第3章 随机过程的线性变换

学习指导

本章学习目标

本章学习随机过程变换的基本概念和基本定理，随机过程通过线性系统分析，限带过程，随机过程通过离散时间线性系统分析，最佳线性滤波器，线性系统输出端随机过程的概率分布。最后介绍有色高斯噪声的模拟。

本章学习目标如下：

- 理解随机过程线性变换的概念。
- 掌握线性变换的两个基本定理。
- 掌握线性系统分析的时域分析法和频域分析法。
- 掌握随机序列通过离散时间线性系统的分析方法。
- 理解最佳线性滤波器的基本概念和性质，掌握匹配滤波器的定义、性质和计算。
- 了解线性系统输出端概率密度的确定。
- 了解常用的时间序列模型及其应用。

本章学习的重点和难点

本章学习重点：

- 线性系统分析的时域分析法和频域分析法。
- 最佳线性滤波器的基本概念和性质。
- 匹配滤波器的定义、性质和计算。

本章学习难点：

- 匹配滤波器的定义、性质和计算。

思维导图

第 3 章的思维导图如图 3.1 所示。

图 3.1　第 3 章的思维导图

内 容 概 要

随机过程的变换可以看作随机过程通过系统的分析，系统一般分为线性系统和非线性系统两大类，因此随机过程的变换也分为线性变换和非线性变换两大类。

3.1 变换的基本概念和线性变换的基本定理

3.1.1 变换的基本概念

随机过程的变换可以用系统的观点来加以解释。假定 $Y(t)$看作随机过程 $X(t)$通过系统后的响应，可表示为 $Y(t)=T[X(t)]$。变换有确定性变换和随机性变换两种。若 e_1 和 e_2 是两个随机试验结果，且 $x(t,e_1)=x(t,e_2)$，则 $y(t,e_1)=y(t,e_2)$，则称 T 是确定性变换，否则称为随机性变换。

对于任意两个随机变量 A_1 和 A_2 及任意两个随机过程 $X_1(t)$和 $X_2(t)$，若满足

$$L[A_1X_1(t)+A_2X_2(t)]=A_1L[X_1(t)]+A_2L[X_2(t)]$$

则称 L 是线性变换。对于线性变换 L，若

$$Y(t+\varepsilon)=L[X(t+\varepsilon)]$$

其中 ε 为任意常数，即输入的时延对输出也只产生一个相应的时延，则称 L 是线性时不变的。

3.1.2 线性变换的基本定理

设 $Y(t)=L[X(t)]$，其中 L 是线性变换，变换两个定理描述了随机过程经过线性变换后数字特征的变化。

定理 1：
$$E[Y(t)]=L\{E[X(t)]\} \tag{3.1.1}$$
即随机过程经过线性变换后，其输出的数学期望等于输入的数学期望通过线性变换后的结果。

该定理也表明，若把 L 和 E 看作算子，则 L 和 E 是可以交换次序的。

定理 2：
$$R_{XY}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)] \tag{3.1.2}$$
$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]=L_{t_1}L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)] \tag{3.1.3}$$
其中 L_{t_1} 表示对 t_1 作 L 变换，L_{t_2} 表示对 t_2 作 L 变换。

从两个定理可知，对于线性变换，输出的均值和相关函数分别由输入的均值和相关函数确定。推广而言，对于线性变换，输出的 k 阶矩由输入的相应阶矩来确定。如

$$E\{Y(t_1)Y(t_2)Y(t_2)\}=L_{t_1}L_{t_2}L_{t_3}\{E[X(t_1)X(t_2)X(t_2)]\} \tag{3.1.4}$$

由两个基本定理可以看出，对于线性时不变系统，若 $X(t)$是严格平稳的，则 $Y(t)$也是严格平稳的。若 $X(t)$是广义平稳的，则 $Y(t)$也是广义平稳的。

假定 $X(t)$ 的导数表示为 $\dot{X}(t)$，则导数过程有如下性质：

(1)
$$m_{\dot{X}}(t)=\mathrm{d}m_X(t)/\mathrm{d}t \tag{3.1.5}$$
或者写成
$$E\left[\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{E[X(t)]\} \tag{3.1.6}$$

从式(3.1.6)可以看出，E 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 运算符号是可以交换次序的。

(2)
$$R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)=\frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2} \tag{3.1.7}$$
$$R_{\dot{X}}(t_1,t_2)=\frac{\partial R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2} \tag{3.1.8}$$

(3) 若 $X(t)$ 为平稳随机过程，则
$$m_{\dot{X}}(t)=0 \tag{3.1.9}$$
$$R_{X\dot{X}}(\tau)=-\frac{\mathrm{d}R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau},\quad R_{\dot{X}}(\tau)=\frac{\mathrm{d}R_{X\dot{X}}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\mathrm{d}^2R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{3.1.10}$$
$$G_{X\dot{X}}(\omega)=-\mathrm{j}\omega G_X(\omega),G_{\dot{X}}(\omega)=\mathrm{j}\omega G_{X\dot{X}}(\omega)=\omega^2G_X(\omega) \tag{3.1.11}$$
$R_{X\dot{X}}(\tau)$ 是奇函数，且 $R_{X\dot{X}}(0)=0$，可见，平稳随机过程 $X(t)$ 与它的导数 $\dot{X}(t)$ 在同一时刻是正交的和不相关的，若 $X(t)$ 服从正态分布，则它们还是相互独立的。

3.2 随机过程通过线性系统分析——冲激响应法和频谱法

随机过程通过线性系统的常用分析方法有冲激响应法和频谱法，冲激响应法是随机过程通过线性系统分析的基本方法，对于平稳和非平稳随机过程都是适用的，而频谱法只适用于平稳随机过程。

3.2.1 冲激响应法

假定线性系统的冲激响应为 $h(t)$，输入为 $X(t)$，输出 $Y(t)$ 可表示为
$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=h(t)*X(t) \tag{3.2.1}$$
则输出的均值为
$$E[Y(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}m_X(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=h(t)*m_X(t) \tag{3.2.2}$$
若 $X(t)$ 为平稳随机过程，则
$$m_Y=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{d}\tau=m_XH(0) \tag{3.2.3}$$
其中 $H(0)$ 为系统的传递函数在 $\omega=0$ 时的值。

输入和输出的互相关函数、自相关函数分别为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1,t_2-u)h(u)\mathrm{d}u=h(t_2)*R_X(t_1,t_2) \tag{3.2.4}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u=h(t_1)*R_{XY}(t_1,t_2) \tag{3.2.5}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=h(t_1)*h(t_2)*R_X(t_1,t_2) \tag{3.2.6}$$

若 $X(t)$是平稳随机过程，则

$$R_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+u)h(u)\mathrm{d}u=h(-\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.7}$$

$$R_Y(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u=R_{XY}(\tau)*h(\tau) \tag{3.2.8}$$

$$R_Y(\tau)=h(-\tau)*h(\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.9}$$

$$R_{YX}(\tau)=h(\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.10}$$

$$R_Y(\tau)=h(-\tau)*R_{YX}(\tau) \tag{3.2.11}$$

3.2.2 频谱法

所谓频谱法，就是利用系统的传递函数来分析输出的统计特性。线性系统输出与输入的互功率、输出的功率有如下关系：

$$G_{XY}(\omega)=H^*(\omega)G_X(\omega) \tag{3.2.12}$$

$$G_Y(\omega)=H(\omega)G_{XY}(\omega) \tag{3.2.13}$$

$$G_Y(\omega)=|H(\omega)|^2G_X(\omega) \tag{3.2.14}$$

$$G_{YX}(\omega)=H(\omega)G_X(\omega) \tag{3.2.15}$$

$$G_Y(\omega)=H^*(\omega)G_{YX}(\omega) \tag{3.2.16}$$

3.2.3 平稳性的讨论

若输入 $X(t)$是平稳的，$h(t)$在$(-\infty,+\infty)$中都存在（即系统是物理不可实现的），则输出 $Y(t)$也是平稳的，且输入与输出是联合平稳的。

对于物理可实现系统，即当 $t<0$ 时，$h(t)=0$，假定输入 $X(t)$是平稳的，且从$-\infty$ 时加入，则输出是平稳的，且

$$m_Y=m_X\int_0^{+\infty}h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.17}$$

$$R_{XY}(\tau)=\int_0^{+\infty}R_X(\tau+u)h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.18}$$

$$R_Y(\tau)=\int_0^{+\infty}R_{XY}(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}R_X(\tau+v-u)h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3.2.19}$$

若 $X(t)$ 是从 $t=0$ 加入，且令 $\tau=t_1-t_2$，则

$$m_Y(t)=m_X\int_0^t h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.20}$$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2} R_X(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.21}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1} R_{XY}(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.22}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1} R_{XY}(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_X(\tau-u+v)h(v)h(u)\mathrm{d}v\mathrm{d}u \tag{3.2.23}$$

3.3 限带过程

若随机过程在一个有限的频带内具有非零的功率谱，而在频带之外为零，则称其为限带随机过程。很显然，白噪声通过一个限带系统，输出就是一个限带随机过程，常见的限带随机过程有低通随机过程和带通随机过程。

3.3.1 低通随机过程

若随机过程的功率谱 $G_X(\omega)$ 在 $|\omega|<\omega_c$ 内不为零，而在其外为零，则称其为低通随机过程。很显然，白噪声通过低通滤波器后，其输出就是这种低通随机过程。

低通随机过程的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} G_X(\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega \tag{3.3.1}$$

低通随机过程的自相关函数的任意 n 阶导数都是存在的，即

$$R_X^{(n)}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}(j\omega)^n G_X(\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega<\infty \tag{3.3.2}$$

理想低通随机过程的功率谱定义为

$$G_X(\omega)=\begin{cases}N_0/2 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad N_0\text{ 为常数} \tag{3.3.3}$$

其自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{N_0\omega_c}{2\pi}\frac{\sin\omega_c\tau}{\omega_c\tau} \tag{3.3.4}$$

总的平均功率为

$$R_X(0)=\frac{N_0\omega_c}{2\pi} \tag{3.3.5}$$

对于理想低通过程，若以 $\Delta t=\pi/\omega_c$ 的时间间隔对其进行采样，则采样后得到的这组离散数据 $\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是相互正交的。

3.3.2 带通随机过程

若随机过程 $X(t)$ 的功率谱 $G_X(\omega)$ 集中在 ω_0 为中心的频带内，则称 $X(t)$ 为带通随机过程，白噪声通过一个带通滤波器后，其输出为带通随机过程。若在频带内，功率谱密度为常数，则称其为理想带通随机过程。

设理想带通随机过程的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\begin{cases}N_0/2 & \omega_0-\omega_c<\omega<\omega_0+\omega_c \text{ 或 } -\omega_0-\omega_c<\omega<-\omega_0+\omega_c \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{3.3.6}$$

对应的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{N_0\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c\tau}{\omega_c\tau}\cos\omega_0\tau \tag{3.3.7}$$

总的平均功率为

$$R_X(0)=\frac{N_0\omega_c}{\pi} \tag{3.3.8}$$

3.3.3 噪声等效通能带

把白噪声通过线性系统后的非均匀物理谱密度等效为在一定频带内均匀的物理谱密度，这个频带称为噪声等效通能带，记为 Δf_e，它表示系统对噪声功率谱的选择性。

噪声等效通能带为

$$\Delta f_e=\frac{1}{2\pi}\frac{\int_0^{+\infty}F_Y(\omega)\mathrm{d}\omega}{F_Y(\omega_0)}=\frac{\int_0^{+\infty}|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega}{2\pi|H(\omega_0)|^2} \tag{3.3.9}$$

对于低通网络，等效通能带为

$$\Delta f_e=\frac{1}{2\pi}\frac{\int_0^{+\infty}F_Y(\omega)\mathrm{d}\omega}{F_Y(0)}=\frac{\int_0^{+\infty}|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega}{2\pi|H(0)|^2} \tag{3.3.10}$$

噪声等效通能带只由线性系统特性确定。

根据噪声等效通能带，可以写出输出平均功率的表达式，对于带通网络，输出的平均功率为

$$R_Y(0)=N_0\Delta f_e|H(\omega_0)|^2 \tag{3.3.11}$$

对于低通网络，输出的平均功率为

$$R_Y(0)=N_0\Delta f_e|H(0)|^2 \tag{3.3.12}$$

3.4 随机序列通过离散线性系统分析

随机序列通过离散线性系统的分析同样有冲激响应法和频谱法(或 z 域法)。假定离散线性系统的单位样值响应为 $h(n)$,系统传递函数 $H(\omega)$与单位样值响应之间是离散傅里叶变换的关系,即

$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} \tag{3.4.1}$$

或者用 z 变换表示为

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)z^{-n} \tag{3.4.2}$$

随机序列 $X(n)$通过线性系统后,输出 $Y(n)$为

$$Y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(n-k)X(k)=h(n)*X(n) \tag{3.4.3}$$

输出的均值为

$$m_Y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)m_X(n-k)=h(n)*m_X(n) \tag{3.4.4}$$

输入与输出的互相关函数为

$$R_{XY}(n_1,n_2)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)R_X(n_1,n_2-k)=h(n_2)*R_X(n_1,n_2) \tag{3.4.5}$$

输出的自相关函数为

$$R_Y(n_1,n_2)=h(n_1)*R_{XY}(n_1,n_2)=h(n_1)*h(n_2)*R_X(n_1,n_2) \tag{3.4.6}$$

若输入 $X(n)$为平稳随机序列,则输出也是平稳随机序列,且

$$m_Y=m_X\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)=m_XH(0) \tag{3.4.7}$$

其中,$H(0)$是系统传递函数 $H(\omega)$在 $\omega=0$ 的值。

$$R_{XY}(m)=h(-m)*R_X(m) \tag{3.4.8}$$

$$R_Y(m)=h(m)*R_{XY}(m)=h(m)*h(-m)*R_X(m) \tag{3.4.9}$$

$$G_{XY}(\omega)=H(-\omega)G_X(\omega) \tag{3.4.10}$$

$$G_Y(\omega)=H(\omega)G_{XY}(\omega)=|H(\omega)|^2G_X(\omega) \tag{3.4.11}$$

若用 z 变换表示,则

$$G_{XY}(z)=H(z^{-1})G_X(z) \tag{3.4.12}$$

$$G_Y(z)=H(z)G_{XY}(z)=H(z)H(z^{-1})G_X(z) \tag{3.4.13}$$

3.5 最佳线性滤波器

对于目标检测系统而言,接收机输出的信噪比越高,越容易发现目标,同样在通信系

统中,信噪比越大,信息传输发生错误的概率越小,因此,能给出最大信噪比的接收机,其系统的性能往往也是最好的,以输出信噪比最大作为准则设计的最佳线性滤波器是许多接收机的重要组成部分。

3.5.1 输出信噪比最大的最佳线性滤波器

假定线性系统的传递函数为 $H(\omega)$,输入波形为

$$X(t)=s(t)+w(t) \tag{3.5.1}$$

式中,$s(t)$是确知信号,$w(t)$是零均值平稳随机过程,功率谱密度为 $G_w(\omega)$。输出 $Y(t)$ 可表示为

$$Y(t)=s_0(t)+w_0(t) \tag{3.5.2}$$

其中

$$s_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{3.5.3}$$

式中,$S(\omega)$是输入信号 $s(t)$的频谱,$H(\omega)$是系统的传递函数,$w_0(t)$是输出的噪声,功率谱密度为

$$G_{w_0}(\omega)=G_w(\omega)\,|\,H(\omega)\,|^2 \tag{3.5.4}$$

输出噪声的平均功率为

$$E[w_0^2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_w(\omega)\,|\,H(\omega)\,|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{3.5.5}$$

定义在某个时刻 $t=t_0$ 时滤波器输出端信号的瞬时功率与噪声的平均功率之比(简称信噪比)为

$$d_0=\frac{s_0^2(t_0)}{E[w_0^2(t)]} \tag{3.5.6}$$

将式(3.5.3)和式(3.5.5)代入式(3.5.6),得

$$d_0=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)H(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_w(\omega)\,|\,H(\omega)\,|^2\,\mathrm{d}\omega} \tag{3.5.7}$$

可以证明使信噪比最大的最佳线性滤波器传递函数为

$$H(\omega)=cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}/G_w(\omega) \tag{3.5.8}$$

最大的信噪比为

$$d_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |\,S(\omega)\,|^2\,\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_w(\omega)\,\mathrm{d}\omega} \tag{3.5.9}$$

最佳滤波器的输出信号为

$$s_0(t)=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\,S(\omega)\,|^2}{G_w(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega \tag{3.5.10}$$

由式(3.5.10)可以看出，当 $t=t_0$ 时，输出信号达到最大。

最佳滤波器的幅频特性为

$$|H(\omega)|=c|S(\omega)|/G_w(\omega) \tag{3.5.11}$$

最佳线性滤波器幅频特性与信号频谱的幅度呈正比，与噪声的功率谱密度呈反比，对于某个频率点，信号越强，该频率点的加权系数越大，噪声越强，加权越小。可见，最佳线性滤波器的幅频特性有抑制噪声的作用。

最佳滤波器的相频特性为

$$\arg H(\omega)=-\arg S(\omega)-\omega t_0 \tag{3.5.12}$$

最佳滤波器的相频特性 $\arg H(\omega)$起到了抵消输入信号相角 $\arg S(\omega)$的作用，并且使输出信号 $s_0(t)$的全部频率分量的相位在 $t=t_0$ 时刻相同，达到了相位相同、幅度相加的目的。而噪声是平稳随机过程，各频率分量的相位是随机的，$\arg H(\omega)$不影响噪声的功率，也就是说，滤波器对信号的各频率分量起到幅度同相相加的作用，而对噪声的各频率分量起到功率相加的作用，综合而言，信噪比得到提高。

3.5.2 匹配滤波器

若输入噪声是白噪声，这时的最佳滤波器称为匹配滤波器。即匹配滤波器是在白噪声环境下以输出信噪比最大作为准则的最佳线性滤波器。由式(3.5.8)可得，匹配滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \tag{3.5.13}$$

对上式作傅里叶反变换可得冲激响应为

$$h(t)=cs^*(t_0-t) \tag{3.5.14}$$

即匹配滤波器的冲激响应是输入信号的共轭镜像。对于实信号，

$$h(t)=cs(t_0-t) \tag{3.5.15}$$

即当 $c=1$ 时，$h(t)$与 $s(t)$关于 $t_0/2$ 呈偶对称关系。

匹配滤波器的性质和特点：

(1) 输出的最大信噪比与输入信号的波形无关。

最大的信噪比为

$$d_m=\frac{1}{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\omega)|^2d\omega}{N_0/2}=\frac{2E}{N_0} \tag{3.5.16}$$

式中，E 代表信号的能量，最大信噪比只与信号的能量和噪声的强度有关，与信号的波形无关。

(2) t_0 应该选在信号 $s(t)$结束之后。

若要求系统是物理可实现的，则 t_0 必须选择在信号结束之后才能满足 $h(t)=0(t<0)$。

(3) 匹配滤波器对信号幅度和时延具有适应性。

发射信号为 $s(t)$，接收信号为

$$s_1(t)=as(t-\tau)$$

若按照发射信号 $s(t)$设计匹配滤波器，这个匹配滤波器对接收信号 $s_1(t)$同样也是匹配的，只是出现最大信噪比的时刻相应延迟 τ。

需要注意的是，匹配滤波器对信号的频移不具有适应性。也就是说，若一个信号的频谱为

$$S_2(\omega)=S(\omega+\omega_d)$$

ω_d 可以看作目标由于运动产生的多普勒频移，则原匹配滤波器对 $s_2(t)$是不匹配的。

(4) 脉冲串信号的匹配滤波器。

设脉冲串信号为

$$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}s_1(t-kT) \tag{3.5.17}$$

式中，$s_1(t)$是单个子脉冲信号，M 为脉冲个数，T 为脉冲重复间隔，则匹配滤波器可表示为

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega) \tag{3.5.18}$$

式中，$H_1(\omega)$是单个子脉冲信号的匹配滤波器，而 $H_2(\omega)$为

$$H_2(\omega)=\sum_{k=0}^{M-1}e^{-j\omega(M-1-k)T}=1+e^{-j\omega T}+\cdots+e^{-j\omega(M-1)T} \tag{3.5.19}$$

它是由延迟单元和求和器构成的，通常称为相参积累器，它的作用是调整脉冲串信号的相位，使其在 $t_0=(M-1)T+\tau$ 实现同相相加。匹配滤波器输出的最大信噪比为

$$d_m=M\cdot\frac{2E_1}{N_0}=Md_1 \tag{3.5.20}$$

式中，E_1 代表单个子脉冲信号的能量，d_1 代表子脉冲匹配滤波器输出的最大信噪比。由式(3.5.20)可以看出，脉冲串信号匹配滤波器输出的最大信噪比是单个子脉冲信号匹配滤波器的 M 倍，即信噪比提高了 M 倍，信噪比的提高得益于相参积累器的作用。

3.5.3 广义匹配滤波器

假定噪声具有有理的功率谱，由式(3.5.11)可分解为

$$G_w(\omega)=G_w^+(\omega)G_w^-(\omega) \tag{3.5.21}$$

将式(3.5.21)代入式(3.5.8)，得

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)=\frac{1}{G_w^+(\omega)}\frac{cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}{G_w^-(\omega)} \tag{3.5.22}$$

式中，$H_1(\omega)=\dfrac{1}{G_w^+(\omega)}$称为白化滤波器，它可以将输入噪声变成白噪声，白化滤波器是物理可实现的；而 $H_2(\omega)=\dfrac{cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}{G_w^-(\omega)}$有可能是物理不可实现的，若只取物理可实现部分，即滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_{2c}(\omega)=\frac{1}{G_w^+(\omega)}\left[\frac{cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}}{G_w^-(\omega)}\right]^+ \tag{3.5.23}$$

这样的滤波器称为广义的匹配滤波器。若用拉普拉斯变换表示，则式(3.5.23)可表示为

$$H(s)=H_1(s)H_{2c}(s)=\frac{1}{G_w^+(s)}\left[\frac{cS(-s)\mathrm{e}^{-st_0}}{G_w^-(s)}\right]^+ \tag{3.5.24}$$

3.6 线性系统输出端随机过程的概率分布

线性系统输出端的概率分布有几种情况是可以确定的。

(1) 正态随机过程通过线性系统，输出服从正态分布。

(2) 白噪声通过有限带宽的线性系统，输出服从正态分布。

(3) 宽带噪声通过窄带系统，输出近似服从正态分布。

3.7 信号处理实例：有色高斯随机过程的模拟

3.7.1 频域法

假定要模拟一个时长为 T_d 的高斯随机过程的一个样本函数 $X(t)$，要求功率谱满足 $G_X(f)$，且假定功率谱是带限的，即 $G_X(f)=0(|f|>B)$。模拟的步骤总结如下：

(1) 根据所需的时长 T_d 确定频率 $f_0=1/T_\mathrm{d}$，并由此确定傅里叶级数的系数的长度 $M=[B/f_0]$，其中$[\cdot]$表示取整。

(2) 计算 β 值。

$$\beta=\frac{\int_{-B}^{B}G_X(f)\mathrm{d}f}{\sum_{k=-M}^{M}G_X(kf_0)} \tag{3.7.1}$$

(3) 产生 $2M+1$ 个独立的高斯随机变量，即

$$X_k\sim\mathcal{N}(0,\beta G_X(kf_0))\quad(k=-M,-M+1,\cdots,0,\cdots,M-1,M) \tag{3.7.2}$$

(4) 构建时域样本。

$$X[i]=X(i\Delta t)=\sum_{k=-M}^{M}X_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0k(i\Delta t)} \tag{3.7.3}$$

其中，Δt 为任意小的时间间隔。

3.7.2 时域滤波器法

根据线性系统的理论，功率谱为 1 的白噪声通过线性系统，输出服从正态分布，且输出的功率谱为 $G_X(f)=|H(f)|^2$，因此，要产生功率谱为 $G_X(f)$的有色高斯噪声，只需

设计一个滤波器,该滤波器的传递函数应满足

$$H(f)=\sqrt{G_X(f)} \tag{3.7.4}$$

例如,要产生功率谱密度为$G_X(f)=\dfrac{1}{1+(f/\Delta f)^4}$的高斯随机过程,经过分解可得到

$$H(f)=\frac{(\Delta f)^2}{(f-\Delta f\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4})(f-\Delta f\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\pi/4})} \tag{3.7.5}$$

对式(3.7.5)作傅里叶反变换可得到系统的冲激响应为

$$h(t)=-2\omega_0\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\sin\omega_0 t \quad t>0 \tag{3.7.6}$$

其中,$\omega_0=\sqrt{2}\pi\Delta f$。输出的有色高斯过程为

$$X(t)=W(t)*h(t) \tag{3.7.7}$$

由于计算机产生的是连续时间信号的抽样值,即离散时间信号,因此,模拟滤波器设计后要转换成离散时间形式。

习题解答

3.1　设随机过程$X(t)$是平稳的和可微的,存在导数$X'(t)$。证明对于给定的t,随机变量$X(t)$和$X'(t)$是正交的和不相关的。

证明:由于随机过程$X(t)$是平稳的,故$X(t)$的均值为常数,所以$E[X'(t)]=\dfrac{\mathrm{d}E[X(t)]}{\mathrm{d}t}=0$。

又由于随机过程$X(t)$是可微的,故$R_X(\tau)$的导数必存在,且由于自相关函数$R_X(\tau)$在$\tau=0$处取最大值,所以在$\tau=0$处$R_X(\tau)$的导数为0,即$\left.\dfrac{\mathrm{d}R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0}=0$。

同时$R_{XX'}(\tau)=-\dfrac{\mathrm{d}R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$, $R_{XX'}(0)=-\left.\dfrac{\mathrm{d}R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0}=0$,

故$R_{XX'}(0)=E[X(t)X'(t)]=0$,$X(t)$和$X'(t)$是正交的。

又

$$K_{XX'}(\tau)=R_{XX'}(\tau)-m_X(t)m_{X'}(t+\tau)=R_{XX'}(\tau)$$

所以$K_{XX'}(0)=R_{XX'}(0)=0$,这表明对于给定的t,随机变量$X(t)$和$X'(t)$是不相关的。

归纳:对于随机变量$X(t_1)$和$Y(t_2)$,

要证明它们是正交的,需要证明互相关函数$R_{XY}(t_1,t_2)=0$;

要证明它们是不相关的,需要证明互协方差函数$K_{XY}(t_1,t_2)=0$;

要证明它们是独立的,需要证明$f_{XY}(x,t_1,y,t_2)=f_X(x,t_1)f_Y(y,t_2)$。

3.2　设输入随机过程$X(t)$的自相关函数为$R_X(\tau)=A^2+B\mathrm{e}^{-|\tau|}$,系统冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-at} & t\geqslant 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

A, B, a 均为正实常数。试求输出 $Y(t)$的均值。

解法一：$R_X(\infty)=A^2=m_X^2$，故随机过程 $X(t)$的均值为 $m_X=\pm A$。

$$m_Y(t)=h(t)*m_X(t)=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{d}\tau=m_X\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{d}\tau=\pm\frac{A}{a}$$

即 $m_Y=\pm\dfrac{A}{a}$。

解法二：对冲激响应 $h(t)$进行傅里叶变换。

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega},\quad H(0)=\frac{1}{a}$$

所以，$m_Y=m_XH(0)=\pm\dfrac{A}{a}$。

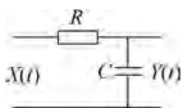


图 E3.3　RC 电路

3.3　已知一个平稳随机过程输入到 RC 低通滤波器，如图 E3.3 所示。$X(t)$的自相关函数 $R_X(t_1,t_2)=\delta(t_1-t_2)=\delta(\tau)$，求输出的自相关函数 $R_Y(\tau)$。

解法一：$H(\omega)=\dfrac{\alpha}{\mathrm{j}\omega+\alpha}$，$\alpha=\dfrac{1}{RC}$，$R_X(\tau)\leftrightarrow G_X(\omega)=1$

$G_Y(\omega)=G_X(\omega)|H(\omega)|^2=\dfrac{\alpha^2}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)(\alpha-\mathrm{j}\omega)}=\dfrac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}$，由于

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\leftrightarrow\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$$

所以

$$R_X(\tau)=\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$$

解法二：$h(t)=\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$

$$\begin{aligned}R_{XY}(\tau)&=h(-\tau)*R_X(\tau)\\&=\int_0^{+\infty}R_X(\tau+u)h(u)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\delta(\tau+u)\alpha\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u\\&=\begin{cases}0 & \tau>0\\ \alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau} & \tau<0\end{cases}\end{aligned}$$

$$R_Y(\tau)=h(\tau)*R_{XY}(\tau)=\int_0^{+\infty}R_{XY}(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u$$

当 $\tau<0$ 时，

$$R_Y(\tau)=\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{\alpha(\tau-u)}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u=\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha u}\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u=\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{\alpha\tau}$$

由于自相关函数是偶函数，所以，当 $\tau\geqslant0$ 时，$R_Y(\tau)=\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}$，即对任意的 τ 有

$$R_Y(\tau)=\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|\tau|}$$

3.4 如图 E3.4 所示的 RL 电路，输入为随机过程 $X(t)$，其均值为 $E[X(t)]=0$，自相关函数为 $R_X(t_1,t_2)=\sigma^2\exp[-\beta|t_1-t_2|]=\sigma^2\exp[-\beta|\tau|]$，试求输出的自相关函数 $R_Y(\tau)$。

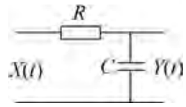


图 E3.4 RL 电路

解：$H(\omega)=\dfrac{\alpha}{j\omega+\alpha}$，$\alpha=\dfrac{R}{L}$，$R_X(\tau)\leftrightarrow G_X(\omega)=\dfrac{\sigma^2 2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

$$G_Y(\omega)=G_X(\omega)|H(\omega)|^2=\frac{\sigma^2 2\beta}{\beta^2+\omega^2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\left[\alpha\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}-\beta\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right]$$

作傅里叶反变换得

$$R_Y(\tau)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|})$$

3.5 设线性时不变系统的冲激响应为 $h(t)=e^{-\beta t}U(t)$，输入平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$，其中 $\alpha>0,\beta>0$。

(1) 求输入输出之间的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$；

(2) 当令 $\alpha=3,\beta=1$ 时，将所得结果画出来。

解：$h(t)=e^{-\beta t}U(t)$，$H(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+\beta}$；$R_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\leftrightarrow G_X(\omega)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

$$R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+u)h(u)\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha|\tau+u|}e^{-u\beta}\mathrm{d}u$$

当 $\tau\geqslant 0$ 时，$R_{XY}(\tau)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\alpha(\tau+u)}e^{-u\beta}\mathrm{d}u=\frac{1}{\alpha+\beta}e^{-\alpha\tau}$

当 $\tau<0$ 时，

$$\begin{aligned}R_{XY}(\tau)&=\int_0^{-\tau}e^{\alpha(\tau+u)}e^{-u\beta}\mathrm{d}u+\int_{-\tau}^{+\infty}e^{-\alpha(\tau+u)}e^{-u\beta}\mathrm{d}u\\&=e^{\alpha\tau}\int_0^{-\tau}e^{u(\alpha-\beta)}\mathrm{d}u+e^{-\alpha\tau}\int_{-\tau}^{+\infty}e^{-(\alpha+\beta)u}\mathrm{d}u\\&=e^{\alpha\tau}\frac{1}{\alpha-\beta}e^{u(\alpha-\beta)}\Big|_0^{-\tau}+e^{-\alpha\tau}\frac{1}{-(\alpha+\beta)}e^{-(\alpha+\beta)u}\Big|_{-\tau}^{\infty}\\&=\frac{1}{\alpha-\beta}e^{\alpha\tau}(-1+e^{-(\alpha-\beta)\tau})+\frac{1}{\alpha+\beta}e^{-\alpha\tau}e^{(\alpha+\beta)\tau}\\&=\frac{1}{\alpha-\beta}(-e^{\alpha\tau}+e^{\beta\tau})+\frac{1}{\alpha+\beta}e^{\beta\tau}\\&=\frac{1}{\beta-\alpha}e^{\alpha\tau}-\frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}e^{\beta\tau}\end{aligned}$$

即

$$R_{XY}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta+\alpha}e^{-\alpha\tau} & \tau\geqslant 0\\[2mm]\dfrac{1}{\beta-\alpha}e^{\alpha\tau}-\dfrac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}e^{\beta\tau} & \tau<0\end{cases}$$

当 $\alpha=3,\beta=1$ 时得

$$R_{XY}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-3\tau} & \tau\geqslant 0\\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{3\tau}+\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{\tau} & \tau<0\end{cases}$$

绘图的 MATLAB 程序如下。

```
clear;
clc;
x = - 8:0.01:4;
y = zeros(length(x),1);
for i = 1:length(x)
    if x(i)< 0
        y(i) = 0.75 * exp(x(i)) - 0.5 * exp(3 * x(i));
    end
    if x(i)> = 0
        y(i) = 0.25 * exp( - 3 * x(i));
    end
end
plot(x,y);
```

程序运行结果如图 E3.5 所示。

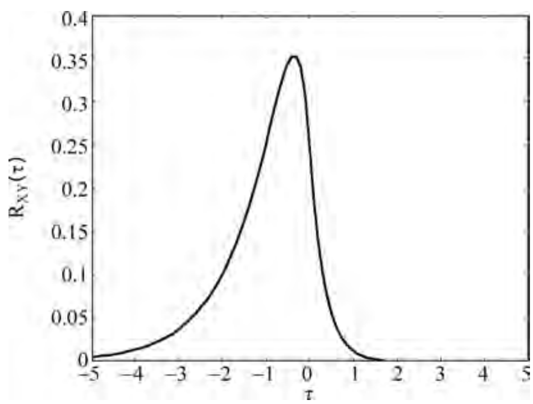


图 E3.5 $R_{XY}(\tau)$图形

3.6 如图 E3.6 所示电路中，输入平稳随机过程 $X(t)$的相关函数为 $R_X(\tau)$。试求 $R_Y(\tau)$、$R_{XY}(\tau)$。

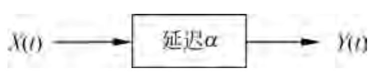


图 E3.6 延迟电路

解法一：由题目可知，$Y(t)=X(t-\alpha)$

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t+\tau)Y(t)]=E[X(t+\tau)X(t-\alpha)]=R_X(\tau+\alpha)$$

$$R_Y(\tau)=E[Y(t+\tau)Y(t)]=E[X(t-\alpha+\tau)X(t-\alpha)]=R_X(\tau)$$

从本题可知，对于平稳随机过程，延时并不能改变其自相关函数的特性。

解法二：根据题意 $Y(t)=X(t-\alpha)=X(t)*\delta(t-\alpha)$，系统传递函数为 $h(t)=\delta(t-\alpha)$。

对于平稳随机过程，有

$$R_{XY}(\tau)=h(-\tau)*R_X(\tau)=\delta(-\tau-\alpha)*R_X(\tau)=\delta(\tau+\alpha)*R_X(\tau)=R_X(\tau+\alpha)$$

$$R_Y(\tau)=h(\tau)*R_{XY}(\tau)=\delta(\tau-\alpha)*R_X(\tau+\alpha)=R_X(\tau)$$

注意：$h(-\tau)=\delta(-\tau-\alpha)=\delta(\tau+\alpha)$，此处利用了冲激函数是偶函数的特性。

3.7　设线性时不变系统的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega-\alpha}{\mathrm{j}\omega+\beta}$$

输入平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-v|\tau|}$，$v>0$，试求输入输出之间的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$。

解：系统的传递函数可以写成

$$H(\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega-\alpha}{\mathrm{j}\omega+\beta}=1-\frac{\alpha+\beta}{\mathrm{j}\omega+\beta}$$

相应的冲激响应函数为

$$h(\tau)=\delta(\tau)-(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-\beta\tau}u(\tau)$$

所以互相关函数

$$\begin{aligned}R_{XY}(\tau)&=h(-\tau)*R_X(\tau)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+x)h(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(x)-(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-\beta x}u(x)]\mathrm{e}^{-v|\tau+x|}\,\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{-v|\tau|}-(\alpha+\beta)\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{e}^{-v|\tau+x|}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当 $\tau\geqslant0$ 时，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{e}^{-v|\tau+x|}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{e}^{-v(\tau+x)}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{-v\tau}}{v+\beta}$

当 $\tau<0$ 时，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{e}^{-v|\tau+x|}\,\mathrm{d}x=\int_0^{-\tau}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{e}^{v(\tau+x)}\mathrm{d}x+\int_{-\tau}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{e}^{-v(\tau+x)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\beta\tau}-\mathrm{e}^{v\tau}}{v-\beta}+\frac{\mathrm{e}^{\beta\tau}}{v+\beta}$$

综合上述结果可得

$$R_{XY}(\tau)=\begin{cases}\mathrm{e}^{v\tau}-\dfrac{\alpha+\beta}{v-\beta}(\mathrm{e}^{\beta\tau}-\mathrm{e}^{v\tau})-\dfrac{\alpha+\beta}{v+\beta}\mathrm{e}^{\beta\tau} & \tau<0\\ \left(1-\dfrac{\alpha+\beta}{v+\beta}\right)\mathrm{e}^{-v\tau} & \tau\geqslant0\end{cases}$$

3.8　如图 E3.3 所示，RC 低通滤波器的输入为白噪声，其物理谱密度 $F_X(\omega)=N_0$，$0<\omega<\infty$，相应的自相关函数 $R_X(\tau)=\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)$。试求输出的 $F_Y(\omega)$ 和 $R_Y(\tau)$，并

证明当 $t_3>t_2>t_1$ 时，$R_Y(t_3-t_1)=\dfrac{R_Y(t_3-t_2)R_Y(t_2-t_1)}{R_Y(0)}$。

解：系统的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{1/\mathrm{j}\omega C+R}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

则输出过程的物理谱密度为 $F_Y(\omega)=|H(\omega)|^2F_X(\omega)=\dfrac{N_0}{1+(RC)^2\omega^2}, 0<\omega<\infty$

输出的功率谱为 $G_Y(\omega)=\dfrac{N_0}{2}\dfrac{1}{1+(RC)^2\omega^2}=\dfrac{N_0}{4RC}\dfrac{2/RC}{1/RC+\omega^2}$

通过傅里叶反变换得到输出的自相关函数 $R_Y(\tau)=\dfrac{N_0}{4RC}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}|\tau|}$。

当 $t_3>t_2>t_1$ 时，

$$\frac{R_Y(t_3-t_2)R_Y(t_2-t_1)}{R_Y(0)}=\frac{\dfrac{N_0}{4RC}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t_3-t_2)}\ \dfrac{N_0}{4RC}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t_2-t_1)}}{\dfrac{N_0}{4RC}}$$

$$=\frac{N_0}{4RC}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t_3-t_1)}=R_Y(t_3-t_1)$$

得证。

注意：

(1) $R_Y(\tau)$和 $G_Y(\omega)$是傅里叶变换关系对，且功率谱 $G_Y(\omega)$和物理谱 $F_Y(\omega)$正频存在$\dfrac{1}{2}$的换算关系；

(2) $F_Y(\omega)=|H(\omega)|^2F_X(\omega)$，此处$|H(\omega)|^2$ 表示传递函数的模$|H(\omega)|$的平方，而不是传递函数 $H(\omega)$的平方。

3.9　假定功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声通过一个滤波器，其传递函数为

$$H(\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_1}$$

其中 ω_1 为常数，求输出的概率密度函数。

解：正态随机过程通过线性系统后输出仍然服从正态分布，所以只需要确定输出的均值 m_Y 和方差 σ_Y^2 即可确定其概率密度函数。

因为 $G_X(\omega)=\dfrac{N_0}{2}$，$G_Y(\omega)=|H(\omega)|^2G_X(\omega)=\dfrac{\omega_1^2}{\omega_1^2+\omega^2}\dfrac{N_0}{2}=\dfrac{N_0\omega_1}{4}\dfrac{2\omega_1}{\omega_1^2+\omega^2}$

$$R_Y(\tau)=\frac{N_0\omega_1}{4}\mathrm{e}^{-\omega_1|\tau|},\quad R_Y(0)=\frac{N_0\omega_1}{4}=m_Y^2+\sigma_Y^2,\quad R_Y(\infty)=0=m_Y^2$$

所以输出的均值 $m_Y=0$，方差 $\sigma_Y^2=\dfrac{N_0\omega_1}{4}$。

故输出的概率密度函数为 $f_Y(y)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi N_0\omega_1}}\exp\left(-\dfrac{2y^2}{N_0\omega_1}\right)$。

3.10 如图 E3.10 所示的 RL 系统中，输入 $X(t)$是物理功率谱密度为 N_0 的白噪声，试用频谱法求系统输出的自相关函数 $R_Y(\tau)$。

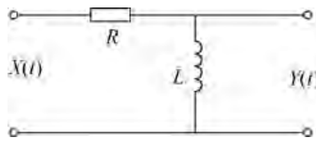


图 E3.10

解：此题的解题思路是对 $G_Y(\omega)$求傅里叶反变换得到 $R_Y(\tau)$。

根据题意，$G_X(\omega)=\dfrac{N_0}{2}$，$H(\omega)=\dfrac{\mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega L+R}$

$$G_Y(\omega)=|H(\omega)|^2G_X(\omega)=\frac{(\omega L)^2}{(\omega L)^2+R^2}\frac{N_0}{2}=\left[1-\frac{R^2}{(\omega L)^2+R^2}\right]\frac{N_0}{2}$$

所以输出的自相关函数 $R_Y(\tau)=\left[\delta(\tau)-\dfrac{R}{2L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}|\tau|}\right]\dfrac{N_0}{2}$。

3.11 如图 E3.11 所示，$X(t)$是输入随机过程，$G_X(\omega)=N_0/2$，$Z(t)$是输出随机过程。试用频谱法求输出 $Z(t)$的均方值。

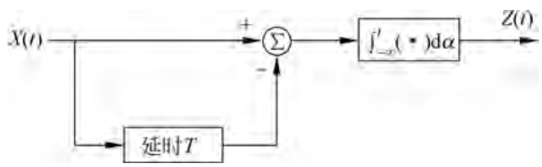


图 E3.11 线性系统示意图

解法一：系统是由两个系统级联而成，系统 1 是延时相消，它的传递函数为 $H_1(\omega)=1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}$，冲激响应为 $h_1(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$

假定系统 1 的输出为 $Y(t)$，那么 $Z(t)=\int_{-\infty}^{t}Y(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\lambda)U(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$，所以，系统 2 的冲激响应为 $h_2(t)=U(t)$，系统 2 的传递函数为 $H_2(\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)=(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})=\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}}$$

$$G_Z(\omega)=\frac{N_0}{2}|H(\omega)|^2=\frac{N_0}{2}\frac{4}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)=\frac{2N_0}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$\sigma_Z^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_Z(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2N_0}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)\mathrm{d}\omega=\frac{2N_0}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)\mathrm{d}\omega=\frac{N_0T}{2}$$

注意，在计算中用到了如下积分公式：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(ax)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}|a|$$

解法二：

将解法一得出的输出的功率谱改写为

$$G_Z(\omega)=\frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega/2)^2}\frac{N_0}{2}=\frac{N_0T^2}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

作傅里叶反变换得到输出的自相关函数，即

$$R_Z(\tau)=\begin{cases}\dfrac{N_0T}{2}\left(1-\dfrac{|\tau|}{T}\right) & |\tau|<T\\ 0 & 其他\end{cases}$$

所以输出的均方值 $R_Z(0)=\dfrac{N_0T}{2}$。

3.12　零均值平稳随机过程 $X(t)$ 输入一个线性滤波器，滤波器的冲激响应是指数形式的一段，即

$$h(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\alpha t} & 0\leqslant t\leqslant T,\alpha>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

证明输出随机过程的功率谱密度为

$$\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}(1-2\mathrm{e}^{-\alpha T}\cos\omega T+\mathrm{e}^{-2\alpha T})G_X(\omega)$$

其中，$G_X(\omega)$ 是输入过程的功率谱密度。

解：滤波器的冲激响应为 $h(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}[U(t)-U(t-T)]$，其中 $U(t)$ 为单位阶跃函数。

$$\begin{aligned}H(\omega)&=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}[1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)T}]=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}[1-\mathrm{e}^{-\alpha T}(\cos\omega T-\mathrm{j}\sin\omega T)]\\&=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}[(1-\mathrm{e}^{-\alpha T}\cos\omega T)+\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\alpha T}\sin\omega T]\end{aligned}$$

所以输出的功率谱密度

$$\begin{aligned}G_Y(\omega)&=|H(\omega)|^2G_X(\omega)\\&=\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}[(1-\mathrm{e}^{-\alpha T}\cos\omega T)^2+(\mathrm{e}^{-\alpha T}\sin\omega T)^2]G_X(\omega)\\&=\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}(1-2\mathrm{e}^{-\alpha T}\cos\omega T+\mathrm{e}^{-2\alpha T})G_X(\omega)\end{aligned}$$

得证。

3.13　设积分电路输入输出之间满足下述关系：

$$Y(t)=\int_{t-T}^{t}X(\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中 T 为常数，且 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 均为平稳随机过程。求证 $Y(t)$ 的功率谱密度

$$G_Y(\omega)=G_X(\omega)\frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega/2)^2}$$

证明：首先确定系统的冲激响应，$h(t)=\int_{t-T}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=U(t)-U(t-T)$，

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega) - \left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T} \\
&= \frac{1}{\mathrm{j}\omega}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}) \\
&= \frac{2}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}}{2\mathrm{j}}\right) \\
&= \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}
\end{aligned}
$$

所以

$$G_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 G_X(\omega) = \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega/2)^2} G_X(\omega)$$

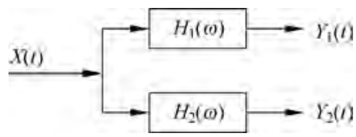


图 E3.14 单输入双输出线性系统

3.14 图 E3.14 为具有一个输入、两个输出的线性系统。求证：输出 $Y_1(t)$和 $Y_2(t)$的互谱密度

$$G_{Y_1Y_2}(\omega) = H_1(\omega)H_2^*(\omega)G_X(\omega)$$

证明：根据图示的线性系统可知，输出 $Y_1(t)$和 $Y_2(t)$分别为

$$Y_1(t) = X(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t-v)h_1(v)\mathrm{d}v$$

$$Y_2(t) = X(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t-u)h_2(u)\mathrm{d}u$$

所以

$$
\begin{aligned}
R_{Y_1X}(\tau) &= E[Y_1(t)X(t-\tau)] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-v)h_1(v)\mathrm{d}v X(t-\tau)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-v)h_1(v)\mathrm{d}v \\
&= h_1(v) * R_X(\tau)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{Y_1Y_2}(\tau) &= E[Y_1(t)Y_2(t-\tau)] \\
&= E\left[Y_1(t)\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-\tau-u)h_2(u)\mathrm{d}u\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{Y_1X}(\tau+u)h_2(u)\mathrm{d}u \\
&= h_2(-\tau) * R_{Y_1X}(\tau) \\
&= h_2(-\tau) * h_1(\tau) * R_X(\tau)
\end{aligned}
$$

两边作傅里叶变换，得

$$G_{Y_1Y_2}(\omega) = H_1(\omega)H_2^*(\omega)G_X(\omega)$$

得证。

3.15 若线性系统输入随机过程 $X(t)$的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^2+8}$$

现已知其输出过程 $Y(t)$ 的功率谱密度 $G_Y(\omega)=1$，求该系统的传递函数。

解：根据 $G_Y(\omega)=H(\omega)H^*(\omega)G_X(\omega)$，所以有

$$H(\omega)H^*(\omega)=\frac{G_Y(\omega)}{G_X(\omega)}=\frac{\omega^2+8}{\omega^2+3}=\frac{2\sqrt{2}+\mathrm{j}\omega}{\sqrt{3}+\mathrm{j}\omega}\,\frac{2\sqrt{2}-\mathrm{j}\omega}{\sqrt{3}-\mathrm{j}\omega}$$

所以，系统的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{2\sqrt{2}+\mathrm{j}\omega}{\sqrt{3}+\mathrm{j}\omega}$$

3.16 假定随机过程 $X(t)$ 的功率谱为 $G_X(f)=\dfrac{1}{1+f^2}$，该过程加到一个传递函数为 $H(f)$ 的滤波器，该滤波器的功能是使输出的功率谱为 1，称该滤波器为白化滤波器。求该滤波器的传递函数，并画出它的实现电路。

解：$G_X(f)=\dfrac{1}{1+f^2}=\dfrac{1}{1+\mathrm{j}f}\cdot\dfrac{1}{1-\mathrm{j}f}=G_X^+(f)G_X^-(f)$

$$G_X(f)=\frac{1}{1+f^2}=\frac{1}{1+\mathrm{j}f}\,\frac{1}{1-\mathrm{j}f}=G_X^+(f)G_X^-(f)$$

白化滤波器的传递函数为 $H(f)=\dfrac{1}{G_X^+(f)}=1+\mathrm{j}f$

系统实现电路如图 E3.16 所示。

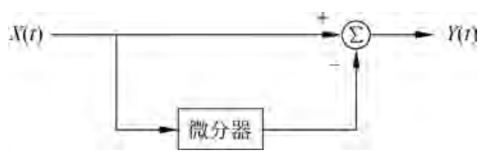


图 E3.16 系统实现电路

3.17 证明随机过程的采样定理。设 $X(t)$ 为限带随机过程，即功率谱密度满足 $G_X(\omega)=0(|\omega|>\omega_c)$，试证明：

$$\hat{X}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(nT)\frac{\sin(\omega_c t-n\pi)}{\omega_c t-n\pi}$$

提示：要证明上式，只需证明 $E\{[X(t)-\hat{X}(t)]^2\}=0$，即 $\hat{X}(t)$ 依均方收敛于 $X(t)$。

证明：由于限带信号的功率谱密度在 $|\omega|>\omega_c$ 时为零，而自相关函数与功率谱是傅里叶变换对的关系，根据信号与系统理论中时域抽样的内插公式，$X(t)$ 的自相关函数可表示为

$$R_X(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_X(nT)\frac{\sin(\omega_c\tau-n\pi)}{\omega_c\tau-n\pi}\quad(T=\pi/\omega_c)$$

设 a 为任意常数，则 $R_X(\tau-a)\leftrightarrow G_X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}$。很显然，$G_X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}$ 也是限带的，故

$R_X(\tau-a)$可表示为

$$R_X(\tau-a)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_X(nT-a)\frac{\sin(\omega_c\tau-n\pi)}{\omega_c\tau-n\pi} \tag{E3.17-1}$$

令 $\tau-a$ 改为τ,则

$$R_X(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_X(nT-a)\frac{\sin[\omega_c(\tau+a)-n\pi]}{\omega_c(\tau+a)-n\pi} \tag{E3.17-2}$$

在式(E3.17-1)中,令 $\tau=t,a=mT$,则

$$R_X(t-mT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_X(nT-mT)\frac{\sin(\omega_c t-n\pi)}{\omega_c t-n\pi}$$

所以

$$\begin{aligned}E\{[X(t)-\hat{X}(t)]X(mT)\}&=E\left\{\left[X(t)-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(nT)\frac{\sin(\omega_c t-n\pi)}{\omega_c t-n\pi}\right]X(mT)\right\}\\&=R_X(t-mT)-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_X(nT-mT)\frac{\sin(\omega_c t-n\pi)}{\omega_c t-n\pi}\\&=0\end{aligned}$$

即 $X(t)-\hat{X}(t)$与 $X(mT)$是正交的,由于 $\hat{X}(t)$是 $X(mT)$的线性组合,所以 $X(t)-\hat{X}(t)$与 $\hat{X}(t)$也是正交的,即 $E\{[X(t)-\hat{X}(t)]\hat{X}(t)\}=0$。

$$\begin{aligned}E\{[X(t)-\hat{X}(t)]^2\}&=E\{[X(t)-\hat{X}(t)]X(t)\}-E\{[X(t)-\hat{X}(t)]\hat{X}(t)\}\\&=E\{[X(t)-\hat{X}(t)]X(t)\}\\&=E\left\{\left[X(t)-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(nT)\frac{\sin(\omega_c t-n\pi)}{\omega_c t-n\pi}\right]X(t)\right\}\\&=R_X(0)-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_X(nT-t)\frac{\sin(\omega_c t-n\pi)}{\omega_c t-n\pi}\end{aligned}$$

在式(E3.17-2)中,令 $\tau=0,a=t$,可得

$$R_X(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_X(nT-t)\frac{\sin(\omega_c\tau-n\pi)}{\omega_c\tau-n\pi}$$

因此 $E\{[X(t)-\hat{X}(t)]^2\}=0$,即 $X(t)$与 $\hat{X}(t)$依均方相等,定理得证。

3.18 已知平稳随机过程的相关函数为

(1) $R_X(\tau)=\sigma_X^2(1-\alpha|\tau|)\quad |\tau|\leqslant\dfrac{1}{\alpha}$

(2) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$

请分别求其等效通能带 $\Delta\omega_e$。

解:(1) $G_X(\omega)=\dfrac{\sigma_X^2}{\alpha}\dfrac{\sin^2(\omega/2\alpha)}{(\omega/2\alpha)^2}$,可以看成白噪声驱动一个低通滤波器,其物理谱为

$$F_X(\omega)=2G_X(\omega)=\frac{2\sigma_X^2}{\alpha}\frac{\sin^2(\omega/2\alpha)}{(\omega/2\alpha)^2}\quad \omega\geqslant 0$$

所以

$$\Delta\omega_e=\frac{\int_0^{+\infty}F_X(\omega)\mathrm{d}\omega}{F_X(0)}=\frac{2\pi R_X(0)}{2\dfrac{\sigma_X^2}{\alpha}}=\frac{\pi\sigma_X^2}{\dfrac{\sigma_X^2}{\alpha}}=\pi\alpha$$

(2) $G_X(\omega)=\sigma_X^2\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$,仍然可看成白噪声驱动一个低通滤波器,同理

$$\Delta\omega_e=\frac{2\pi R_X(0)}{2G_X(0)}=\frac{2\pi\sigma_X^2}{2\dfrac{2\sigma_X^2}{\alpha}}=\frac{\pi\alpha}{2}$$

3.19 设 $X(t)$为一个零均值高斯过程,其功率谱密度 $G_X(f)$如图 E3.19 所示,若每 $1/2W$ s 对 $X(t)$取样一次,得到样本集合 $X(0)$,$X(1/2W)$,…,求前 N 个样本的联合概率密度。

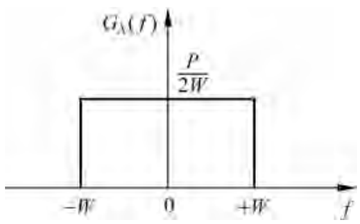


图 E3.19

解:该随机过程的自相关函数 $R_X(\tau)=P\dfrac{\sin 2\pi W\tau}{2\pi W\tau}$,

零均值高斯过程 $X(t)$的方差 $\sigma_X^2=R_X(0)=P$

当抽样时间 $\tau=\dfrac{k}{2W}$时,$R_X(\tau)=P\dfrac{\sin k\pi}{k\pi}=0$,即 $X(0)$,$X(1/2W)$,…是相互独立的。

因此以 $1/2W$ s 的间隔对 $X(t)$均匀抽样,所得的观测值$\left\{X\left(\dfrac{k}{2W}\right)\right\}$是相互独立的,

其中

$$f(x_k)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_X^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_X^2}\right)=\left(\frac{1}{2\pi P}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x_k^2}{2P}\right)$$

所以前 N 个样本的联合概率密度为

$$f_X(\boldsymbol{x})=\prod_{k=0}^{N-1}f_X(x_k)=\left(\frac{1}{2\pi P}\right)^{\frac{N}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2P}\sum_{k=0}^{N-1}x_k^2\right\}$$

其中,$\boldsymbol{x}=[x_0\quad x_1\quad \cdots\quad x_{N-1}]^{\mathrm{T}}$。

3.20 设 $X(n)$是一个均值为零、方差为 σ_X^2 的白噪声,$Y(n)$是单位样值响应为 $h(n)$的线性时不变离散系统的输出,试证:

(1) $E[X(n)Y(n)]=h(0)\sigma_X^2$;

(2) $\sigma_Y^2=\sigma_X^2\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}h^2(n)$。

证明：

（1）

$$E[X(n)Y(n)]=E\left[X(n)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(k)h(n-k)\right]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}E[X(n)X(k)]h(n-k)$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sigma_X^2\delta(n-k)h(n-k)$$
$$=\sigma_X^2 h(0)$$

（2）

$$\sigma_Y^2=E[Y^2(n)]$$
$$=E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(k)h(n-k)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}X(m)h(n-m)\right]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}E[X(k)X(m)]h(n-k)h(n-m)$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sigma_X^2\delta(k-m)h(n-k)h(n-m)$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sigma_X^2 h(n-m)h(n-m)$$
$$=\sigma_X^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h^2(k)$$

3.21　图 E3.21 所示系统，输入为均值为零、方差为 σ_X^2 的白噪声序列，其中 $h_1(n)=a^nU(n)$，$h_2(n)=b^nU(n)$，且$|a|<1$ 和$|b|<1$。试求 σ_Z^2。

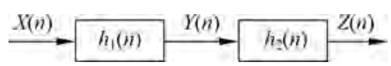


图 E3.21　离散线性系统

解法一：$Z(z)=H_1(z)H_2(z)X(z)=\frac{z}{z-a}\frac{z}{z-b}X(z)$，所以从 $X(n)$到 $Z(n)$的传递函数 $H(z)=H_1(z)H_2(z)=\frac{z}{z-a}\frac{z}{z-b}$

由于 $X(n)$为均值为零、方差为 σ_X^2 的白噪声序列，所以 $G_X(z)=\sigma_X^2$

又 $G_Z(z)=H(z)H(z^{-1})G_X(z)=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}\frac{z^{-2}}{(z^{-1}-a)(z^{-1}-b)}\sigma_X^2$

$$=\frac{zz^{-1}}{(z-a)(z^{-1}-a)}\frac{zz^{-1}}{(z-b)(z^{-1}-b)}\sigma_X^2$$
$$=\left[A\frac{1-a^2}{(z-a)(z^{-1}-a)}+B\frac{1-b^2}{(z-b)(z^{-1}-b)}\right]\sigma_X^2$$

其中 $A=\frac{a}{(1-a^2)(1-ab)(a-b)}$，$B=\frac{-b}{(1-b^2)(1-ab)(a-b)}$

且 $a^{|n|} \leftrightarrow \dfrac{1-a^2}{(z-a)(z^{-1}-a)}$是一对 z 变换关系对，

所以 $R_Z(n)=\left[\dfrac{a}{(1-a^2)(1-ab)(a-b)}a^{|n|}-\dfrac{b}{(1-b^2)(1-ab)(a-b)}b^{|n|}\right]\sigma_X^2$

$$\sigma_Z^2=R_Z(0)=\left[\frac{a}{(1-a^2)(1-ab)(a-b)}-\frac{b}{(1-b^2)(1-ab)(a-b)}\right]\sigma_X^2$$

$$=\frac{(1+ab)(a-b)}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)(a-b)}\sigma_X^2=\frac{(1+ab)}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)}\sigma_X^2。$$

解法二：从 $X(n)$到 $Z(n)$的传递函数为

$$H(z)=H_1(z)H_2(z)=\frac{z}{z-a}\,\frac{z}{z-b}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{az}{z-a}-\frac{bz}{z-b}\right)$$

$$h(n)=\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})u(n)$$

根据上题的结论，$\sigma_Z^2=\sigma_X^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}h^2(n)=\sigma_X^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^{2n+2}-2a^{n+1}b^{n+1}+b^{2n+2}}{(a-b)^2}$

$$=\frac{\sigma_X^2}{(a-b)^2}\left[a^2\sum_{n=0}^{+\infty}(a^2)^n-2ab\sum_{n=0}^{+\infty}(ab)^n+b^2\sum_{n=0}^{+\infty}(b^2)^n\right]$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{(a-b)^2}\left(a^2\frac{1}{1-a^2}-2ab\frac{1}{1-ab}+b^2\frac{1}{1-b^2}\right),\quad |a|<1,|b|<1$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{(a-b)^2}\frac{(1+ab)(a-b)^2}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)}$$

$$=\frac{(1+ab)\sigma_X^2}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)}$$

3.22 设离散系统的单位样值响应 $h(n)=na^{-n}U(n)$，$a>1$，该系统输入为自相关函数为 $R_X(m)=\sigma_X^2\delta(m)$的白噪声，试求系统输出 $Y(n)$的自相关函数和功率谱密度。

解：根据 z 变换的性质，$a^nU(n)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$，$h(n)=na^{-n}U(n)\leftrightarrow -z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{z}{z-a}\right)$

所以单位样值响应的 z 变换为 $H(z)=\dfrac{az}{(z-a)^2}$，同时 $G_X(z)=\sigma_X^2$。

$$G_Y(z)=H(z)H(z^{-1})G_X(z)=\frac{az}{(z-a)^2}\,\frac{az^{-1}}{(z^{-1}-a)^2}\sigma_X^2=\frac{a^2\sigma_X^2}{[1+a^2-a(z+z^{-1})]^2}$$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$，所以 $G_Y(\omega)=\dfrac{a^2\sigma_X^2}{(1+a^2-2a\cos\omega)^2}$。

由于 $a^{-|m|}\leftrightarrow\dfrac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$，所以$\dfrac{(1-a^2)^2}{(1+a^2-2a\cos\omega)^2}\leftrightarrow a^{-|m|}*a^{-|m|}$

所以相关函数为

$$R_Y(m)=\frac{a^2\sigma_X^2}{(1-a^2)^2}(a^{|m|}*a^{|m|})$$

3.23 序列 $Y(n)$ 和 $X(n)$ 满足差分方程 $Y(n)=X(n+a)-X(n-a)$，其中 a 为常数，试用 $X(n)$ 的自相关函数表示 $Y(n)$ 的自相关函数。

解：$R_Y(n_1,n_2)=E[Y(n_1)Y(n_2)]$

$$=E\{[X(n_1+a)-X(n_1-a)][X(n_2+a)-X(n_2-a)]\}$$

$$=R_X(n_1+a,n_2+a)-R_X(n_1+a,n_2-a)-R_X(n_1-a,n_2+a)+R_X(n_1-a,n_2-a)$$

3.24 实值一阶自回归过程 $X(n)$ 满足差分方程 $X(n)+a_1X(n-1)=W(n)$，其中 a_1 为常数，$W(n)$ 为方差为 σ_W^2 的白噪声。证明：

(1) 若 $W(n)$ 均值非零，则 $X(n)$ 非平稳；

(2) 若 $W(n)$ 均值为零，a_1 满足条件 $|a_1|<1$，则 $X(n)$ 的方差为 $\dfrac{\sigma_W^2}{1-a_1^2}$；

(3) 若 $W(n)$ 均值为零，分别求当 $0<a_1<1$ 和 $-1<a_1<0$ 时 $X(n)$ 的自相关函数。

解：(1) 假定 $X(0)=0$，由 $X(n)+a_1X(n-1)=W(n)$ 可得

$$X(n)=-a_1X(n-1)+W(n)$$

$$=-a_1[-a_1X(n-2)+W(n-1)]+W(n)$$

$$=(-a_1)^{n-1}W(1)+\cdots+(-a_1)^2W(n-2)+(-a_1)W(n-1)+W(n)$$

设 $E[W(n)]=m_W\neq 0$，则随机过程 $X(n)$ 的均值为

$$E[X(n)]=E[(-a_1)^{n-1}W(1)+\cdots+(-a_1)^2W(n-2)+(-a_1)W(n-1)+W(n)]$$

$$=m_W[(-a_1)^{n-1}+\cdots+(-a_1)^2+(-a_1)+1]=m_W\frac{1-(-a_1)^n}{1+a_1}$$

很显然，$E[X(n)]$ 不是一个常数，而是一个与 n 有关的函数，所以 $X(n)$ 非平稳；

从相关函数方面来看，也可以说明当 $W(n)$ 均值非零时 $X(n)$ 非平稳，

$$R_X(n+m,n)=E[X(n+m)X(n)]$$

$$=E\{[(-a_1)^{n+m-1}W(1)+\cdots+W(n+m)][(-a_1)^{n-1}W(1)+\cdots+W(n)]\}$$

$$=\sigma_W^2[(-a_1)^m+(-a_1)^{m+2}+\cdots+(-a_1)^{m+2(n-1)}]$$

$$=\begin{cases}\sigma_W^2(-a_1)^m\dfrac{1-a_1^{2n}}{1-a_1^2} & |a_1|<1\\ (-1)^m\sigma_W^2 n & |a_1|=1\end{cases}$$

，易知 $R_X(n+m,n)$ 与时间起点 n 有关，所以 $X(n)$ 非平稳。

(2) 当 $E[W(n)]=0$ 时，易知 $E[X(n)]=0$ 为常数，

而且当 $|a_1|<1$ 时，$R_X(n+m,n)=\sigma_W^2(-a_1)^m\dfrac{1-a_1^{2n}}{1-a_1^2}$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}R_X(n+m,n)=\dfrac{\sigma_W^2(-a_1)^m}{1-a_1^2}=R_X(m)$，则当 $n\to\infty$ 时，$X(n)$ 是渐近平稳的，

所以 $\sigma_X^2=R_X(0)=\dfrac{\sigma_W^2}{1-a_1^2}$。

(3) 由(1)结论，

当 $0<a_1<1$ 时，$R_X(n+m,n)=\sigma_W^2(-a_1)^m\dfrac{1-a_1^{2n}}{1-a_1^2}$，

当 $-1<a_1<0$ 时，$R_X(n+m,n)=\sigma_W^2(-a_1)^m\dfrac{1-a_1^{2n}}{1-a_1^2}$。

3.25 假定一广义平稳随机过程由下面的差分方程描述：

$$X(n)-aX(n-1)=W(n)-bW(n-1)$$

其中 $W(n)$ 为白噪声，方差 $\sigma_W^2=1$，对于参数 a 和 b 取下面两组值，分别画出 $X(n)$ 的功率谱密度，并解释你的结果。(1) $a=0.9$，$b=0.2$；(2) $a=0.2$，$b=0.9$。

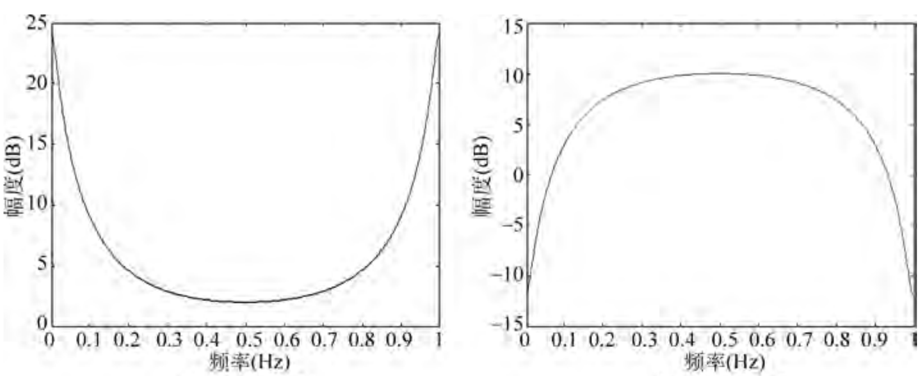
(1) MATLAB 程序如下。

```
B = [1 - 0.2];
A = [1 - 0.9];
Sigma = 1;Ts = 1;Fs = 1/Ts;
[H,w] = freqz(B,A,[0:2 * pi/1000:2 * pi].');
h0 = impz(B,A,1001);
h = ifft(H);
W = Sigma. * randn(500,1) + 0;
X = conv(W,h);
X = X(1:500);
figure,plot(abs(X));xlabel('序号');ylabel('幅度')
% % 理论功率谱
Gx = abs(H).^2 * 4; % 通过生成的传递函数 H 计算功率谱理论值
fset = [0:length(Gx) - 1] * Fs/length(Gx);
figure,plot(fset,10 * log10(abs(Gx)));xlabel('频率(Hz)');ylabel('幅度(dB)');
```

程序运行结果如图 E3.25(a)所示。

(2) 改变参数：`B = [1 - 0.9]; A = [1 - 0.2];`

程序运行结果如图 E3.25(b)所示。



(a) a=0.9,b=0.2　　(b) a=0.2,b=0.9

图 E3.25

根据功率谱图可以发现图(a)与图(b)的功率谱的幅度形状相反,图(a)集中在低频段,图(b)集中在高频段,这是由于二者传输函数零极点相反造成的。

3.26 假定二阶 AR 过程由如下差分方程描述:

$$X(n)-2r\cos(2\pi f_0)X(n-1)+r^2X(n-2)=W(n)$$

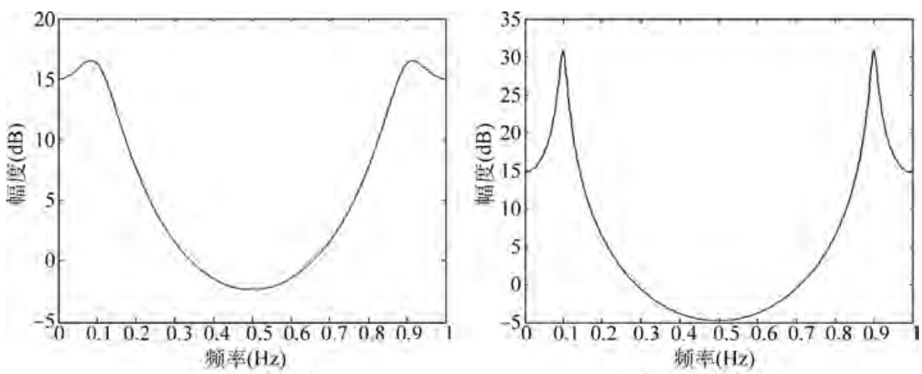
其中 $W(n)$为白噪声,方差 $\sigma_W^2=1$,对于参数 r 和 f_0 取下面两组值,分别画出 $X(n)$的功率谱密度,并解释你的结果。(1)$r=0.7,f_0=0.1$;(2)$r=0.95,f_0=0.1$。(提示:确定 $H(z)$极点的位置)

解:(1) MATLAB 程序如下。

```
f0 = 0.1;r = 0.7;
B = [1];
A = [1 -2 * r * cos(2 * pi * f0) r * r];
Sigma = 1;Ts = 1;Fs = 1/Ts;
[H,w] = freqz(B,A,[0:2 * pi/1000:2 * pi].');
h0 = impz(B,A,1001);
h = ifft(H);
W = Sigma. * randn(500,1) + 0;
X = conv(W,h);
X = X(1:500);
figure,plot(abs(X));xlabel('序号');ylabel('幅度');
Gx = abs(H).^2 * 4; % 功率谱理论值
fset = [0:length(Gx) - 1] * Fs/length(Gx);
figure,plot(fset,10 * log10(abs(Gx)));xlabel('频率(Hz)');ylabel('幅度(dB)');
```

程序运行结果如图 E3.26(a)所示。

(2) 改变程序中参数 $r=0.95$,程序运行结果如图 E3.26(b)所示。



(a) $r=0.7,f_0=0.1$ (b) $r=0.95,f_0=0.1$

图 E3.26

从功率谱形状来看,由于两种情况下,功率谱都为 AR 模型,所以图 E3.26(a)与图 E3.26(b)都存在尖峰。然而,图 E3.26(b)的尖峰比图 E3.26(a)的尖峰更尖锐。从差分方程来看,第二种情况下极点更接近单位圆,因此图 E3.26(b)的峰更尖锐。

3.27 输入过程 $X(n)$的功率谱密度为 σ_X^2,二阶 MA 模型 $Y(n)=X(n)+a_1X(n-$

$1)+a_2X(n-2)$，试求 $Y(n)$ 的自相关函数和功率谱密度。

解：系统的传递函数为 $H(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$，输入的功率谱为 $G_X(z)=\sigma_X^2$，

所以 $G_Y(z)=H(z)H(z^{-1})G_X(z)=(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2})(1+a_1z+a_2z^2)\sigma_X^2$

$$=[1+a_1^2+a_2^2+(a_1+a_1a_2)(z+z^{-1})+a_2(z^2+z^{-2})]\sigma_X^2$$

令 $z=e^{j\omega}$，所以 $G_Y(\omega)=[1+a_1^2+a_2^2+2a_1(1+a_2)\cos\omega+2a_2\cos2\omega]\sigma_X^2$

对 $G_Y(z)=[1+a_1^2+a_2^2+(a_1+a_1a_2)(z+z^{-1})+a_2(z^2+z^{-2})]\sigma_X^2$ 进行 z 反变换得

$$R_Y(m)=[(1+a_1^2+a_2^2)\delta(m)+(a_1+a_1a_2)\delta(|m|-1)+a_2\delta(|m|-2)]\sigma_X^2$$

3.28　平稳随机过程 $X_c(t)$ 的相关函数为

$$R_{X_c}(\tau)=e^{-4|\tau|}$$

若以间隔 20s 为周期对 $X_c(t)$ 采样得到随机序列 $X(n)$，求随机序列 $X(n)$ 的功率谱密度。

解：根据题意，采样间隔 $T_s=20$，则

$$R_X(m)=E\{X_c[(n+m)T_s]X_c(nT_s)\}=R_{X_c}(mT_s)=e^{-4|m|T_s}$$

根据常用相关函数与功率谱密度的关系（若 $R_X(m)=a^{|m|}$，则 $G_X(\omega)=\dfrac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$，$-\pi<\omega<\pi$），令 $a=e^{-4T_s}$，则

$$G_X(\omega)=\frac{1-e^{-8T_s}}{1+e^{-8T_s}-2e^{-4T_s}\cos\omega}\quad -\pi<\omega<\pi$$

3.29　试证明最佳线性滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}/G_w(\omega)$$

式中，c 为常数，$S(\omega)$ 是输入信号的频谱，$G_w(\omega)$ 是输入噪声的功率谱密度，t_0 为信噪比最大的时刻。最佳滤波器输出的信噪比为

$$d_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|S(\omega)|^2}{G_w(\omega)}d\omega$$

证明：假设线性滤波器的输入波形 $X(t)$ 为信号与噪声之和，即

$$X(t)=s(t)+w(t)$$

式中，$s(t)$ 是已知波形的信号，$w(t)$ 是平稳随机噪声，其数学期望为 0，功率谱为 $G_w(\omega)$。

最佳线性滤波器就是要找到一个合适的线性滤波器，使得它的输出信噪比在某一个时刻 t_0 达到最大，下面从频域着手解决这个问题。

假定线性滤波器的传输函数为 $H(\omega)$，$Y(t)$ 代表线性滤波器的输出，根据线性系统的理论，

$$Y(t)=s_0(t)+w_0(t)$$

式中，$s_0(t)$ 和 $w_0(t)$ 分别是输入信号 $s(t)$ 和噪声 $w(t)$ 的输出。

输出信号 $s_0(t)$ 可以写为

$$s_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

式中，$S(\omega)$ 是信号 $s(t)$ 的频谱，且 $S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$。

输出的噪声的平均功率为 $E[w_0^2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2 G_w(\omega)\mathrm{d}\omega$

定义在 $t=t_0$ 时滤波器输出端的信噪比为 $d_0=\frac{s_0^2(t)}{E[w_0^2(t)]}$，将 $s_0(t)$ 和 $E[w_0^2(t)]$ 的表达式代入可得

$$d_0=\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}\omega\right|^2}{2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2 G_w(\omega)\mathrm{d}\omega} \tag{E3.29-1}$$

将式(E3.29-1)改写成如下形式：

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}\omega\right|^2=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\sqrt{G_w(\omega)}\frac{S(\omega)}{\sqrt{G_w(\omega)}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}\omega\right|^2 \tag{E3.29-2}$$

根据施瓦茨不等式可得

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\sqrt{G_w(\omega)}\frac{S(\omega)}{\sqrt{G_w(\omega)}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}\omega\right|^2\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2 G_w(\omega)\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|S(\omega)|^2}{G_w(\omega)}\mathrm{d}\omega \tag{E3.29-3}$$

等号成立的条件是 $H(\omega)\sqrt{G_w(\omega)}=\frac{cS^*(\omega)}{\sqrt{G_w(\omega)}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$，即

$$H(\omega)=\frac{cS^*(\omega)}{G_w(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} \tag{E3.29-4}$$

将式(E3.29-2)和式(E3.29-3)代入式(E3.29-1)，得

$$d_0=\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}\omega\right|^2}{2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2 G_w(\omega)\mathrm{d}\omega}\leqslant\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2 G_w(\omega)\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|S(\omega)|^2}{G_w(\omega)}\mathrm{d}\omega}{2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2 G_w(\omega)\mathrm{d}\omega}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|S(\omega)|^2}{G_w(\omega)}\mathrm{d}\omega$$

所以最大的信噪比为

$$d_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|S(\omega)|^2}{G_w(\omega)}\mathrm{d}\omega \tag{E3.29-5}$$

3.30 设线性滤波器的输入为 $X(t)=s(t)+w(t)$，其中信号

$$s(t)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{\alpha(t-T)} & t\leqslant T\\ 0 & t>T\end{cases}$$

为指数形式脉冲，$\alpha>0$，$w(t)$ 为平稳白噪声。试求匹配滤波器的传输函数 $H(\omega)$，并画出电路示意图。

解：先求信号 $s(t)$ 的频谱

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{A}{\alpha-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}$$

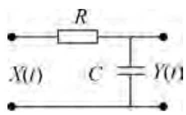


图 E3.30　匹配滤波器实现电路

匹配滤波器的传输函数为

$$H(\omega)=cS^{*}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}=cA\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}}{\alpha+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

取 $t_0=T$，有 $H(\omega)=\dfrac{cA}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$，相应的电路如图 E3.30 所示。

3.31　分析单个射频脉冲信号的匹配滤波。信号 $s(t)$ 是矩形包络的射频脉冲，脉冲宽度为 τ，角频率为 ω_0，其表示式为 $s(t)=a\,\mathrm{rect}(t)\cos\omega_0 t$，其中，

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

且设 τ 时间内有很多个射频振荡周期 T_0，即 $\omega_0\tau=\dfrac{2\pi\tau}{T_0}=2\pi m$，$m\gg1$，$m$ 为整数，相加白噪声的功率谱 $G_w(\omega)=\dfrac{N_0}{2}$。求 $s(t)$ 的匹配滤波器的传递函数、输出信号的波形、输出的信噪比，并画出匹配滤波器的实现框图。

解：先求出信号的频谱

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=a\int_0^{\tau}\cos\omega_0 t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=a\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\tau}}{2\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\omega_0)\tau}}{2\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}\right]$$

考虑到 $\omega_0\tau=2\pi m$，上式变为

$$S(\omega)=a\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{2\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{2\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}\right]$$

$$=a\left[\frac{\sin\dfrac{\omega-\omega_0}{2}\tau}{\omega-\omega_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega_0\tau}{2}}+\frac{\sin\dfrac{\omega+\omega_0}{2}\tau}{\omega+\omega_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega_0\tau}{2}}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}$$

可见 $S(\omega)$ 由两部分组成，都是连续频谱。由于 $m\gg1$，$s(t)$ 为窄带信号，因而在正频率域内第二项可以忽略，在负频率域内第一项可以忽略。取出匹配滤波器输出信噪比最大的时刻 $t=t_0=\tau$，根据 $H(\omega)=cS^{*}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$ 可以求出此时匹配滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=ca\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{2\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{2\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}\right]\tag{E3.31}$$

为了计算输出的最大信噪比 d_{m}，先计算输入信号的能量 E：

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}s^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\tau}a^2\cos^2\omega_0 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2\tau}{2}$$

所以

$$d_{\mathrm{m}}=\frac{E}{N_0/2}=\frac{a^2\tau}{N_0}$$

关于输出信号的波形 $s_0(t)$，可以用输入信号 $s(t)$ 与滤波器的冲激响应 $h(t)$ 的卷积求出：

$$s_0(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)s(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda=c\int_{-\infty}^{+\infty}s(\tau-\lambda)s(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda=c\int_{-\infty}^{+\infty}s(t')s[t'-(\tau-t)]\mathrm{d}t'$$

$$=ca^2\int_{-\infty}^{+\infty}G(t')G[t'-(\tau-t)]\cos\omega_0 t'\cos\omega_0[t'-(\tau-t)]\mathrm{d}t'$$

$$=\frac{ca^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}G(t')G[t'-(\tau-t)]\cos\omega_0(\tau-t)\mathrm{d}t'$$

在上面的推导过程中考虑了$\int_{-\infty}^{+\infty}G(t')G[t'-(\tau-t)]\cos 2\omega_0\left(t'-\frac{\tau-t}{2}\right)\mathrm{d}t'\approx 0$。

通过分段积分得

$$s_0(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ \frac{1}{2}ca^2 t\cos\omega_0(\tau-t) & 0<t\leqslant\tau\\ \frac{1}{2}ca^2(2\tau-t)\cos\omega_0(\tau-t) & \tau<t\leqslant 2\tau\\ 0 & t>2\tau\end{cases}$$

可见，输出信号波形是一个三角形包络的射频脉冲，其宽度为 2τ，射频角频率为 ω_0，最大峰值在 $t=\tau$ 处。

从式(E3.31)可以看出，当 $\omega>0$ 时，该式右边第一项远大于第二项，故传递函数又可以写为 $H(\omega)=\frac{ca}{2\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau})$。可以看出此时 $H(\omega)$ 由两部分级联而成，第一部分$\frac{ca}{2\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}$可以用选择性很高的谐振放大器来实现，第二部分 $1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}$ 可以用延时单元与减法器来完成。匹配滤波器的实现框图如图 E3.31 所示。

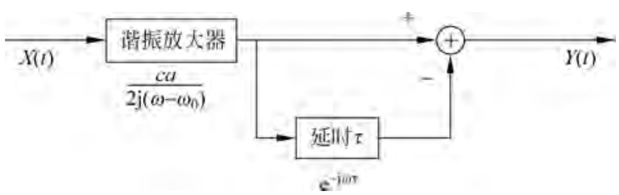


图 E3.31 匹配滤波器的实现框图

3.32 分析相参射频脉冲串信号的匹配滤波器。设信号 $s(t)$为

$$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}s_1(t-kT)$$

其中，$s_1(t)$是习题 3.31 所表示的单个射频脉冲信号，求 $s(t)$的匹配滤波器的传递函数、输出信号的波形、输出的信噪比，并画出匹配滤波器的实现框图。

解：习题 3.31 讨论的是单个射频脉冲信号的匹配问题，可以看出对于单个射频脉冲而言，匹配滤波器所能带来的好处不是很大，或者说通常的窄带滤波器已接近匹配滤波器的水平，后者没有更大的"潜力"可供挖掘了。本题讨论的是相参射频脉冲列信号的匹配问题，就相参射频脉冲列信号而言，匹配滤波器所能带来的好处是很大的。

为了求出此信号的匹配滤波器的传递函数 $H(\omega)$，先计算信号的频谱 $S(\omega)$。设有

M 个脉冲,则有

$$\begin{aligned}S(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}s_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}s_1(t-T)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\cdots+\int_{-\infty}^{+\infty}s_1[t-(M-1)T]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=[1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)T}]\int_{-\infty}^{+\infty}s_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=S_2(\omega)S_1(\omega)\end{aligned}$$

$S_1(\omega)$就是习题 3.31 中求出的单个射频脉冲频谱,即

$$S_1(\omega)=a\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{2\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{2\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}\right]$$

而 $S_2(\omega)=1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)T}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega MT}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}}=\dfrac{\sin\dfrac{\omega MT}{2}}{\sin\dfrac{\omega T}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega(M-1)T}{2}}$

所以匹配滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}=cS_1^*(\omega)S_2^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

其中,t_0 必须选在信号结束之后,在此取 $t_0=(M-1)T+\tau$,代入 $H(\omega)$的表达式,可以把 $H(\omega)$看作由 $H_1(\omega)$和 $H_2(\omega)$两部分级联而成,即

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)$$

其中,$H_1(\omega)=cS_1^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}$

$$\begin{aligned}H_2(\omega)&=S_2^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)T}=[1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(M-1)T}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)T}\\&=1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)T}\end{aligned}$$

$H_1(\omega)$就是对第一个射频脉冲相匹配的滤波器的传递函数,与习题 3.31 相同,当然对其他单个脉冲也是匹配的。而 $H_2(\omega)$体现了对多个射频脉冲的相位进行调整,使各射频脉冲信号同相相加(或称同步积累)。所以合成的相参射频脉冲列的匹配滤波器可用图 E3.32-1 表示。

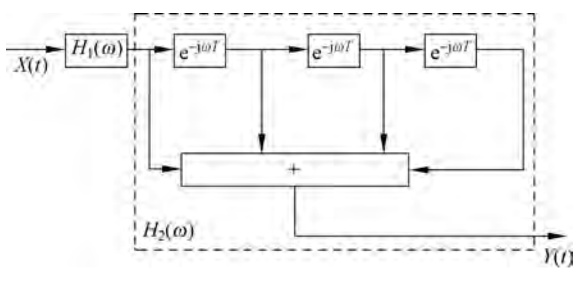


图 E3.32-1　相参脉冲串信号的匹配滤波器的实现框图

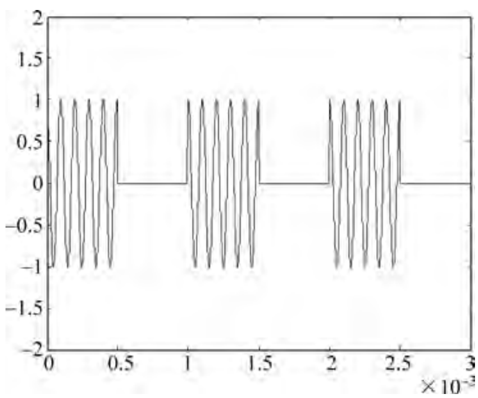
输出的最大信噪比 $d_{\mathrm{m}}=\dfrac{E}{N_0/2}=M\dfrac{E_1}{N_0}$,其中 E 是脉冲列的信号能量,E_1 是单个脉冲的信号能量,M 是脉冲个数,即最大信噪比 d_{m} 与脉冲个数 M 呈正比。

对于相参脉冲列信号通过匹配滤波器后的输出信号波形,可以用输入信号与滤波器的冲激响应卷积求得,下面给出了输入信号为三个射频脉冲时绘制输出信号波形的MATLAB程序。

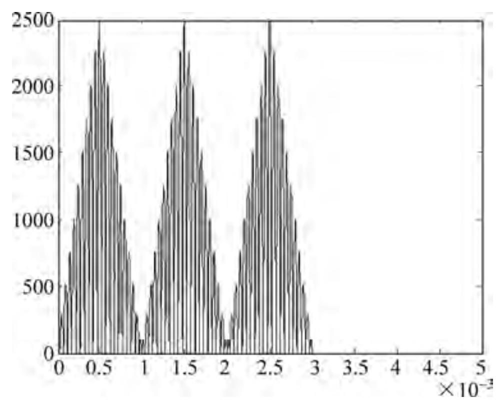
解:MATLAB程序如下。

```
clc,clear,close all
fs = 10e6;
ts = 1/fs;
fc = 1e4;
c = 3e8;
tp = 0.5e-3;
Tr = 1e-3; % 脉冲周期
t = [0:ts:3*Tr];
y = zeros(1,length(t));
for i = 1:3
    tr = (i-1)*Tr;
    y = y + BaseBandWave1_cos(tp,fc,t-tr);
end
figure,plot(t,real(y));
axis([min(t) max(t) -2 2]);
RefFastSamplingVec = 0:ts:tp-ts;
RefSignal = BaseBandWave1_cos(tp,fc,RefFastSamplingVec);普勒失配的补偿
Z1 = xcorr(y,RefSignal);
z1 = Z1(length(RefSignal)*5+1:1:length(RefSignal)*11);
y = zeros(1,5*(Tr/ts));
y1 = [z1,zeros(1,2*(Tr/ts))];
y2 = [zeros(1,(Tr/ts)),z1,zeros(1,(Tr/ts))];
y3 = [zeros(1,2*(Tr/ts)),z1];
y = y1 + y2 + y3;
tscl1 = [0:1:length(y)-1]*ts;
figure,plot(tscl1,(abs(y1)));
figure,plot(tscl1,(abs(y2)));
figure,plot(tscl1,(abs(y3)));
figure,plot(tscl1,(abs(y)));
```

程序运行结果如图E3.32-2～图E3.32-6所示。



图E3.32-2　信号$s(t)$波形(假设发射三个射频脉冲信号)



图E3.32-3　子脉冲匹配滤波输出结果

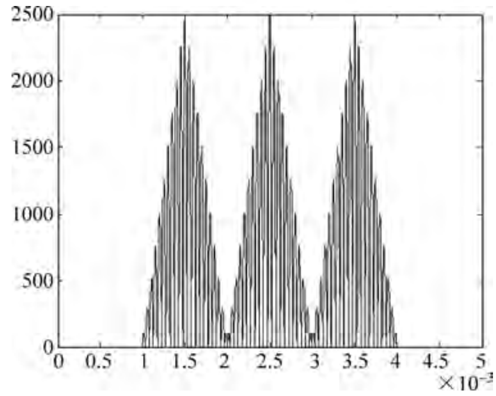


图 E3.32-4 子匹配滤波后经过一个延时单元结果

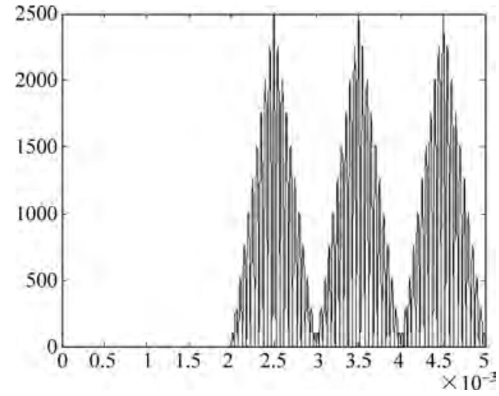


图 E3.32-5 子脉冲匹配滤波后经过两个延时单元结果

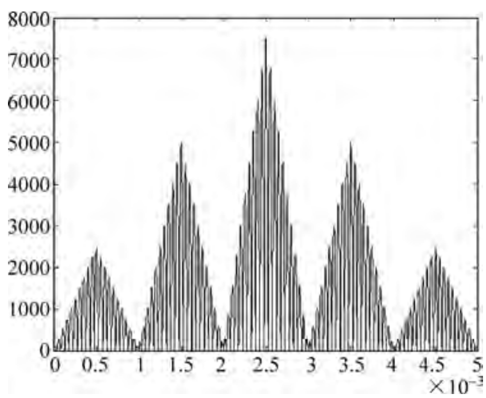


图 E3.32-6 加法器输出结果

3.33 设图 E3.3 所示的 RC 低通滤波器的输入信号为 $X(t)=s(t)+w(t)$，其中，$w(t)$ 的功率谱密度为 $G_w(\omega)=N_0/2$，$-\infty<\omega<+\infty$，$s(t)$为矩形脉冲，

$$s(t)=\begin{cases}A & 0\leqslant t\leqslant \tau\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

若定义 RC 低通滤波器的等效噪声频带 $\Delta f_e=\dfrac{1}{4RC}$，试求

(1) RC 低通滤波器输出信噪比的表达式；

(2) 最佳等效噪声频带 $\Delta f_{e,\text{opt}}$ 与 τ 为什么关系时，RC 低通滤波器输出端有最大信噪比？

解：$H(\omega)=\dfrac{1/\mathrm{j}\omega C}{1/\mathrm{j}\omega C+R}=\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$，$\alpha=\dfrac{1}{RC}$

$|H(\omega)|^2=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}$，$|H(0)|^2=1$

(1) 设 t_0 时刻输出信号瞬时功率与噪声平均功率之比为 SNR，用 d_0 表示。

$$d_0=\frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}G_w(\omega)\,|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega}=\frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}\omega\right|^2}{\frac{N_0}{2}2\pi\Delta f_e\,|H(0)|^2}$$

$$=\frac{1}{N_0\Delta f_e}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}\omega\right|^2$$

(2) $S(\omega)=\dfrac{A}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau})$

$$d_0=\frac{1}{N_0\Delta f_e}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}\omega\right|^2$$

$$=\frac{A}{N_0\Delta f_e}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2$$

取 $t_0=\tau$，则

$$d_0=\frac{A}{N_0\Delta f_e}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{j\omega}(e^{j\omega\tau}-1)\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}d\omega\right|^2\leqslant\frac{A}{N_0\Delta f_e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega\tau)\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}d\omega$$

$$=\frac{A}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega\tau)\frac{32\Delta f_e}{16\Delta f_e^2+\omega^2}d\omega$$

令上式的左边为 d_m，则

$$d_m=\frac{A}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega\tau)\frac{32\Delta f_e}{16\Delta f_e^2+\omega^2}d\omega$$

显然这是 Δf_e 的函数，令 d_m 对 Δf_e 的导数等于零可求出最佳的 Δf_e。

3.34 设线性滤波器的输入为 $X(t)=s(t)+w(t)$，其中

$$s(t)=\begin{cases}A & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$w(t)$是平稳噪声，其功率谱为

$$G_w(\omega)=\frac{2\alpha\omega^2}{\alpha^2+\omega^2},\quad -\infty<\omega<+\infty$$

试求输出信噪比最大的最佳线性滤波器的传输函数。

解：$S(\omega)=A\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)(1-e^{-j\omega\tau})=\frac{A}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})$，则

$$H(\omega)=cS^*(\omega)/G_w(\omega)e^{-j\omega t_0}=\frac{cA}{-j\omega}(1-e^{j\omega\tau})\frac{\alpha^2+\omega^2}{2\alpha\omega^2}e^{-j\omega t_0}$$

取 $t_0=\tau$，得

$$H(\omega)=\frac{cA}{j\omega}(1-e^{j\omega\tau})\frac{\alpha^2+\omega^2}{2\alpha\omega^2}$$

3.35 设信号 $s(t)=1-\cos\omega_0 t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega_0$，若噪声的物理谱 $F_w(\omega)=N_0$，$0<\omega<+\infty$，试设计匹配滤波器：

(1) 求传输函数和冲激响应；

(2) 求输出波形；

(3) 画出匹配滤波器的结构方框图。

解：(1) $h(t)=cs(t_0-t)$，取 $t_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$

$$h(t)=c\left\{1-\cos\left[\omega_0\left(\frac{2\pi}{\omega_0}-t\right)\right]\right\}=c(1-\cos\omega_0 t)$$

$$H(\omega)=c\int_0^{2\pi/\omega_0}(1-\cos\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{c}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_0^{2\pi/\omega_0}-\frac{c}{2}\int_0^{2\pi/\omega_0}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})e^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{c}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0}) - \frac{c}{2}\int_0^{2\pi/\omega_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0-\omega)t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0+\omega)t})\mathrm{d}t$$

$$= \frac{c}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0}) - \frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0-\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0-\omega)t}\Big|_0^{2\pi/\omega_0} - \frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0+\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0+\omega)t}\Big|_0^{2\pi/\omega_0}$$

$$= \frac{c}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0}) + \frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0-\omega)}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0-\omega)2\pi/\omega_0}) + \frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0+\omega)}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0+\omega)2\pi/\omega_0})$$

$$= \frac{c}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0}) + \frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0-\omega)}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0}) + \frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0+\omega)}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0})$$

当 $\omega>0$ 时，上式的第三项要远大于第二项，因此，第三项可以忽略不计，那么

$$H(\omega) \approx \frac{c}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0}) + \frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0-\omega)}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0})$$

$$= \left[\frac{c}{\mathrm{j}\omega} + \frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0-\omega)}\right](1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0})$$

（2）输出信号

$$s_0(t) = s(t) * h(t) = cs(t) * s(t)$$

$$= \begin{cases} c\int_0^t (1-\cos\omega_0 u)(1-\cos\omega_0(t-u))\mathrm{d}u & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{\omega_0} \\ c\int_{t-\frac{2\pi}{\omega_0}}^{\frac{2\pi}{\omega_0}} (1-\cos\omega_0 u)(1-\cos\omega_0(t-u))\mathrm{d}u & \dfrac{2\pi}{\omega_0} < t \leqslant \dfrac{4\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2\omega_0 t - 3\sin(\omega_0 t) + \omega_0 t\cos(\omega_0 t)}{\omega_0} & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{\omega_0} \\ -c\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{8\pi - 3\sin(\omega_0 t) - 4\pi\cos(\omega_0 t) + 2\omega_0 t + \omega_0 t\cos(\omega_0 t)}{\omega_0} & \dfrac{2\pi}{\omega_0} < t \leqslant \dfrac{4\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

（3）由于 $H(\omega) \approx \frac{c}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0}) + \frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0-\omega)}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0}) = \left[\frac{c}{\mathrm{j}\omega} + \frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0-\omega)}\right]$ $(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0})$，$\frac{c}{\mathrm{j}\omega}$ 可用积分电路实现，$\frac{c}{2\mathrm{j}(\omega_0-\omega)}$ 可用选择性很高的谐振放大器来实现，而 $1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_0}$ 可用延时单元和减法器来实现。因此，匹配滤波器的结构如图 E3.35 所示。

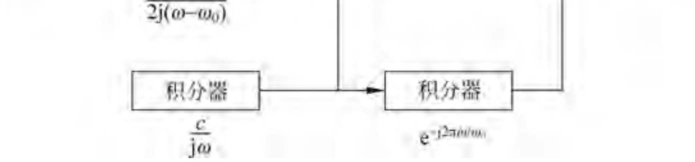


图 E3.35　匹配滤波器的结构图

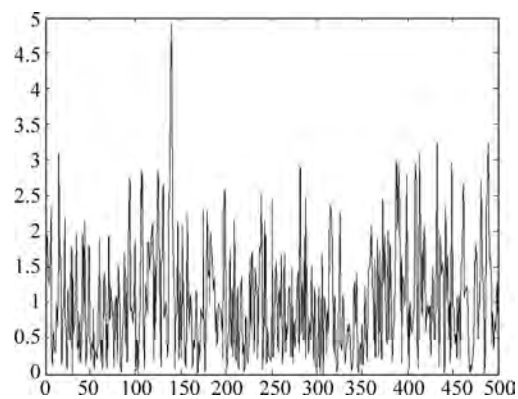
计算机作业

3.36 模拟产生一个功率谱为 $G_X(\omega)=1/(1.25+\cos\omega)$ 的正态随机序列，画出随机序列的波形。

解：满足上述功率谱密度要求的正态随机序列可以看成方差为1的正态白噪声，通过差分方程为 $X(n)=-0.5X(n-1)+W(n)$ 的离散线性系统后的输出，此系统属于一阶AR模型。正态序列样本如图E3.36所示。

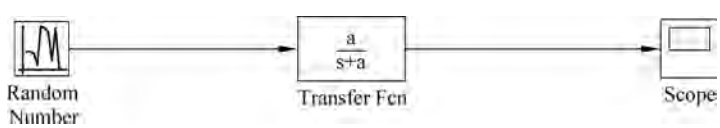
MATLAB程序如下。

```
clc,clear,close all
B = [1];
A = [1 0.5];
sigma = 1;
W = sigma. * randn(500,1) + 0;
X = filter(B,A,W);
```



图E3.36 正态随机序列波形

3.37 图E3.37-1是用MATLAB的Simulink模拟白噪声通过例3.3的RC电路，其中输入为高斯白噪声，$a=\dfrac{1}{RC}$，用示波器观察输入和输出的波形，改变 RC 的值，使电路时常数改变，观察输出波形的变化。



图E3.37-1 白噪声通过RC电路MATLAB的Simulink仿真模块

解：当 $a=1$ 时，示波器观察输出波形变化如图E3.37-2所示，当 $a=0.1$ 时，示波器观察输出波形变化如图E3.37-3所示。

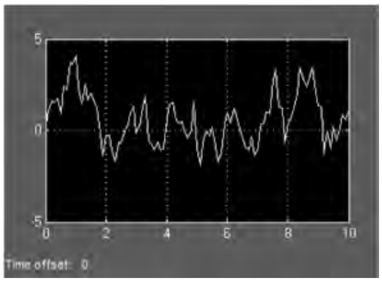


图 E3.37-2　输出噪声波形($a=1$)

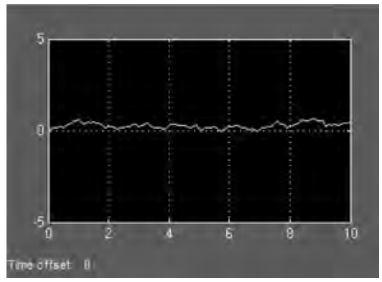


图 E3.37-3　输出噪声波形($a=0.1$)

由实验结果可知,a 越大,输出噪声波形变化越快,输出过程的相关时间越小;a 越小,输出噪声波形变化越缓慢,输出过程的相关时间越大。

研　讨　题

3.38　在雷达信号处理中,杂波的对消非常重要,用杂波衰减因子来描述杂波对消的效果,它的定义为 $CA=C_i/C_o$,其中 C_i 表示杂波对消器的输入杂波功率,C_o 表示杂波对消器的输出杂波功率。图 E2.33 描述的就是一种最简单的二脉冲杂波对消器,假定进入二脉冲对消器的杂波功率谱密度为 $G_X(f)=\dfrac{P_c}{\sqrt{2\pi}\sigma_c}\exp\left(-\dfrac{f^2}{2\sigma_c^2}\right)$,$P_c$ 为输入杂波的功率,求二脉冲对消器的杂波衰减因子。(提示:对正弦函数可以采用近似计算,对于小的 x,$\sin x\approx x$,在实际中通常有 $fT\ll 1$)

解:二脉冲对消器的功率传递函数为 $|H(f)|^2=2(1-\cos 2\pi fT)=4(\sin(\pi fT))^2$

输出的杂波功率为

$$\begin{aligned}C_o&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_c}{\sqrt{2\pi}\sigma_c}\exp\left(-\frac{f^2}{2\sigma_c^2}\right)4(\sin(\pi fT))^2\mathrm{d}f\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_c}{\sqrt{2\pi}\sigma_c}\exp\left(-\frac{f^2}{2\sigma_c^2}\right)4(\pi fT)^2\mathrm{d}f\\&=(2\pi T)^2P_c\int_{-\infty}^{+\infty}f^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_c}\exp\left(-\frac{f^2}{2\sigma_c^2}\right)\mathrm{d}f\\&=(2\pi T)^2\sigma_c^2P_c=(2\pi T)^2\sigma_c^2C_i\end{aligned}$$

$$CA=\frac{C_i}{C_o}=\frac{1}{(2\pi T)^2\sigma_c^2}$$

3.39　设有图 E3.33 所示 RC 低通滤波器,输入 $X(t)=s(t)+w(t)$,$s(t)=a\cos(\omega_0t+\Phi)$,其中 a,ω_0 是已知常数,Φ 是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量,$w(t)$是功率谱密度为 $N_0/2$ 的白噪声,且与 $s(t)$统计独立。

(1) 求输出 $Y(t)$的自相关函数;

(2) 如果定义输出的信噪比(SNR)为输出信号的平均功率与输出噪声的平均功率之比,求输出信噪比 SNR 的表达式;

(3) RC 应该如何选择可使输出信噪比达到最大?

解:(1) $G_X(\omega)=\frac{a^2}{2}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{N_0}{2}$

$$G_Y(\omega)=G_X(\omega)\mid H(\omega)\mid^2$$

$$=\left\{\frac{a^2}{2}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{N_0}{2}\right\}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$=\frac{a^2\pi}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega_0^2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{N_0}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$R_Y(\tau)=\frac{a^2}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega_0^2}\cos\omega_0\tau+\frac{\alpha N_0}{4}e^{-\alpha|\tau|}=R_s(\tau)+R_w(\tau)$$

(2) 输出信号的平均功率为 $R_s(0)=\frac{a^2}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega_0^2}$,输出噪声的平均功率为 $R_w(0)=\frac{\alpha N_0}{4}$,

$$\mathrm{SNR}=R_s(0)/R_w(0)=\frac{a^2}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega_0^2}\Big/\frac{\alpha N_0}{4}=2a^2\frac{\alpha}{N_0(\alpha^2+\omega_0^2)}$$

(3) 令 $\frac{\mathrm{dSNR}}{\mathrm{d}\alpha}=0$,则 $\alpha=\omega_0$,即 $\frac{1}{RC}=\omega_0$ 时输出 SNR 最大。

3.40 在 3.7.1 节中介绍了频域法模拟有色高斯随机过程的方法。假定要产生一段 5ms 的零均值高斯随机过程的样本,其功率谱密度要求为

$$G_X(f)=\frac{1}{1+(f/\Delta f)^4}$$

式中,$\Delta f=1\text{kHz}$ 是功率谱的 3dB 带宽,严格地说,该过程的带宽是无限的,但当频率足够高时,功率谱密度已经很小,取 $B=6\Delta f$。编写模拟有色高斯过程的 MATLAB 程序,并画出模拟产生的高斯随机过程的一个样本函数。

解:MATLAB 程序如下。

```
clc,clear,close all
I = sqrt( - 1);                                        % 参数设置
Td = 5e - 3;fo = 1/Td;f3 = 1e3;dt = 1e - 5;
M = floor(6 * f3 * Td);m = [ - M:M];
x = [0:0.01:10];
psd = 1./(1 + x.^4);
power = 2 * f3 * sum(psd) * 0.01;
s = 1./(1 + ((m * fo)/f3).^4);
beta = power/sum(s);
s = beta * s;                                          % 构造离散功率谱
f = [ - 8:0.01:8] * f3;
psd = 1./(1 + (f/f3).^4);                              % 构造连续功率谱
```

```
figure,stem(m * fo,s/fo); hold on
plot(f,psd,'g'); hold off
axis([ - 8 * f3 8 * f3 0 1.2])
xlabel('频率/Hz'); ylabel('PSD');
z0 = randn(1);z0 = z0 * sqrt(s(M + 1));
zplus = sqrt(s(M + 2:2 * M + 1)/2). * (randn(1,M) + I * randn(1,M));
zminus = conj(fliplr(zplus));
z = [zminus z0 zplus];                                  % 产生频域样本
t = [0:dt:Td];
rp = zeros(1,length(t));
for m = - M:M
    rp = rp + z(m + M + 1) * exp(I * 2 * pi * m * fo * t);    % 产生时域随机过程
end
figure,plot(t * 1000,real(rp));
xlabel('时间/ms');
ylabel('样本波形')
```

程序运行结果如图 E3.40-1、图 E3.40-2 所示。

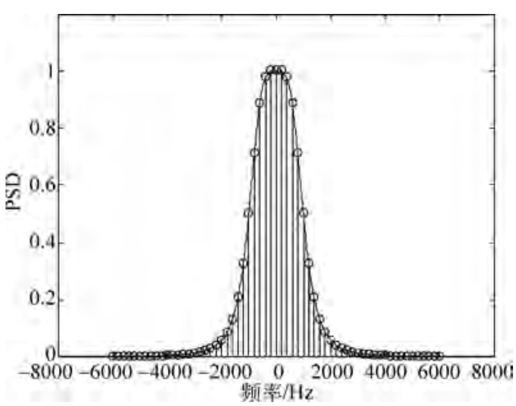


图 E3.40-1　功率谱离散采样

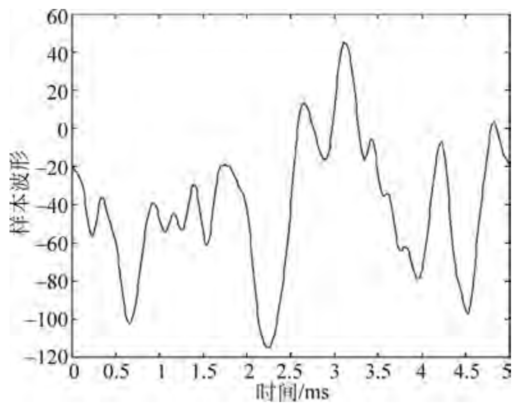


图 E3.40-2　随机过程波形

3.41　在 3.7.2 节中介绍了时域滤波法模拟有色高斯随机过程的方法，请根据 3.7.2 节介绍的时域滤波法，按照双线性变换法设计相应的数字滤波器，编写模拟有色高斯过程的 MATLAB 程序，并画出模拟产生的高斯随机过程的一个样本函数。

解：MATLAB 程序如下。

```
clc,clear,close all
I = sqrt( - 1);
imp_len = 150;
sim_len = 150;
f3 = 1000;
fs = 30000;
g = fs/(pi * f3);
b0 = 1;b1 = 2;b2 = 1;b = [b0 b1 b2];
```

```
a0 = 1 + sqrt(2) * g + g^2;a1 = 2 - 2 * g^2;
a2 = 1 - sqrt(2) * g + g^2;a = [a0 a1 a2];
x = zeros(1,imp_len);x(1) = 1;
y = filter(b,a,x);
scale = [1:length(y)]/fs;
figure,plot(scale * 1000,y);
xlabel('时间/ms');
ylabel('离散冲激响应')
x = randn(1,sim_len);
y = filter(b,a,x);
scale = [1:length(y)]/fs;
figure,plot(scale * 1000,y);
xlabel('时间/ms');
ylabel('样本波形')
```

程序运行结果如图 E3.41-1、图 E3.41-2 所示。

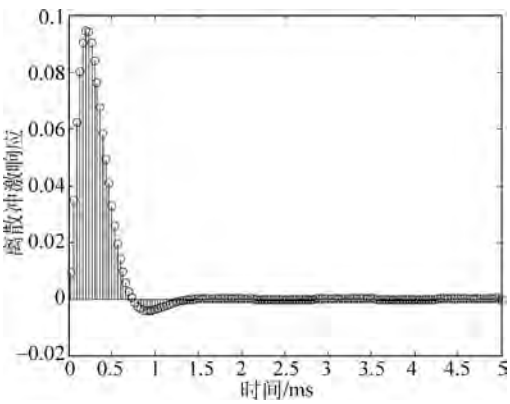


图 E3.41-1　冲激响应波形

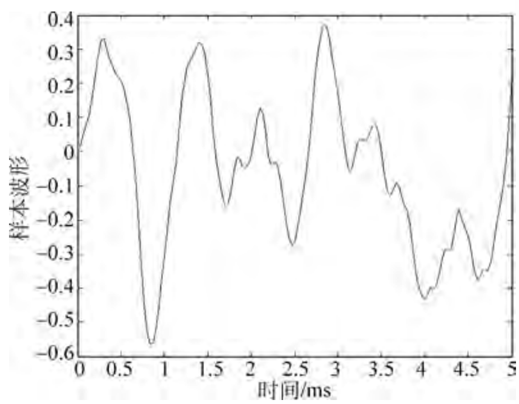


图 E3.41-2　模拟随机过程的样本函数

3.42　设有图 E3.42-1 所示系统。

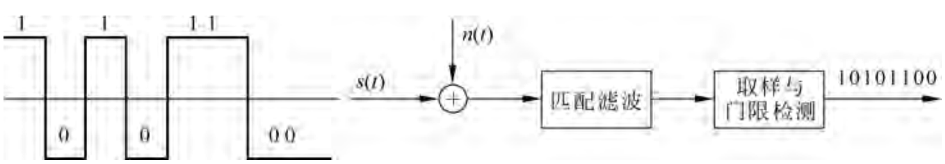


图 E3.42-1　匹配滤波器在二元 PAM 信号传输中的应用

假定信号为脉冲幅度调制(PAM)信号，$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}A_k p(t-kt_s)$，$A_k$ 等概率取 $+1$ 和 -1 两个值，$t_s=1$，信号在信道中传输会受到加性高斯白噪声的污染，在接收端每一个脉冲要判断发射的是“1”还是“0”。

(1) 画出信号、信号加噪声的波形；

(2) 对匹配滤波器输出信号，每隔 t_s s 进行取样(在每个脉冲结尾时刻取样)，取样值

与一个门限值进行比较，超过门限判“1”，低于门限判“0”，画出匹配滤波器输出的波形，并标出取样值。

（3）产生 10000 个二进制数字（随机产生），统计输出端检测的误码率。

解：（1）MATLAB 程序如下。

```
clc,clear,close all
ts = 1;                                    % 抽样间隔
fs = 1/ts;
s2 = [1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 ];               % s2 为消息序列
s3 = [];
M = 10;
for i = 1:M
    if s2(i) == 1
        s3 = [s3 ones(1,10)];
    else
        s3 = [s3 ones(1,10) * ( - 1)];
    end
end
figure,plot(s3);xlabel('n 倍脉冲周期');
noise = wgn(1,length(s3),10 * log10(1));
s = s3 + noise;
figure,plot(s);xlabel('n 倍脉冲周期');
```

程序运行结果如图 E3.42-2、图 E3.42-3 所示。

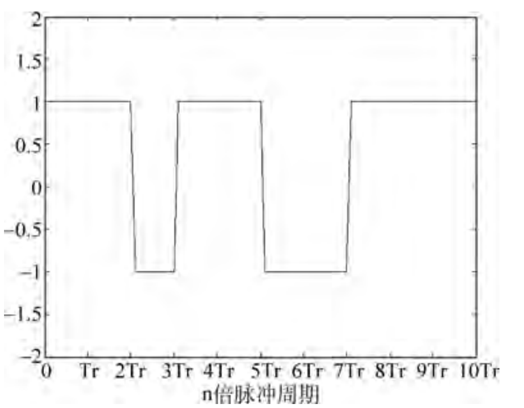


图 E3.42-2　信号波形

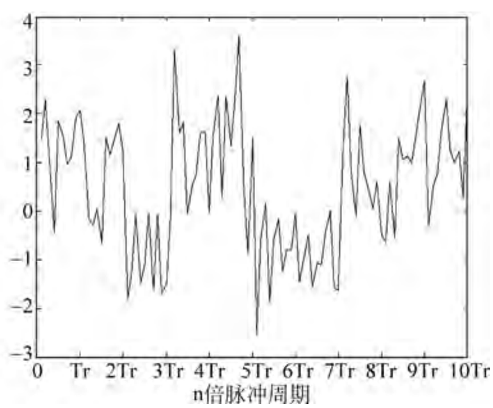


图 E3.42-3　信号加噪声波形

（2）MATLAB 程序如下。

```
refsignal = ones(1,10);
MF_s_n = conv(refsignal,s);
MF_s_n = MF_s_n(1:M * 10);
figure,plot((MF_s_n));
xlabel('n 倍脉冲周期');
```

程序运行结果如图 E3.42-4 所示。

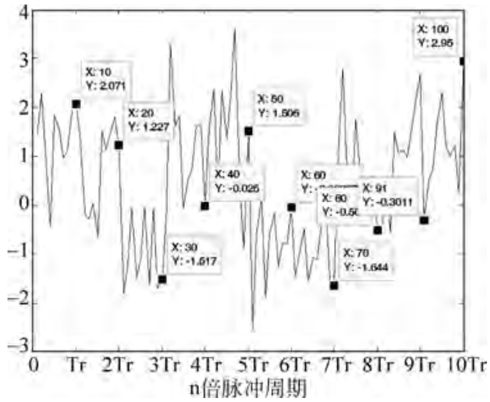


图 E3.42-4　匹配滤波器输出的波形

此处，选取 0 作为门限，超过门限判“1”，低于门限判“0”。从判决结果来看，该信噪比条件下存在误判的情况，因此有必要对误码率进行分析。

(3) 一次 Monte Carlo 仿真实验的误码率程序如下。

```
counter = 0;flag = 0;
    for i = 1:M
        if MF_s_n(i * 10)> 0
            flag = 1;
        else flag = 0;
        end
        if flag == s2(i)
            counter = counter + 1;
        else continue;
        end
    end
err_rate = counter/M;
```

误码率随信噪比变化的关系如表 E3.42 所示。

表 E3.42　误码率与信噪比关系

信噪比/dB	−5	−10	−15	−20	−25	−30
误码率/%	0.9622	0.829	0.713	0.6216	0.5708	0.5396

实　　验

实验 3.1　典型时间序列模型分析

通过本实验熟悉几种常用的时间序列，实验内容如下。

1. 设有 AR(1)模型,

$$X(n)=-0.8X(n-1)+W(n)$$

$W(n)$是零均值正态白噪声,方差为 4。

(1) 用 MATLAB 模拟产生 $X(n)$的 500 个观测点的样本函数,并绘出波形;

(2) 用产生的 500 个观测点估计 $X(n)$的均值和方差;

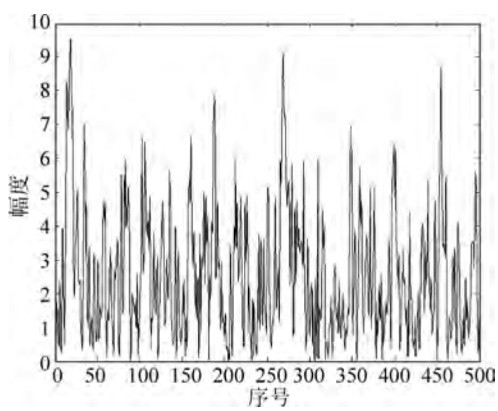
(3) 画出 $X(n)$的理论的自相关函数和功率谱;

(4) 估计 $X(n)$的自相关函数和功率谱。

解:(1) MATLAB 程序如下。

```
clc,clear,close all
B = [1];
A = [1 0.8];
Sigma = 2;Ts = 1;Fs = 1/Ts;
[H,w] = freqz(B,A,[0:2 * pi/1000:2 * pi].');
h0 = impz(B,A,1001);
h = ifft(H);
W = Sigma. * randn(500,1) + 0;
X = conv(W,h);
X = X(1:500);
figure,plot(abs(X));xlabel('序号');ylabel('幅度')
```

程序运行结果如图实 3.1-1 所示。



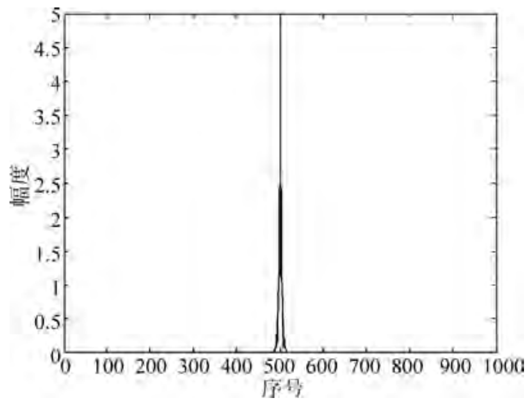
图实 3.1-1　$X(n)$的样本函数

(2) 样本均值为 0.0216,方差为 11.87。

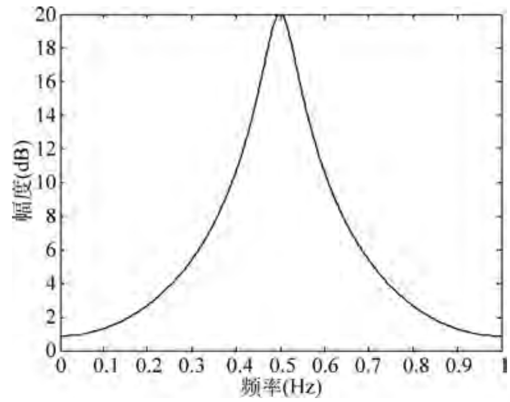
(3) MATLAB 程序如下。

```
Gx = abs(H).^2 * 4;
fset = [0:length(Gx) - 1] * Fs/length(Gx);
figure,plot(fset,10 * log10(abs(Gx)));xlabel('频率(Hz)');ylabel('幅度(dB)');
Rx = fftshift(ifft(Gx));
figure,plot(abs(Rx));xlabel('序号');ylabel('幅度');axis([0 1000 0 12]);
```

程序运行结果如图实 3.1-2、图实 3.1-3 所示。



图实 3.1-2　$X(n)$的理论的自相关函数

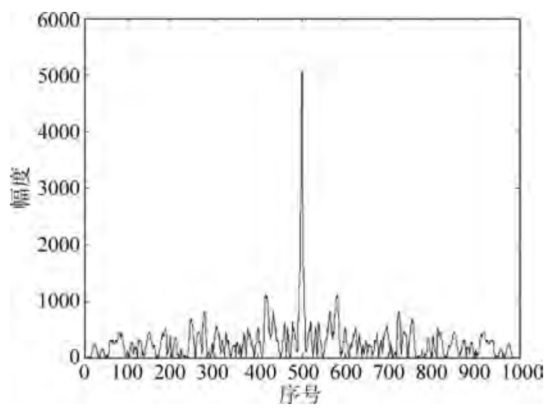


图实 3.1-3　$X(n)$的理论的功率谱密度

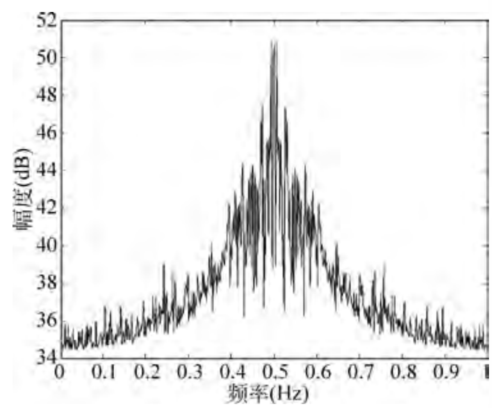
（4）MATLAB 程序如下。

```
Rx1 = xcorr(X);
figure,plot(abs(Rx1));xlabel('序号');ylabel('幅度')
nfft = 1024;
%周期图法(加窗)
window = hann(length(X));
[Pxx2,fset2] = periodogram(X,window,nfft,Fs);
figure,plot(fset2,Pxx2);xlabel('频率(Hz)');ylabel('幅度(dB)')
```

程序运行结果如图实 3.1-4、图实 3.1-5 所示。



图实 3.1-4　$X(n)$自相关函数



图实 3.1-5　$X(n)$的功率谱密度

2. 设有 AR(2)模型，

$$X(n)=-0.3X(n-1)-0.5X(n-2)+W(n)$$

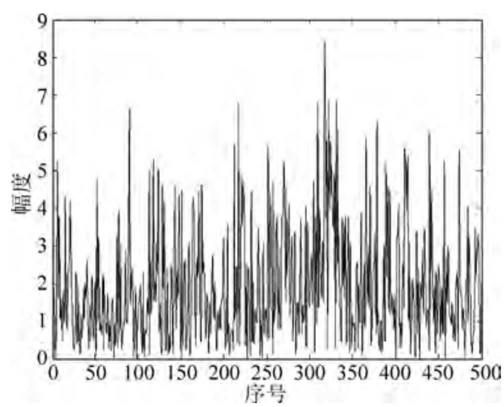
$W(n)$是零均值正态白噪声，方差为 4。

(1) 用 MATLAB 模拟产生 $X(n)$的 500 个观测点的样本函数,并绘出波形;
(2) 用产生的 500 个观测点估计 $X(n)$的均值和方差;
(3) 画出 $X(n)$的理论的自相关函数和功率谱;
(4) 估计 $X(n)$的自相关函数和功率谱。

解:(1) MATLAB 程序如下。

```
clc,clear,close all
B = [1];
A = [1 0.3 0.5];
Sigma = 2;Ts = 1;Fs = 1/Ts;
[H,w] = freqz(B,A,[0:2 * pi/1000:2 * pi].');
h0 = impz(B,A,1001);
h = ifft(H);
W = Sigma. * randn(500,1) + 0;
X = conv(W,h);
X = X(1:500);
figure,plot(abs(X));xlabel('序号');ylabel('幅度')
```

程序运行结果如图实 3.1-6 所示。



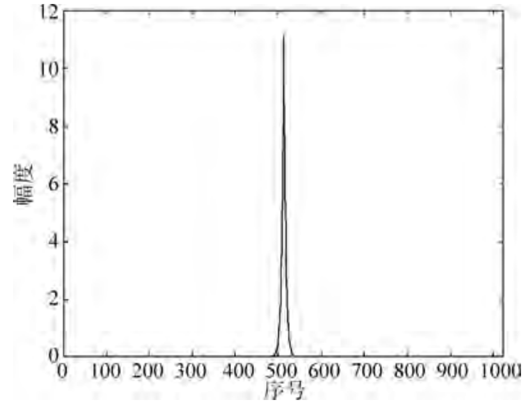
图实 3.1-6　$X(n)$的样本函数

(2) 样本均值为 0.0373,方差为 6.12。

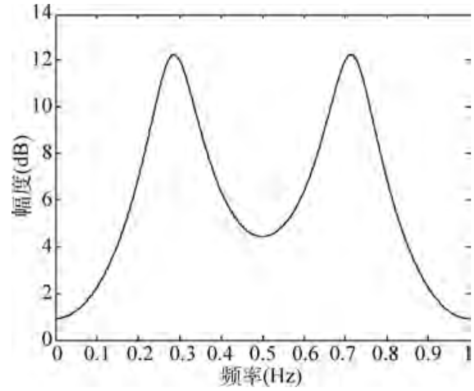
(3) MATLAB 程序如下。

```
Gx = abs(H).^2 * 4;
fset = [0:length(Gx) - 1] * Fs/length(Gx);
figure,plot(fset,10 * log10(abs(Gx)));xlabel('频率(Hz)');ylabel('幅度(dB)');
Rx = fftshift(ifft(Gx));
figure,plot(abs(Rx));xlabel('序号');ylabel('幅度');axis([0 1000 0 5])
```

程序运行结果如图实 3.1-7、图实 3.1-8 所示。



图实 3.1-7　$X(n)$的理论的自相关函数

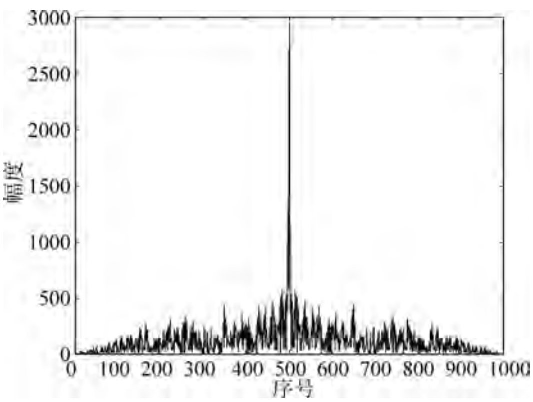


图实 3.1-8　$X(n)$的理论功率谱密度

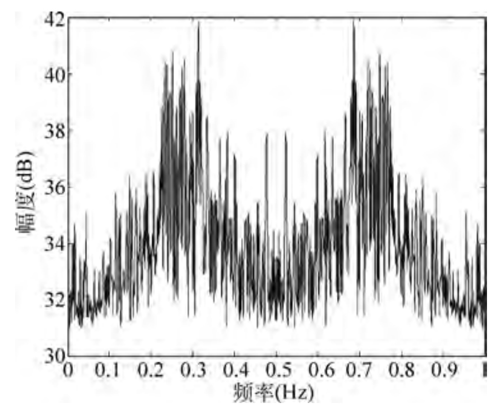
(4) MATLAB 程序如下。

```
Rx1 = xcorr(X);
figure,plot(abs(Rx1));xlabel('序号');ylabel('幅度')
nfft = 1024;
window = hann(length(X));
[Pxx2,fset2] = periodogram(X,window,nfft,Fs);
figure,plot(fset2,Pxx2);xlabel('频率(Hz)');ylabel('幅度(dB)')
```

程序运行结果如图实 3.1-9、图实 3.1-10 所示。



图实 3.1-9　$X(n)$的自相关函数



图实 3.1-10　$X(n)$的功率谱密度

3. 设有 ARMA(2,2)模型,

$$X(n)+0.3X(n-1)-0.2X(n-2)=W(n)+0.5W(n-1)-0.2W(n-2)$$

$W(n)$是零均值正态白噪声,方差为 4。

(1) 用 MATLAB 模拟产生 $X(n)$的 500 个观测点的样本函数,并绘出波形;

(2) 用产生的 500 个观测点估计 $X(n)$的均值和方差;

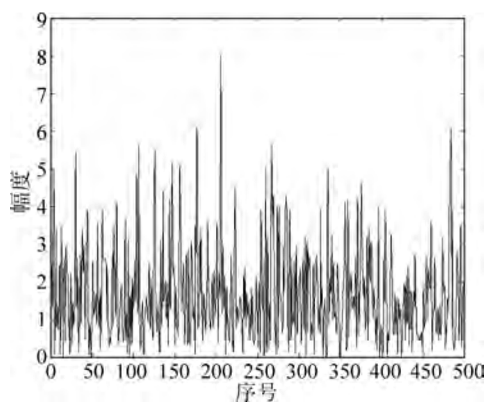
(3) 画出 $X(n)$的理论的自相关函数和功率谱;

(4) 估计 $X(n)$的自相关函数和功率谱。

解:(1) MATLAB 程序如下。

```
clc,clear,close all
B = [1 0.5 - 0.2];
A = [1 0.3 - 0.2];
Sigma = 2;Ts = 1;Fs = 1/Ts;
[H,w] = freqz(B,A,[0:2 * pi/1000:2 * pi].');
h0 = impz(B,A,1001);
h = ifft(H);
W = Sigma. * randn(500,1) + 0;
X = conv(W,h);
X = X(1:500);
figure,plot(abs(X));xlabel('序号');ylabel('幅度')
```

程序运行结果如图实 3.1-11 所示。



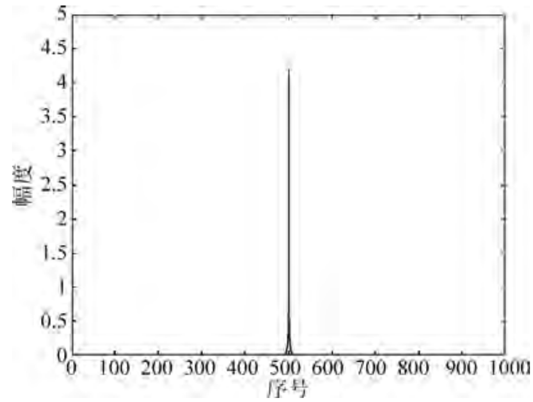
图实 3.1-11 $X(n)$的样本函数

(2) 样本均值为 0.613,方差为 3.93。

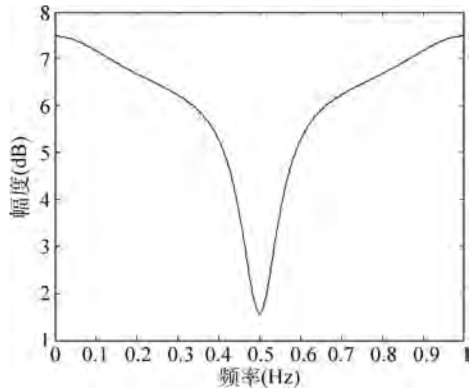
(3) MATLAB 程序如下。

```
Gx = abs(H).^2 * 4;
fset = [0:length(Gx) - 1] * Fs/length(Gx);
figure,plot(fset,10 * log10(abs(Gx)));xlabel('频率(Hz)');ylabel('幅度(dB)');
Rx = fftshift(ifft(Gx));
figure,plot(abs(Rx));xlabel('序号');ylabel('幅度');axis([0 1000 0 5])
```

程序运行结果如图实 3.1-12、图实 3.1-13 所示。



图实 3.1-12　$X(n)$的理论的自相关函数

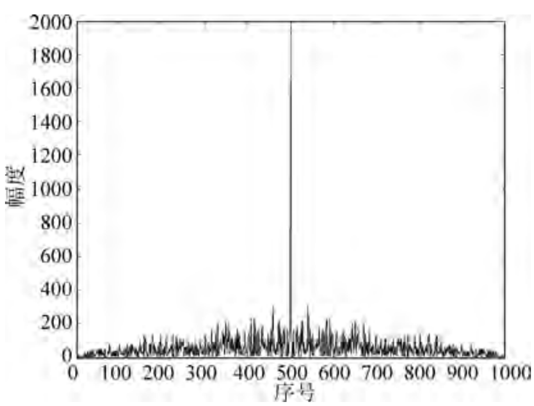


图实 3.1-13　$X(n)$的理论的功率谱密度

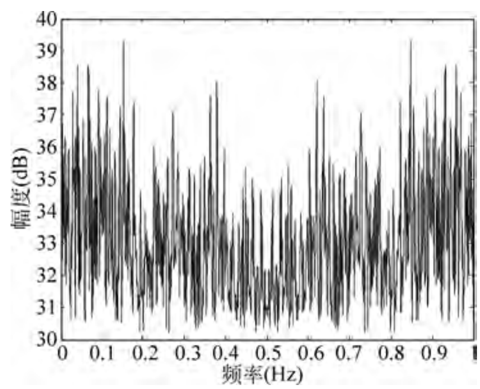
(4) MATLAB 程序如下。

```
Rx1 = xcorr(X);
figure,plot(abs(Rx1));xlabel('序号');ylabel('幅度');
nfft = 1024;
window = hann(length(X));
[Pxx2,fset2] = periodogram(X,window,nfft,Fs);
figure,plot(fset2,Pxx2);xlabel('频率(Hz)');ylabel('幅度(dB)');
```

程序运行结果如图实 3.1-14 和图实 3.1-15 所示。



图实 3.1-14　$X(n)$的自相关函数



图实 3.1-15　$X(n)$的功率谱密度

实验 3.2　随机过程通过线性系统分析

3.6.2 节介绍了随机过程的正态化问题，任意分布的白噪声通过线性系统后，输出服从正态分布；宽带噪声通过窄带系统，输出近似服从正态分布，本实验的目的是要验证以上结论。

实验内容如下：

假定滤波器为图 3.7 给出的 RC 电路(低通滤波器)。

(1) 将低通滤波器转化成数字低通滤波器；

(2) 产生一组均匀分布的白噪声序列，让这组白噪声序列通过数字低通滤波器，画出输出序列的直方图，并与输出的理论分布进行比较；

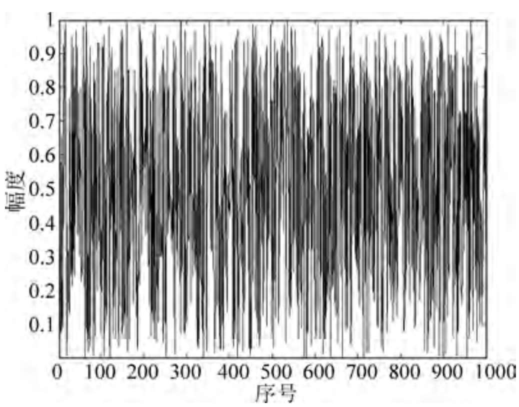
(3) 产生一组拉普拉斯分布的白噪声序列，让这组白噪声序列通过数字低通滤波器，画出输出序列的直方图，并与输出的理论分布进行比较；

(4) 改变滤波器的参数(电路 RC 值)，重做(1)～(3)，并与前一次的结果进行比较。

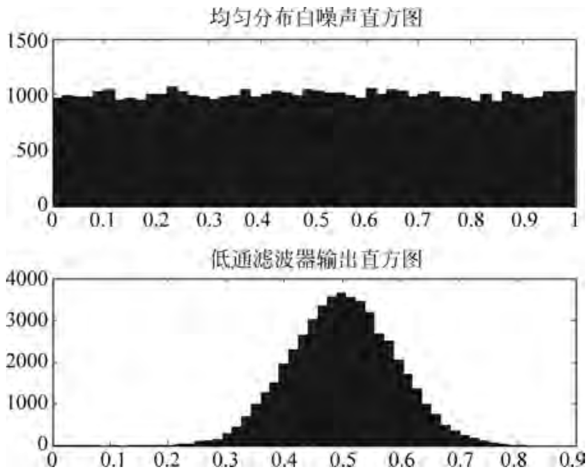
解：(1) MATLAB 程序如下。

```
clc,clear,close all
N = 50000;
u = rand(1,N);
figure,plot(u(1:1000));
xlabel('序号'),ylabel('幅度');
%% LP filter 设计
Fs = 1000;                          % 采样频率 1000Hz
N = 0;                              % 阶数
Fp = 50;                            % 通带截止频率 50Hz
Fc = 100;                           % 阻带截止频率 100Hz
Rp = 1;                             % 通带波纹最大衰减为 1dB
Rs = 60;                            % 阻带衰减为 60dB
% 计算最小滤波器阶数
na = sqrt(10^(0.1 * Rp) - 1);
ea = sqrt(10^(0.1 * Rs) - 1);
N = ceil(log10(ea/na)/log10(Fc/Fp));
% 巴特沃斯滤波器
Wn = Fp * 2/Fs; len = 1024;
N = ceil(log10(ea/na)/log10(Fc/Fp));
[Bb Ba] = butter(N,Wn,'low');       % 调用 MATLAB butter 函数快速设计滤波器
[BH,BW] = freqz(Bb,Ba);             % 绘制频率响应曲线
Bf = filter(Bb,Ba,u);               % 进行低通滤波
%% 输入输出直方图对比
figure,subplot(211);hist(u,50);
title('均匀分布白噪声直方图');
subplot(212);hist(Bf,50);
title('低通滤波器输出直方图');
```

程序运行结果如图实 3.2-1、图实 3.2-2 所示。



图实 3.2-1　均匀分布白噪声样本函数



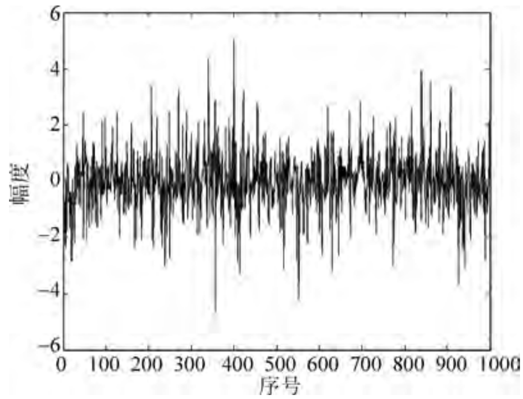
图实 3.2-2 均匀分布白噪声通过低通滤波器前后输入输出直方图对比

（2）MATLAB 程序如下。

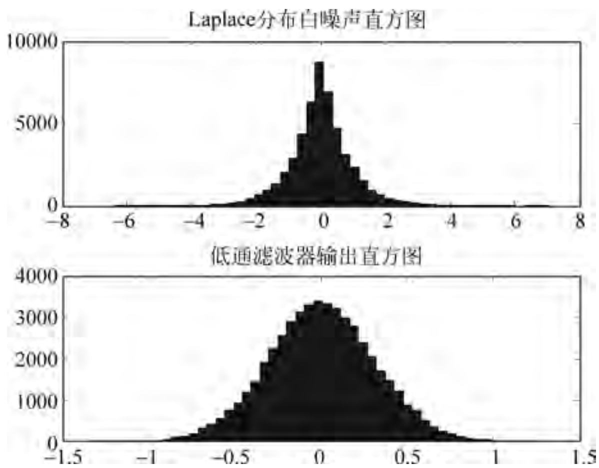
```
%% 产生拉普拉斯分布白噪声序列
N = 50000;
mu = 0;
sigma = 1;
b = sigma/sqrt(2);
a = rand(1,N) - 0.5;
u = mu - b * sign(a). * log(1 - 2 * abs(a));          %生成符合拉普拉斯分布的随机数列
figure,plot(u(1:1000));
xlabel('序号'),ylabel('幅度');
%% LP filter 设计
Fs = 1000;                                            % 采样频率 1000Hz
N = 0;                                                % 阶数
Fp = 50;                                              % 通带截止频率 50Hz
Fc = 100;                                             % 阻带截止频率 100Hz
Rp = 1;                                               % 通带波纹最大衰减为 1dB
Rs = 60;                                              % 阻带衰减为 60dB
% 计算最小滤波器阶数
na = sqrt(10^(0.1 * Rp) - 1);
ea = sqrt(10^(0.1 * Rs) - 1);
N = ceil(log10(ea/na)/log10(Fc/Fp));
% 巴特沃斯滤波器
Wn = Fp * 2/Fs; len = 1024;
N = ceil(log10(ea/na)/log10(Fc/Fp));
[Bb Ba] = butter(N,Wn,'low');                         % 调用 MATLAB butter 函数快速设计滤波器
[BH,BW] = freqz(Bb,Ba);                               % 绘制频率响应曲线
Bf = filter(Bb,Ba,u);                                 % 进行低通滤波
%% 输入输出直方图对比
figure,subplot(211);hist(u,50);
title('Laplace 分布白噪声直方图');
```

```
subplot(212);hist(Bf,50);
title('低通滤波器输出直方图');
```

程序运行结果如图实 3.2-3、图实 3.2-4 所示。



图实 3.2-3　拉普拉斯分布白噪声序列分布函数



图实 3.2-4　拉普拉斯分布白噪声通过低通滤波器前后输入输出直方图对比

通过上述两例发现，不论白噪声服从何种分布，经过低通滤波器之后都将服从正态分布。