

第5章

特殊正弦交流电路稳态分析

由耦合电感和理想变压器电路、谐振电路和三相电路共同组成特殊正弦交流电路。

电感元件磁通链和感应电动势仅由线圈自身电流决定,一般称其为自感元件。若线圈的磁通链和感应电动势还与邻近线圈的电流有关,则线圈间存在互感或耦合电感(coupled inductor)。有互感的两个(几个)线圈的电路模型称为耦合元件,其为双端口(多端口)元件。含有耦合元件的电路称为耦合电路。根据不同程度耦合关系,形成空心变压器、全耦合变压器和理想变压器。

谐振电路是正弦交流电路的特殊工作状态,正弦交流电路是取自三相供电电路的一相,两者紧密相联。

5.1 基本要求

- (1) 牢固掌握耦合电感的电路模型,尤其是根据同名端判断互感电压方向的方法。
- (2) 熟练掌握不同联接形式的耦合电感的等效,着重掌握三端接法的去耦等效。
- (3) 掌握含互感线圈电路的分析方法,重点掌握互感消去法。
- (4) 掌握空心变压器的伏安特性,熟练其等效电路,会运用反映阻抗法分析含空心变压器的电路。
- (5) 掌握理想变压器的伏安关系,了解理想变压器是一个不耗能也不储能理想二端口元件,熟练其等效电路,熟练运用折合阻抗法分析含理想变压器的电路。
- (6) 牢固掌握串联谐振、并联谐振电路的特点,能熟练地分析简单的串、并联谐振电路。
- (7) 掌握谐振电路的频率特性。
- (8) 牢固掌握对称三相电路的基本概念和分析方法。
- (9) 掌握简单不对称三相电路的分析方法和三相功率的测量。

5.2 理论提要

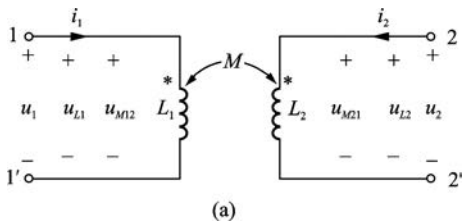
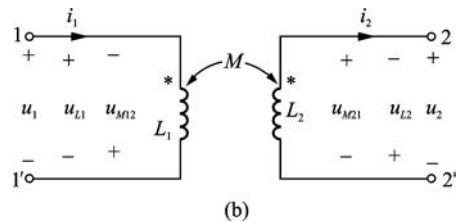
1. 耦合电感的电路模型

1) 互感线圈(设线圈电阻为零)的伏安关系

两个具有互感的线圈组成一个双端口元件,每个线圈上的电压由本线圈上通过的电流产生的自感电压和相邻线圈通过的电流(施感电流)在本线圈上产生的电压(互感电压)共同组成。为了判断互感电压的方向,定义了同名端:在线圈的端子上标以星标“*”,当两线圈的电流都从星标流入(流出)线圈时,两线圈的磁通是加强的,带有星标的一对端子就称为同名端。自感电压的方向由与自身电流参考方向是否关联决定,而互感电压方向则由与施感电流的参考方向相对于同名端是否关联来决定。如表 5-1 中图(a)所示, u_{L1} 为 1-1'线圈上的自感电压,电流 i_1 流入端为正; u_{M12} 为 2-2'线圈的电流在 1-1'线圈上产生的互感电压,施感电流 i_2 从同名端(*)流入,因此同名端(*)处为互感电压的正极性端(+)。如表 5-1 中图(b)所示,1-1'线圈上的互感电压 u_{M12} 在非同名端处为正,因为施感电流 i_2 是从非同名端流入的;2-2'线圈上的互感电压 u_{M21} 在同名端(*)处

为正,因为施感电流 i_1 是从同名端(*)流入的;2-2'线圈上的自感电压在电流 i_2 流入端为正。综上所述,互感线圈的伏安关系分别如表 5-1 所示。

表 5-1 耦合电感电路模型及其伏安关系

电路图		
微分形式	$\begin{cases} u_1 = u_{L1} + u_{M12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{L2} + u_{M21} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$	$\begin{cases} u_1 = u_{L1} - u_{M12} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = -u_{L2} + u_{M21} = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$
相量形式	$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_{L1} + \dot{U}_{M12} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \dot{U}_{L2} + \dot{U}_{M21} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_{L1} - \dot{U}_{M12} = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = -\dot{U}_{L2} + \dot{U}_{M21} = -j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$

2) 互感元件的等效

耦合电感顺(反)向串联 如图 5-1 所示,其等效电感为 $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$ (顺向串联时, $2M$ 前取正号,反之取负号)。

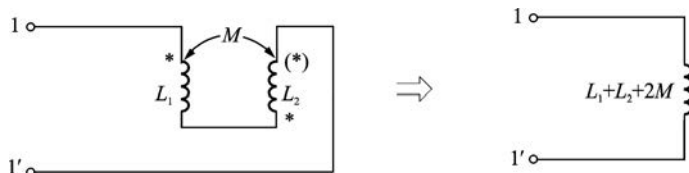


图 5-1

耦合电感同(异)侧并联 如图 5-2 所示,其等效电感为 $L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$ (同侧并联时, $2M$ 前取负号,反之取正号)。

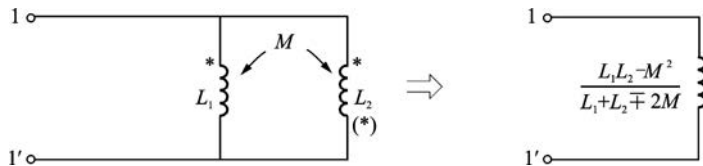


图 5-2

耦合电感三端接法 两电感只有一个端子接在一起,其他端子各自引出,共三个端子与外电路相接,如图 5-3 所示。同名端同侧相连等效时,等效电感中分别为 $L_1 - M$ 、 $L_2 - M$ 、 M ;同名端异侧相连等效时,等效电感分别为 $L_1 + M$ 、 $L_2 + M$ 、 $-M$ 。

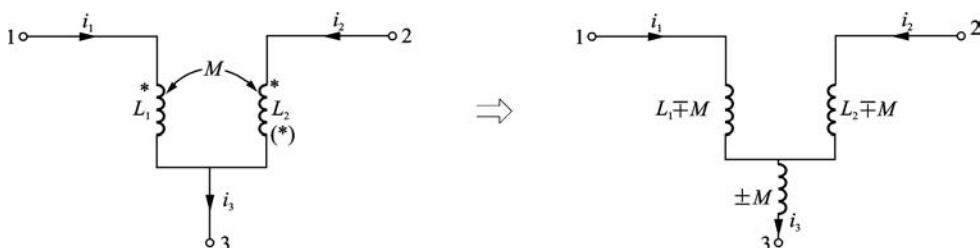


图 5-3

有互感的电路化为无互感等效电路的方法称为去耦或互感消去法。在具有耦合电路的分析中常用此法,尤其三端接法的等效应用最多。

2. 空心变压器

空心变压器一般由有耦合的两个线圈构成,与电源相连的称为原边线圈(绕组),与

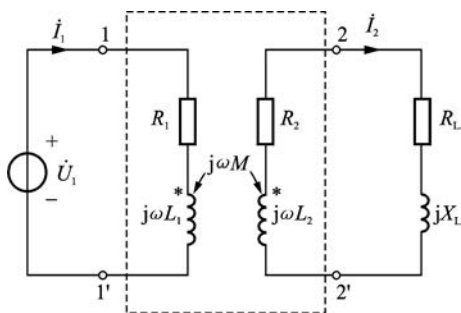


图 5-4

负载相连的称为副边线圈(绕组)。原线圈引出端称为原边(初级),副线圈引出端称为副边(次级),原边与副边没有电的联系,其电路模型如图 5-4 所示。其中 R_1 、 L_1 为原线圈的电阻和电感, R_2 、 L_2 为副线圈的电阻和电感, M 为两线圈的互感, R_L 、 X_L 为负载的电阻和电抗。列出原副边回路的电压方程为

$$\begin{cases} (R_1 + jX_{L1})\dot{I}_1 - jX_M\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ -jX_M\dot{I}_2 + (R_2 + jX_{L2} + R_L + jX_L)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

令 $Z_{11} = R_1 + jX_{L1}$ 为原边回路除源阻抗, $Z_{22} = (R_2 + R_L) + j(X_{L2} + X_L)$ 为副边回路阻抗, $Z_M = jX_M$ 为互阻抗,则可以分别得到空心变压器原边等效电路和副边等效电路,如图 5-5 所示,图 5-5(a)为原边等效电路,图 5-5(b)为副边等效电路。

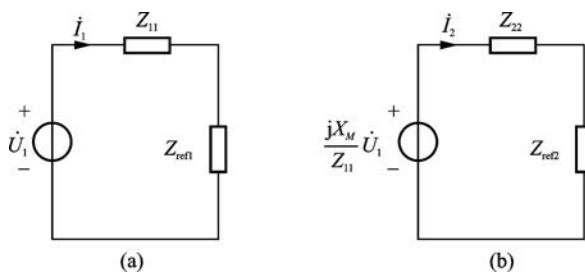


图 5-5

原边等效电路中, $Z_{\text{refl}} = \frac{X_M^2}{Z_{22}}$ 为副边阻抗通过互感反映到原边的等效阻抗,称为反映

阻抗或引入阻抗;副边等效电路中, $\frac{jX_M}{Z_{11}}\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11}}jX_M$ 为副边开路时,原边感应到副边的

互感电压, $Z_{\text{ref}2} = \frac{X_M^2}{Z_{11}}$ 为原边反映到副边的反映阻抗。掌握空心变压器等效电路的特点, 会给电路分析带来很大的方便。

3. 理想变压器

理想变压器是实际铁芯变压器的一种抽象。它具有以下的理想化条件:

(1) 无损耗: 变压器原副边电阻为零, $R_1=0, R_2=0$;

(2) 全耦合: 原线圈的磁通全部穿过副线圈, 副线圈的磁通全部穿过原线圈, 即耦合

系数 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$;

(3) 电感无穷大: $L_1 = \infty, L_2 = \infty, M = \infty$ 。

1) 理想变压器的伏安关系

(1) 电压关系。理想变压器电压之比等于匝数之比 n (唯一参数), 其方向相对于同名端一致, 与电流无关, 即

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} = \pm n \quad (\text{电压对同名端一致取正号, 不一致取负号, 如图 5-6(a) 所示})$$

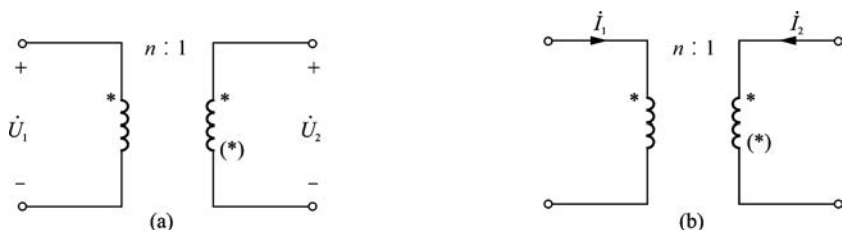


图 5-6

(2) 电流关系。理想变压器电流之比等于匝数之比的倒数 $1/n$, 方向相对于同名端不一致, 与电压无关, 即

$$\dot{I}_1 = \mp \frac{1}{n} \dot{I}_2 \quad (\text{电流同进(出)同名端取负号, 不同取正号, 如图 5-6(b) 所示})$$

2) 理想变压器的等效电路

两种形式的等效电路如图 5-7 所示, 一侧为受控电压源, 另一侧为受控电流源, 它们同时反映电压电流关系。图中等效电路对应原副边同名端处电压极性相同, 且电流为同进(或出)同名端的情况, 其他情况请读者自行分析。

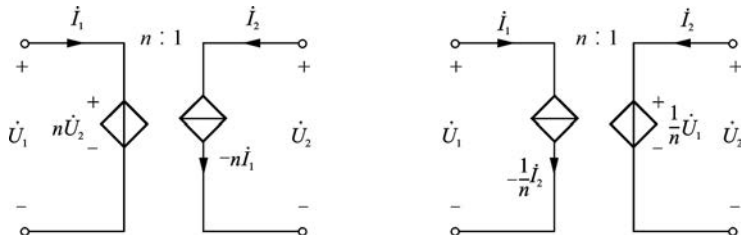


图 5-7

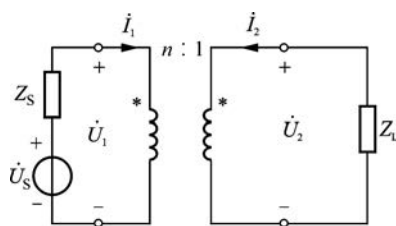


图 5-8

3) 折合阻抗

变压器原边接上电源 $\dot{U}_s$ 和伴随的阻抗 Z_s , 副边接上负载 Z_L , 电路如图 5-8 所示, 则由原边看进去的等效阻抗为 $n^2 Z_L$ (与电压、电流无关), 称为折合阻抗; 由副边看进去的除源阻抗为 $\frac{1}{n^2} Z_s$ 。

理想变压器是一个既不耗能也不储能的理想二端口元件, 即只传输功率而不消耗功率。它与输入电能的性质没有关系, 也就是说, 不管电源是交流还是直流, 都具有变电压、变电流、变阻抗的特性。

4. 谐振电路

无源一端口网络 N_0 内部含 L 、 C 元件, 当端口电压、电流同相时, 则 N_0 对外呈电阻性, 此时 N_0 与外电源之间没有能量交换, 只是在 N_0 内部的 L 、 C 之间交换能量。这种电路称为谐振电路。

串联谐振和并联谐振是最常见的两种谐振, 其电路特点如表 5-2 所示。

表 5-2 串联谐振与并联谐振电路比较

谐振类型	串联(电压)谐振	并联(电流)谐振
标准电路	RLC 串联谐振电路	GCL 并联电路
谐振条件	串联阻抗 $Z = R + jX(\omega)$, 则当 $\text{Im}[Z] = 0$, 即 $X(\omega) = 0$ 时 $X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$	并联导纳 $Y = G + jB(\omega)$, 则当 $\text{Im}[Y] = 0$, 即 $B(\omega) = 0$ 时 $B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$
谐振(角)频率	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, 改变 ω 、 L 、 C 之一, 即可达到谐振	
谐振时相量图		

续表

谐振类型	串联(电压)谐振	并联(电流)谐振
谐振时电路特点	① $Z_0 = R$, 纯电阻性, 且 Z_0 为 Z 的最小值; ② $\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_S}{R}$, $\dot{I}_0$ 与 $\dot{U}_S$ 同相且为最大; ③ 串联谐振时的电压关系为: a. $\dot{U}_{R0} = R\dot{I}_0 = \dot{U}_S$ $\begin{cases} \dot{U}_{R0} \text{ 与 } \dot{U}_S \text{ 同相} \\ U_{R0} \text{ 为 } U_R \text{ 的最大值} \end{cases}$ b. $\dot{U}_{L0} = j\omega_0 L \dot{I}_0 = j\omega_0 L \frac{\dot{U}_S}{R} = jQ\dot{U}_S$ $(U_{L0} \text{ 为 } U_S \text{ 的 } Q \text{ 倍})$ c. $\dot{U}_{C0} = \frac{1}{j\omega_0 C} \dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_S}{j\omega_0 CR} = -jQ\dot{U}_S$ $(U_{C0} \text{ 为 } U_S \text{ 的 } Q \text{ 倍})$ d. $\dot{U}_{X0} = \dot{U}_{L0} + \dot{U}_{C0} = 0$ (等值反相, 串联谐振又称为电压谐振)	并联谐振电路与 RLC 串联谐振电路有对偶关系。 ① $Y_0 = G$, 纯电导性, 且 Y_0 为 Y 的最小值; ② $\dot{U}_0 = \frac{\dot{I}_S}{G}$, $\dot{U}_0$ 与 $\dot{I}_S$ 同相且为最大; ③ 并联谐振时的电流关系为: a. $\dot{I}_{G0} = G\dot{U}_0 = \dot{I}_S$ $\begin{cases} \dot{I}_{G0} \text{ 与 } \dot{I}_S \text{ 同相} \\ I_{G0} \text{ 为 } I_G \text{ 的最大值} \end{cases}$ b. $\dot{I}_{C0} = j\omega_0 C \dot{U}_0 = j\omega_0 C \frac{\dot{I}_S}{G} = jQ\dot{I}_S$ $(I_{C0} \text{ 为 } I_S \text{ 的 } Q \text{ 倍})$ c. $\dot{I}_{L0} = \frac{1}{j\omega_0 L} \dot{U}_0 = \frac{\dot{I}_S}{j\omega_0 LG} = -jQ\dot{I}_S$ $(I_{L0} \text{ 为 } I_S \text{ 的 } Q \text{ 倍})$ d. $\dot{I}_{B0} = \dot{I}_{C0} + \dot{I}_{L0} = 0$ (等值反相, 并联谐振又称为电流谐振)
特性阻抗 ρ	谐振时的感抗或容抗称为特性阻抗 $\rho \triangleq \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ρ 取决于电路的电感 L 和电容 C, 与信号源无关, 量纲为欧姆(Ω)	
品质因数 Q	$Q \triangleq \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\rho}{R}$	$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{R}{\rho}$
幅频特性 相频特性	幅频特性 $I = \frac{U_S}{ Z } = \frac{U_S}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ 相频特性 $\varphi_z = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$	幅频特性 $U = \frac{I_S}{ Y } = \frac{I_S}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$ 相频特性 $\varphi_y = \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$
相对抑制比	$\frac{I_S}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}$	$\frac{U_S}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}$

续表

谐振类型	串联(电压)谐振	并联(电流)谐振
通用谐振曲线		
通频带(带宽)BW	$\frac{I}{I_0} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{U}{U_0} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
通频带近似计算	$BW = \omega_0(\eta_2 - \eta_1) = \frac{\omega_0}{Q}$	在 $Q \gg 1$ 时, 有 $BW = \frac{\omega_0}{Q} \approx 2(\omega_0 - \omega_1)$

实际并联谐振电路常由电感线圈(R 、 L)和电容器(C)并联构成,分析时将其等效为 GCL 并联谐振电路来分析。

5. 三相电路

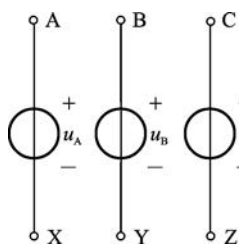


图 5-9

1) 三相电路的性质

三相电路是由三相电源和三相负载构成的复杂的交流电路。通常三相电源都是对称的,所以负载对称的三相电路称为对称三相电路,负载不对称的三相电路称为不对称三相电路。

(1) 对称三相电源。由同频率、等幅值、初相位互差 120° 的三个正弦电压源,如图 5-9 所示,按一定对称方式连接而成。这三个电源依次称为 A 相、B 相和 C 相。以 A 相为参考量,则各相电源电压表示为

$$\begin{cases} u_A = \sqrt{2}U_p \cos \omega t \\ u_B = \sqrt{2}U_p \cos(\omega t - 120^\circ) \\ u_C = \sqrt{2}U_p \cos(\omega t + 120^\circ) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \dot{U}_A = U_p \angle 0^\circ \\ \dot{U}_B = U_p \angle -120^\circ \\ \dot{U}_C = U_p \angle 120^\circ \end{cases}$$

各相到达正向最大值的次序(从超前到滞后的轮换次序)称为相序。相序由 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$,称为正(相)序;反之则为负序。三相电路分析时不作特别说明时,均指正序。

电源 Y 连接。将三相电源的末端(X, Y, Z)连接在一起(中性点)引出(中线),首端分别引出(端线),则构成 Y 形连接的三相电源。

电源 Δ 连接。将三相电源的首尾分别连接在一起,再将各端引出,则构成 Δ 形连接的三相电源。

三相电源 Y 形连接和 Δ 形连接如图 5-10(a)、(b)所示。

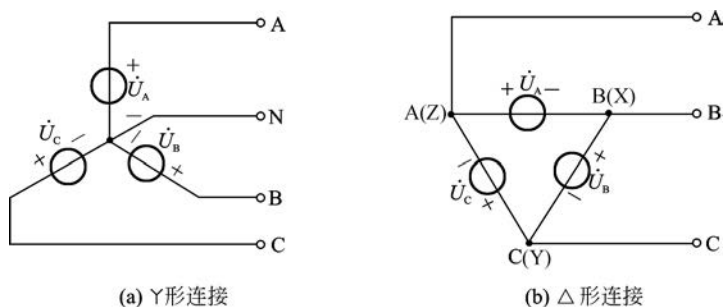


图 5-10

各端线间的电压称为线电压,有效值记为 U_l ; 每一相电源上的电压称为相电压,有效值记为 U_p 。

Y形连接的三相电源中,各线电压对称,各相电压对称,线电压是相电压的 $\sqrt{3}$ 倍,相位上各线电压超前对应的相电压 30° ,即

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3}\dot{U}_{AN}/30^\circ, \quad \dot{U}_{BC} = \sqrt{3}\dot{U}_{BN}/30^\circ, \quad \dot{U}_{CA} = \sqrt{3}\dot{U}_{CN}/30^\circ$$

△形连接的三相电源中,各线电压对称,各相电压对称,且线电压与相电压相同。

三相电源一般均保持对称,上述电压关系永远成立。三相电源的Y形连接与△形连接在具体分析电路时可互相转换。

(2) 三相负载。由三相电源供电的负载称为三相负载。三相负载也有Y形或△形两种连接方式。各相负载复阻抗相等时称为对称三相负载,不相等时称为不对称三相负载。

电源与负载相连时,线路中有电流,端线上通过的电流称为线电流,有效值记为 I_l ; 各相负载(或电源)上通过的电流称为相电流,有效值记为 I_p ; 中线上通过的电流称为中线电流,有效值记为 I_N 。

对于对称负载,负载上电压(线电压、相电压)的定义及关系同相同连接方式的三相电源。三相负载连接形式及其电压、电流特点详见表 5-3 所示。

表 5-3 三相对称负载电压、电流关系

连接形式	Y形	△形
电路模型		

续表

连接形式	Y形	△形
电压特点 相电压对称 线电压对称	$U_l = \sqrt{3} U_p$ 相电压: $\dot{U}_{AN}, \dot{U}_{BN}, \dot{U}_{CN}$ 线电压: $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ 令 $\dot{U}_{AN} = U_p \angle 0^\circ$ 则有 $\dot{U}_{BN} = U_p \angle -120^\circ$ $\dot{U}_{CN} = U_p \angle 120^\circ$ $\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \dot{U}_{AN} \angle 30^\circ = U_l \angle 30^\circ$ $\dot{U}_{BC} = \sqrt{3} \dot{U}_{BN} \angle 30^\circ = U_l \angle -90^\circ$ $\dot{U}_{CA} = \sqrt{3} \dot{U}_{CN} \angle 30^\circ = U_l \angle 150^\circ$	$U_l = U_p$ 相电压: $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ 线电压: $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ 令 $\dot{U}_{AB} = U_l \angle 0^\circ = U_p \angle 0^\circ$ 则 $\dot{U}_{BC} = U_l \angle -120^\circ = U_p \angle -120^\circ$ $\dot{U}_{CA} = U_l \angle 120^\circ = U_p \angle 120^\circ$
电流特点 相电流对称 线电流对称	$I_l = I_p$ 相电流: $\dot{I}_{AN}, \dot{I}_{BN}, \dot{I}_{CN}$ 线电流: $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ 有 $\dot{I}_A = \dot{I}_{AN}, \dot{I}_B = \dot{I}_{BN}, \dot{I}_C = \dot{I}_{CN}$ 令 $\dot{I}_A = I_l \angle 0^\circ$ 则 $\dot{I}_B = \dot{I}_A \angle 120^\circ, \dot{I}_C = \dot{I}_A \angle -120^\circ$ $\dot{I}_N = 0$	$I_l = \sqrt{3} I_p$ 相电流: $\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}, \dot{I}_{CA}$ 线电流: $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ 令 $\dot{I}_{AB} = I_p \angle 0^\circ$ 则 $\dot{I}_A = \sqrt{3} \dot{I}_{AB} \angle -30^\circ$ $\dot{I}_B = \sqrt{3} \dot{I}_{BC} \angle -30^\circ$ $\dot{I}_C = \sqrt{3} \dot{I}_{CA} \angle -30^\circ$

Y形连接中负载对称时,各线电流对称,各相电流对称,且线电流与相电流相同。

△形连接中负载对称时,各线电流对称,各相电流对称,线电流是相电流的 $\sqrt{3}$ 倍,相位上各线电流滞后对应的相电流 30° 。

2) 三相电路的分析计算

(1) 对称三相电路的分析计算。根据电源和负载连接方式的不同,可构成Y-Y系统、△-△系统以及Y-△系统和△-Y系统。后两种系统一般通过负载或电源的△-Y变换为前两种系统进行分析。

对称Y-Y系统:电源和负载都以对称Y形方式连接。此时中线上的电压、电流为零,中线存在与否及中线阻抗的大小对于电路的分析计算无影响;中线可缩为一个节点,各相具有独立性;可只求一相的值(相电压、相电流),即“化为一相”计算,然后据对称性及线值和相值关系写出其他值(相电压、相电流、线电压、线电流)。

对称△-△系统:不计端线阻抗时,负载电压就是电源电压,也可只求一相的值,再写出其他值。计端线阻抗时,可将电源和负载同时进行△-Y变换,转换为Y-Y系统,求出相

值写出其他值。

(2) 不对称三相电路的分析计算。不对称是指三相负载不对称,电源电压常是对称的,要计算相电压、相电流、线电压、线电流,按照正弦稳态电路一般分析方法分析。

(3) 三相电路的功率。三相负载总的平均功率等于各相负载平均功率之和;总的无功功率等于各相负载无功功率之和。

对于对称三相电路,有

$$P = 3U_p I_p \cos\varphi = \sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi \quad Q = 3U_p I_p \sin\varphi = \sqrt{3}U_l I_l \sin\varphi$$

其中 φ 为每相负载电压与电流的相位差,即负载的阻抗角。

$$p = p_A + p_B + p_C = 3U_p I_p \cos\varphi = P$$

三相电路的瞬时功率等于其平均功率,这种性质称为“瞬时功率平衡”。

测量三相电路的功率时,要注意计算瓦特表的读数与计算实际电路功率的公式不同。其表示为

$$P_W = U_W I_W \cos\varphi_W$$

其中, P_W 为瓦特表的读数; U_W 为电压线圈所接端子间的电压有效值,方向由瓦特表的“*”端指向非“*”端; I_W 为电流线圈上通过的电流有效值,方向由“*”端流向非“*”端; φ_W 为电压线圈电压与电流线圈电流的相位差。图 5-11 所示为二瓦法测量三相负载功率的示意图。

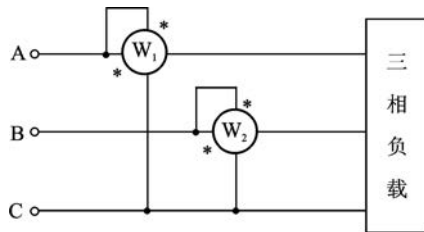


图 5-11

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(\hat{U}_{AC}, \hat{I}_A)$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\hat{U}_{BC}, \hat{I}_B)$$

可以证明三相负载的总功率为两瓦特表读数的代数之和。

负载对称时有

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(30^\circ - \varphi)$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(30^\circ + \varphi) \quad (\varphi \text{ 的意义同前})$$

图 5-11 为共 C 接法,还有共 A、共 B 接法,读者自行练习其接法,写出两个瓦特表读数的表达式。二瓦法可得无功功率 $Q = \sqrt{3}(P_2 - P_1)$ 。

5.3 典型题解析

例 5-1 图 5-12(a)所示电路,已知电流源 $i_{S1}(t) = 5e^{-2t}$ A,耦合电感参数 $L_1 = 1$ H, $L_2 = 0.4$ H, $M = 0.1$ H。(1)求电压 $u_1(t)$ 和开路电压 $u_2(t)$; (2)若在 2-2' 端口接入电流源 $i_{S2}(t) = 10e^{-5t}$ A,如图 5-12(b)所示,求电压 $u_1(t)$ 及 $u_2(t)$; (3)求图 5-12(b)所示耦合电感的储能 $w(t)$ 。

解 (1) 由于 2-2' 端开路,此时 $i_2 = 0$,则有

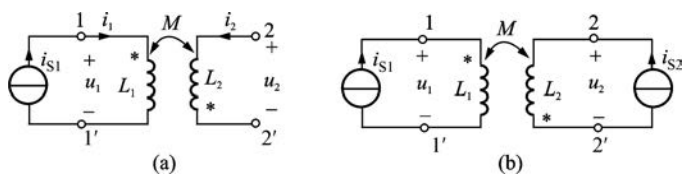


图 5-12

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} = 1 \times \frac{d(5e^{-2t})}{dt} = -10e^{-2t} \text{ V}$$

$$u_2(t) = -M \frac{di_{S1}}{dt} = -0.1 \times 5 \times (-2)e^{-2t} \text{ V} = e^{-2t} \text{ V}$$

(2) 当 2-2' 端接入电流源 i_{S2} 时, 则对 1-1' 端产生互感电压, 此时有

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_{S1}}{dt} - M \frac{di_{S1}}{dt} = -10e^{-2t} + 5e^{-5t} \text{ V}$$

$$u_2(t) = -M \frac{di_{S1}}{dt} + L_2 \frac{di_{S2}}{dt} = e^{-2t} - 20e^{-5t} \text{ V}$$

(3) 耦合电感的储能为

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2} L_1 i_{S1}^2 + \frac{1}{2} L_2 i_{S2}^2 - M i_{S1} i_{S2} \\ &= \frac{1}{2} (5e^{-2t})^2 + \frac{1}{2} \times 0.4 (10e^{-5t})^2 - 0.1 (5e^{-2t}) (10e^{-5t}) \\ &= 12.5e^{-4t} + 20e^{-10t} - 5e^{-7t} \text{ J} \end{aligned}$$

例 5-2 求图 5-13(a) 所示二端电路的戴维南等效电路。

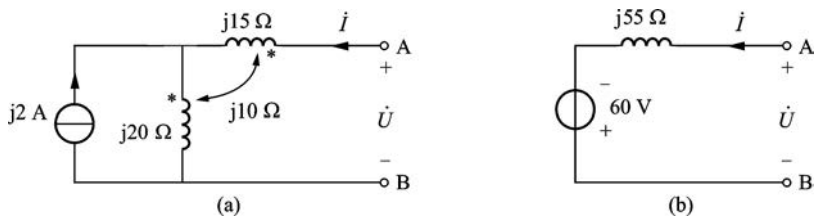


图 5-13

解 开路电压由 $j20 \Omega$ 线圈上自感电压和 $j15 \Omega$ 线圈上互感电压构成, 即

$$\dot{U}_{oc} = j10 \times j2 + j20 \times j2 = -60 \text{ V}$$

除源阻抗为耦合电感的顺向串联, 即

$$Z = j15 + j20 + 2 \times j10 = j55 \Omega$$

所得戴维南等效电路如图 5-13(b) 所示。

可用互感消去法求解过程请读者自己练习。

例 5-3 图 5-14(a)、(b) 所示电路中, 已知 $L_1 = 3 \text{ H}$, $L_2 = 2 \text{ H}$, $M = 2 \text{ H}$ 。试求电路从 1-1' 端口看进去的等效电感。

解法 1 直接写出互感元件的伏安关系, 其电压、电流如图 5-14(a) 所示, 则有

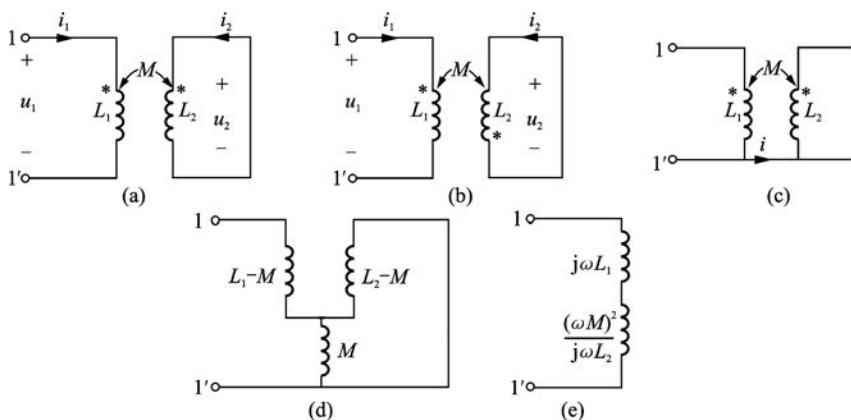


图 5-14

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1)$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (2)$$

由式②解出

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \quad (3)$$

将式③代入式①,得

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$$

所以有

$$L_{\text{eqa}} = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = 3 - \frac{2^2}{2} = 1 \text{ H}$$

同样,对图 5-14(b)有

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad (4)$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (5)$$

由式⑤解出

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \quad (6)$$

将式⑥代入式④,得

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$$

所以

$$L_{\text{eqb}} = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = 3 - \frac{2^2}{2} = 1 \text{ H}$$

解法 2 将图 5-14(a) 中互感的两线圈的一个端子接到一起, 如图 5-14(c) 所示。据 KCL 知其连线上电流 i 为零, 对原电路没有影响, 这样就构成了同侧相连的三端接法的互感, 消去互感后电路如图 5-14(d) 所示。这样电路就变成了没有互感的两电感线圈 M 与 $L_2 - M$ 并联后再与 $L_1 - M$ 线圈的串联, 所以

$$L_{\text{eqa}} = L_1 - M + \frac{1}{\frac{1}{L_2 - M} + \frac{1}{M}} = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = 1 \text{ H}$$

图 5-14(b) 消去互感后, 电路同图 5-14(d) 相似, 只是 M 前的符号取反, 则有

$$L_{\text{eqb}} = L_1 + M + \frac{1}{\frac{1}{L_2 + M} + \frac{1}{-M}} = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = 1 \text{ H}$$

解法 3 原电路中的耦合电感可看作空心变压器, 则由原边看进去的等效电路, 与图 5-14(a)、(b) 的等效电路相同, 如图 5-14(e) 所示, 则

$$Z_{\text{eq}} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2} = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right)$$

$$L_{\text{eq}} = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = 1 \text{ H}$$

讨论 从以上三种解法中可看出, 反映阻抗法较简单, 且不受互感的同名端及电压、电流方向的影响, 所以, 当互感的两个线圈分属于两个独立回路时, 往往将其看作空心变压器, 用反映阻抗法来分析。

例 5-4 图 5-15(a) 所示为含有耦合电感的正弦稳态电路。已知电源角频率为 ω , 试写出网孔电流方程和节点电压方程。

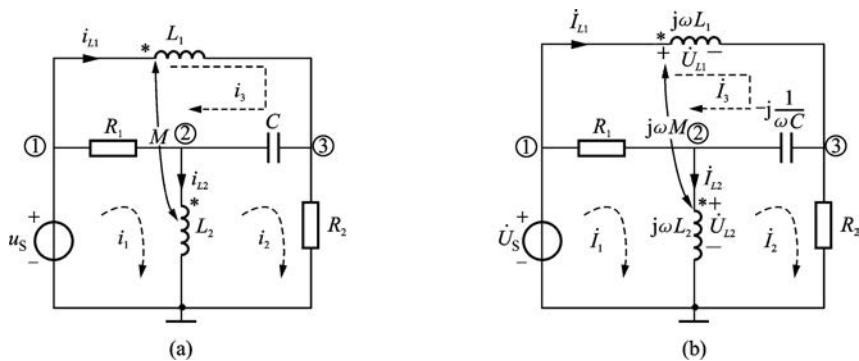


图 5-15

解 (1) 画出电路的相量模型如图 5-15(b) 所示。标出耦合电感的电压、电流, 由其伏安关系知

$$\dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_{L1} + j\omega M \dot{I}_{L2} = j\omega L_1 \dot{I}_3 + j\omega M (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \quad ①$$

$$\dot{U}_{L2} = j\omega M \dot{I}_{L1} + j\omega L_2 \dot{I}_{L2} = j\omega M \dot{I}_3 + j\omega L_2 (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \quad ②$$

将两电感视为电压源, 则网孔电流方程为

$$\begin{cases} R_1 \dot{I}_1 - R_1 \dot{I}_3 = \dot{U}_S - \dot{U}_{L2} & \text{③} \\ \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C}\right) \dot{I}_2 + j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_3 = \dot{U}_{L2} & \text{④} \\ -R_1 \dot{I}_1 + j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_2 + \left(R_1 - j \frac{1}{\omega C}\right) \dot{I}_3 = -\dot{U}_{L1} & \text{⑤} \end{cases}$$

将式①、式②代入式③、式④、式⑤,整理得

$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_2) \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2 - (R_1 - j\omega M) \dot{I}_3 = \dot{U}_S \\ -j\omega L_2 \dot{I}_1 + \left[R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \dot{I}_2 + j\left(\frac{1}{\omega C} - \omega M\right) \dot{I}_3 = 0 \\ (-R_1 + j\omega M) \dot{I}_1 + j\left(\frac{1}{\omega C} - \omega M\right) \dot{I}_2 + \left[R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \dot{I}_3 = 0 \end{cases}$$

(2) 将 $\dot{I}_{L1}$ 、 $\dot{I}_{L2}$ 视为电流源,则节点电压方程为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_S & \text{⑥} \\ \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C\right) \dot{U}_2 - j\omega C \dot{U}_3 - \frac{1}{R_1} \dot{U}_1 = -\dot{I}_{L2} & \text{⑦} \\ -j\omega C \dot{U}_2 + \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right) \dot{U}_3 = \dot{I}_{L1} & \text{⑧} \\ \dot{U}_2 = \dot{U}_{L2} & \text{⑨} \end{cases}$$

又有

$$\dot{U}_{L1} = \dot{U}_1 - \dot{U}_3 \quad \text{⑩}$$

将式①、式②代入式⑨、式⑩,则有

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_{L1} + j\omega L_2 \dot{I}_{L2} \quad \text{⑪}$$

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_3 = j\omega L_1 \dot{I}_{L1} + j\omega M \dot{I}_{L2} \quad \text{⑫}$$

将式⑥、式⑦、式⑧、式⑪、式⑫五个方程联立求解,则 $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$ 、 $\dot{U}_3$ 、 $\dot{I}_{L1}$ 、 $\dot{I}_{L2}$ 五个未知量可解得。

讨论 在分析含耦合电感的正弦稳态电路时,将电感上的电压用耦合电感伏安关系写出,当作电压源处理,写方程较清楚。如果在写方程时考虑互感也可以,但很多时候容易遗忘互感。此题中 $\dot{U}_{L1}$ 、 $\dot{U}_{L2}$ 表示电感上的总电压,而不仅仅是自感电压。

例 5-5 正弦稳态电路如图 5-16 所示,已知 $R_1 = 5 \Omega$, $X_1 = 40 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $X_2 = 90 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $X_3 = 80 \Omega$, $\omega M = 20 \Omega$ 。当开关 S 打开时,电压表读数为 100 V。试求:

(1) 图中电流表的读数和外施电压有效值 U_1 ;

(2) 开关闭合后,电压表和电流表的读数。

解 (1) 此题为空心变压器电路,开关打开时,即变压器副边开路,电压表读数为副边的感应电压有效值,即

$$U = \omega M I_1$$

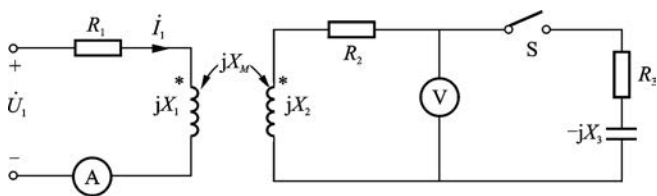


图 5-16

$$I_1 = \frac{U}{\omega M} = \frac{100}{20} = 5 \text{ A}$$

原边线圈中只有自感电压,则

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + jX_1 \dot{I}_1 = (R_1 + jX_1) \dot{I}_1$$

$$U_1 = I_1 \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = 5 \times \sqrt{5^2 + 40^2} = 201.6 \text{ V}$$

(2) 开关闭合后,副边回路总阻抗

$$\begin{aligned} Z_{22} &= jX_2 + R_2 + R_3 - jX_3 \\ &= j90 + 10 + 20 - j80 = 30 + j10 \Omega \end{aligned}$$

原边回路总的等效阻抗

$$Z_{11\text{eq}} = R_1 + jX_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = 5 + j40 + \frac{20^2}{30 + j10} = 17 + j36 \Omega$$

原边回路电流有效值

$$I'_1 = \frac{U_1}{|Z_{11\text{eq}}|} = \frac{201.6}{\sqrt{17^2 + 36^2}} = 5.064 \text{ A}$$

原边回路总阻抗

$$Z_{11} = R_1 + jX_1 = 5 + j40 \Omega$$

副边回路的总的等效阻抗

$$Z_{22\text{eq}} = Z_{22} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} = 30 + j10 + \frac{20^2}{5 + j40} = 31.23 + j0.154 \Omega$$

副边回路电流有效值

$$I'_2 = \frac{\omega M I_1}{|Z_{22\text{eq}}|} = \frac{20 \times 5}{\sqrt{31.23^2 + 0.154^2}} = 3.202 \text{ A}$$

电压表读数

$$U' = |R_3 - jX_3| \times I'_2 = \sqrt{20^2 + 80^2} \times 3.202 = 264.04 \text{ V}$$

故开关闭合后电流表读数为 5.064 A,电压表读数为 264.04 V。

讨论 此题以外施电压为参考相量,直接对变压器原副边回路列方程,求出原副边回路电流相量。因为所求值为有效值,用反映阻抗法更为简便些。

例 5-6 图 5-17(a)所示电路中,已知 $i_s = \sqrt{2} \cos t$ A,试求 $u_2(t)$ 。

解 图示电路的耦合电感为异侧相连的三端接法,去耦后电路的相量模型如图 5-17(b)所示,此时可用系统分析法,标出节点号,列出节点电压方程

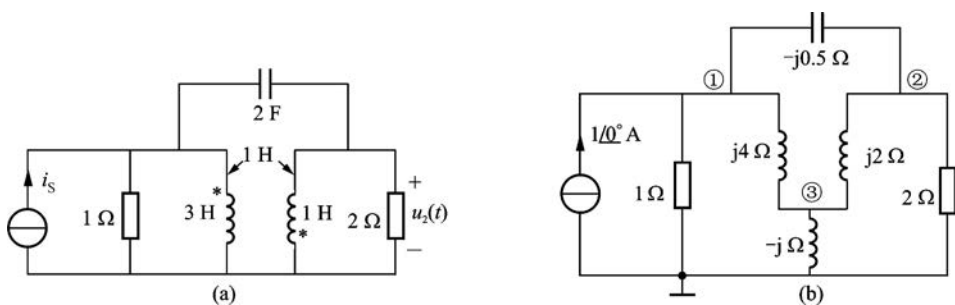


图 5-17

$$\begin{cases} (1 + j1.75)\dot{U}_1 - j2\dot{U}_2 + j0.25\dot{U}_3 = 1 \\ -j2\dot{U}_1 + (0.5 + j1.5)\dot{U}_2 + j0.5\dot{U}_3 = 0 \\ j0.25\dot{U}_1 + j0.5\dot{U}_2 + j0.25\dot{U}_3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\dot{U}_2 = 0.41 \angle 78.2^\circ \text{ V}$$

所以

$$u_2(t) = 0.41\sqrt{2} \cos(t + 78.2^\circ) \text{ V}$$

例 5-7 求图 5-18 所示电路中,理想变压器的电压 $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$ 及电流 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 。

解法 1 将理想变压器原、副边视为电压源,其电压为 $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$,列网孔电流方程

$$(50 - j60)\dot{I}_1 + j60\dot{I}_2 = 100 \angle 0^\circ - \dot{U}_1 \quad (1)$$

$$j60\dot{I}_1 + (70 - j60)\dot{I}_2 = \dot{U}_2 \quad (2)$$

由理想变压器的伏安关系,有

$$\dot{U}_1 = 2\dot{U}_2 \quad (3)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{2}\dot{I}_2 \quad (4)$$

将式①、式②、式③、式④联立求解,得

$$\dot{U}_1 = \frac{200(140 - j60)}{330 - j60} = 90.82 \angle -12.89^\circ$$

$$\dot{U}_2 = 45.41 \angle -12.89^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{100}{330 - j60} = 0.298 \angle 10.30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = 0.596 \angle 10.30^\circ \text{ A}$$

解法 2 将理想变压器原、副边的电流设为变量,对节点 a 列电压方程,则有

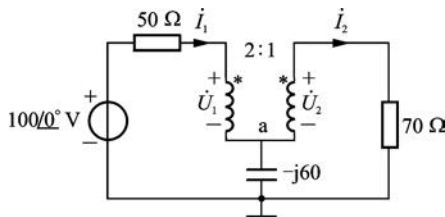


图 5-18

$$j \frac{1}{60} \dot{U}_a = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \quad (5)$$

将 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 用节点电压及理想变压器电压表示,即

$$\dot{I}_1 = \frac{100 - \dot{U}_1 - \dot{U}_a}{50} \quad (6)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2 + \dot{U}_a}{70} \quad (7)$$

将式⑤、式⑥、式⑦及解法 1 中的式③、式④联立求解,得

$$\dot{U}_1 = 90.82 \angle -12.89^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_2 = 45.41 \angle -12.89^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = 0.298 \angle 10.30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = 0.596 \angle 10.30^\circ \text{ A}$$

讨论 当理想变压器的两个线圈不是分属于两个独立的回路时,设其电压、电流为变量,系统法分析较直接,在补充变压器伏安关系时,要注意电压的极性及电流方向。

例 5-8 图 5-19(a)所示电路中,已知 $\dot{U}_S = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $\omega L = 4 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 6 \Omega$, $n = 2$ 。求 $\dot{U}_2$ 及 $\dot{U}_S$ 发出的复功率。

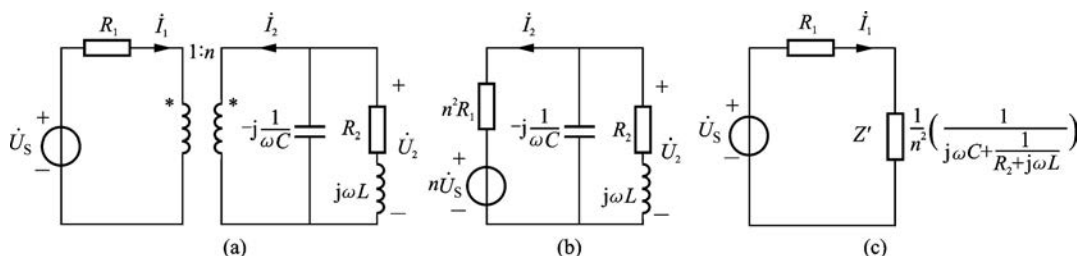


图 5-19

解法 1 将理想变压器原边折算到副边,等效电路如图 5-19(b)所示,则

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \frac{-j \frac{1}{\omega C} \times (R_2 + j\omega L)}{-j \frac{1}{\omega C} + (R_2 + j\omega L)} \times n \dot{U}_S \\ &= \frac{-j6 \times (3 + j4)}{-j6 + 3 + j4} \times 20 \angle 0^\circ \\ &= \frac{-j6 + 3 + j4}{4 + \frac{-j6 + (3 + j4)}{-j6 + (3 + j4)}} \times 20 \angle 0^\circ \end{aligned}$$

$$= 13.51 \angle -1.033^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_2 = (\dot{U}_2 - n\dot{U}_S) \times \frac{1}{n^2 R_1} = 1.624 \angle -177.85^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_1 = -n\dot{I}_2 = 3.248 \angle 2.15^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{S}_{U_S} = \dot{U}_S \times \dot{I}_1^* = 10 \times 3.248 \angle -2.15^\circ = 32.45 + j1.218 \text{ VA}$$

解法 2 将理想变压器副边阻抗变换到原边,等效电路如图 5-19(c)所示,则

$$Z' = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_2 + j\omega L}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{j\frac{1}{6} + \frac{1}{3 + j4}} \right) = 2.077 - j0.116 \Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{R_1 + Z'} = \frac{10 \angle 0^\circ}{3.077 - j0.116} = 3.248 \angle 2.15^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{1}{n}\dot{I}_1 = 1.624 \angle -177.85^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_2 = -\frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_2 + j\omega L}} \times \dot{I}_2 = 13.51 \angle -1.033^\circ \text{ V}$$

$$\tilde{S}_{U_S} = \dot{U}_S \times \dot{I}_1^* = 10 \times 3.248 \angle -2.15^\circ = 32.45 + j1.218 \text{ VA}$$

讨论 本题用到的是从理想变压器副边看进去的戴维南等效电路,其除源阻抗为 $n^2 R_1$,开路电压为 $n \dot{U}_S$,从原边看进去是无源一端口,可等效为一个阻抗,等效阻抗为副边阻抗的 $\frac{1}{n^2}$ 倍,即所谓的折合阻抗。

例 5-9 图 5-20(a)所示电路中,负载 Z_L 可变。求 Z_L 为何值时能获得最大功率 $P_{\max}$,此时 $P_{\max}$ 为多少?

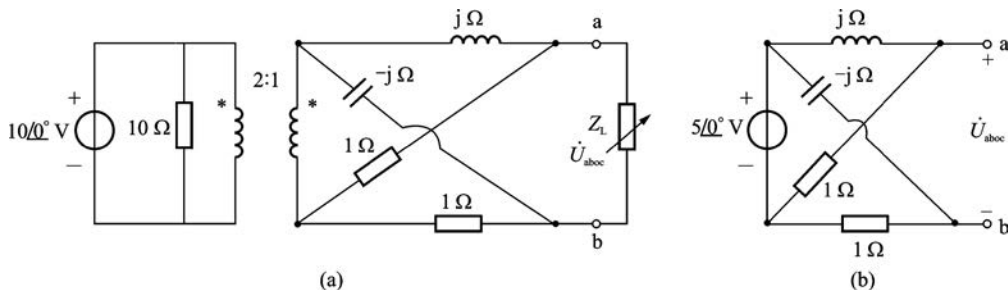


图 5-20

解 理想变压器原边为电压源与电阻并联,对原边来说就等效为电压源,变换到副边为 $5 \angle 0^\circ \text{ V}$ 的电压源,等效电路如图 5-20(b)所示。求 ab 端口看进去的戴维南等效电路,有

$$\dot{U}_{aboc} = \frac{1}{1+j} \times 5 \angle 0^\circ - \frac{1}{1-j} \times 5 \angle 0^\circ = 5 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$Z_i = \frac{j}{1+j} + \frac{-j}{1-j} = 1 \Omega$$

所以,当 $Z_L = Z_i^* = 1 \Omega$ 时,负载获得最大功率,其值为

$$P_{\max} = \frac{U_{aboc}^2}{4R_i} = \frac{5^2}{4 \times 1} = 6.25 \text{ W}$$

例 5-10 图 5-21(a)所示正弦电路中,已知 $i_S = 1.414\cos 100t \text{ A}$, T 为理想变压器。试求负载阻抗 Z_L 为何值时,其获得的功率为最大,并求此最大功率 $P_{\max}$ 。

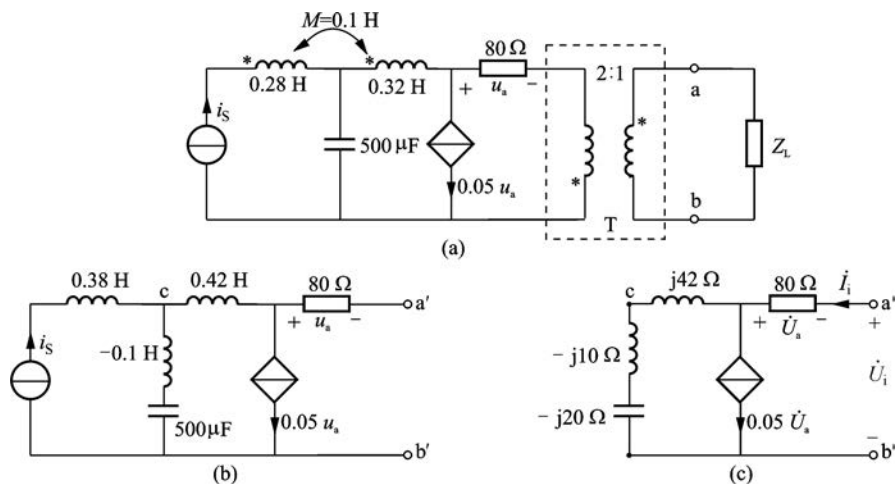


图 5-21

解 本题仍为最大功率传输问题,因此需求出 ab 以左的戴维南等效电路。理想变压器副边开路时,电流为零,据其电流关系,则原边的电流也为零,即开路,此时 $\dot{U}_a = 0$ 。去耦后画出求开路电压的电路模型如图 5-21(b)所示,则有

$$\dot{U}_{aboc} = -\frac{1}{2}\dot{U}_{a'b'oc}$$

$$\dot{U}_{a'b'oc} = \dot{U}_{cb'} = (-j10 - j20)\dot{I}_S = 30\angle -90^\circ \text{ V}$$

所以有

$$\dot{U}_{aboc} = 15\angle 90^\circ \text{ V}$$

求原边 $a'b'$ 看进去的除源阻抗 $Z_{a'b'i}$ 。采用外施电源法,电路如图 5-21(c)所示。

$$\dot{U}_a = -80\dot{I}_i$$

$$\dot{U}_i = 80\dot{I}_i + (j42 - j10 - j20)(\dot{I}_i - 0.05\dot{U}_a) = (80 + j60)\dot{I}_i$$

得

$$Z_{a'b'i} = 80 + j60 \Omega$$

副边 ab 看进去的除源阻抗

$$Z_{abi} = \frac{1}{n^2}Z_{a'b'i} = \frac{1}{4}(80 + j60) = 20 + j15 \Omega$$

所以,当 $Z_L = Z_{abi}^* = 20 - j15 \Omega$ 时,负载获得最大功率,最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_{aboc}^2}{4 \times 20} = \frac{15^2}{4 \times 20} = 2.8125 \text{ W}$$

例 5-11 图 5-22 所示含耦合电感线圈电路,正弦电压 u_S 的有效值为 120 V,角频率

$\omega = 1000 \text{ rad/s}$, $L_1 = 0.05 \text{ H}$, $L_2 = 0.04 \text{ H}$, $L_3 = 0.01 \text{ H}$, $L_4 = 0.02 \text{ H}$, $C = 25 \mu\text{F}$, $M_{12} = 0.01 \text{ H}$, $M_{14} = 0.03 \text{ H}$, $M_{24} = 0.02 \text{ H}$, 线圈电阻忽略不计。求: (1) 电磁式电压表的读数(设电压表内阻为无限大); (2) a、b 端的入端阻抗。

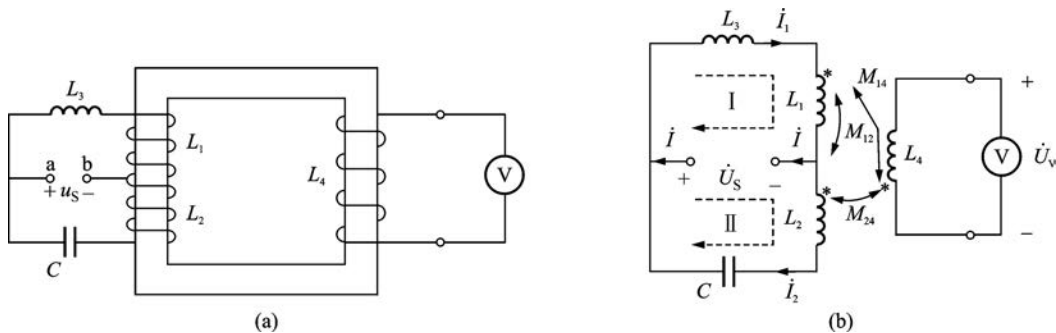


图 5-22

解 (1) 由右手螺旋法则判断出各耦合电感的同名端, 画出电路如图 5-22(b) 所示。

由于电压表内阻为无穷大, 所以 L_4 上电流为零, 其对右边电感没有互感影响。令

$\dot{U}_S = 120 \angle 0^\circ \text{ V}$, 对于右边回路 I、回路 II 列 KVL 方程。

$$\begin{cases} (j\omega L_3 + j\omega L_1) \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 = \dot{U}_S & \text{①} \\ \left(j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C}\right) \dot{I}_2 + j\omega M_{12} \dot{I}_1 = \dot{U}_S & \text{②} \end{cases}$$

代入数据

$$\begin{cases} (j10 + j50) \dot{I}_1 + j10 \dot{I}_2 = 120 \angle 0^\circ \\ j10 \dot{I}_1 + (j40 - j40) \dot{I}_2 = -120 \angle 0^\circ \end{cases}$$

解得 $\dot{I}_1 = j12$, $\dot{I}_2 = -j84$

$$\dot{U}_V = -j\omega M_{14} \dot{I}_1 - j\omega M_{24} \dot{I}_2$$

代入数据 $\dot{U}_V = -j30 \times (j12) - j20 \times (-j84) = -1320 \text{ V}$

所以, 电压表读数为 1320 V。

本例中分析清楚互感关系后, 可三端去耦, 列网孔法方程, 也可得式①、式②的关系。

(2) 图 5-22(b) 中, 设 ab 端加的外施电压为 $\dot{U}_S$, 则其产生电流 $\dot{I}$ 为

$$\dot{I} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = j12 + j84 = j96$$

所以入端阻抗

$$Z_{ab} = \frac{\dot{U}_S}{\dot{I}} = \frac{120}{j96} = -j1.25 \Omega$$

例 5-12 某收音机输入接收回路的等效电路如图 5-23 所示。已知 $R = 6 \Omega$, $L = 300 \mu\text{H}$, C 为可调电容。广播电台信号 $U_{S1} = 1.5 \text{ mV}$, $f_1 = 540 \text{ kHz}$; $U_{S2} = 1.5 \text{ mV}$, $f_2 = 600 \text{ kHz}$ 。

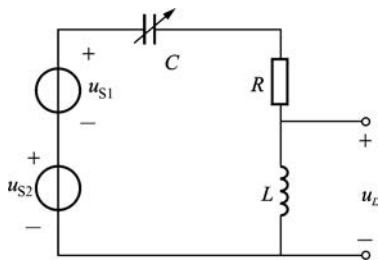


图 5-23

- (1) 当电路对信号 U_{S1} 发生谐振时,求电容 C 值和电路的品质因数 Q ;
 (2) 保持(1)中的 C 值不变,分别计算 u_{S1} 和 u_{S2} 在电路中产生的电流及在电感 L 上的输出电压。

解 (1) 因为 $f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

所以

$$C = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 L} = \frac{1}{(2 \times 3.14 \times 540 \times 10^3)^2 \times 300 \times 10^{-6}} = 290 \text{ pF}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2 \times 3.14 \times 540 \times 10^3 \times 300 \times 10^{-6}}{6} = 169.6$$

- (2) 当信号 u_{S1} 作用时,电路发生谐振,故

$$I_1 = I_0 = \frac{U_{S1}}{R} = \frac{1.5 \times 10^{-3}}{6} = 250 \text{ } \mu\text{A}$$

$$U_{L1} = QU_{S1} = 169.6 \times 1.5 \times 10^{-3} = 254.4 \text{ mV}$$

当信号 u_{S2} 作用时,电路处于失谐状态,故

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{U_{S2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}} \\ &= \frac{1.5 \times 10^{-3}}{\sqrt{6^2 + \left(2\pi \times 600 \times 10^3 \times 0.3 \times 10^{-3} - \frac{1}{2\pi \times 600 \times 10^3 \times 290 \times 10^{-12}}\right)^2}} \\ &= 6.93 \text{ } \mu\text{A} \end{aligned}$$

$$U_{L2} = \omega_2 L I_2 = 2\pi \times 600 \times 10^3 \times 0.3 \times 10^{-3} \times 6.93 \times 10^{-6} = 7.84 \text{ mV}$$

讨论 计算结果表明,串联谐振电路对谐振频率附近信号有很强的选择性,且谐振时,电感上的输出电压是电路输入信号的 Q 倍,具有明显的放大作用,有利于接收所需电台的信号。

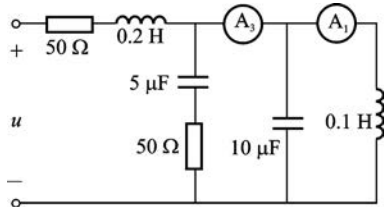


图 5-24

例 5-13 在图 5-24 所示电路中,正弦电压 u 的有效值 $U=200 \text{ V}$,电流表 $\textcircled{A}_2$ 的读数为零。求电流表 $\textcircled{A}_1$ 的读数。

解 设 $\dot{U}=200\angle 0^\circ \text{ V}$, $\textcircled{A}_2$ 的读数为零意味着其右边 CL 发生并联谐振,由此可确定电源的角频率

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{0.1 \times 10 \times 10^{-6}}} = 1000 \text{ rad/s}$$

$\textcircled{A}_2$ 的两端的电位相等,所以 0.1 H 电感电压应为

$$\dot{U}_{0.1 \text{ H}} = \frac{50 - j \frac{1}{5 \times 10^{-3}}}{50 + j200 + 50 - j \frac{1}{5 \times 10^{-3}}} \times 200 = 412.31 \angle -76^\circ \text{ V}$$

所以

$$I_{A1} = \frac{412.31}{0.1 \times 1000} = 4.12 \text{ A}$$

讨论 此题须注意的是,许多读者会想当然地认为,当③的读数为零时④的读数也为零,理由是电流为零,电压为电流与阻抗的乘积也为零,所以右边的电容、电感上的电流都为零;或者认为电流为零电路相当于开路,开路以后右边的电路与左边没有电的联系,所以④的读数为零。这里有个概念错误,“开路”是对一个无穷大电阻而言的,不管电压有多大,其上通过的电流永远为零,用欧姆定律解释即有限值除以无穷值结果为零,而零乘以有限值为零,乘以无穷值却是不定值,这个概念经常用到,需特别注意。谐振时,电感和电容上的电流是由于其本身储存的能量引起的,其大小相等、方向相反,从而对外的电流为零。由于④为理想电流表,内阻为零,可视为短路,两边电位相等,即便其内阻不为零,由于其值有限,其上的电压也为零。

例 5-14 已知对称三相电路电源端的线电压 $U_1 = 380 \text{ V}$, 三角形负载 $Z = 4.5 + \text{j}14 \Omega$, 端线阻抗 $Z_1 = 1.5 + \text{j}2 \Omega$ 。求线电流和负载的电流和电压,并作相量图。

解 根据题目画出三相电路如图 5-25(a) 所示,此三相电路对称,将负载端进行 Δ -Y 变换,系统变为如图 5-25(b) 所示的对称的 Y-Y 形式,其中 $Z' = \frac{1}{3}Z = 1.5 + \text{j}4.67$, 取其中的一相(A 相)计算。

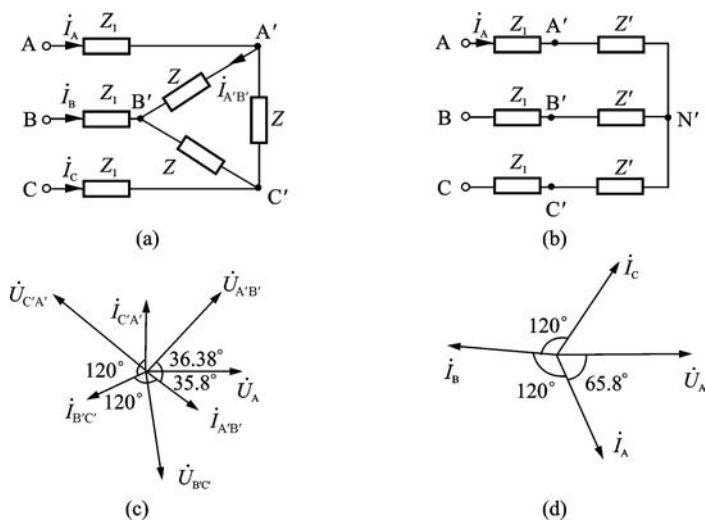


图 5-25

电源端 Y 形连接时

$$U_p = \frac{U_1}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$$

令电源 A 相电压为参考相量

$$\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

则线电流

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_1 + Z'} = \frac{220 \angle 0^\circ}{1.5 + j2 + 1.5 + j4.67} = 30.09 \angle -65.8^\circ \text{ A}$$

回到图 5-25(a), 据 \$\Delta\$ 形连接负载的相电流和线电流关系得相电流

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{I}_A e^{j30^\circ} = 17.37 \angle -35.8^\circ \text{ A}$$

负载电压为

$$\begin{aligned} \dot{U}_{A'B'} &= \dot{I}_{A'B'} Z = 17.37 \angle -35.8^\circ \times (4.5 + j14) \\ &= 205.65 + j151.51 = 255.43 \angle 36.38^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

根据对称性写出其他电压、电流分别为

$$\dot{I}_B = 30.09 \angle 174.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = 30.09 \angle 54.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{B'C'} = 17.37 \angle -155.8^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{C'A'} = 17.37 \angle 84.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{B'C'} = 255.43 \angle -83.62^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{C'A'} = 255.43 \angle 156.38^\circ \text{ V}$$

由计算结果作出如图 5-25(c)、(d) 所示的相量图。

例 5-15 对称三相电路如图 5-26(a) 所示。对称三相电源线电压为 380 V, 对称三相负载阻抗 \$Z = 20 + j20 \, \Omega\$。三相电动机功率为 1.7 kW, 功率因数 \$\cos \varphi = 0.82\$。

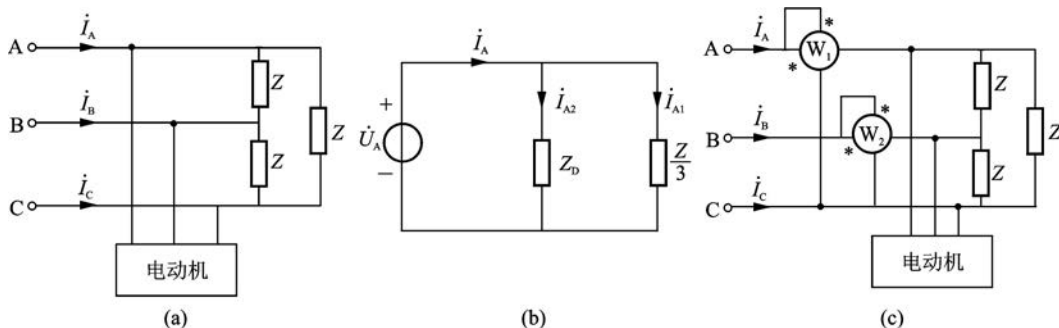


图 5-26

- (1) 求线电流 \$\dot{I}_A\$、\$\dot{I}_B\$、\$\dot{I}_C\$;
- (2) 求三相电源发出的总功率;
- (3) 若用两表法测三相总功率, 试画出两只功率表的接线图。

解 (1) 电路为对称三相电路。设 \$\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}\$, 则一相计算电路如图 5-26(b) 所示, 其中 \$Z_D\$ 表示电动机负载每相等效阻抗(Y形连接)。由一相计算电路及已知条件,

可得

$$\dot{I}_{A1} = \frac{\dot{U}_A}{Z/3} = \frac{220\angle 0^\circ}{(20 + j20)/3} = 23.34\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$I_{A2} = \frac{P}{\sqrt{3}U_1 \cos\varphi} = \frac{1.7 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 380 \times 0.82} = 3.15 \text{ A}$$

由于

$$\cos\varphi = 0.82, \quad \varphi = 34.9^\circ$$

所以

$$\dot{I}_{A2} = 3.15\angle -34.9^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} = 23.34\angle -45^\circ + 3.15\angle -34.9^\circ \\ &= 16.5 - j16.5 + 2.583 - j1.802 \\ &= 26.44\angle -43.8^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

由对称性,得

$$\dot{I}_B = 26.44\angle -163.8^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = 26.44\angle 76.2^\circ \text{ A}$$

(2) 三相电源发出的有功功率为

$$\begin{aligned}P &= \sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi = \sqrt{3} \times 380 \times 26.44 \times \cos 43.8^\circ \\ &= 12.6 \text{ kW}\end{aligned}$$

(3) 两表法测三相电源发出总有功功率的接线图如图 5-26(c)所示。

讨论 对称三相电路“化为一相”的计算方法很重要,要求熟练掌握。两表法测三相总功率的接线除了图 5-26(c)共 C 接法外还有其他形式,读者可自行练习。

例 5-16 图 5-27(a)所示为星形连接的三相负载,电源线电压为 380 V,电路中接有两只功率表 $\textcircled{W}_1$ 和 $\textcircled{W}_2$, R_g 等于 $\textcircled{W}_1$ 的电压线圈及其附加电阻的总电阻。已知 $R = 60 \Omega$, $\omega L = 80 \Omega$ 。求:

(1) 负载所吸收的有功功率和无功功率;

(2) $\textcircled{W}_1$ 和 $\textcircled{W}_2$ 的读数。

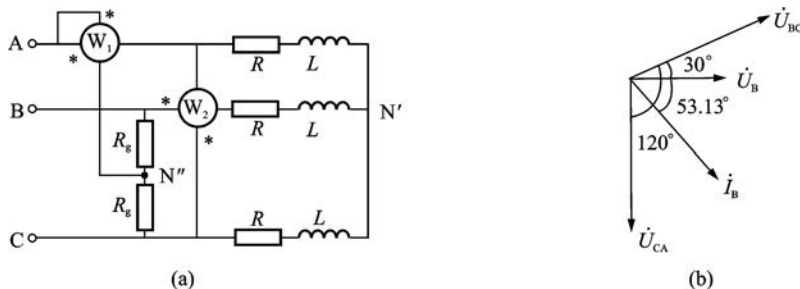


图 5-27

解 (1) 功率表的接入不影响负载的电压

$$I_p = I_l = \frac{380/\sqrt{3}}{\sqrt{60^2 + 80^2}} = 2.2 \text{ A}$$

$$\varphi_z = \arctan \frac{80}{60} = 53.13^\circ$$

$$P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi_z = \sqrt{3} \times 380 \times 2.2 \times \cos 53.13^\circ = 871.2 \text{ W}$$

$$Q = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi_z = \sqrt{3} \times 380 \times 2.2 \times \sin 53.13^\circ = 1161.6 \text{ var}$$

或

$$P = 3 \times 2.2^2 \times 60 = 871.2 \text{ W}$$

$$Q = 3 \times 2.2^2 \times 80 = 1161.6 \text{ var}$$

(2) 前面已经提过,没有特殊说明时可认为仪表是理想的,但此例提到功率表⑤的电压线圈及其附加电阻的总电阻等于 R_g ,记两个 R_g 之间的连接点为 N'' ,则电源 A 端和 N'' 之间相当于接一个电阻 R_g ,据三相电路的对称性可判断 N'' 、 N' 和电源的中性点都是等电位点,所以有

$$\textcircled{5} = U_{AN} I_A \cos(\dot{U}_{AN}, \dot{I}_A) = U_p I_p \cos \varphi_z = \frac{1}{3} P = 290.4 \text{ W}$$

功率表⑥所接电压、电流相量图如图 5-27(b)所示,则

$$\textcircled{6} = U_{CA} I_B \cos(\dot{U}_{CA}, \dot{I}_B) = U_l I_l \cos(120^\circ - 30^\circ - 53.13^\circ) = 668.9 \text{ W}$$

讨论 此题中若不告诉功率表的内阻,则认为功率表都是理想的,即其电压线圈电阻为无穷大,电流线圈电阻为零; R_g 接在电源之间不影响负载的供电,仍是三相对称电路,则

$$\dot{U}_{AN''} = \dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BN''} = \dot{U}_{AB} + \frac{1}{2} \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} + \frac{1}{2} \dot{U}_{AB} \angle -120^\circ = 0.866 \angle -30^\circ \dot{U}_{AB}$$

功率表⑤的读数则为

$$\textcircled{5} = U_{AN''} I_A \cos(\dot{U}_{AN''}, \dot{I}_A) = 0.866 U_l I_l \cos(-30^\circ + 30^\circ + \varphi_z) = 434.386 \text{ W}$$

此外,还可以证明功率表⑤的读数乘以 $\sqrt{3}$ 即为负载的无功功率,这也是测量无功功率的常用电路。需要强调的是,三相电路的负载功率是指三个负载上的总功率,很多读者在计算时往往只算一相的功率。

例 5-17 图 5-28 所示三相电路中, $\dot{U}_{AB} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{U}_{BC} = 220 \angle -120^\circ \text{ V}$, $\dot{U}_{CA} = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$, 负载端 $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $X_L = 20 \Omega$, $R_3 = 12 \Omega$, $|X_C| = 12 \Omega$ 。试求:

(1) 相电流; (2) 线电流; (3) 每个功率表的读数; (4) 负载吸收的总功率; (5) 三个电阻吸收的总功率,并与(3)、(4)结果作比较。

解 (1) 功率表视为理想仪表,即电流线圈为短路,电压线圈为开路,仪表功耗为零。三相负载为非对称,由欧姆定律知相电流分别为

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{R_3 - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{220}{12 - j12} = 12.96 \angle 45^\circ \text{ A}$$

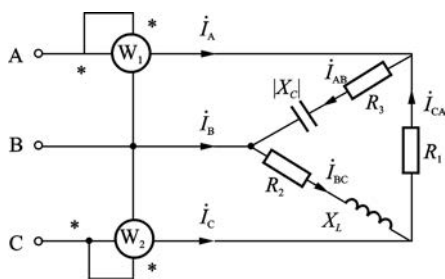


图 5-28

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{R_2 + jX_L} = \frac{220 \angle -120^\circ}{15 + j20} = 8.8 \angle -173.13^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{R_1} = \frac{220 \angle 120^\circ}{10} = 22 \angle 120^\circ \text{ A}$$

(2) 线电流为

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 20.16 - j9.89 = 22.46 \angle -26.13^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = -17.9 - j10.21 = 20.61 \angle -150.3^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = -2.26 + j20.10 = 20.23 \angle 96.42^\circ \text{ A}$$

(3) 功率表的读数分别为 $\textcircled{W}_1 = U_{AB} I_A \cos(\dot{U}_{AB}, \dot{I}_A)$

$$= 220 \times 22.46 \times \cos(0^\circ + 26.13^\circ) = 4436.2 \text{ W}$$

$$\textcircled{W}_2 = U_{CB} I_C \cos(\dot{U}_{CB}, \dot{I}_C)$$

$$= 220 \times 20.23 \times \cos(60^\circ - 96.42^\circ) = 3581.34 \text{ W}$$

两个功率表读数之和

$$\textcircled{W} = \textcircled{W}_1 + \textcircled{W}_2 = 8017.54 \text{ W}$$

(4) 负载吸收的功率分别为

$$\tilde{S}_1 = \dot{U}_{CA} I_{CA}^* = 220 \angle 120^\circ \times 22 \angle -120^\circ = 4840 \text{ W}$$

$$P_1 = 4840 \text{ W}$$

$$\tilde{S}_2 = \dot{U}_{AB} I_{AB}^* = 220 \times 12.96 \angle -45^\circ = 2016.1 - j2016.1 \text{ VA}$$

$$P_2 = 2016.1 \text{ W}$$

$$\tilde{S}_3 = \dot{U}_{BC} I_{BC}^* = 220 \angle -120^\circ \times 8.8 \angle 173.13^\circ = 1161.6 + j1548.8 \text{ VA}$$

$$P_3 = 1161.6 \text{ W}$$

负载吸收的总功率

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 8017.7 \text{ W}$$

(5) 每个电阻吸收的功率为

$$P_{R1} = R_1 I_{CA}^2 = 10 \times 22^2 = 4840 \text{ W}$$

$$P_{R2} = R_2 I_{BC}^2 = 15 \times 8.8^2 = 1161.6 \text{ W}$$

$$P_{R3} = R_3 I_{AB}^2 = 12 \times 12.96^2 = 2015.54 \text{ W}$$

总功率

$$P_R = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = 8017.4 \text{ W}$$

计算结果与(3)、(4)相同(忽略计算误差)。

讨论 三相电路的计算实际为正弦稳态电路的计算。三相电路不对称时,其相电流、线电流也不具有对称关系;三相负载吸收的总功率工程上用两个功率表进行测量(三相三线制)。

例 5-18 图 5-29(a)所示对称三相电路中,已知 $X_L = 2 \Omega$, $\omega M = 1 \Omega$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 15 \Omega$,若虚线框内负载的三相功率 $P_{\Delta} = 4.5 \text{ kW}$,试求三相电源供出的功率 P 。

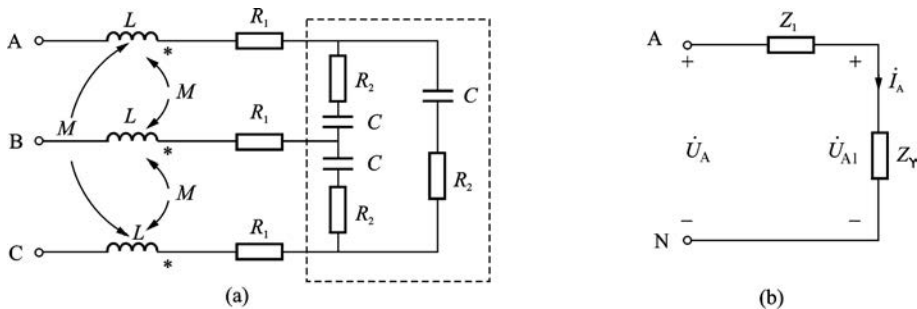


图 5-29

解 考虑互感,A相电感 L 上电压为

$$\begin{aligned} \dot{U}_{LA} &= j\omega L \dot{I}_A + j\omega M \dot{I}_B + j\omega M \dot{I}_C \\ &= j\omega L \dot{I}_A + j\omega M (\dot{I}_B + \dot{I}_C) \\ &= j\omega L \dot{I}_A + j\omega M (-\dot{I}_A) \\ &= j\omega (L - M) \dot{I}_A \end{aligned}$$

应用 $\Delta \rightarrow Y$ 等效变换,将对称三相电路“化为一相”来计算,其等效电路如图 5-29(b)所示。其中

$$\begin{aligned} Z_Y &= \frac{1}{3} Z_{\Delta} = \frac{1}{3} \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{1}{3} (15 - j15) \\ &= 5 - j5 = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ \Omega \\ Z_1 &= R_1 + j\omega (L - M) = 1 + j1 = \sqrt{2} \angle 45^\circ \Omega \end{aligned}$$

由三角形负载的一相功率可知,相电流

$$I_{\Delta} = \sqrt{\frac{P/3}{R_2}} = \sqrt{\frac{1500}{15}} = 10 \text{ A}$$

可知线电流

$$I_l = \sqrt{3} I_{\Delta} = 10\sqrt{3}$$

由负载的三相功率可知

$$P_{\Delta} = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} U_{P1} \times 10\sqrt{3} \times \cos(-45^\circ) = 4500$$

得

$$U_{P1} = \frac{300}{\sqrt{6}} = 122.47 \text{ V}$$

设电流 $\dot{I}_A = 10\sqrt{3} \angle 0^\circ \text{ A}$ 为参考相量, 则

$$\dot{U}_{A1} = 122.47 \angle -45^\circ \text{ V}$$

由 KVL

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= Z_1 \dot{I}_A + \dot{U}_{A1} = \sqrt{2} \angle 45^\circ \times 10\sqrt{3} + 122.47 \angle -45^\circ \\ &= 103.92 - j69.28 = 124.96 \angle -33.69^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

三相电源供出的功率

$$P = 3U_P I_l \cos \varphi = 3 \times 124.9 \times 10\sqrt{3} \cos(-33.69^\circ) = 5400 \text{ W} = 5.4 \text{ kW}$$

例 5-19 图 5-30(a) 所示三相电路, 已知对称三相电源线电压 $\dot{U}_{AB} = 380 \angle 0^\circ \text{ V}$, 阻抗 $Z = 25 + j40 \Omega$ 。求: (1) 开关 S 打开时三相电源的线电流 $\dot{I}_A$ 、 $\dot{I}_B$; (2) 开关 S 闭合后阻抗 Z 中电流 $\dot{I}$ 。

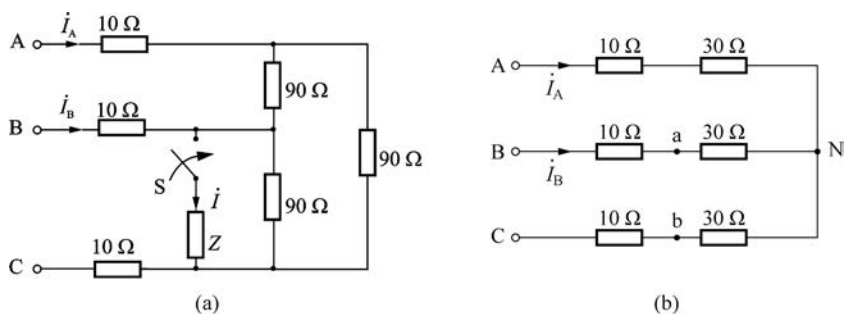


图 5-30

解 (1) 开关 S 打开时, 电路三相对称, 进行 $\Delta \rightarrow Y$ 变换, 电路如图 5-30(b) 所示, 再化为一相计算

$$\dot{U}_{AN} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 220 \angle -30^\circ$$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN}}{10 + 30} = 5.5 \angle -30^\circ \text{ A}, \quad \dot{I}_B = 5.5 \angle -150^\circ \text{ A}$$

(2) 开关 S 闭合后, Z 端口 ab 的戴维南等效电路为

$$\dot{U}_{oc} = \dot{U}_{ab} = \frac{\dot{I}_B}{\sqrt{3}} \times 90 \angle 30^\circ = 285.8 \angle -120^\circ \text{ V}$$

除源阻抗(A、B、C短接, ab 端口看进去为一桥形电路, 电桥平衡时, AN 支路断开或短接)

$$Z_i = \frac{10 \times 30}{10 + 30} + \frac{10 \times 30}{10 + 30} = 15 \Omega$$

所以
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z + Z_i} = \frac{285.8 \angle -120^\circ}{25 + j40 + 15} = 5.05 \angle -165^\circ \text{ A}$$

评注 此例在开关闭合后为非对称三相电路, 阻抗 Z 与 90Ω 电阻并联后, 再进行 $\Delta \rightarrow Y$ 变换、用节点法求解, 但计算量较大, 请读者自行练习。

5.4 习题精解

题 5-1 图 5-31(a) 所示耦合电感电路。已知电源电压 $u_S = 10 \cos(2\pi \times 10^3 t) \text{ V}$ 。当 2-2' 端开路时, $i_1 = 0.1 \sin(2\pi \times 10^3 t) \text{ A}$, $u_o = -0.9 \cos(2\pi \times 10^3 t) \text{ V}$; 当 2-2' 端短路时, $i_{2sc} = 0.9 \sin(2\pi \times 10^3 t) \text{ A}$ 。求 L_1 、 L_2 、 M 和耦合系数 k 。

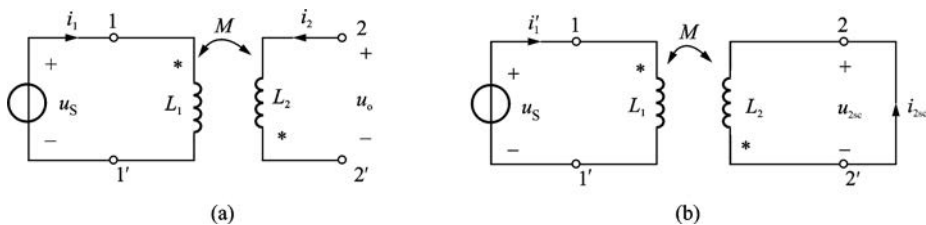


图 5-31

解 当 2-2' 端开路时, L_1 中无互感电压, 仅有自感电压; 而 L_2 中无自感电压, 仅有互感电压。此时有

$$\begin{aligned} u_S &= L_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 [0.1 \times 2\pi \times 10^3 \cos(2\pi \times 10^3 t)] \\ &= 10 \cos(2\pi \times 10^3 t) \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} 0.1 \times 2\pi \times 10^3 L_1 &= 10 \\ L_1 &= \frac{50}{\pi} \approx 15.9 \text{ mH} \end{aligned}$$

根据由施感电流产生的互感电压有

$$u_o = -M \frac{di_1}{dt} = -M [0.1 \times 2\pi \times 10^3 \cos(2\pi \times 10^3 t)]$$

而已知条件为

$$u_o = -0.9 \cos(2\pi \times 10^3 t)$$

由两式相等条件, 得

$$M = \frac{4.5}{\pi} \approx 1.43 \text{ mH}$$

当 2-2' 端短路时, 其电路如图 5-31(b) 所示, 列出两回路的 KVL 方程

$$\begin{cases} -M \frac{di_{2sc}}{dt} + L_1 \frac{di'_1}{dt} = u_s & \text{①} \\ L_2 \frac{di_{2sc}}{dt} - M \frac{di'_1}{dt} = 0 & \text{②} \end{cases}$$

由式①解出

$$\frac{di'_1}{dt} = \frac{1}{L_1} \left(u_s + M \frac{di_{2sc}}{dt} \right) \quad \text{③}$$

将式③代入式②, 得

$$\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) \frac{di_{2sc}}{dt} - \frac{M}{L_1} u_s = 0$$

代入 L_1 、 M 值, 得

$$L_2 = \frac{0.905}{\pi} \approx 0.288 \text{ mH}$$

耦合系数为

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\frac{4.5}{\pi}}{\sqrt{\frac{50}{\pi} \times \frac{0.905}{\pi}}} = \frac{4.5}{\sqrt{50 \times 0.905}} \approx 0.669$$

讨论 ① 耦合电感电路要掌握正确列写互感电压的表达式, 尤其要注意其正负号, 这是今后计算耦合电感电路的一个重要概念。

② 耦合电感电路副边(2-2'端)工作状态不同, 其接电源端所得原边的电流也随之不同。

题 5-2 图 5-32(a) 所示电路中, 已知 $i_s = 5\sqrt{2} \cos 2t \text{ A}$, 试求稳态开路电压 u_{oc} 。

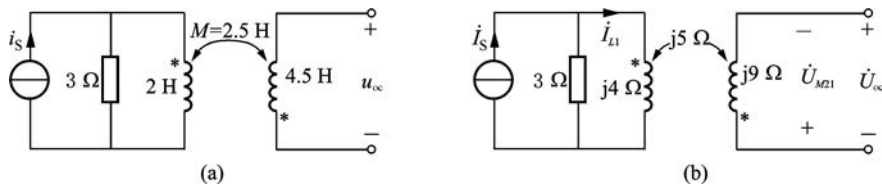


图 5-32

解 正弦交流电路应用相量法分析。 $\dot{I}_s = 5\angle 0^\circ \text{ A}$, 画出其相量模型如图 5-32(b) 所示。副边开路, 副边线圈没有自感电压, 原边线圈没有互感电压, 据原边线圈电流的方向判断副边互感电压(开路电压)为上负下正, 则原边线圈电流

$$\dot{I}_{L1} = \frac{3}{3 + j4} \times \dot{I}_s = \frac{3}{3 + j4} \times 5 = 3\angle -53.13^\circ \text{ A}$$

副边开路电压

$$\dot{U}_{oc} = -\dot{U}_{M21} = -j\omega M \dot{I}_{L1} = -j5 \times 3 \angle -53.13^\circ = 15 \angle -143.13^\circ \text{ V}$$

副边开路电压瞬时值

$$u_{oc} = 15\sqrt{2} \cos(2t - 143.13^\circ) \text{ V}$$

题 5-3 图 5-33 所示电路, 电路 a、b 端开路, 求 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 。

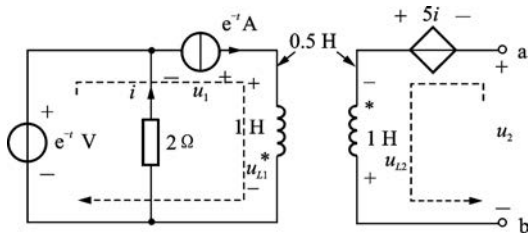


图 5-33

解 电路为含有耦合电感的电路, 因其不是正弦电路, 所以要用瞬时表达式求解, 根据电感两边的同名端判断其电压情况, 因 a、b 端开路, 其对左边电感不产生互感电压, 左边电感只有自感电压, 由标出的极性可知 $u_{L1} = \frac{de^{-t}}{dt} = -e^{-t}$, 而右边电感只有互感电压

没有自感电压, $u_{L2} = 0.5 \frac{de^{-t}}{dt} = -0.5e^{-t} \text{ V}$ 。

左边回路的 KVL 方程为

$$e^{-t} = -u_1 + u_{L1} = -u_1 - e^{-t}$$

解得

$$u_1 = -2e^{-t} \text{ V}$$

同时有

$$i = -\frac{e^{-t}}{2} = -\frac{1}{2}e^{-t} \text{ A}$$

右边回路

$$u_2 = -5i - u_{L2} = -5 \times \left(-\frac{1}{2}e^{-t}\right) + 0.5e^{-t} = 3e^{-t} \text{ V}$$

题 5-4 图 5-34 (a) 所示电路中, 已知正弦电压 u_s 的有效值为 2.2 V, $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ 。求:

- (1) 互感 M 为何值时可使电路发生电压谐振;
- (2) 谐振时各元件上的电压和电流。

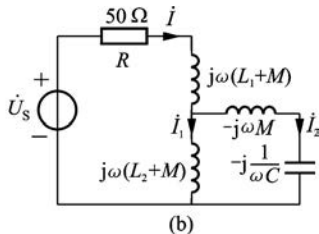
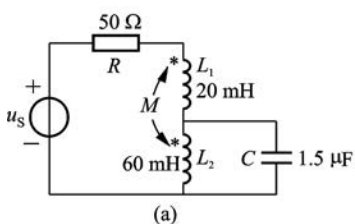


图 5-34

解 (1) 从谐振的概念知, 整个电路阻抗的虚部为零时即发生谐振。将三端接法的互感去耦, 等效电路的相量模型如图 5-34(b) 所示, 则

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega(L_1 + M) + \frac{-j\omega(L_2 + M) \times j\left(\omega M + \frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega(L_2 + M) - j\left(\omega M + \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= R + j\omega \left[L_1 + M + \frac{(\omega^2 MC + 1)(L_2 + M)}{1 - \omega^2 L_2 C} \right] \end{aligned}$$

令 $\text{Im}[Z] = 0$, 即

$$\omega \left[L_1 + M + \frac{(\omega^2 MC + 1)(L_2 + M)}{1 - \omega^2 L_2 C} \right] = 0$$

代入数据, 整理可得

$$150M^2 + 2M - 0.1 = 0$$

解方程得

$$M = 20 \text{ mH}$$

(2) 令 $\dot{U}_S = 2.2 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则谐振时电流为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{R} = \frac{2.2 \angle 0^\circ}{50} = 44 \text{ mA}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{-j\left(\omega M + \frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega(L_2 + M) - j\left(\omega M + \frac{1}{\omega C}\right)} \dot{I} = \frac{-j\left(200 + \frac{1}{1.5 \times 10^{-2}}\right)}{j800 - j\left(200 + \frac{1}{1.5 \times 10^{-2}}\right)} \times 44 = -22 \text{ mA}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1 = 66 \text{ mA}$$

原电路各元件上的电压分别为

$$\dot{U}_{L_1} = j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I}_1 = j200 \times 44 + j200 \times (-22) = j4.4 = 4.4 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{L_2} = j\omega L_2 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I} = j600 \times (-22) + j200 \times 44 = -j4.4 = 4.4 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_{L_2} = 4.4 \angle -90^\circ \text{ V}$$

注意 此题求各元件电压时, 不能认为等效电感 $(L_1 + M)$ 上的电压就是原互感线圈 L_1 上的电压, 也不能认为 $(L_2 + M)$ 上的电压就是原互感线圈 L_2 上的电压, 请注意区别。 $(L_1 + M)$ 和 $(L_2 + M)$ 上的电压计算如下

$$U_{L_1+M} = 0.4 \times 44 = 17.6 \text{ V}$$

$$U_{L_2+M} = U_{C-M} = 0.8 \times 22 = 17.6 \text{ V}$$

题 5-5 图 5-35(a) 所示电路中, $\dot{U}_S = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{I}_S = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$, $\omega L_1 = 20 \Omega$, $\omega L_2 = 30 \Omega$, $\omega M = 15 \Omega$, $1/(\omega C) = 40 \Omega$, $R = 60 \Omega$ 。试求电流 $\dot{I}_R$ 。

解法 1 对于图 5-35(a) 中的外围回路, 据 KVL 得

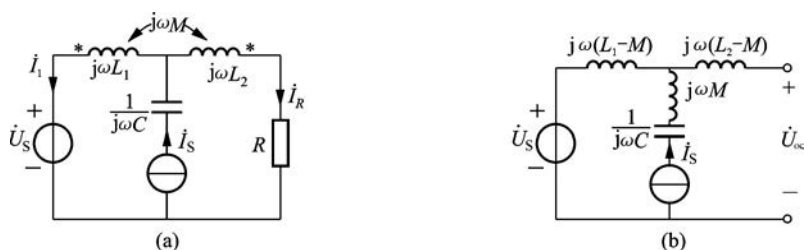


图 5-35

$$R\dot{I}_R + j\omega L_2 \dot{I}_R + j\omega M \dot{I}_1 - j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_R = \dot{U}_S$$

将 $\dot{I}_1 = \dot{I}_S - \dot{I}_R$ 代入上式,整理得

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_S - (j\omega M - j\omega L_1) \dot{I}_S}{R + j\omega L_1 + j\omega L_2 - j2\omega M}$$

代入数据得

$$\dot{I}_R = \frac{100 - (j15 - j20) \times 2}{60 + j20 + j30 - j30} = 1.55 - j0.35 = 1.59 \angle -12.72^\circ \text{ A}$$

如果先消去互感再列写方程,所得结果是一样的。

解法 2 应用戴维南定理求解。去耦后等效电路如图 5-35(b)所示。

$$\dot{U}_{oc} = \dot{U}_S + j\omega(L_1 - M)\dot{I}_S = 100 + j5 \times 2 = 100.5 \angle 5.71^\circ \text{ V}$$

$$Z_i = j\omega(L_1 + L_2 - 2M) = j20 \Omega$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_i + R} = \frac{100 + j10}{j20 + 60} = 1.55 - j0.35 \text{ A} = 1.59 \angle -12.7^\circ \text{ A}$$

题 5-6 图 5-36(a)所示电路中, R 、 L_1 、 L_2 、 M 均为已知, C 可调,为使负载电流 $i = 0$, 正弦电压源的频率应取何值?

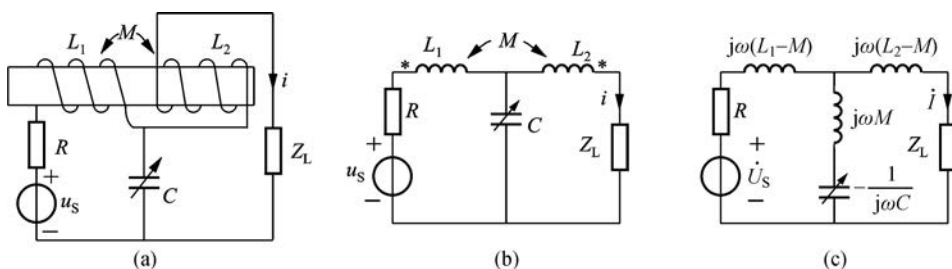


图 5-36

解 从图中线圈的绕向可判断其同名端如图 5-36(b)所示,当中间支路的等效阻抗为零(相当于短路即发生串联谐振)时,负载电流等于零。去耦后电路如图 5-36(c)所示,有

$$j\omega M - j \frac{1}{\omega C} = 0$$

解得

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{MC}}$$

题 5-7 图 5-37 所示电路中,功率表的读数为 24 W, $u_s = 2\sqrt{2}\sin 10t$ V。试确定互感 M 的值。

解 副边总阻抗

$$Z_{22} = 1.5 + j2 \Omega$$

副边反映到原边的阻抗

$$Z_{\text{ref1}} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{100M^2}{1.5 + j2} \Omega$$

原边总的等效阻抗

$$Z_1 = Z_{11} + Z_{\text{ref1}} = -j + j + \frac{100M^2}{1.5 + j2} = 24M^2 - j32M^2 \Omega$$

据“串联模型”的功率三角形和阻抗三角形相似知

$$\frac{UI}{|Z_1|} = \left(\frac{U}{|Z_1|} \right)^2 = \frac{P}{R_i}$$

代入数据得

$$\left(\frac{2}{40M^2} \right)^2 = \frac{24}{24M^2}$$

解得

$$M = 50 \text{ mH}$$

题 5-8 空心变压器如图 5-38(a) 所示。已知 $U_1 = 10$ V, $\omega = 10^6$ rad/s, $L_1 = L_2 = 1$ mH, $1/(\omega C_1) = 1/(\omega C_2) = 1$ k Ω , $R_1 = 10$ Ω , $R_2 = 40$ Ω 。为使 R_2 上获得最大功率,试求所需的 M 值、负载 R_2 上功率和 C_2 上的电压。

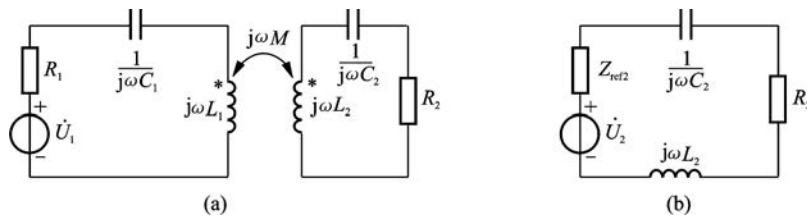


图 5-38

解 令 $\dot{U}_1 = 10 \angle 0^\circ$ V, 副边看进去的等效电路如图 5-38(b) 所示, 则

$$Z_{11} = R_1 - j \frac{1}{\omega C_1} + j\omega L_1 = 10 \Omega$$

$$Z_{\text{ref2}} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} = \frac{(\omega M)^2}{10} \Omega$$

当 $R_2 = \frac{1}{j\omega C_2} + Z_{\text{ref2}} + j\omega L_2 = Z_{\text{ref2}}$ 时, 可获得最大功率, 即

$$40 = \frac{(\omega M)^2}{10}$$

解得

$$M = 20 \mu\text{H}$$

有

$$\dot{U}_2 = j\omega M \times \frac{\dot{U}_1}{Z_{11}} = j20 \text{ V}$$

电容 C_2 上电压为

$$\dot{U}_{C2} = \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{ref2}} + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 + R_2} \times \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{j20}{40 + 40} \times (-j1000) = 250 \text{ V}$$

负载 R_2 上功率为

$$P_{R2} = \left(\frac{20}{80}\right)^2 \times 40 = 2.5 \text{ W}$$

题 5-9 图 5-39 所示电路中,理想变压器的变比为 $1:2$, $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $1/(\omega C) = 50 \Omega$, $\dot{U} = 50\angle 0^\circ \text{ V}$ 。求流过 R_2 的电流。

解 本题为含有理想变压器的电路分析,除了列出一般的 KCL、KVL 方程外,还要写出变压器原副边的电压电流关系,为此标出各电压电流如图所示,则

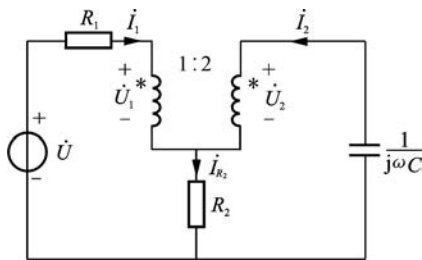


图 5-39

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = 2\dot{U}_1 & \text{①} \\ \dot{I}_1 = -2\dot{I}_2 & \text{②} \\ R_1\dot{I}_1 + \dot{U}_1 + R_2(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \dot{U} & \text{③} \\ -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_2 + \dot{U}_2 + R_2(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = 0 & \text{④} \end{cases}$$

将式①、式②代入式③、式④并代入数据得

$$\begin{cases} 10(-2\dot{I}_2) + \dot{U}_1 + 10(-2\dot{I}_2 + \dot{I}_2) = 50 \\ 2\dot{U}_1 + 10(-2\dot{I}_2 + \dot{I}_2) - j50\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\dot{I}_2 = -1 - j = \sqrt{2}\angle -135^\circ \text{ A}$$

从而

$$\dot{I}_{R2} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -2\dot{I}_2 + \dot{I}_2 = -\dot{I}_2 = \sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$I_{R2} = \sqrt{2} = 1.414 \text{ A}$$

题 5-10 图 5-40(a)所示正弦交流电路,已知 $I_1 = I_2 = I$, $R_2 = 10 \Omega$, $\omega M = 10 \Omega$ 时,虚线框内的并联电路达到谐振,求此时 X_2 、 R_1 和 X_1 。

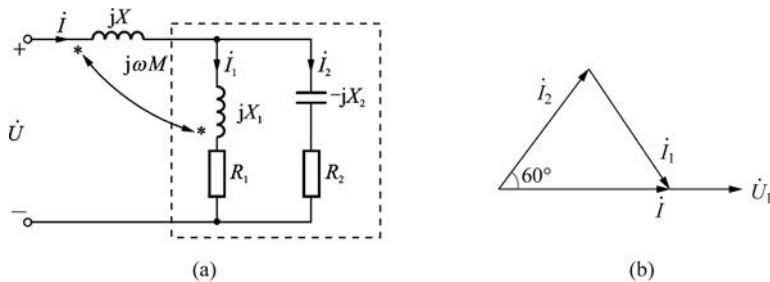


图 5-40

解 设并联支路电压 $\dot{U}_1$ 为参考相量,根据题意画出电流相量图如图 5-40(b)所示,由于并联电路电压相等,由 KVL 得

$$(R_1 + jX_1)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I} = (R_2 - jX_2)\dot{I}_2 = \dot{U}_1$$

代入 $\dot{I}_1 = I\angle -60^\circ$, $\dot{I}_2 = I\angle 60^\circ$, 则有

$$(R_1 + jX_1)I\angle -60^\circ - j10I\angle 0^\circ = (R_2 - jX_2)I\angle 60^\circ = U_1\angle 0^\circ$$

将上式展开,实部相等、虚部相等有

$$\text{实部} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}X_1 + \frac{1}{2}R_1 = 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}X_2 = \frac{U_1}{I}$$

$$\text{虚部} \quad \frac{1}{2}X_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}R_1 - 10 = -\frac{1}{2}X_2 + 5\sqrt{3} = 0$$

解得

$$X_2 = 17.32 \Omega, \quad X_1 = 22.32 \Omega, \quad R_1 = 1.34 \Omega$$

题 5-11 在 RLC 串联谐振电路实验中,电源电压 $U_S = 1 \text{ V}$ 保持不变。当调节电源频率达到谐振时, $f_0 = 100 \text{ kHz}$,回路电流 $I_0 = 100 \text{ mA}$;当电源频率变到 $f_1 = 99 \text{ kHz}$ 时,回路电流 $I_1 = 70.7 \text{ mA}$ 。试求:

- (1) R 、 L 和 C 值;
- (2) 回路的品质因数 Q 。

解 (1) 发生谐振时有

$$I_0 = \frac{U_S}{R}$$

将数据代入得

$$R = \frac{U_S}{I_0} = \frac{1}{100 \times 10^{-3}} = 10 \Omega \quad ①$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

频率改变时

$$I_1 = \frac{U_s}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}} \quad (2)$$

将数据和式①代入式②,求解得

$$L = 0.796 \text{ mH}, \quad C = 3200 \text{ pF}$$

(2) 回路的品质因数

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \approx 50$$

讨论 此题在列方程求解 L 、 C 时较繁,注意到 $I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$,正好是定义通频带对应的电流,在 $Q \gg 1$ 时有

$$BW = \frac{\omega_0}{Q} \approx 2(\omega_0 - \omega_1)$$

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2(\omega_0 - \omega_1)} = \frac{f_0}{2(f_0 - f_1)} = \frac{100}{2} = 50$$

再由 $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} \approx 50$ 求得 L 、 C ,过程较为简单。由此可看出,深刻领会一些基本概念对求解是有帮助的。

题 5-12 图 5-41(a)所示电路中,如果改变电容 C ,电压表的指示如何变化? C 为何值时指示最小? 该最小指示值为多少?

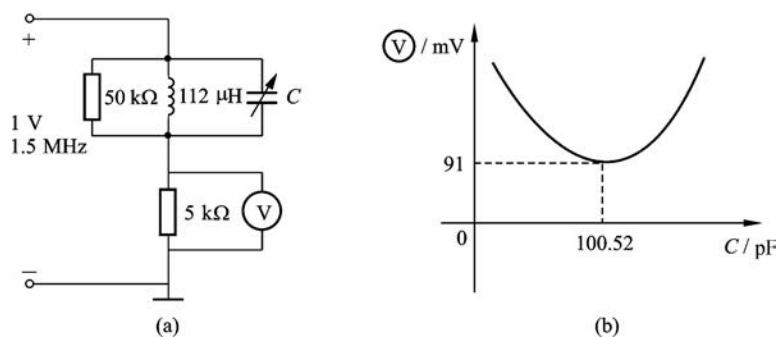


图 5-41

解 并联部分导纳为

$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$I = U |Y|$$

在电压 U 一定时,电流正比于 $|Y|$,故当 $\omega C = \frac{1}{\omega L}$,即发生并联谐振时, $|Y|$ 最小,则

电流 I 最小,即电压表指示值最小。故

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(2\pi \times 1.5 \times 10^6)^2 \times 112 \times 10^{-6}} \\ = 100.52 \text{ pF}$$

电压表指示值为

$$\textcircled{V} = \frac{5}{50+5} \times 1 = \frac{1}{11} = 0.091 \text{ V}$$

改变电容 C 的过程中,电压表指示的变化关系(定性)如图 5-41(b)所示。

题 5-13 在图 5-42 所示电路中,若电源频率为 100 kHz 时电流不能通过负载 R_L ,而在频率为 50 kHz 时,流过 R_L 的电流为最大。求 C_1 和 C_2 。

解 (1) 电流不能通过负载 R_L 意味着整个回路的电流为零,可知 L 、 C_1 发生并联谐振,其并联的导纳为零,即

$$C_1 = \frac{1}{\omega_{\text{并}}^2 L} = \frac{1}{(2\pi \times 10^5)^2 \times 10^{-5}} = 0.253 \text{ }\mu\text{F}$$

(2) 流过 R_L 的电流最大时,即 L 、 C_1 并联以后再和 C_2 串联发生串联谐振,其阻抗为零,即整个回路的阻抗为最小

$$C_2 = \left(\frac{1}{\omega_{\text{串}} L} - \omega_{\text{串}} C_1 \right) \frac{1}{\omega_{\text{串}}} = 0.760 \text{ }\mu\text{F}$$

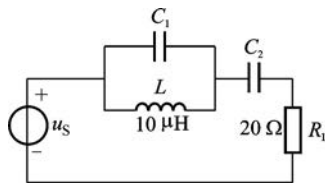


图 5-42

题 5-14 图 5-43 所示电路中,回路 I 是一个信号传输回路,为了抑制一个频率为 27.75 MHz 的强干扰信号,附加一个吸收回路 II,该回路与回路 I 通过互感耦合,回路 II 本身的谐振频率为 27.75 MHz。若设耦合系数为 0.25,试比较吸收回路存在和不存在时传输回路输出端干扰信号的大小。 u_1 、 u_2 分别为输入、输出信号。

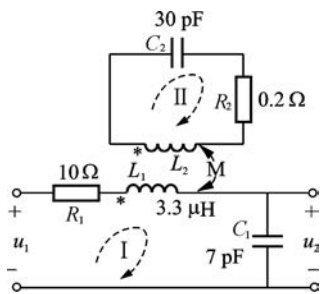


图 5-43

解 由吸收回路 II 本身的谐振频率知

$$L_2 = \frac{1}{\omega^2 C_2} = \frac{1}{(2\pi \times 27.75 \times 10^6)^2 \times 30 \times 10^{-12}} \\ = 1.096 \text{ }\mu\text{H}$$

互感系数 M 为

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} = 0.25 \times \sqrt{3.3 \times 10^{-6} \times 1.096 \times 10^{-6}} \\ = 0.475 \text{ }\mu\text{H}$$

没有吸收回路 II 时,输出干扰信号与输入信号之比为

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-j \frac{1}{\omega C_1}}{R_1 + j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-j \frac{1}{2\pi \times 27.75 \times 10^6 \times 7 \times 10^{-12}}}{10 + j2\pi \times 27.75 \times 10^6 \times 3.3 \times 10^{-6} - j \frac{1}{2\pi \times 27.75 \times 10^6 \times 7 \times 10^{-12}}} \\
 &= \frac{-j819.33}{10 - j243.95} = 3.36 \angle -2.35^\circ
 \end{aligned}$$

$$U_2 = 3.36U_1$$

有吸收回路Ⅱ时,输出干扰信号与输入信号之比为

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-j \frac{1}{\omega C_1}}{R_1 + \frac{(\omega M)^2}{R_2} + j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1}} = \frac{-j819.33}{34305.96 - j243.95} = 0.0239 \angle -89.59^\circ$$

$$U_2 = 0.0239U_1$$

可见,当电路中有吸收回路Ⅱ时,对 27.75 MHz 的一个强干扰信号抑制得好。

题 5-15 已知对称三相电路的 Y 形负载 $Z = 165 + j84 \Omega$, 端线阻抗 $Z_l = 2 + j\Omega$, 中线阻抗 $Z_N = 1 + j\Omega$, 线电压 $U_l = 380 \text{ V}$ 。求负载的电流和线电压, 并作出电路的相量图。

解 对称三相 Y 形连接电路如图 5-44(a) 所示, 其“化为一相”计算电路如图 5-44(b) 所示。

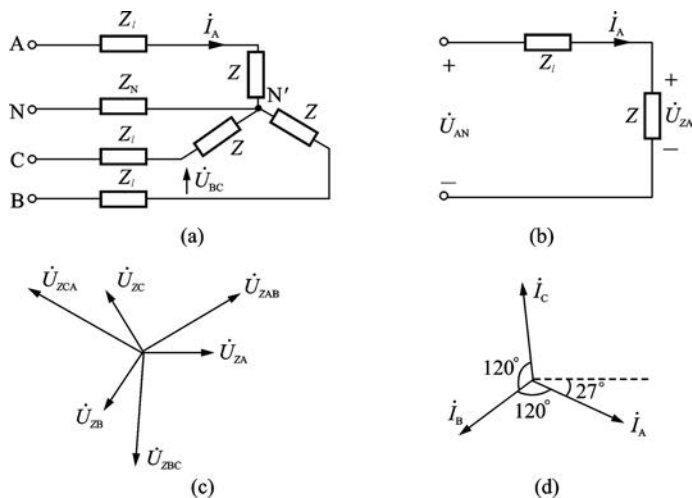


图 5-44

设电源端相电压为参考相量, 即

$$\dot{U}_{AN} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$i_A = \frac{\dot{U}_{AN}}{Z_l + Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{167 + j85} = 1.17 \angle -27^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{ZA} = Z i_A = (165 + j84) \times 1.17 \angle -27^\circ = 216.63 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{ZAB} = \sqrt{3} \dot{U}_{ZA} \angle 30^\circ = 375.2 \angle 30^\circ \text{ V}$$

由对称性画出相量图如图 5-44(c)、(d)所示。

题 5-16 图 5-45(a)所示对称三相电路,电源频率为 50 Hz, $Z=6+j8 \Omega$ 。在负载端接入三相电容器组后,使功率因数提高到 0.9。试求每相电容器的电容值。

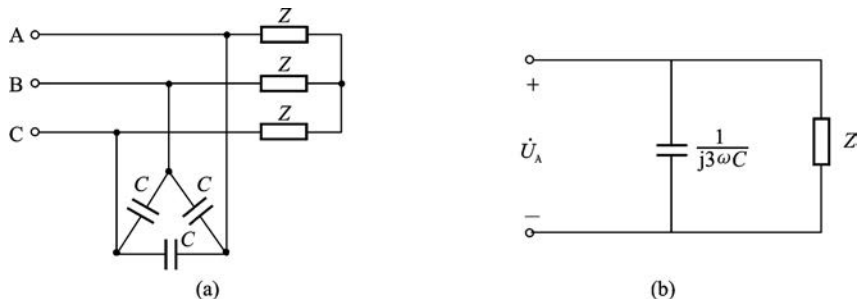


图 5-45

解法 1 将问题“化为一相”计算,其计算电路如图 5-45(b)所示。输入阻抗为

$$Z_i = \frac{Z \left(\frac{1}{j3\omega C} \right)}{Z + \frac{1}{j3\omega C}} = \frac{\frac{10}{3\omega C} \angle -36.9^\circ}{6 + j \left(8 - \frac{1}{3\omega C} \right)}$$

$$= |Z_i| \angle -36.9^\circ - \arctan \frac{8 - \frac{1}{3\omega C}}{6} = |Z_i| \angle \varphi$$

由于 $\cos \varphi = 0.9$, $\varphi = 25.84^\circ$, 所以

$$-36.9 - \arctan \frac{8 - \frac{1}{3\omega C}}{6} = 25.84^\circ$$

$$\frac{1}{3\omega C} = 19.64$$

$$C = \frac{1}{19.64 \times 3 \times 100\pi} = 54 \mu\text{F}$$

解法 2 应用复导纳角

$$\varphi = \arccos 0.9 = 25.84^\circ$$

将 Y 形连接负载转换为 Δ 形连接,其等效阻抗为

$$Z_\Delta = 3Z = 18 + j24 \Omega$$

一相的总导纳 $Y_{\Delta\text{总}}$ 为

$$Y_{\Delta\text{总}} = j\omega C + \frac{1}{Z_\Delta} = j314C + \frac{1}{18 + j24}$$

$$= 0.02 - j \left(\frac{0.08}{3} - 314C \right)$$

由题意知

$$\frac{\frac{0.08}{3} - 314C}{0.02} = \tan 25.84^\circ$$

所以

$$C = 54 \mu\text{F}$$

题 5-17 图 5-46 所示对称三相电路, 已知负载阻抗 $Z_\Delta = 21 + j22.5 \Omega$, $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{U}_B = 220 \angle -120^\circ \text{ V}$, $\dot{U}_C = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$ 。求:

- (1) 三相电源发出的总功率;
- (2) 三角形负载吸收的总功率。

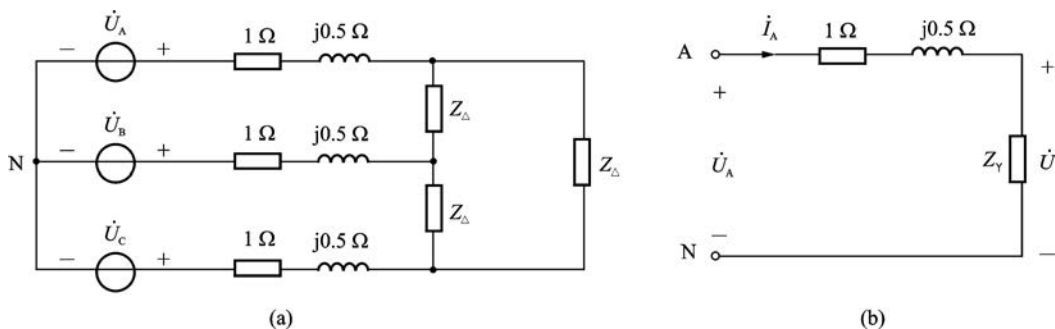


图 5-46

解 利用 Δ -Y 变换, “化为一相”电路如图 5-46(b) 所示。

$$Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta = 7 + j7.5 = 10.26 \angle 47^\circ \Omega$$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_A} = \frac{220}{1 + j0.5 + 7 + j7.5} = \frac{55}{4} \sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$

- (1) 三相电源发出的总功率

$$P = 3U_A I_A \cos \varphi = 3 \times 220 \times \frac{55}{4} \sqrt{2} \cos 45^\circ = 9075 \text{ W}$$

- (2) Δ 形负载等效成 Y 形阻抗 Z_Y 上电压为

$$\dot{U} = Z_Y \dot{I}_A = 199.5 \angle 2^\circ \text{ V}$$

故 Δ 形负载吸收的总功率

$$P_A = 3 \times \sqrt{3} U \times \frac{I_A}{\sqrt{3}} \cos 47^\circ = 3 \times 199.5 \times \frac{55}{4} \sqrt{2} \cos 47^\circ = 7937 \text{ W}$$

此例只是求解功率, 实际上 Δ 形负载消耗的功率就是图 5-46(b) 中 Y 形负载电阻消耗的功率, 于是有三相电源总功率

$$P = 3I_A^2 (1 + 7) = 9075 \text{ W}$$

三相 Δ 形负载总功率

$$P_\Delta = 3I_A^2 \times 7 = 7937 \text{ W}$$

或者用 $P = 3 \operatorname{Re} \left[\frac{U_A^2}{Z^*} \right]$ 也可得相同结果。

题 5-18 已知图 5-47(a) 所示三角形连接的负载为 $Z_{AB} = 6 + j8 \Omega$, $Z_{BC} = 6 - j8 \Omega$,

$Z_{CA}=8+j8\ \Omega$ 。试求负载接于线电压为 380 V 的三相电源时,各相电流及线电流的值,并画出相量图。

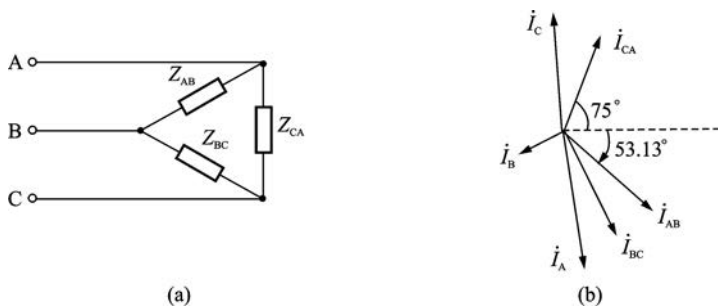


图 5-47

解 该题为不对称三相负载,而电源一般是对称的。

设 $\dot{U}_{AB}=380\angle 0^\circ\text{ V}$ 为参考相量,则由电源对称性知

$$\dot{U}_{BC}=380\angle -120^\circ\text{ V}, \quad \dot{U}_{CA}=380\angle 120^\circ\text{ V}$$

所以

$$\dot{i}_{AB}=\frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}}=\frac{380\angle 0^\circ}{6+j8}=38\angle -53.13^\circ=22.8-j30.4$$

$$\dot{i}_{BC}=\frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}}=\frac{380\angle -120^\circ}{6-j8}=38\angle -66.87^\circ=14.93-j34.95$$

$$\dot{i}_{CA}=\frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}}=\frac{380\angle 120^\circ}{8+j8}=33.59\angle 75^\circ=8.69+j32.4$$

由 KCL 得

$$\dot{i}_A=\dot{i}_{AB}-\dot{i}_{CA}=14.11-j62.8=64.4\angle -77.3^\circ\text{ A}$$

$$\dot{i}_B=\dot{i}_{BC}-\dot{i}_{AB}=-7.87-j4.55=9.09\angle -150.0^\circ\text{ A}$$

$$\dot{i}_C=\dot{i}_{CA}-\dot{i}_{BC}=-6.24+j67.35=67.64\angle 95.29^\circ\text{ A}$$

各电流的相量图如图 5-47(b)所示。

题 5-19 图 5-48 所示对称三相电路中,已知 $\dot{U}_{AB}=380\angle 0^\circ\text{ V}$, $\dot{i}_A=1\angle -60^\circ\text{ A}$,则功率表读数各为多少? 三相负载的总功率为多少?

解 根据三相电源对称性,得

$$\dot{U}_{BC}=380\angle -120^\circ\text{ V}$$

$$\dot{U}_{CB}=380\angle 60^\circ\text{ V}$$

$$\dot{U}_A=220\angle -30^\circ\text{ V}$$

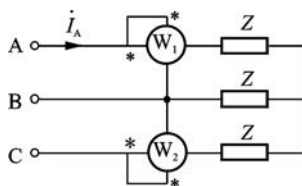


图 5-48

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A / 120^\circ = 1 \angle 60^\circ \text{ A}$$

$$\varphi_z = (-30^\circ) - (-60^\circ) = 30^\circ$$

各功率表读数

$$\textcircled{W}_1 = U_{AB} I_A \cos(\dot{U}_{AB}, \dot{I}_A) = 380 \times 1 \times \cos[0^\circ - (-60^\circ)] = 190 \text{ W}$$

$$\textcircled{W}_2 = U_{CB} I_C \cos(\dot{U}_{CB}, \dot{I}_C) = 380 \times 1 \times \cos(60^\circ - 60^\circ) = 380 \text{ W}$$

三相负载的总功率

$$P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi = \sqrt{3} \times 380 \times 1 \times \cos 30^\circ = 570 \text{ W}$$

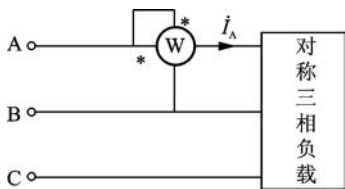


图 5-49

此题为二瓦法共 B 接法测功率的电路,两个功率表读数的代数和就是三相负载总功率。

题 5-20 图 5-49 所示电路,三相对称感性负载接到三相对称电源上,在两线间接一功率表如图所示。若线电压 $U_{AB} = 380 \text{ V}$,负载功率因数 $\cos \varphi = 0.6$,功率表读数 $P = 275 \text{ W}$ 。求线电流 I_A 及三相负载的总功率。

解 $\varphi = \arccos 0.6 = 53.13^\circ$

令 $\dot{U}_{AB} = 380 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则

$$\dot{U}_A = 220 \angle -30^\circ \text{ V}$$

对于感性负载有

$$\dot{I}_A = I_A \angle -30^\circ - \varphi$$

$$P_W = U_{AB} I_A \cos(30^\circ + \varphi)$$

$$I_A = \frac{P_W}{U_{AB} \cos(30^\circ + 53.13^\circ)} = \frac{275}{380 \times \cos 83.13^\circ} = 6.05 \text{ A}$$

$$P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi = \sqrt{3} \times 380 \times 6.05 \times 0.6 = 2389.12 \text{ W}$$

题 5-21 图 5-50 所示对称三相电路,电源线电压有效值 380 V ,功率表读数 $\textcircled{W}_1$ 为 866 W , $\textcircled{W}_2$ 为 433 W ,求:(1)电路的有功功率;(2)电路的无功功率;(3)电路的功率因数;(4)负载的阻抗 Z 。

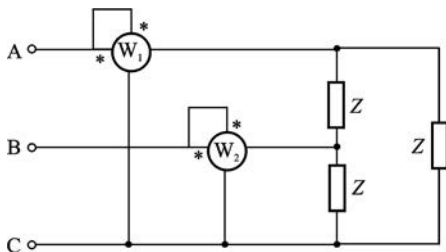


图 5-50

解 (1) 此例为两表法共 C 接法测三相电路功率,两表法测量对称与非对称三相三线制电路功率,其有功功率为两表读数的代数和,即

有功功率 $P = P_{W_1} + P_{W_2} = 866 + 433 = 1299 \text{ W}$

(2) 无功功率 $Q = \sqrt{3}(P_{W_2} - P_{W_1}) = \sqrt{3}(433 - 866) = -750 \text{ var}$

(3) 功率因数

$$\tan \varphi = \frac{-750}{1299} = -0.577$$

$$\varphi = -30^\circ$$

所以

$$\lambda = \cos \varphi = 0.866$$

(4) 由功率计算公式 $P = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi$ 知

$$I_l = \frac{P}{\sqrt{3}U_l \cos \varphi} = \frac{1299}{\sqrt{3} \times 380 \times 0.866} = 2.279 \text{ A}$$

$$|Z| = \frac{U_l}{I_l / \sqrt{3}} = \frac{380}{2.279 / \sqrt{3}} = 288.8 \Omega$$

$$Z = 288.8 \angle -30^\circ = 250 - j144.4 \Omega$$

讨论 若无功功率 $Q = \sqrt{3}(P_{W_1} - P_{W_2}) = 750 \text{ var}$,
则阻抗 $Z = 288.8 \angle 30^\circ \Omega$ 为感性。

题 5-22 图 5-51 所示电路中, $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ 是一组
Y形连接的对称三相电源。试求 $\dot{I}_1$ 及 $\dot{U}_{N'N}$ 。

解法 1 直接运用弥尔曼定理得

$$\begin{aligned} \dot{U}_{N'N} &= \frac{\frac{\dot{E}_A}{Z} + \frac{\dot{E}_A}{Z_1} + \frac{\dot{E}_B}{Z} + \frac{\dot{E}_C}{Z}}{\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_1}} \\ &= \frac{\frac{\dot{E}_A}{Z_1} + \frac{1}{Z}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{\frac{3}{Z} + \frac{1}{Z_1}} \\ &= \frac{\frac{\dot{E}_A}{Z_1}}{\frac{3}{Z} + \frac{1}{Z_1}} = \frac{Z\dot{E}_A}{Z + 3Z_1} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_{N'N}}{Z_1} = \frac{1 - \frac{Z}{Z + 3Z_1}}{Z_1} \dot{E}_A = \frac{3}{Z + 3Z_1} \dot{E}_A$$

解法 2 观察原电路可以看出, 从 Z_1 看进去的电路是对称的, 先应用戴维南定理求得 $\dot{I}_1$, 再求 $\dot{U}_{N'N}$, 过程会变得简单一些。

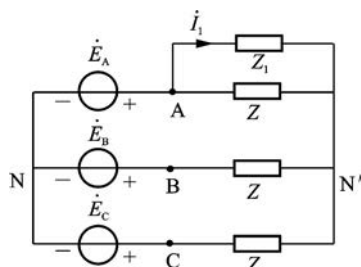


图 5-51

$$\dot{U}_{oc} = \dot{E}_A, \quad Z_i = Z/3$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_i + Z_1} = \frac{\dot{E}_A}{Z/3 + Z_1} = \frac{3}{Z + 3Z_1} \dot{E}_A$$

$$\dot{U}_{N'N} = \dot{E}_A - Z_1 \dot{I}_1 = \dot{E}_A - \frac{3Z_1}{Z + 3Z_1} \dot{E}_A = \frac{Z}{Z + 3Z_1} \dot{E}_A$$

5.5 阶段测试题

5-1 在 TV 显像管中需用高电压来加速电子束,在如图 5-52(a)所示简化电路中, L 为水平偏转线圈,其电流波形如图 5-52(b)所示。高电压取自耦合电感 L_2 两端,两端可视为开路,已知图 5-52(b)电流波形中 $t_b - t_a = 1 \mu\text{s}$,若要求在该期间产生电压 u 的峰值为 15000 V,求所需 M 。

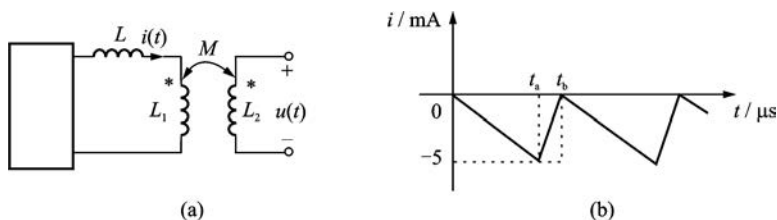


图 5-52

5-2 求图 5-53 所示各电路的输入阻抗。已知图 5-53(a)的耦合系数 $k = 0.5$, 图 5-53(b)的 $k = 1$, 电源角频率为 ω 。

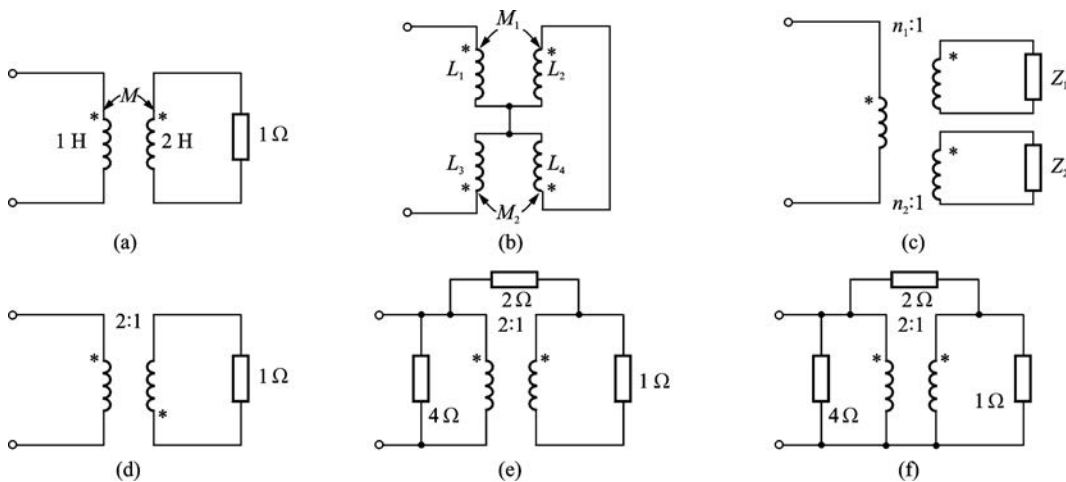


图 5-53

5-3 电路如图 5-54 所示,耦合系数 $k = 0.5$ 。求 $\dot{I}$ 和 $\dot{U}$ 。

5-4 电路如图 5-55 所示,若 $u_s(t) = \sin t \text{ V}$ 。求 $u_o(t)$ 。

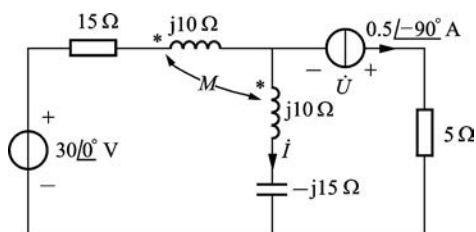


图 5-54

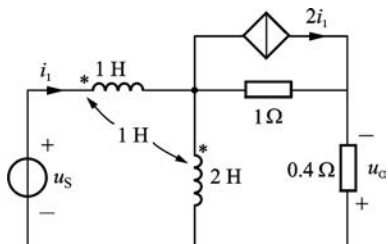


图 5-55

5-5 电路如图 5-56 所示, 已知 $\omega = 314 \text{ rad/s}$ 。试求电流 $\dot{I}_2$ 。

5-6 如图 5-57 所示电路, 已知 $u(t) = \sqrt{2} \sin t \text{ V}$, $M = 0.5 \text{ H}$ 。求 Z_L 为何值时可获得最大功率, 并求出最大功率的值。

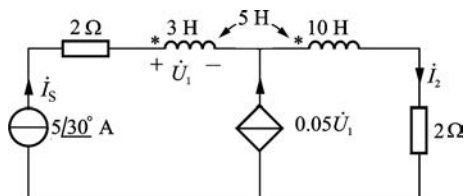


图 5-56

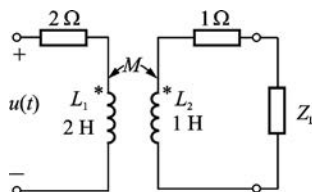


图 5-57

5-7 电路如图 5-58 所示, 已知 $i_S(t) = 4\sqrt{2} \cos 100t \text{ A}$ 。求当 L 为何值时该电路发生谐振。

5-8 电路如图 5-59 所示, 求电流 $\dot{I}$ 。

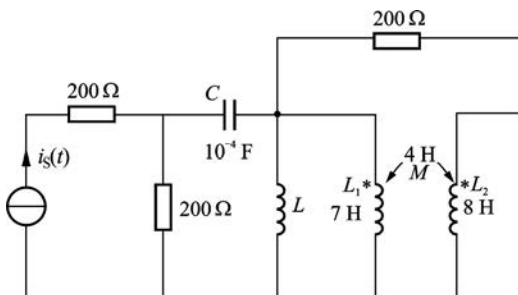


图 5-58

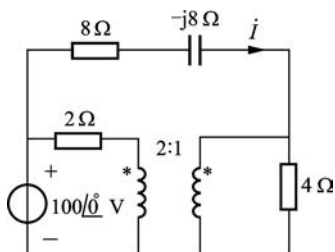


图 5-59

5-9 电路如图 5-60 所示, 求电压源发出的复功率。

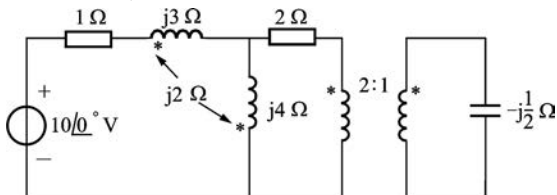


图 5-60

5-10 电路如图 5-61 所示,已知 $\dot{U}_S = 4\angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{I}_S = 1\angle 0^\circ \text{ A}$ 。当 Z_L 为何值时,它获得平均功率最大,并求此最大功率。

5-11 电路如图 5-62 所示,当 $u_S(t) = 8\sqrt{2} \cos 1000t \text{ V}$ 时, $i_1(t) = 0$,且电压 $u_S(t)$ 与电流 $i(t)$ 同相。试求:(1)电感 L_2 的值;(2)电流 $i_{C1}(t)$ 。

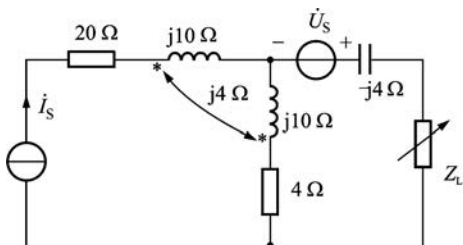


图 5-61

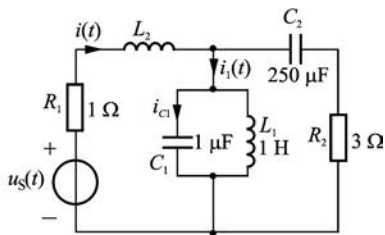


图 5-62

5-12 电路如图 5-63 所示,已知 $u_S(t) = 200\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V}$ 时, $M = 0.05 \text{ H}$, $L_1 = 0.1 \text{ H}$,电表读数为零。求 $u_o(t)$ 。

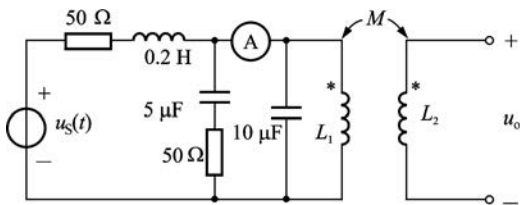


图 5-63

5-13 电路如图 5-64 所示,求:(1)互感系数 M ;(2)电流 $i_o(t)$;(3)电流源输出的有功功率 P 和无功功率 Q ;(4)电容在 $t = 4 \text{ s}$ 时所储存的能量。

5-14 电路如图 5-65 所示, Z_1 、 Z_2 均为感性负载, $Z_l = 0.1 + j0.2 \Omega$,Y形负载的功率为 5.25 kW ,功率因数为 0.855 ; Δ 形负载的功率为 10 kW ,功率因数为 0.8 。若负载端的线电压为 380 V ,试求电源端的线电压。

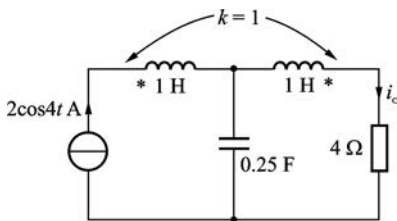


图 5-64

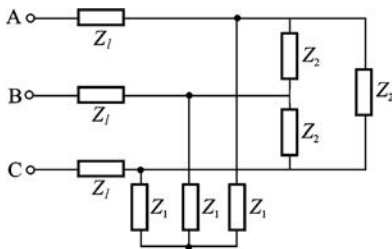


图 5-65

5-15 图 5-66 所示三相电路中,已知三相对称电源的线电压 $U_l = 380 \text{ V}$,单相电阻负载 $R = 1 \Omega$ 。试比较图 5-66(a)和(b)中电流表的读数。

5-16 图 5-67 所示对称三相电路中,电源线电压有效值 380 V ,负载阻抗 $Z = 100\sqrt{3} +$

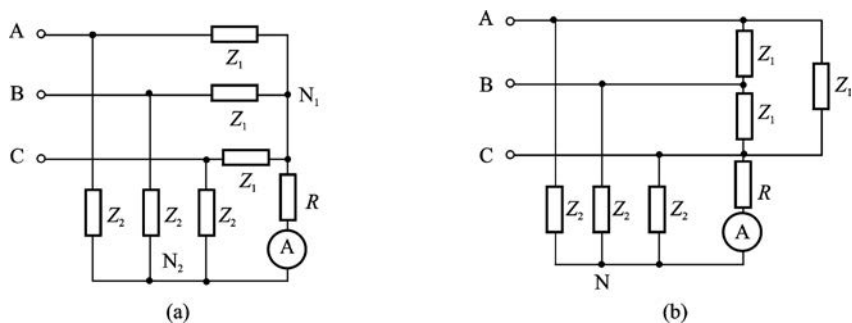


图 5-66

$j100\ \Omega$ 。试求三相负载吸收的功率及两个功率表的读数。

5-17 图 5-68 所示对称三相电路中,已知电源线电压 380 V , $Z_l = 1 + j\Omega$, $Z = 10 + j10\Omega$,则三相负载 Z 吸收的功率为多少? 功率表 $\textcircled{W}$ 的读数为多少?

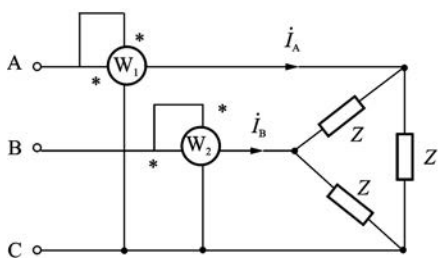


图 5-67

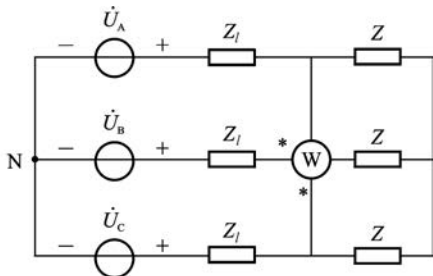


图 5-68

***5-18** 图 5-69 所示对称三相电路中,已知电源线电压 $U_l = 380\text{ V}$, $R = 8\ \Omega$, $\omega L = 6\ \Omega$, $\omega M = 1\ \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 30\ \Omega$,试求线电流有效值 I_l 。

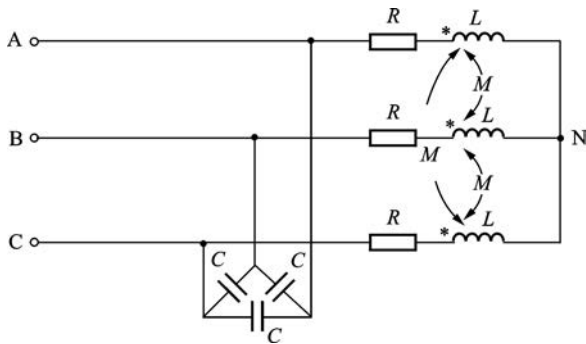


图 5-69

5.6 阶段测试题答案

5-1 3 H

5-2 (a) $\frac{-3\omega^2 + j2\omega}{2 + j4\omega}\Omega$

$$(b) \frac{j\omega(L_1L_4 + L_2L_3 - 2\sqrt{L_1L_2L_3L_4})}{L_2 + L_4}$$

$$(c) \frac{n_1^2 n_2^2 Z_1 Z_2}{n_1^2 Z_1 + n_2^2 Z_2}$$

$$(d) 4 \Omega$$

$$(e) 2 \Omega$$

$$(f) 1.6 \Omega$$

$$5-3 \quad 1.118 \angle -26.57^\circ \text{ A}, 3.536 \angle -135^\circ \text{ V}$$

$$5-4 \quad 0.2 \sin(t + 138^\circ) \text{ V}$$

$$5-5 \quad 3 \angle -151.9^\circ \text{ A}$$

$$5-6 \quad 1.06 - j0.938 \Omega, 7.37 \text{ mW}$$

$$5-7 \quad 3.33 \text{ H}$$

$$5-8 \quad 4.78 \angle 43.5^\circ \text{ A}$$

$$5-9 \quad 25 + j25 \text{ VA}$$

$$5-10 \quad 4 - j6 \Omega, 6.25 \text{ W}$$

$$5-11 \quad 4 \text{ mH}, 10\sqrt{2} \cos(10^3 t + 36.9^\circ) \text{ mA}$$

$$5-12 \quad 206\sqrt{2} \cos(10^3 t - 76^\circ) \text{ V}$$

$$5-13 \quad (1) M = 1 \text{ H}$$

$$(2) i_o(t) = 1.2 \cos(4t + 53.1^\circ) \text{ A}$$

$$(3) P + jQ = \frac{1}{2} \times 4.8 \times 2 \angle 53.1^\circ = 2.88 + j3.84$$

$$(4) u_C(t) = 1.6 \cos(4t - 126.9^\circ) \text{ V}$$

$$W_C(4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times [1.6 \cos(4 \times 4 - 126.9^\circ)]^2 \approx 0.038 \text{ J}$$

$$5-14 \quad 390.7 \text{ V}$$

$$5-15 \quad (a) 0 \quad (b) 220 \text{ A}$$

$$5-16 \quad 1881 \text{ W}, 1254 \text{ W}, 627 \text{ W}$$

$$5-17 \quad 6 \text{ kW}, 3.464 \text{ kW}$$

$$*5-18 \quad 16 \text{ A}$$