分辨力。线性调频信号实信号形式可表示为

$$s(t)=A\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\omega_0 t+\frac{\mu t^2}{2}\right)$$

其中，包络是宽度为 T 的矩形脉冲，μ 为频率变化斜率

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)=\begin{cases}1, & \left|\frac{t}{T}\right|\leqslant\frac{1}{2}\\ 0, & \left|\frac{t}{T}\right|>\frac{1}{2}\end{cases}$$

信号的瞬时载频是随时间线性变化的。瞬时角频率 ω_i 为

$$\omega_i=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega_0+\mu t$$

在脉冲宽度内，信号角频率由 $\omega_0-\frac{\mu T}{2}$ 变化到 $\omega_0+\frac{\mu T}{2}$。调频信号的带宽 $B=\frac{\mu T}{2\pi}$。对于这种信号，其时宽频宽乘积 D 是一个重要参数，表示为

$$D=BT=\frac{\mu T^2}{2\pi}$$

3.5.2 线性调频信号通过匹配滤波器的输出分析

首先讨论线性调频信号通过匹配滤波器的输出以观察脉冲压缩的情况。时域上，滤波器输入信号 $s(t)$ 与输出信号 $s_0(t)$ 及冲激响应 $h(t)$ 之间的关系是

$$s_0(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

而匹配滤波器的冲激响应 $h(t)=cs(t_0-t)$，其中 c 为常数。

由于

$$h(t-\tau)=cs[\tau-(t-t_0)]$$

于是

$$s_0(t)=c\int_{-\infty}^{+\infty}s(\tau)s[\tau-(t-t_0)]\mathrm{d}\tau$$

将 $s(\tau)=A\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right)\cos\left(\omega_0\tau+\frac{\mu\tau^2}{2}\right)$ 代入上式后，再展开三角函数。推导可得

$$s_0(t)=\frac{cA^2T}{2}\frac{\sin\left[\frac{\mu T}{2}(t-t_0)\right]}{\frac{\mu T}{2}(t-t_0)}\cos\omega_0(t-t_0)$$

上式表示线性调频信号经过匹配滤波器的输出，是一个固定载频 ω_0 的信号，其包络近似为 sinc 函数

$$\frac{cA^2T}{2}\frac{\sin\left[\frac{\mu T}{2}(t-t_0)\right]}{\frac{\mu T}{2}(t-t_0)}$$

由于 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\sin(x)}{x}=\frac{2}{\pi}$，接近 -4dB，匹配滤波器输出脉冲 -4dB 间的宽度 $T'=2x$。可得压缩后的宽度 $T'=\frac{2\pi}{\mu T}=\frac{1}{B}$，$B$ 为信号调频宽度。可见压缩后的脉冲宽度反比于 B，而与输入信号脉冲宽度 T 无关。

线性调频信号的输入脉冲宽度 T 与输出脉宽 T' 之比通常称为压缩比，即

$$\frac{T}{T'}=\frac{T}{1/B}=BT=D$$

它就是信号的时宽带宽乘积。早期线性调频信号常用的压缩比在数十至数百的范围，而近代雷达用的线性调频信号，其压缩比可达 10^6 数量级。

通过匹配滤波器后，脉冲宽度变窄，t_0 时刻输出端最大信噪比为

$$d_{\max}=\frac{s_0^2(t_0)}{E[n_0^2(t)]}$$

式中，$E[n_0^2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|\frac{N_0}{2}\mathrm{d}\omega$，$N_0/2$ 为白噪声功率谱密度。

匹配滤波器的频率响应为

$$H(\omega)=cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

所以，

$$E[n_0^2(t)]=\frac{N_0}{2}\frac{c^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|S^*(\omega)|\mathrm{d}\omega=\frac{N_0c^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}s^2(t)\mathrm{d}t=\frac{N_0Ec^2}{2}$$

式中，E 为信号能量。当 $t=t_0$ 时，有

$$s_0(t_0)=\frac{cA^2T}{2}$$

所以输出端最大瞬时信噪比为

$$d_{\mathrm{m}}=\frac{s_0^2(t_0)}{E[n_0^2(t)]}=\frac{(cA^2T/2)^2}{N_0Ec^2/2}=\frac{(cE)^2}{N_0Ec^2/2}=\frac{2E}{N_0}$$

式中，$E=A^2T/2$ 为线性调频脉冲能量。当信号振幅 A 一定时，可以加大脉冲宽度 T 增加信号能量。

下面讨论线性调频信号经过匹配滤波器后的信号幅度变化。由于压缩网络是无源的，所以输入和输出端能量相等。即

$$E=PT=P'T'$$

P 和 P' 为输入信号功率和输出信号功率，即

$$\frac{P'}{P}=\frac{T}{T'}=D$$

又因为脉冲功率与信号幅度平方成正比，故得压缩前后脉冲振幅比为

$$\frac{A'}{A}=\sqrt{D}$$

可见输出脉冲振幅增大为原来的$\sqrt{D}$倍。

根据线性调频信号匹配滤波器的频率响应可知，压缩比 D 的值越大，幅频特性在频带外幅度的下降越快，即频谱形状和矩形更接近。当 $D=10$ 时，就有 95%的信号能量包含在此频带范围内。通常使用的线性调频脉冲均满足 $D\gg1$，故其频谱的振幅部分很接近矩形，中心频率为信号的频率，而带宽近似等于信号的调频带宽 B。相位特性的特点是具有平方律的相频特性和平方相位项共轭，然后再加一个时延项，即 $\Phi(\omega)=\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\mu}-\omega t_0$。

图 3.16 画出脉冲宽度为 100μs，调频带宽为 1MHz，即 $D=100$ 的线性调频信号的时域波形(图 3.16(a))、功率谱密度(图 3.16(b))和匹配滤波器的输出响应(图 3.16(c)和图 3.16(d)，其中图 3.16(d)为对数形式)。

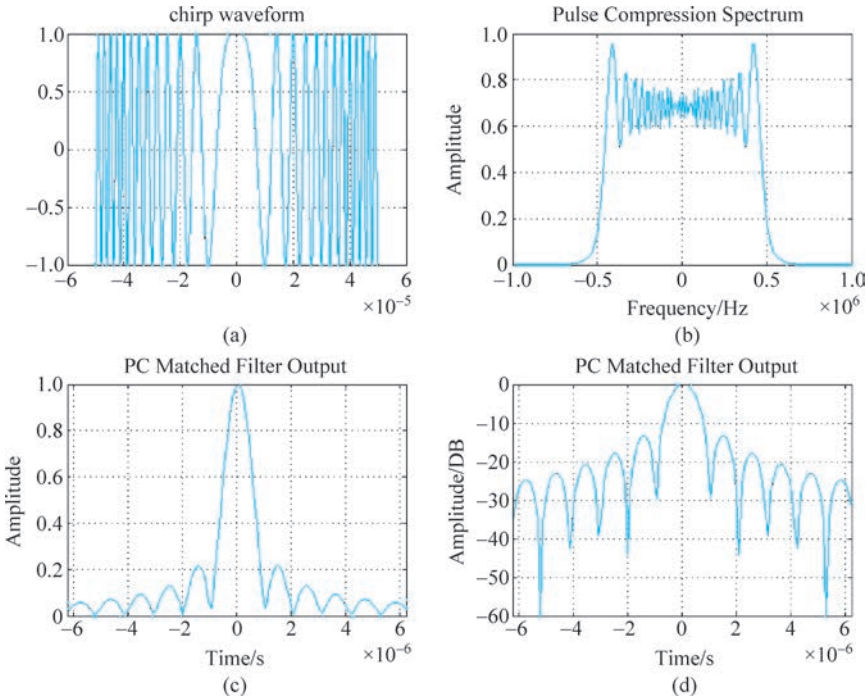

图 3.16　线性调频信号功率谱密度和匹配滤波器的输出响应

图 3.16 表明，匹配滤波器对于线性调频脉冲信号的输出有比较高的时间旁瓣。这些时间旁瓣是不需要的，因为在大目标附近的小目标有可能被遮蔽而探测不到。该问题的解决方法是用一个窗函数对线性调频的幅度进行加权，以修正匹配滤波器的输出响应，感兴趣的读者可以参考相关书籍。

3.6 随机动态系统

对于一个物理系统,可以用状态矢量描述系统随时间变化的动态过程,一般的动态过程可以用如下的状态方程描述:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{n}(t)] \tag{3.6.1}$$

式中,$\boldsymbol{x}(t)$为系统的 $M\times 1$ 维的状态矢量,$\boldsymbol{u}(t)$为 $r\times 1$ 维的控制矢量,$\boldsymbol{n}(t)$为 $p\times 1$ 维的系统扰动噪声矢量。若矢量函数 f 对于$\boldsymbol{x}(t)$、$\boldsymbol{u}(t)$、$\boldsymbol{n}(t)$都是线性的,则系统称为随机线性系统,本节只介绍随机线性系统。

3.6.1 随机连续线性系统

随机连续线性系统的状态方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{n}(t) \tag{3.6.2}$$

式中,$\boldsymbol{A}(t)$是 $M\times M$ 维矩阵,$\boldsymbol{G}(t)$是 $M\times r$ 维矩阵,$\boldsymbol{F}(t)$是 $M\times p$ 维矩阵。假定 $\boldsymbol{n}(t)$是零均值白噪声,且

$$E[\boldsymbol{n}(t)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\tau)]=\boldsymbol{Q}(t)\delta(t-\tau) \tag{3.6.3}$$

系统的起始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$假定为随机矢量,且

$$E[\boldsymbol{x}(t_0)]=\boldsymbol{m}_x(t_0),\quad E\{[\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{m}_x(t_0)][\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{m}_x(t_0)]^{\mathrm{T}}\}=\boldsymbol{P}_x(t_0) \tag{3.6.4}$$

根据线性系统理论,式(3.6.2)的解由两部分组成,一部分是零输入解,另一部分是零状态解,其解可以表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)[\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{n}(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{3.6.5}$$

式中,$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$称为状态转移矩阵,它是下列状态方程的解:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)=\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\\ \boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I}\end{cases} \tag{3.6.6}$$

若 $\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{G}(t)$和 $\boldsymbol{F}(t)$为与时间 t 无关的常系数矩阵,则式(3.6.2)可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{F}\boldsymbol{n}(t) \tag{3.6.7}$$

称式(3.6.7)描述的线性系统为定常线性系统。对于定常线性系统,其状态转移矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(t-t_0)+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2(t-t_0)^2+\cdots\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k(t-t_0)^k\end{aligned} \tag{3.6.8}$$

【例 3.8】 设有如下微分方程描述的线性系统,

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=0\end{cases}$$

试建立系统的状态方程,并求出状态转移矩阵。

解： 本例的微分方程可以写成如下形式，

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

则系统的状态方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$

由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(t-t_0)=\begin{bmatrix}1 & t-t_0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

【例 3.9】 设有微分方程，

$$\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)=u(t)$$

求状态转移矩阵。

解： 令 $x_1(t)=x(t)$，$x_2(t)=\dot{x}_1(t)$，则

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_2(t)+u(t)\end{cases}$$

写成矩阵形式，

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(t)$$

其中，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\\ &=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(t-t_0)+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2(t-t_0)2+\cdots\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}(t-t_0)+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}(t-t_0)2+\cdots\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & (t-t_0)-\frac{1}{2!}(t-t_0)^2+\frac{1}{3!}(t-t_0)^3\\ 0 & 1-(t-t_0)+\frac{1}{2!}(t-t_0)^2-\frac{1}{3!}(t-t_0)^3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)}\\ 0 & \mathrm{e}^{-(t-t_0)}\end{bmatrix}$$

3.6.2 随机连续线性系统的离散化

将随机连续线性系统的状态方程离散化可得到随机离散线性系统的状态方程。在式(3.6.5)中,令 $t_0=t_k$,$t=t_{k+1}$,则

$$\boldsymbol{x}(t_{k+1})=\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_k)x(t_k)+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\tau)[\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{n}(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{3.6.9}$$

当采样间隔 $t_{k+1}-t_k$ 比较小时,可以认为在采样间隔(t_k,t_{k+1})上,$\boldsymbol{u}(\tau)$和 $\boldsymbol{n}(\tau)$保持不变,取端点值 $\boldsymbol{u}(\tau)=\boldsymbol{u}(t_k)$,$\boldsymbol{n}(\tau)=\boldsymbol{n}(t_k)$,则式(3.6.9)可近似为

$$\boldsymbol{x}(t_{k+1})=\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_k)x(t_k)+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\tau)\boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{u}(t_k)+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\tau)\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{n}(t_k) \tag{3.6.10}$$

令

$$\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{x}(t_{k+1}),\quad \boldsymbol{x}[k]=\boldsymbol{x}(t_k),\quad \boldsymbol{u}[k]=\boldsymbol{u}(t_k),\quad \boldsymbol{n}[k]=\boldsymbol{n}(t_k)$$

$$\boldsymbol{B}[k]=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\tau)\boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \boldsymbol{\Gamma}[k]=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\tau)\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

则式(3.6.10)可表示为

$$\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{\Phi}[k+1,k]\boldsymbol{x}[k]+\boldsymbol{B}[k]\boldsymbol{u}[k]+\boldsymbol{\Gamma}[k]\boldsymbol{n}[k] \tag{3.6.11}$$

式(3.6.11)是式(3.6.2)离散化以后的状态方程。其中 $\boldsymbol{n}[k]$是零均值白噪声,且 $E(\boldsymbol{n}[k]\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}[j])=\boldsymbol{Q}[k]\delta_{kj}$。

【例 3.10】 运动目标的恒速模型(CV)。设目标的运动方程可表示为

$$\ddot{x}(t)=\tilde{v}(t) \tag{3.6.12}$$

其中 $\tilde{v}(t)$表示速度的轻微变化,且假定 $E[\tilde{v}(t)]=0$,$E[\tilde{v}(t)\tilde{v}(\tau)]=q\delta(t-\tau)$,其中 $q>0$。求离散化后的状态方程。

解: 式(3.6.12)用状态方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t)\tilde{v}(t) \tag{3.6.13}$$

式中,$\boldsymbol{x}=[x\quad \dot{x}]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$。式(3.6.13)的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{F}(\tau)\tilde{v}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.6.14}$$

式中,

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(t-t_0)+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2(t-t_0)^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k(t-t_0)^k$$

由于 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}(k\geqslant 2)$，所以，

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(t-t_0)=\begin{bmatrix}1 & t-t_0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3.6.15}$$

令 $t_0=t_k,t=t_{k+1}$，则

$$\boldsymbol{x}(t_{k+1})=\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_k)\boldsymbol{x}(t_k)+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\tau)\boldsymbol{F}(\tau)\tilde{v}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.6.16}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_k)=\begin{bmatrix}1 & t_{k+1}-t_k\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3.6.17}$$

若采样间隔相等，且 $t_{k+1}-t_k=T$，则式(3.6.17)可表示为

$$\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}[k]+\boldsymbol{n}[k]$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{n}[k]=\int_{kT}^{(k+1)T}\begin{bmatrix}1 & (k+1)T-\tau\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\tilde{v}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.6.18}$$

可以证明，

$$E(\boldsymbol{n}[k])=0,\quad E(\boldsymbol{n}[k]\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}[l])=\begin{bmatrix}T^3/3 & T^2/2\\ T^2/2 & T\end{bmatrix}q\delta_{kl} \tag{3.6.19}$$

可见 $\boldsymbol{n}[k]$是零均值白噪声。

习题

3.1 已知一个平稳随机过程输入到 RL 滤波器，如图 3.17 所示，其 $E[X(t)]=0$，$R_X(t_1,t_2)=\sigma^2\exp[-\beta(t_1-t_2)]=\sigma^2\exp[-\beta|\tau|]$，$\beta>0$，求输出的自相关函数 $R_Y(\tau)$。

3.2 设线性时不变系统的冲激响应为 $h(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}U(t)$，输入平稳随机过程 $X(t)$的自相关函数为 $R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$，其中 $\alpha>0,\beta>0$。

(1)求输入输出之间的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$；(2)当令 $\alpha=3,\beta=1$ 时，将所得结果画出来。

3.3 图 3.18 为单输入双输出线性系统。求证：输出 $Y_1(t)$和 $Y_2(t)$的互功率谱密度

$$G_{Y_1Y_2}(\omega)=H_1(\omega)H_2^*(\omega)G_X(\omega)$$

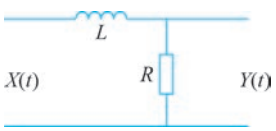

图 3.17 RL 滤波器

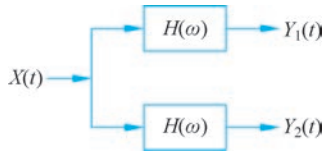

图 3.18 单输入双输出线性系统

3.4 若线性系统输入随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^2+8}$$

现已知其输出过程 $Y(t)$ 的功率谱密度 $G_Y(\omega)=1$,求该系统的传递函数。

3.5 证明随机过程的采样定理。设 $X(t)$ 为限带随机过程,即功率谱密度满足

$$G_X(\omega)=0,\ |\omega|>\omega_c$$

试证明:

$$\hat{X}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(nT)\frac{\sin(\omega_c t-n\pi)}{\omega_c t-n\pi}$$

提示:要证明上式,只需证明 $E\{[X(t)-\hat{X}(t)]^2\}=0$。

3.6 在雷达信号处理中,杂波的对消非常重要,用杂波衰减因子描述杂波对消的效果,它的定义为 $CA=C_i/C_o$,其中 C_i 表示杂波对消器的输入杂波功率,C_o 表示杂波对消器的输出杂波功率。图 3.19 描述的就是一种最简单的二脉冲杂波对消器,假定进入二脉冲对消器的杂波功率谱密度为 $G_X(f)=\frac{P_c}{\sqrt{2\pi}\sigma_c}\exp\left(-\frac{f^2}{2\sigma_c^2}\right)$,$P_c$ 为输入杂波的功率,求二脉冲对消器的杂波衰减因子。(提示:对正弦函数可以采用近似计算:对于小的 x,$\sin x\approx x$,在实际中通常有 $fT\ll1$)

3.7 设 $X(t)$ 为一个零均值高斯过程,其功率谱密度 $G_X(f)$ 如图 3.20 所示,若每 $1/2B$ 秒对 $X(t)$ 采样,得到样本集合 $X(0)$,$X(1/2B)$,…,求前 N 个样本的联合概率密度。

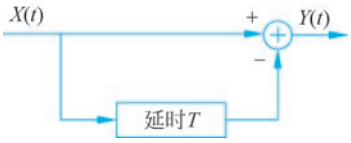

图 3.19 系统示意图

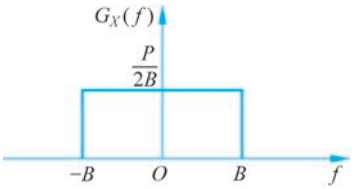

图 3.20 功率谱密度

3.8 设 $X[n]$ 是一个均值为零、方差为 σ_X^2 的白噪声,$Y[n]$ 是单位脉冲响应为 $h[n]$ 的线性时不变离散系统的输出。

试证:(1) $E(X[n]Y[n])=h[0]\sigma_X^2$;

(2) $\sigma_Y^2=\sigma_X^2\sum_{n=0}^{\infty}h^2[n]$。

3.9 图 3.21 所示离散线性系统,激励为均值为零、方差为 σ_X^2 的白噪声序列,其中 $h_1[n]=a^nU(n)$,$h_2[n]=b^nU(n)$,$|a|<1$,$|b|<1$。试求 σ_Z^2。

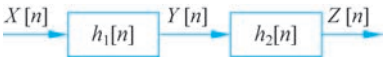

图 3.21 离散线性系统

3.10 序列 $Y[n]$ 和 $X[n]$ 满足差分方程

$$Y[n]=Y[n+a]-Y[n-a]$$

其中 a 为常数，试用 $X[n]$ 的自相关函数表示 $Y[n]$ 的自相关函数。

3.11 输入过程 $X(n)$ 的功率谱密度为 σ_X^2，二阶 MA 模型

$$Y(n)=X(n)+a_1X(n-1)+a_2X(n-2)$$

试求 $Y(n)$ 的自相关函数和功率谱密度。

3.12 假定一广义平稳随机过程由下面的差分方程描述：

$$X[n]-aX[n-1]=W[n]-bW[n-1]$$

其中 $W[n]$ 为白噪声，方差为 $\sigma_W^2=1$，对于参数 a 和 b 取下面两组值，分别画出 $X[n]$ 的功率谱密度，并解释你的结果。(1) $a=0.9, b=0.2$；(2) $a=0.2, b=0.9$。

3.13 假定二阶 AR 过程由如下差分方程描述：

$$X[n]-2r\cos(2\pi f_0)X[n-1]+r^2X[n-2]=W[n]$$

其中 $W[n]$ 为白噪声，方差为 $\sigma_W^2=1$，对于参数 r 和 f_0 取下面两组值，分别画出 $X[n]$ 的功率谱密度，并解释你的结果。(1) $r=0.7, f_0=0.1$；(2) $r=0.95, f_0=0.1$。(提示：确定 $H(z)$ 的极点)

3.14 试证明式(3.4.8)。

3.15 设线性滤波器的输入为 $X(t)=s(t)+w(t)$，其中信号

$$s(t)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{\alpha(t-T)}, & t\leqslant T\\ 0, & t>T\end{cases}$$

为指数形式脉冲，$\alpha>0, T>0$，$w(t)$ 为平稳白噪声，试求匹配滤波器的传输函数，并画出电路示意图。

3.16 分析单个射频信号的匹配滤波器。信号 $s(t)$ 是矩形包络的射频脉冲，脉冲宽度为 τ，中心频率为 ω_0，其表示式为 $s(t)=a\ \mathrm{rect}(t)\cos\omega_0 t$，其中

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设 τ 时间内有很多个射频振荡周期(周期为 T_0)，即 $\omega_0\tau=\dfrac{2\pi\tau}{T_0}=2\pi m, m\gg1, m$ 为整数，相加白噪声的功率谱 $G_w(\omega)=N_0/2$，求 $s(t)$ 的匹配滤波器的传递函数、输出信号的波形、输出的信噪比，并画出匹配滤波器的实现框图。

3.17 设信号 $s(t)$ 为

$$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}s_1(t-kT)$$

其中 $s_1(t)$ 是习题 3.16 表示的单个射频脉冲信号，求 $s(t)$ 的匹配滤波器的传递函数、输出信号的波形、输出的信噪比，并画出匹配滤波器的实现框图，再进行比较。