第 3 章

集合与关系

集合是数学中最基本的概念，又是数学各分支、自然科学及社会科学各领域最普遍采用的描述工具。自从 19 世纪末德国数学家康托(G.Cantor)为集合论做奠基工作以来，集合论已经成为数学中不可缺少的基本描述工具和数学中最基本的概念之一。集合论有两种体系：一种是朴素集合论；另一种是公理集合论。本书仅讨论朴素集合论。

3.1 集合的概念和表示法

3.1.1 集合的表示

集合是不能精确定义的基本概念。当我们讨论某一类对象时，就把这一类对象的全体称为集合。这些对象称为集合中的元素。

例如：地球上的人。

方程 $x^2-1=0$ 的实数解集合。

26 个英文字母的集合。

坐标平面上的点。

集合通常用大写的英文字母标记，如自然数集合 **N**、整数集合 **Z**、有理数集合 **Q**、实数集合 **R**、复数集合 **C** 等。用小写字母表示一个集的元素，如 a，b，x，y。

表示一个集合的方法通常有如下三种。

1. 枚举法

这种方法是列出集合的所有元素，元素之间用逗号隔开，并把它们用花括号括起来。例如：

$$A=\{a,b,c,\cdots,z\}$$

$$Z=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$$

都是合法的表示。

下面给出常用的集合记号：

$\mathbf{Z}^{+}=\{x \mid x$ 是正整数$\}$　　即 $\mathbf{Z}^{+}=\{1,2,3,4,\cdots\}$

$\mathbf{N}=\{x \mid x$ 是正整数或 $0\}$　即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$

$\mathbf{Z}=\{x \mid x$ 是整数$\}$　　即 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$

$\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是有理数$\}$　　即 $\mathbf{Q}$ 中的元素可以写成 a/b 的形式，a、b 是整数，$b\neq0$

$\mathbf{R}=\{x \mid x$ 是实数$\}$

$\varnothing$是空集，即不含任何元素的集合。

2. 描述法

描述法是把属于集合中元素所具有的属性描述出来，写在花括号里。使用时，描述法也有两种情况：一种是用文字描述；另一种是用表达式描述。

例 3.1　集合 $A=\{$中国所有的网站$\}$，表示集合 A 中的元素是中国所有的网站。

例 3.2　集合 $B=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x^{2}-1=0\}$，表示方程 $x^{2}-1=0$ 的实数解集。

许多集合可以用两种方法表示，如 B 也可以写成$\{-1,1\}$，但是有些集合不可以用枚举法表示，如实数集合。

3. 图示法

集合与集合之间的关系以及一些运算结果可用文氏图(Venn Diagram)给予直观的表示。其构造如下：用一个大的矩形表示全集的所有元素(有时为了简单起见，可将全集省略)。在矩形内画一些圆(或任何其他形状的闭曲线)，用圆代表子集，用圆内部的点表示相应集合的元素。

为了讨论问题的方便，我们引入全集 E(有些教材用 U 表示)的概念，它包含我们讨论的所有有意义的物体的全体，即讨论中提到的任一集合都是 E 的子集。例如，当讨论实数时提到的集合 A 和 B 必须是实数集，而不是矩阵、电路等。在 Venn 图中，全集被表示成矩形，而其子集则被表示成圆形。全集是有相对性的，不同的问题有不同的全集，即使是同一个问题，也可以取不同的全集。例如，在研究平面上直线的相互关系时，可以把整个平面(平面上所有点的集合)取作全集，也可以把整个空间(空间上所有点的集合)取作全集。一般地，全集取得小一些，问题的描述和处理会简单一些。

不同的圆代表不同的集合，并将运算结果得到的集合用阴影或斜线的区域表示新组成的集合。集合的相关运算用文氏图表示如图 3.1 所示。

注意，文氏图只能帮助我们理解复杂的集合关系，只能用于说明，不能用于证明。

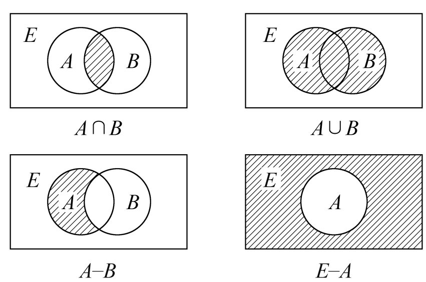

图 3.1　文氏图表示集合之间的关系

3.1.2　基本概念

1. 集合与元素之间的关系

集合的元素是彼此不同的，如果同一个元素在集合中多次出现，就应该认为是一个元素，如$\{1,1,2,2,3\}=\{1,2,3\}$。

集合的元素是无序的，如$\{1,2,3\}=\{3,1,2\}$。

元素和集合之间的关系是隶属关系，即属于或不属于，属于记作$\in$，不属于记作$\notin$，例如$A=\{a,\{b,c\},d,\{\{d\}\}\}$，这里，$a\in A$，$\{b,c\}\in A$，$d\in A$，$\{\{d\}\}\in A$，但$b\notin A$，$\{d\}\notin A$。$b$和$\{d\}$是$A$的元素的元素。可以用一种树形图表示这种隶属关系，该图分层构成，每个层上的结点都表示一个集合，它的儿子就是它的元素。上述集合A的树形图如图3.2所示。图中的a,b,c,d也是集合，由于讨论的问题与a,b,c,d的元素无关，所以没有列出它们的元素。

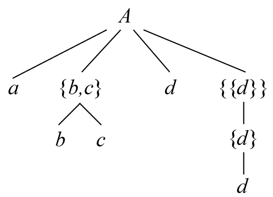

图 3.2 元素和集合间隶属关系的树形表示

为了体系上的严谨性，我们规定：对任何集合A，都有$A\notin A$。

2. 集合之间的关系

下面考虑在同一层次上的两个集合之间的关系。

定义 3.1 设A、B为集合，如果B中的每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，这时也称B被A包含，或A包含B，记作$B\subseteq A$。如果B不被A包含，则记作$B\nsubseteq A$。

包含的符号化表示为$B\subseteq A\Leftrightarrow\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$。

例如，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$，但$\mathbf{Z}\nsubseteq\mathbf{N}$。

显然，对任何集合A，都有$A\subseteq A$。

隶属关系和包含关系都是两个集合之间的关系，对于某些集合，这两种关系可以同时成立。例如，$A=\{a,\{a\}\}$和$\{a\}$这两个集合，既有$\{a\}\in A$，又有$\{a\}\subseteq A$。前者把它们看成不同层次上的两个集合，后者把它们看成同一层次上的两个集合，都是正确的。

定义 3.2 设A、B为集合，如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称A与B相等，记作$A=B$。

如果A与B不相等，则记作$A\neq B$。相等的符号化表示为$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$。

定义 3.3 设A、B为集合，如果$B\subseteq A$且$B\neq A$，则称B是A的真子集，记作$B\subset A$。如果B不是A的真子集，则记作$B\not\subset A$。真子集的符号化表示为$B\subset A\Leftrightarrow B\subseteq A\wedge B\neq A$，如图3.3所示。

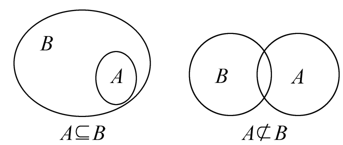

图 3.3 子集和非真子集的图形表示

定义 3.4 不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。

例如，$\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge x^2+1=0\}$是方程$x^2+1=0$的实数解集，因为该方程无实数解，所以是空集。

定理 3.1 空集是一切集合的子集。

证明：任何集合A，由子集定义有

$$\varnothing\subseteq A\Leftrightarrow\forall x(x\in\varnothing\rightarrow x\in A)$$

右边的蕴涵式因前件假而为真命题，所以$\varnothing\subseteq A$也为真。

推论 空集是唯一的。

证明：假设存在空集$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，由定理3.1有

$$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2,\varnothing_2\subseteq\varnothing_1。$$

根据定义3.2，有$\varnothing_1=\varnothing_2$。

含有n个元素的集合简称n元集，它的含有$m(m\leqslant n)$个元素的子集叫作它的m元子集。任给一个n元集，怎样求出它的全部子集呢？下面举例说明。

例 3.3　$A=\{1,2,3\}$，将 A 的子集分类。

0 元子集，也就是空集，只有一个：$\varnothing$；

1 元子集，即单元集：$\{1\},\{2\},\{3\}$；

2 元子集：$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$；

3 元子集：$\{1,2,3\}$。

一般地，对于 n 元集 A，它的 0 元子集有 C_n^0 个，1 元子集有 C_n^1 个，……，m 元子集有 C_n^m 个，……，n 元子集有 C_n^n 个。子集总数为

$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$ 个。

定义 3.5　设 A 为集合，把 A 的全部子集构成的集合叫作 A 的幂集，记作 $P(A)$。

例如，集合 $A=\{1,2,3\}$，有 $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。不难看出，若 A 是 n 元集，则 $P(A)$ 有 2^n 个元素。

3.2　集合的运算

3.2.1　集合的基本运算

集合的运算是一些规则，利用这些规则对给定集合的元素进行重新组合，从而构成新的集合。集合的基本运算有并、交、相对补和对称差等。

定义 3.6　设 A、B 为集合，A 与 B 的并集 $A\cup B$，交集 $A\cap B$，B 对 A 的相对补集 $A-B$，A 与 B 的对称差 $A\oplus B$ 分别定义如下：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$$
$$A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$$
$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$

对称差运算可等价定义为 $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$。

在给定全集 E 以后，$A\subseteq E$，A 的绝对补集 $\sim A$ 定义如下。

定义 3.7　$\sim A=E-A=\{x\mid x\in E\wedge x\notin A\}$。

例如，$E=\{a,b,c,d\}$，$A=\{a,b,c\}$，则 $\sim A=E-A=\{d\}$。

以上集合之间的关系和运算可以用文氏图给予形象的描述。图 3.4 就是一些集合的运算的文氏图描述。

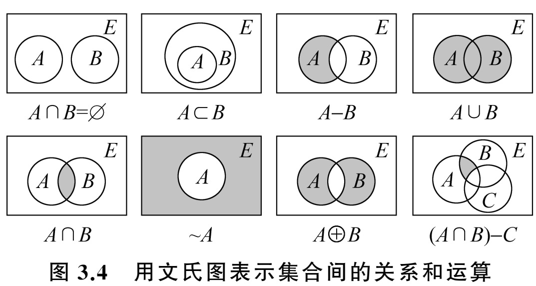

图 3.4　用文氏图表示集合间的关系和运算

3.2.2 有穷计数集

使用文氏图可以很方便地解决有穷集合的计数问题。首先根据已知条件把对应的文氏图画出来。一般地,每一条性质决定一个集合。有多少条性质,就有多少个集合。如果没有特殊说明,任何两个集合都画成相交的,然后将已知集合的元素数填入表示该集合的区域内。通常从 n 个集合的交集填起,根据计算的结果将数字逐步填入所有的空白区域。如果交集的数字是未知的,可以设为 x。根据题目中的条件列出一次方程或方程组,就可以求得所需要的结果。

例 3.4 对 24 名会外语的科技人员进行掌握外语情况的调查。其统计结果如下:会英、日、德和法语的人分别为 13、5、10 和 9 人,其中同时会英语和日语的有 2 人,会英、德和法语中任两种语言的都是 4 人。已知会日语的人既不懂法语,也不懂德语,分别求只会一种语言(英、德、法、日)的人数和会 3 种语言的人数。

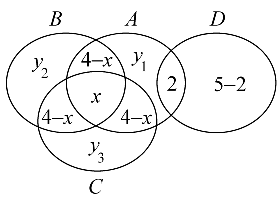

图 3.5 例 3.4 的文氏图

解:令 A、B、C、D 分别表示会英、法、德、日语的人的集合。根据题意画出如图 3.5 所示的文氏图。从图中可知,只会日语的有 3 人。设同时会 3 种语言的有 x 人,只会英、法或德语一种语言的分别为 y_1、y_2 和 y_3 人。将 x 和 y_1、y_2、y_3 填入图中相应的区域,然后依次填入其他区域的人数。

根据已知条件列出方程组如下:

$$y_1 + 2(4 - x) + x + 2 = 13$$
$$y_2 + 2(4 - x) + x = 9$$
$$y_3 + 2(4 - x) + x = 10$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + 3(4 - x) + x = 19$$

解得 $x=1$,$y_1=4$,$y_2=2$,$y_3=3$。

例 3.5 求 1~1000(包含 1 和 1000)既不能被 5 和 6 整除,也不能被 8 整除的数有多少个。

解:设

$$E = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \land 1 \leqslant x \leqslant 1000\}$$
$$A = \{x \mid x \in E \land x \text{ 可被 5 整除}\}$$
$$B = \{x \mid x \in E \land x \text{ 可被 6 整除}\}$$
$$C = \{x \mid x \in E \land x \text{ 可被 8 整除}\}$$

用 $|T|$ 表示有穷集 T 中的元素数,$\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数,$\mathrm{lcm}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的最小公倍数,则有

$$|A| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200$$
$$|B| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$$
$$|C| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$$
$$|A \cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = 33$$
$$|A \cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = 25$$

$$|B \cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = 41$$

$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = 8$$

将这些数字依次填入文氏图，得到图 3.6。由图可知，不能被 5、6 和 8 整除的数有 1000－(200＋100＋33＋67)＝600(个)。

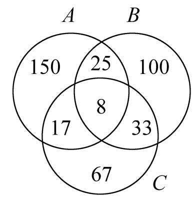

图 3.6 例 3.5 的文氏图

3.2.3 包含排斥原理

现实生活中，我们经常会遇到对集合中的元素进行计数的问题，考虑下面的例子。

例 3.6 一个班 50 人中，有 16 人期中得优，21 人期末得优，17 人两项均没得优，问有多少人两项均得优？

例 3.6 解答

下面给出包含排除原理。

定理 3.2 对有限集合 A 和 B，有

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

证明：(1) 当 A 与 B 不相交，即 $A \cap B = \varnothing$，则

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

(2) 若 $A \cap B \neq \varnothing$，则

$$|A| = |A \cap \sim B| + |A \cap B|,\ |B| = |\sim A \cap B| + |A \cap B|$$

所以

$$\begin{aligned} |A| + |B| &= |A \cap \sim B| + |A \cap B| + |\sim A \cap B| + |A \cap B| \\ &= |A \cap \sim B| + |\sim A \cap B| + 2|A \cap B| \end{aligned}$$

但

$$|A \cap \sim B| + |\sim A \cap B| + |A \cap B| = |A \cup B|$$

因此 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$，证毕。

包含排除原理可以推广至有限集合。

借助文氏图法可以很方便地解决有限集合的计数问题。首先根据已知条件画出相应的文氏图。如果没有特殊说明，两个集合一般都画成相交的，然后将已知的集合的基数填入文氏图中的相应区域，用 x 等字母表示未知区域，根据题目中的条件，列出相应的方程或方程组，解出未知数即可得所需求的集合的基数。下面通过例子说明这一做法。

例 3.7 计算中心需安排 Python、Visual Basic、C 3 门课程的上机。3 门课程的学生分别有 110 人、98 人、75 人，同时学 Python 和 Visual Basic 的有 35 人，同时学 Python 和 C 的有 50 人，同时学 Visual Basic 和 C 的有 19 人，3 门课程都学的有 6 人。求共有多少学生。

解：设 x 是同时选 Python 和 Visual Basic，但没有选 C 的学生人数；y 是同时选 Python 和 C，但没有选 Visual Basic 的学生人数；z 是同时选 C 和 Visual Basic，但没有选 Python 的学生人数，设 p 是仅选 Python 的学生人数，b 是仅选 Visual Basic 的学生人数，c 是仅选 C 的学生人数。

根据题设有

$x+6=35$ 所以 $x=29$

$y+6=50$ 所以 $y=44$

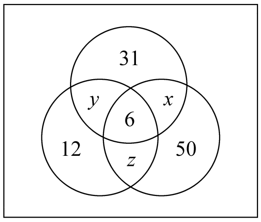

图 3.7 例 3.7 的文氏图

$z+6=19$ 所以 $z=13$

$x+y+6=110-p$ 所以 $p=31$

$x+z+6=98-b$ 所以 $b=50$

$y+z+6=75-c$ 所以 $c=12$

总计$=31+29+50+44+6+13+12=185$

其文氏图解法如图 3.7 所示。

3.2.4 广义交和广义并

以上定义的并和交运算称为初级并和初级交。下面考虑推广的并和交运算,即广义并和广义交。

定义 3.8 设 A 为集合,A 的元素的元素构成的集合称为 A 的广义并,记为$\bigcup A$。符号化表示为$\bigcup A=\{x \mid \exists z(z\in A \land x\in z)\}$。

例 3.8 设集合 $A=\{\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,e,f\}\}$,$B=\{\{a\}\}$,$C=\{a,\{c,d\}\}$。

则

$$\bigcup A=\{a,b,c,d,e,f\}$$
$$\bigcup B=\{a\}$$
$$\bigcup C=a\cup\{c,d\}$$
$$\bigcup\varnothing=\varnothing$$

根据广义并定义不难证明,若 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,则$\bigcup A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$。

类似地,可以定义集合的广义交。

定义 3.9 设 A 为非空集合,A 的所有元素的公共元素构成的集合称为 A 的广义交,记为$\bigcap A$。符号化表示为

$$\bigcap A=\{x \mid \forall z(z\in A\rightarrow x\in z)\}$$

考虑例 3.7 中的集合,有

$$\bigcap A=\{a\},\bigcap B=\{a\},\bigcap C=a\cap\{c,d\}$$

注意到在定义中特别强调了 A 是非空集合。对于空集$\varnothing$,可以进行广义并,即$\bigcup\varnothing=\varnothing$。但空集$\varnothing$不可以进行广义交,因为$\bigcap\varnothing$不是集合,在集合论中是没有意义的。

和广义并类似,若 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,则$\bigcap A=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$。

在后面的叙述中,若只说并或交,指的都是集合的初级并或初级交;如果在并或交前边冠以“广义”两个字,则指集合的广义并或广义交。

为了使集合表达式更简洁,对集合运算的优先顺序做如下规定:一元运算优先于二元运算;一元运算之间按由右向左的顺序进行;二元运算之间由括号决定先后顺序。

其中,**一元运算**指广义并、广义交、幂集、绝对补运算,**二元运算指**并、交、相对补、对称差运算。

例如下面的集合公式:

$\bigcap A-\bigcup B$,$\bigcup P(A)$,$\sim P(A)\cup\bigcup B$,$\sim(A\cup B)$都是合理的公式。

例 3.9 设 $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$,计算$\bigcup\bigcup A$,$\bigcap\bigcap A$ 和$\bigcap\bigcup A\cup(\bigcup\bigcup A-\bigcup\bigcap A)$。

解:$\bigcup A=\{a,b\}$

$\bigcap A=\{a\}$

$\bigcup\bigcup A=a\cup b$

$\bigcap\bigcap A=a$

$\bigcap\bigcup A=a\cap b$

$\bigcup\bigcap A=a$

$\bigcap\bigcup A\cup(\bigcup\bigcup A-\bigcup\bigcap A)=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)=(a\cap b)\cup(b-a)=b$

所以$\bigcup\bigcup A=a\cup b$，$\bigcap\bigcap A=a$，$\bigcap\bigcup A\cup(\bigcup\bigcup A-\bigcup\bigcap A)=b$。

命题代数与集合代数都是特殊的布尔代数。这个事实足以说明，此命题代数中的各种运算与集合论中的各种运算极为相似。在此将列举若干集合恒等式，它们都有与其对应的命题等价式。下面介绍集合运算的恒等式。

定理 3.3 设 A、B、C 为任意集合，E 为包含 A、B、C 的全集，那么下列各式成立。

(1) 等幂律 $A\cup A=A$ $\quad A\cap A=A$

(2) 交换律 $A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

(3) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(4) 同一律 $A\cup\varnothing=A$ $\quad A\cap E=A$

(5) 零律 $A\cap\varnothing=\varnothing$ $\quad A\cup E=E$

(6) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(7) 吸收律 $A\cap(A\cup B)=A$

$A\cup(A\cap B)=A$

(8) 双重否定律 $\sim(\sim A)=A$ $\quad \sim E=\varnothing$ $\quad \sim\varnothing=E$

(9) 排中律 $A\cup\sim A=E$

(10) 矛盾律 $A\cap\sim A=\varnothing$

(11) 德·摩根律 $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$ $\quad \sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

(12) 补交转换律 $A-B=A\cap\sim B$

例 3.10 试证明 $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$。

证明：

方法 1 $x\in A-(B-C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cap\sim C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\vee x\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cup(A\cap C)$

方法 2 进行等值推导。

$$
\begin{aligned}
A-(B-C)&=A\cap\sim(B\cap\sim C)\\
&=A\cap(\sim B\cup C)
\end{aligned}
$$

$$=(A\cap\sim B)\cup(A\cap C)$$
$$=(A-B)\cup(A\cap C)$$

3.3 有序对与笛卡儿积

最直接的表达两个集合之间的关系的方式,就是利用两个元素组成的有序对。

定义 3.10 由两个元素 x 和 y(允许 $x=y$)按一定顺序排列成的二元组叫作一个有序对或序偶,记作 $<x,y>$,其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素。

有序对 $<x,y>$ 具有以下性质:

(1) 当 $x\neq y$ 时,$<x,y>\neq<y,x>$。

(2) $<x,y>=<u,v>$ 的充分必要条件是 $x=u$ 且 $y=v$。

这些性质是二元集 $\{x,y\}$ 不具备的。例如,当 $x\neq y$ 时,有 $\{x,y\}=\{y,x\}$。原因是有序对中的元素是有序的,而集合中的元素是无序的。

如有集合 $A=\{a,b,c,d\}$,A 中 4 个元素分别表示 4 个男人,是我们研究的对象,其中 a 是 b 和 c 的父亲,b 是 d 的父亲。现在把 4 个男人中有父子关系的两个人用有序对 $<a,b>$、$<a,c>$、$<b,d>$ 表示。这些有序对中的元素的前后次序是不能颠倒的。

例 3.11 已知 $<x+2,4>=<5,2x+y>$,求 x 和 y。

解:由有序对相等的充要条件有

$$x+2=5$$
$$2x+y=4$$

解得 $x=3,y=-2$。

为了更深入地研究关系,下面引入一个新的概念——集合的笛卡儿积。

定义 3.11 设 A、B 为集合,用 A 中元素为第一元素,B 中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合叫作 A 和 B 的笛卡儿积,记作 $A\times B$。

笛卡儿积的符号化表示为

$$A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$$

例如,设 $A=\{a,b\}$,$B=\{0,1,2\}$,则

$$A\times B=\{<a,0>,<a,1>,<a,2>,<b,0>,<b,1>,<b,2>\}$$
$$B\times A=\{<0,a>,<0,b>,<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>\}$$

由排列组合的知识不难证明,如果 $|A|=m$,$|B|=n$,则 $|A\times B|=m\cdot n$。

下面给出笛卡儿积的运算性质。

(1) 对任意集合 A,根据定义有

$$A\times\varnothing=\varnothing,\varnothing\times A=\varnothing$$

(2) 笛卡儿积运算不满足交换律,即

$$A\times B\neq B\times A\qquad(当\ A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge A\neq B\ 时)$$

(3) 笛卡儿积运算不满足结合律,即

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)\qquad(当\ A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge C\neq\varnothing 时)$$

(4) 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律,即

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

(5) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

下面给出性质(4)第一个式子的证明。

证明：任取$<x,y>$

$$\begin{aligned}
& <x,y> \in A \times (B \cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge y \in B \cup C \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y> \in A \times B \vee <x,y> \in A \times C \\
\Leftrightarrow\ & <x,y> \in (A \times B \cup A \times C)
\end{aligned}$$

所以有 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。

注意：性质(5)的逆命题不成立，可分以下 4 种情况讨论。

① 当 $A = B = \varnothing$时，显然有 $A \subseteq C$ 和 $B \subseteq D$ 成立。

② 当 $A \neq \varnothing$且 $B \neq \varnothing$时，也有 $A \subseteq C$ 和 $B \subseteq D$ 成立，证明如下：

任取 $x \in A$，由于 $B \neq \varnothing$，必存在 $y \in B$，因此有

$$x \in A \wedge y \in B \Rightarrow <x,y> \in A \times B \Rightarrow <x,y> \in C \times D \Rightarrow x \in C \wedge y \in D \Rightarrow x \in C$$

从而证明了 $A \subseteq C$。同理可证 $B \subseteq D$。

③ 当 $A = \varnothing$，$B \neq \varnothing$时，有 $A \subseteq C$ 成立，但不一定有 $B \subseteq D$ 成立。

反例：令 $A = \varnothing$，$B = \{1\}$，$C = \{3\}$，$D = \{4\}$。

④当 $A \neq \varnothing$，$B = \varnothing$时，有 $B \subseteq D$ 成立，但不一定有 $A \subseteq C$ 成立。反例略。

例 3.12　设 $A = \{1,2\}$，求 $P(A) \times A$。

解：
$$\begin{aligned}
P(A) \times A &= \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \times \{1,2\} \\
&= \{<\varnothing,1>, <\varnothing,2>, <\{1\},1>, <\{1\},2>, <\{2\},1>, <\{2\},2>, \\
&\quad <\{1,2\},1>, <\{1,2\},2>\}
\end{aligned}$$

例 3.13　设 A、B、C、D 为任意集合，判断以下命题是否为真，并说明理由。

(1) $A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$

(2) $A - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$

(3) $A = B \wedge C = D \Rightarrow A \times C = B \times D$

(4) 存在集合 A，使 $A \subseteq A \times A$

解：(1) 不一定为真。当 $A = \varnothing$，$B = \{1\}$，$C = \{2\}$时，有 $A \times B = \varnothing = A \times C$，但 $B \neq C$。

(2) 不一定为真。当 $A = B = \{1\}$，$C = \{2\}$时，有

$$A - (B \times C) = \{1\} - \{<1,2>\} = \{1\}$$
$$(A - B) \times (A - C) = \varnothing \times \{1\} = \varnothing$$

(3) 为真。由等量代入的原理可证。

(4) 为真。当 $A = \varnothing$时，$A \subseteq A \times A$ 成立。

3.4 关系及其表示

3.4.1 基本概念

关系是客观世界存在的普遍现象,它描述了事物之间存在的某种联系。例如,人类集合中的父子、兄弟、同学、同乡,两个实数间的大于、小于、等于关系,集合中两条直线的平行、垂直关系等,集合间的包含,元素与集合的属于……都是关系在各个领域中的具体表现。《水浒》中108条梁山好汉,每个人都有一个绰号,人人都不例外。

宋江——及时雨,吴用——智多星,李逵——黑旋风,白胜——白日鼠,……

这就是说,梁山好汉的姓名与他们的绰号之间有一种"关系"。

表述两个个体之间的关系,称为二元关系;表示3个以上个体之间的关系,称为多元关系。我们主要讨论二元关系。

定义 3.12 如果一个集合满足以下条件之一:

(1) 集合非空,且它的元素都是有序对。

(2) 集合是空集。

则称该集合为一个二元关系,记作 R。二元关系也可简称为关系。对于二元关系 R,如果 $<x,y>\in R$,则可记作 xRy;如果 $<x,y>\notin R$,则记作 $x\not R y$。

例如,$R_1=\{<1,2>,<a,b>\}$,$R_2=\{<1,2>,a,b\}$,则 R_1 是二元关系,R_2 不是二元关系,只是一个集合,除非将 a 和 b 定义为有序对。根据上面的记法可以写 $1R_12$,aR_1b。

根据笛卡儿积的定义,二元关系还可以有如下定义。

定义 3.13 设 A、B 为集合,$A\times B$ 的任何子集均称为从 A 到 B 的二元关系,特别地,当 $A=B$ 时,称为 A 上的二元关系。

例如 $A=\{0,1\}$,$B=\{1,2,3\}$,那么 $R_1=\{<0,2>\}$,$R_2=A\times B$,$R_3=\varnothing$,$R_4=\{<0,1>\}$等都是从 A 到 B 的二元关系,而 R_3 和 R_4 同时也是 A 上的二元关系。

集合 A 上的二元关系的数目依赖于 A 中的元素数。如果 $|A|=n$,那么 $|A\times A|=n^2$,$A\times A$ 的子集就有 2^{n^2} 个。每个子集代表一个 A 上的二元关系,所以 A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系。例如 $|A|=3$,则 A 上有 $2^{3^2}=512$ 个不同的二元关系。

下面介绍一些特殊的二元关系。对于任何集合 A,空集 $\varnothing$ 是 $A\times A$ 的子集,叫作 A 上的空关系。下面定义 A 上的全域关系 E_A 和恒等关系 I_A。

定义 3.14 对任意集合 A,定义全域关系为 $E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$,恒等关系为 $I_A=\{<x,x>|x\in A\}$。

例 3.14 设集合 $A=\{0,1,2\}$,试求 E_A 和 I_A。

解:E_A 是 A 上的全关系,$|E_A|=|A\times A|=9$。

$$E_A=\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,0>,<1,1>,<1,2>,<2,0>,<2,1>,<2,2>\}。$$

I_A 是 A 上的恒等关系,$|I_A|=|A|=3$,$I_A=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>\}$。

除了以上3种特殊的关系以外,还有一些常用的关系,分别说明如下:

$L_A=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x\leqslant y\}$,这里 $A\subseteq\mathbf{R}$。

$D_B=\{<x,y>|x,y\in B\wedge x$ 整除 $y\}$,这里 $B\subseteq\mathbf{Z}^*$。

$R\subseteq=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x\subseteq y\}$,这里 A 是集合族。

L_A 叫作 A 上的小于或等于关系,A 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集。D_B 叫作 B 上的整除关系,其中 x 是 y 的因子,B 是非零整数集 $\mathbf{Z}^*$ 的子集。$R\subseteq$叫作 A 上的包含关系,A 是由一些集合构成的集合族。例如 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{a,b\}$,则

$$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$$

$$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$$

而令 $A=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,则 A 上的包含关系是

$$R\subseteq=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$$
$$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$$

类似地,还可以定义大于或等于关系、小于关系、大于关系、真包含关系等。

例 3.15 设 $A=\{1,2,3\}$,用列举法给出 A 上的恒等关系 I_A 和全关系 E_A,

A 上的小于关系 $L_A=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x<y\}$和

A 上的整除关系 $D_A=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$ 整除 $y\}$。

解:$I_A=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$

$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,<3,3>\}$

$L_A=\{<1,2>,<1,3>,<2,3>\}$

$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

3.4.2 关系表示法

1. 列举法

列举出关系的所有有序对,前面的例题大多是用列举法表示关系的。

例 3.16 设 $A=\{1,2,3,4\}$,下面各式定义的 R 都是 A 上的关系,试用列元素法表示 R。

(1) $R=\{<x,y>|x$ 是 y 的倍数$\}$

(2) $R=\{<x,y>|(x-y)^2\in A\}$

(3) $R=\{<x,y>|x/y$ 是素数$\}$

(4) $R=\{<x,y>|x\neq y\}$

解:(1) $R=\{<4,4>,<4,2>,<4,1>,<3,3>,<3,1>,<2,2>,<2,1>,<1,1>\}$

(2) $R=\{<2,1>,<3,2>,<4,3>,<3,1>,<4,2>,<2,4>,<1,3>,<3,4>,<2,3>,<1,2>\}$

(3) $R=\{<2,1>,<3,1>,<4,2>\}$

(4) $R=E_A-I_A=\{<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,4>,<3,1>,<3,2>,<3,4>,<4,1>,<4,2>,<4,3>\}$

例 3.16 中的 4 个关系是用描述法给出的。

2. 关系矩阵

关系矩阵是表达两个有限集合之间的关系的有力工具,也是方便计算机处理的一种表示方式,它的构成是这样的:

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,R 是 A 上的关系。令

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & x_iRx_j \\ 0 & x_i\not R x_j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

则

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}\end{bmatrix}$$

是 R 的关系矩阵,记作 $\boldsymbol{M}_R$。

例 3.17 设 $A=\{1,2,3,4\}$,$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,试求 R 的关系矩阵。

解:R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

3. 关系图

还可以利用平面上的图形描述从集合 A 到集合 B 的二元关系 R,以便更好地理解二元关系。

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,R 是 A 上的关系,令图 $G=<V,E>$,其中顶点集合 $V=A$,边集为 E。对于 $\forall x_i,x_j\in V$,满足 $<x_i,x_j>\in E\Leftrightarrow x_iRx_j$,称图 G 为 R 的关系图,记作 G_R。

在例 3.17 中,R 的关系图 G_R 如图 3.8 所示。

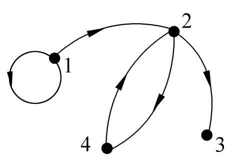

图 3.8 例 3.17 中 *R* 的关系图

例 3.18 求集合 $A=\{1,2,3,4\}$上的恒等关系、空关系、全关系和小于关系,并画出小于关系的关系图。

解:恒等关系 $I_A=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>\}$;

空关系$=\varnothing$;

全关系 $E_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,1>,<3,2>,<3,3>,<3,4>,<4,1>,<4,2>,<4,3>,<4,4>\}$;

小于关系 $L_A=\{<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,3>,<2,4>,<3,4>\}$。

小于关系的关系图如图 3.9 所示。

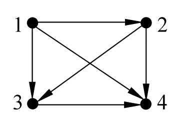

图 3.9 例 3.18 小于关系的关系图

例 3.19　设集合 $A=\{a,b\}$，R 是 $P(A)$上的包含关系，求 R、R 的关系矩阵与 R 的关系图。

解：用描述法表示：$R=\{<x,y>|x,y\in P(A)\wedge x\subseteq y\}$，

用列举法表示：$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},A\}$，

$R=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,A>,<\{a\},\{a\}>,<\{a\},A>,$
$<\{b\},\{b\}>,<\{b\},A>,<A,A>\}$

R 的关系矩阵与 R 的关系图如图 3.10 所示。

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

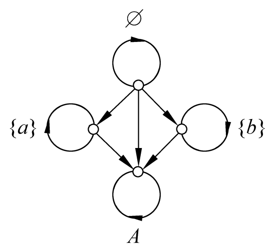

图 3.10　R 的关系矩阵与 R 的关系图

3.5　关系的运算

3.5.1　基本概念

集合可对关系作并、交、差、补运算，但为了运算结果作为关系的意义更明确，也要求运算对象应有相同的域，从而运算结果是同一域间的关系。

定义 3.15　设 R 是二元关系。

(1) R 中所有的有序对的第一元素构成的集合称为 R 的定义域，记作 dom R。

表示为 $\mathrm{dom}\,R=\{x\mid \exists y(<x,y>\in \mathbf{R})\}$。

(2) R 中所有有序对的第二元素构成的集合称为 R 的值域，记作 ran R。

表示为 $\mathrm{ran}\,R=\{y\mid \exists x(<x,y>\in \mathbf{R})\}$。

(3) R 的定义域和值域的并集称为 R 的域，记作 fld R。

表示为 $\mathrm{fld}\,R=\mathrm{dom}\,R\cup \mathrm{ran}\,R$。

例 3.20　设 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$，则

$$\mathrm{dom}\,R=\{1,2,4\}$$
$$\mathrm{ran}\,R=\{2,3,4\}$$
$$\mathrm{fld}\,R=\{1,2,3,4\}$$

例 3.21　设 $A=\{1,2,3,4\}$，若 $R=\{<x,y>|(x-y)/2$ 是整数，$x,y\in A\}$，$S=\{<x,y>|(x-y)/3$ 是正整数，$x,y\in A\}$，求 $R\cup S$，$R\cap S$，$S-R$，$\sim R$，$R\oplus S$。

解：$R=\{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,1>,<3,3>,<4,2>,$
$<4,4>\}$

$S=\{<4,1>\}$

$R\cup S=\{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,1>,<3,3>,<4,2>,$

$<4,4>,<4,1>\}$

$R\cap S=\varnothing$

$S-R=S=\{<4,1>\}$

$\sim R=A\times A-R=\{<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<3,4>,$
$<4,1>,<4,3>\}$

$R\oplus S=(R\cup S)-(R\cap S)=R\cup S$
$=\{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,1>,<3,3>,<4,2>,$
$<4,4>,<4,1>\}$

3.5.2 复合关系

假设有 a、b、c 3人,a、b 是兄妹关系,b、c 是母子关系,则 a、c 是舅甥关系。又如,设 R 是兄妹关系,S 是母子关系,则 R 与 S 的复合 T 是舅甥关系。再如,R 是父子关系,R 与 R 复合就是祖孙关系了。

定义 3.16 设 A、B、C 是3个任意集合,R 是集合 A 到 B 的二元关系,S 是集合 B 到 C 的二元关系,则定义关系 R 和 S 的合成或复合关系。

$R\circ S=\{<a,c>|\ a\in A,c\in C\wedge\exists b\in B$,使 $<a,b>\in R$ 且 $<b,c>\in S\}$。

例如,有关系 $R=\{<1,2>,<2,4>,<3,4>,<5,6>\}$,关系 $S=\{<2,1>,<2,5>,<6,3>\}$,则 R 和 S 的复合关系 $R\circ S=\{<1,1>,<1,5>,<5,3>\}$。

例 3.22 设 $F=\{<3,3>,<6,2>\}$,$G=\{<2,3>\}$,则

$$F\circ G=\{<6,3>\}$$
$$G\circ F=\{<2,3>\}$$

例 3.23 某集合 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,R 是 A 上的关系,S 是 A 到 B 的关系。

$$R=\{<a,a>,<a,c>,<b,b>,<c,b>,<c,c>\}$$
$$S=\{<a,1>,<a,4>,<b,2>,<c,4>,<c,5>\}$$

求 $R\circ S$。

解:$R\circ S=\{<a,1>,<a,4>,<a,5>,<b,2>,<c,2>,<c,4>,<c,5>\}$

定理 3.4 设 I_A、I_B 为集合 A、B 上的恒等关系,$R=A\times B$,那么

(1) $I_A\circ R=R\circ I_B=R$;

(2) $\varnothing\circ R=R\circ\varnothing=\varnothing$。

证明:(1) 任取 $<x,y>$,

$<x,y>\in I_A\circ R$

$\Leftrightarrow\exists t(<x,t>\in I_A\wedge(t,y)\in R)$

$\Leftrightarrow\exists t(x=t\wedge(t,y)\in R)$

$\Leftrightarrow<x,y>\in R$

所以有 $I_A\circ R=R$。

同理可证 $R\circ I_B=R$。

(2) 证明略。

从例 3.22 可看出，一般地，$R\circ S\neq S\circ R$，即关系的复合运算不满足交换律，但是满足结合律。

定理 3.5　设 R 是 A 到 B 的关系，S 是 B 到 C 的关系，T 是 C 到 D 的关系，则 $(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$。

证明：

$$\begin{aligned}
<x,w>\in((R\circ S)\circ T) &\Leftrightarrow \exists z(<x,z>\in R\circ S\wedge<z,w>\in T)\\
&\Leftrightarrow \exists z(\exists y(<x,y>\in R\wedge<y,z>\in S)\wedge<z,w>\in T)\\
&\Leftrightarrow \exists z\,\exists y((<x,y>\in R\wedge<y,z>\in S)\wedge<z,w>\in T)\\
&\Leftrightarrow \exists y\,\exists z(<x,y>\in R\wedge(<y,z>\in S\wedge<z,w>\in T))\\
&\Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in R\wedge\exists z(<y,z>\in S\wedge<z,w>\in T))\\
&\Leftrightarrow \exists y\ (<x,y>\in R\wedge<y,w>\in S\circ T)\\
&\Leftrightarrow <x,w>\in R\circ(S\circ T)
\end{aligned}$$

所以 $(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$，即关系的复合运算满足结合律。

例 3.24　设集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，R、S 均为 A 上的二元关系，且

$$\begin{aligned}
R&=\{<x,y>\mid x+y=4\}\\
&=\{<0,4>,<4,0>,<1,3>,<3,1>,<2,2>\}\\
S&=\{<x,y>\mid y-x=1\}\\
&=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>\}
\end{aligned}$$

求 $R\circ S$，$S\circ R$，$R\circ R$，$S\circ S$，$(R\circ S)\circ R$，$R\circ(S\circ R)$。

解： $R\circ S=\{<4,1>,<1,4>,<3,2>,<2,3>\}=\{<x,z>\mid x+z=5\}$

$S\circ R=\{<0,3>,<1,2>,<2,1>,<3,0>\}=\{<x,z>\mid x+z=3\}$

$R\circ R=\{<0,0>,<4,4>,<1,1>,<3,3>,<2,2>\}=\{<x,z\mid x-z=0\}$

$S\circ S=\{<0,2>,<1,3>,<2,4>\}=\{<x,z>\mid z-x=2\}$

$(R\circ S)\circ R=\{<4,3>,<1,0>,<3,2>,<2,1>\}$

$R\circ(S\circ R)=\{<4,3>,<3,2>,<2,1>,<1,0>\}$

定理 3.6　设 F、G、H 是任意关系，则

(1) $F\circ(G\cup H)=F\circ G\cup F\circ H$

(2) $(G\cup H)\circ F=G\circ F\cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H)\subseteq F\circ G\cap F\circ H$

(4) $(G\cap H)\circ F\subseteq G\circ F\cap H\circ F$

证明略。

可用数学归纳法证明定理 3.5 的推广形式：

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_n)=R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\cdots\cup R\circ R_n$$

$$(R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_n)\circ R=R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\cdots\cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n)\subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap\cdots\cap R\circ R_n$$

$$(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n)\circ R\subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap\cdots\cap R_n\circ R$$

3.5.3　逆关系

定义 3.17　设 R 是集合 A 到 B 的二元关系，则定义一个 B 到 A 的二元关系

$R^{-1}=\{<b,a> \mid <a,b>\in R\}$,称为 R 的逆关系,记作 R^{-1}。

说明:

(1) R^{-1}就是将所有 R 中的有序对中的两个元素交换次序成为 R^{-1},故 $|R|=|R^{-1}|$。

(2) R^{-1}的关系矩阵是 R 的关系矩阵的转置,即 $\boldsymbol{M}_R^{-1}=\boldsymbol{M}_{R^{-1}}$

(3) R^{-1}的关系 T 图是将 R 的关系图中的弧改变方向所得。

例 3.25 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$,A 的关系为 $R=\{<a,a>,<a,d>,<b,d>,<c,a>,<c,b>,<d,c>\}$,则 $R^{-1}=\{<a,a>,<d,a>,<d,b>,<a,c>,<b,c>,<c,d>\}$。

例 3.26 集合 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,R 是 A 上的关系,S 是 A 到 B 的关系。

$$R=\{<a,a>,<a,c>,<b,b>,<c,b>,<c,c>\}$$
$$S=\{<a,1>,<a,4>,<b,2>,<c,4>,<c,5>\}$$

试验证 $S^{-1}\circ R^{-1}=(R\circ S)^{-1}$。

解:$R\circ S=\{<a,1>,<a,4>,<a,5>,<b,2>,<c,2>,<c,4>,<c,5>\}$

$R^{-1}=\{<a,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,c>\}$

$S^{-1}=\{<1,a>,<2,b>,<4,a>,<4,c>,<5,c>\}$

$S^{-1}\circ R^{-1}=\{<1,a>,<2,b>,<2,c>,<4,a>,<4,c>,<5,a>,<5,c>\}$

$(R\circ S)^{-1}=\{<1,a>,<2,b>,<2,c>,<4,a>,<4,c>,<5,a>,<5,c>\}$

故可验证 $S^{-1}\circ R^{-1}=(R\circ S)^{-1}$。

定理 3.7 设 R 是 A 到 B 的关系,S 是 B 到 C 的关系,则

$$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$$

证明: $<z,x>\in(R\circ S)^{-1}$

$\Leftrightarrow<z,x>\in(R\circ S)$

$\Leftrightarrow \exists y\in B(<x,y>\in R \wedge <y,z>\in S)$

$\Leftrightarrow \exists y\in B(<z,y>\in S^{-1} \wedge <y,x>\in R^{-1})$

$\Leftrightarrow<z,x>\in S^{-1}\circ R^{-1}$

从而,$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$。

注意:复合关系的逆等于它们逆关系的反复合。而$(R\circ S)^{-1}\neq R^{-1}\circ S^{-1}$,因 R^{-1}是 B 到 A 的关系,S 是 C 到 B 的关系,所以 $S^{-1}\circ R^{-1}$是可以复合的,而 $R^{-1}\circ S^{-1}$是不能复合的。

定理 3.8 设 R 和 S 均是 A 到 B 的关系,则

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$;

(2) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$;

(3) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$;

(4) $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$。

证明:这里只证明(3)和(4),(1)和(2)留作练习。

(3) $<a,b>\in(R\cap S)^{-1}$

$\Leftrightarrow<b,a>\in R\cap S$

$\Leftrightarrow \langle b,a\rangle \in R \wedge \langle b,a\rangle \in S$

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle \in R^{-1} \wedge \langle a,b\rangle \in S^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle \in R^{-1} \cap S^{-1}$

因此，$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$。

(4) $(R-S)^{-1}=(R\cap \sim S)^{-1}=R^{-1}\cap(\sim S)^{-1}=R^{-1}\cap \sim S^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$。

例 3.27　设集合 $A=\{1,2\}$，R、S 均为 A 上的二元关系，且

$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$，$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，则

$R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle\}$，$S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，可见，

$(R^{-1})^{-1}=R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$

$(R\cup S)^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}^{-1}$

$\qquad\qquad=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}=R^{-1}\cup S^{-1}$

$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}=\varnothing$

定理 3.9　设 R 是任意关系，则

$$\mathrm{dom}\ R^{-1}=\mathrm{ran}\ R,\ \mathrm{ran}\ R^{-1}=\mathrm{dom}\ R$$

证明：任取 x，$x\in \mathrm{dom}\ R^{-1} \Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle \in R^{-1}) \Leftrightarrow \exists y(\langle y,x\rangle \in R) \Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}\ R$

所以有 $\mathrm{dom}\ R^{-1}=\mathrm{ran}\ R$。

同理可证，$\mathrm{ran}\ R^{-1}=\mathrm{dom}\ R$。

3.5.4　关系幂

定义 3.18　设 R 为 A 上的关系，n 为自然数，则 R 的 n 次幂定义为

(1) $R^0=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}=I_A$；

(2) $R^{n+1}=R^n\circ R$。

由以上定义可知，对于 A 上的任何关系 R_1 和 R_2，都有

$$R_1{}^0=R_2{}^0=I_A$$

也就是说，A 上任何关系的 0 次幂都相等，都等于 A 上的恒等关系 I_A。此外，对于 A 上的任何关系 R，都有 $R^1=R$，因为 $R^1=R^0\circ R=I_A\circ R=R$。

下面考虑 $n\geqslant 2$ 的情况。如果 R 是用集合表达式给出的，则可以通过 $n-1$ 次右复合计算得到 R^n。如果 R 是用关系矩阵 $\boldsymbol{M}$ 给出的，则 R^n 的关系矩阵是 $\boldsymbol{M}^n$，即 n 个矩阵 $\boldsymbol{M}$ 之积。与普通矩阵乘法不同的是，其中的相加是逻辑加，即

$$1+1=1,1+0=0+1=1,0+0=0$$

如果 R 是用关系图 G 给出的，则可以直接由图 G 得到 R^n 的关系图 G'。G' 的顶点集与 G 相同。考察 G 的每个顶点 x_i，如果在 G 中从 x_i 出发经过 n 步长的路径到达顶点 x_j，则在 G' 中加一条从 x_i 到 x_j 的边。当找到所有这样的边以后，就得到图 G'。

例 3.28　设 $A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$，求 R 的各次幂，分别用矩阵和关系图表示。

解：R 的关系矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则 R^2、R^3、R^4 的关系矩阵分别是

$$M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M^3=M^2M=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M^4=M^3M=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此 $M^4=M^2$，即 $R^4=R^2$。可以得到

$$R^2=R^4=R^6=\cdots$$
$$R^3=R^5=R^7=\cdots$$

而 R^0，即 I_A 的关系矩阵是

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

至此，R 各次幂的关系矩阵都得到了。

使用关系图的方法得到的 R^0，R^1，R^2，R^3，…的关系图如图 3.11 所示。

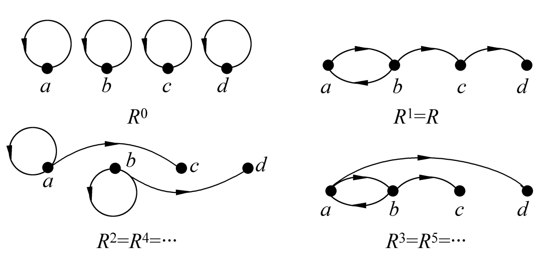

图 3.11 例 3.28 的关系图

3.5.5 幂运算的性质

定理 3.10 设 A 为 n 元集，R 是 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t，使 $R^s=R^t$。

证明：R 为 A 上的关系，对任何自然数 k，R^k 都是 $A\times A$ 的子集。又知 $|A\times A|=n^2$，$|P(A\times A)|=2^{n^2}$，即 $A\times A$ 的不同子集仅 2^{n^2} 个。当列出 R 的各次幂 $R^0,R^1,R^2,\cdots,R^{2^{n^2}},\cdots$，必存在自然数 s 和 t 使 $R^s=R^t$。

定理 3.11　设 R 是 A 上的关系，$m,n\in\mathbf{N}$，则

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$；

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$。

证明：(1) 对于任意给定的 $m\in\mathbf{N}$，施归纳于 n。

若 $n=0$，则有

$$R^m\circ R^0=R^m\circ I_A=R^m=R^{m+0}$$

假设 $R^m\circ R^n=R^{m+n}$，则有

$$R^m\circ R^{n+1}=R^m\circ(R^n\circ R)=(R^m\circ R^n)\circ R=R^{m+n+1},$$

所以，对一切 $m,n\in\mathbf{N}$，有 $R^m\circ R^n=R^{m+n}$。

(2) 对于任意给定的 $m\in\mathbf{N}$，施归纳于 n。

若 $n=0$，则有

$$(R^m)^0=I_A=R^0=R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n=R^{mn}$，则有

$$(R^m)^{n+1}=(R^m)^n\circ R^m=(R^{mn})\circ R^m=R^{mn+m}=R^{m(n+1)}$$

所以，对一切 $m,n\in\mathbf{N}$，有 $(R^m)^n=R^{mn}$。

定理 3.12　设 R 是 A 上的关系，若存在自然数 s、$t(s<t)$ 使 $R^s=R^t$，则

(1) 对任何 $k\in\mathbf{N}$，有 $R^{s+k}=R^{t+k}$；

(2) 对任何 $k,i\in\mathbf{N}$，有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中 $p=t-s$；

(3) 令 $S=\{R^0,R^1,\cdots,R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q\in\mathbf{N}$，有 $R^q\in S$。

证明：(1) $R^{s+k}=R^s\circ R^k=R^t\circ R^k=R^{t+k}$

(2) 对 k 归纳。

若 $k=0$，则有 $R^{s+0p+i}=R^{s+i}$。

假设 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中 $p=t-s$，则

$$\begin{aligned}R^{s+(k+1)p+i}&=R^{s+kp+i+p}=R^{s+kp+i}\circ R^p\\&=R^{s+i}\circ R^p=R^{s+p+i}=R^{s+t-s+i}\\&=R^{t+i}=R^{s+i}\end{aligned}$$

由归纳法，命题得证。

(3) 任取 $q\in\mathbf{N}$，若 $q<t$，显然有 $R^q\in S$；若 $q\geqslant t$，则存在自然数 k 和 i，使

$$q=s+kp+i$$

其中 $0\leqslant i\leqslant p-1$，于是 $R^q=R^{s+kp+i}=R^{s+i}$。而 $s+i\leqslant s+p-1=s+t-s-1=t-1$，这就证明了 $R^q\in S$。

通过上面的定理可以看出，有穷集 A 上的关系 R 的幂序列 $R^0,R^1,\cdots$是一个周期性变化的序列。就像正弦函数，利用它的周期性可以将 R 的高次幂化简为 R 的低次幂。

例 3.29　设 $A=\{a,b,d,e,f\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,d\rangle\}$，求出最小的自然数 m 和 n，使 $m<n$ 且 $R^m=R^n$。

解：由 R 的定义可以看出 A 中的元素可分成两组，即$\{a,b\}$和$\{d,e,f\}$。它们在 R