

第2章讨论了在恒定电流条件下分布不变的电荷所产生的恒定电场的性质。实验表明,恒定电流会产生恒定磁场,或者称为静态磁场。静态电场与静态磁场又统称为静态电磁场(静态场)。本章将从基本实验定律出发,描述恒定磁场的基本场矢量和基本场方程,讨论恒定磁场的性质,确立恒定磁场的边界条件,分析磁偶极子、磁介质的磁化、矢量磁位、电感、磁场能量和磁场力等基本问题。



微课视频

### 3.1 恒定磁场的基本定律

#### 3.1.1 安培力定律

实验表明,两个恒定电流回路之间存在着相互作用力。1820年,法国物理学家安培通过实验总结出这个相互作用力所遵循的规律,即安培力定律。

如图3-1所示,根据安培力定律,在真空中有分别载有恒定电流 $I$ 、 $I_1$ (线电流)的两个回路 $C_0$ 和 $C_1$ ,则 $C_0$ 对 $C_1$ 的作用力为

$$\mathbf{F}_{10} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \oint_{l} \frac{I_1 d\mathbf{l} \times (I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R)}{R^2} \quad (3-1)$$

其中, $l'$ 、 $l$ 分别为对两个回路 $C_0$ 和 $C_1$ 的积分路径, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ (亨/米)为真空中的磁导率; $\mathbf{r}'$ 和 $\mathbf{r}$ 分别为电流元 $I d\mathbf{l}'$ 与 $I_1 d\mathbf{l}$ 的位置矢量, $R$ 为两个电流元之间的距离。 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = R\mathbf{e}_R$ , $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}/R$ 。

同样,回路 $C_1$ 对 $C_0$ 的作用力为 $\mathbf{F}_{01} = -\mathbf{F}_{10}$ ,即两个回路之间的相互作用力满足牛顿第三定律。

由式(3-1)可以得到两个电流元 $I d\mathbf{l}'$ 与 $I_1 d\mathbf{l}$ 之间的相互作用力为

$$d\mathbf{F}_{10} = -d\mathbf{F}_{01} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l} \times (I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R)}{R^2} \quad (3-2)$$

注意,实际上孤立的电流元并不存在,在此主要用于电流闭合回路安培力的计算。

#### 3.1.2 毕奥-萨伐尔定律

实验表明,电流元在磁场中会受到力的作用,该力的大小与磁场、电流的大小及磁场与

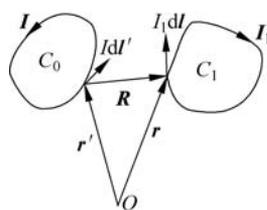


图3-1 电流回路之间的相互作用力

电流方向夹角的正弦成正比,其方向与电流方向和磁场方向均垂直。由此得到该力与电流元  $I dl$ 、磁感应强度  $\mathbf{B}$  的关系为

$$d\mathbf{f} = I dl \times \mathbf{B} \quad (3-3)$$

对于闭合回路,其在磁场中受到的力为

$$\mathbf{f} = \oint_l I dl \times \mathbf{B} \quad (3-4)$$

类似于静电场中电场强度的定义,恒定电流回路在某点产生的磁感应强度可定义为单位电流元在该点所受到的最大磁场力。由此比较式(3-3)与式(3-2),此时式(3-3)中的  $I dl$  相当于式(3-2)中的  $I_1 dl$ ,可以得到电流元  $I dl'$  在距离其  $\mathbf{R}$  的场点处产生的磁场为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl' \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (3-5-1)$$

其中,磁感应强度  $\mathbf{B}$  为一个矢量函数,其单位为特斯拉(T),或者韦伯/米<sup>2</sup>(Wb/m<sup>2</sup>)。在工程上还用小单位高斯(Gs),其中,1T=10<sup>4</sup> Gs。

对于面电流分布,由于  $I dl' = \mathbf{J}_s dy' dl' = \mathbf{J}_s dS'$ ,其中  $\mathbf{J}_s$  为面电流密度, $dy'$ 为垂直于电流方向的横向长度。因此,面电流元产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}_s \times \mathbf{R}}{R^3} dS' \quad (3-5-2)$$

同理,对于体电流分布, $I dl' = \mathbf{J}(r') \cdot dS' \cdot dl' = \mathbf{J}(r') dV'$ , $\mathbf{J}(r')$ 为体电流密度, $dS'$ 为垂直于电流方向的横截面,体电流元产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(r') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' \quad (3-5-3)$$

对式(3-5)各式积分可以得到线电流分布、面电流分布和体电流分布时产生的磁场分别为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I dl' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (3-6-1)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{J}_s \times \mathbf{R}}{R^3} dS' \quad (3-6-2)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(r') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' \quad (3-6-3)$$

其中, $S'$ 为面电流分布区域, $V'$ 为体电流分布区域。

以上各式称为毕奥-萨伐尔定律,几乎与安培力定律同时,于1820年由法国物理学家毕奥、萨伐尔根据闭合电流回路的实验结果,通过理论分析总结出来。

由于  $I dl = \frac{dq}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{v} dq$ ,因此磁场对电流的作用可认为是对运动电荷的作用。将此表达式代入式(3-3)可得

$$d\mathbf{f} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3-7)$$

对上式两边积分可得

$$\mathbf{f} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3-8)$$

上式为运动速度为  $\mathbf{v}$  的电荷  $q$  在磁场  $\mathbf{B}$  中受到的洛伦兹力的表达式。

电荷  $q$  被放置到电场  $\mathbf{E}$  中受到的电场作用力为  $q\mathbf{E}$ 。结合式(3-8)可知,运动速度为  $\mathbf{v}$  的电荷  $q$  在电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{B}$  中受到的作用力为

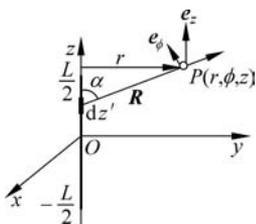


图 3-2 长直载流导线

$$f = qE + qv \times B$$

**例题 3-1** 直流电流  $I$  通过长为  $L$  的直导线。求空间任一点处的磁感应强度  $B$ 。

**解** 如图 3-2 所示,取圆柱坐标系,设带电线段沿  $z$  轴排列。取电流元为  $I dz' e_z$ ,源点和场点分别为  $(0,0,z')$ 、 $P(r,\phi,z)$ 。应用毕奥-萨伐尔定律,得到  $I dz' e_z$  在场点的磁感应强度  $B$  为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz' e_z \times e_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin\alpha dz'}{R^2} e_\phi$$

由图 3-2 可知,  $R = [r^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ ,  $\sin\alpha = \frac{r}{[r^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$ 。所以,长直载流导线在观察点产生的磁场为(注:利用积分递推公式)

$$B = \frac{\mu_0 I e_\phi}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{r dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I e_\phi}{4\pi r} \left\{ \frac{z + L/2}{[r^2 + (z + L/2)^2]^{1/2}} - \frac{z - L/2}{[r^2 + (z - L/2)^2]^{1/2}} \right\}$$

当长直载流导线区域无穷长时

$$\lim_{L \rightarrow \infty} B = \frac{\mu_0 I e_\phi}{2\pi r}$$

**例题 3-2** 计算半径为  $a$ 、电流为  $I$  的电流圆环在轴线上的磁感应强度。

**解** 如图 3-3 所示,取圆柱坐标系,场点和源点坐标分别为  $(0,0,z)$ 、 $(a,\phi',0)$ 。电流元  $I dl' = I a d\phi' e_\phi$ ,应用毕奥-萨伐尔定律,考虑到  $I dl'$  与其对称位置  $(a,-\phi',0)$  处电流元  $I dl''$  产生的  $B$  矢量在  $xOy$  平面的分量抵消,只剩下  $e_z$  方向的分量,因此

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl' \times e_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos\alpha dl'}{R^2} e_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin\theta dl'}{R^2} e_z$$

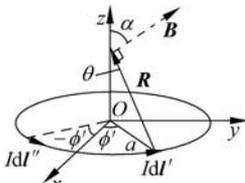


图 3-3 电流圆环

由于  $dl' = a d\phi'$ 、 $R = (z^2 + a^2)^{1/2}$ ,  $\sin\theta = \frac{a}{[z^2 + a^2]^{1/2}}$ ,对上式积分得

$$B = \frac{\mu_0 e_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I \sin\theta a d\phi'}{R^2} = \frac{\mu_0 I e_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\phi'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} e_z$$

## 3.2 真空中的恒定磁场方程

与静电场类似,恒定磁场的性质也由其散度和旋度决定,本节基于恒定磁场方程讨论真空中磁场的基本性质。

### 3.2.1 恒定磁场的散度及磁通连续性原理

将矢量恒等式  $\nabla \cdot \frac{1}{R} = -\frac{R}{R^3}$  代入式(3-6-3)得

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{J(r') \times R}{R^3} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} J(r') \times \nabla \frac{1}{R} dV'$$

再利用矢量恒等式  $\nabla \times \left( \frac{J(r')}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla \times J(r') + \nabla \frac{1}{R} \times J(r')$ ,考虑到  $J(r')$  仅为源点坐标  $r'$  的函数,并且  $\nabla \times J(r') = 0$ ,代入上式,并整理得



微课视频

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \left( \nabla \times \frac{\mathbf{J}(r')}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(r')}{R} dV' \quad (3-9)$$

利用矢量恒等式  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$ , 显然上式的散度为零, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-10)$$

上式表明, 恒定磁场的散度处处为零, 磁场为无散场, 也即无通量源的矢量场。

磁感应强度  $\mathbf{B}$  可以用磁感线形象地描述, 其通量称为磁通量, 单位为韦伯 (Wb), 因此  $\mathbf{B}$  又称为磁通量密度。

对于任意一闭合曲面  $S$  包围的体积  $V$ , 应用散度定理可得

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

应用式 (3-10), 上式为

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3-11)$$

式 (3-11) 称为磁通连续性原理 (方程), 式 (3-10) 是其微分形式。由于上式积分是对任意闭合曲面进行的, 因此表明自然界中没有孤立的磁荷存在, 磁感线是封闭的, 也没有磁流源。式 (3-11) 也表示磁通量守恒, 因为它表明通过任一闭合曲面的净磁通量为零。

### 3.2.2 矢量磁位及其方程

类似于在静电场中, 可以引入标量电位  $\varphi$ , 恒定磁场也可以用位函数, 即矢量磁位  $\mathbf{A}$  来描述。令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-12)$$

式中,  $\mathbf{A}$  为磁场中的矢量磁位。

显然, 根据矢量恒等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ , 由矢量磁位得到的磁感应强度  $\mathbf{B}$  满足式 (3-10) 所表述的恒定磁场的散度处处为零的条件。对比式 (3-9)、(3-12) 可得矢量磁位  $\mathbf{A}$  的计算表达式为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(r')}{R} dV' \quad (3-13)$$

与式 (3-13) 对应, 电流元产生的矢量磁位为

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(r')}{R} dV' \quad (3-14)$$

在面电流分布和线电流分布的情况下, 矢量磁位  $\mathbf{A}$  的计算形式为

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{J}_s}{R} dS' \\ \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \frac{\mathbf{I}}{R} dl' \end{cases} \quad (3-15)$$

可见对矢量磁位  $\mathbf{A}$  的计算比直接计算磁感应强度  $\mathbf{B}$  更简便。 $\mathbf{A}$  的引入方便了对某些问题的分析。

根据式 (3-13), 并且考虑到  $J'_x(r')$  仅为源点坐标  $r'$  的函数 ( $J'_x(r')$  对  $\nabla$  而言相当于常数), 则

$$\nabla^2 A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla^2 \frac{J'_x(r')}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} J'_x(r') \nabla^2 \frac{1}{R} dV'$$

利用式(1-118),  $\nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ , 并代入上式, 根据  $\delta$  函数的筛选性可得

$$\nabla^2 A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} J'_x(\mathbf{r}') [-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] dV' = -\mu_0 J_x(\mathbf{r})$$

注意, 为了方便, 在上式中  $J'_x(\mathbf{r}')$  换成了  $J_x(\mathbf{r})$ 。同理有

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y(\mathbf{r})$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z(\mathbf{r})$$

由于  $\mathbf{J} = J_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + J_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + J_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$ , 将  $\nabla^2 A_x$ 、 $\nabla^2 A_y$  及  $\nabla^2 A_z$  的表达式代入式

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{e}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{e}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{e}_z$$

可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (3-16)$$

可见, 矢量磁位  $\mathbf{A}$  满足矢量形式的泊松方程。由式(3-16)可知, 对于无源区域 ( $\mathbf{J} = 0$ ),  $\mathbf{A}$  满足矢量形式的拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (3-17)$$

### 3.2.3 恒定磁场的旋度及安培环路定理

对式(3-12)两边取旋度得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

利用矢量恒等式  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , 并代入上式得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

利用静态场中的库仑规范(见附录 B)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , 再将式(3-16)代入上式得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3-18)$$

式(3-18)表明, 磁场为有旋场, 它的旋度源为电流密度矢量, 即恒定电流是产生恒定磁场的旋涡源。与自由空间中静电场的散度公式(2-7)相比较, 因为  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , 因此电荷密度  $\rho$  没有磁相似性。

对式(3-18)两边同时进行面积分, 可以得到磁场旋度方程的积分形式

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$$

再应用斯托克斯定理, 得

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (3-19)$$

其中, 闭合积分路径  $l$  是非闭合曲面  $S$  的边界,  $I$  是通过曲面  $S$  的总电流。  $l$  的积分路径和电流方向满足右手螺旋定则, 磁场和电流的方向服从安培定则。式(3-19)称为真空中安培环路定理的积分形式, 表明自由空间中磁通量密度沿任一闭合路径的环量等于该环路围成曲面电流总量的  $\mu_0$  倍; 而式(3-18)称为真空中安培环路定理的微分形式。

### 3.2.4 标量磁位

在无源区域, 由式(3-18)得  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ , 即此时磁通量密度  $\mathbf{B}$  是无旋的。根据自由空间中磁场变量的关系式  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  (见 3.3 节), 其中  $\mathbf{H}$  为磁场强度。类似于静电场中的电位函数, 引入标量磁位  $\varphi_m$ , 即

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_m \quad (3-20)$$

显然对于上式有:  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{H} = 0$ 。

标量磁位  $\varphi_m$  满足的位函数方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = -\mu_0 \nabla \cdot \nabla\varphi_m = -\mu_0 \nabla^2 \varphi_m = 0$$

因此,  $\varphi_m$  满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi_m = 0 \quad (3-21)$$

虽然在无源区域标量磁位和标量电位均满足拉普拉斯方程,但是标量电位和标量磁位  $\varphi_m$  的性质却不相同。由于在实际问题中并不存在磁荷,  $\varphi_m$  必须通过给定的电流分布得到。而  $\mathbf{B}$  的无旋性仅在没有电流的点存在,  $\varphi_m$  又是通过  $\mathbf{H}$  来定义的,因此,当区域中存在电流时,磁场是非保守场,标量磁位不是一个单值函数,故式(3-20)中的  $\varphi_m$  是由积分路径决定的。由于这些原因,在研究磁介质的磁场时,要用矢量法代替对标量的计算。

**例题 3-3** 求例题 3-1 真空中长为  $L$ , 电流为  $I$  的载流直导线产生的矢量磁位  $\mathbf{A}$ 。

**解** 仍取圆柱坐标系,选取源点和场点如图 3-2 所示。

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left( \frac{[r^2 + (L/2 - z)^2]^{1/2} + (L/2 - z)}{[r^2 + (L/2 + z)^2]^{1/2} - (z + L/2)} \right)$$

在  $L \gg z, L \gg r$  时

$$A_z \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left( \frac{L}{r} \right)^2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{L}{r} \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{r_0}{r} \right)$$

其中  $r_0$  为矢量磁位  $\mathbf{A}$  在无穷远处的参考距离。可以进一步根据矢量磁位  $\mathbf{A}$  计算磁感应强度  $\mathbf{B}$ , 结果与例题 3-1 一致。

**例题 3-4** 求真空中, 电流为  $I$ , 传输方向相反的无限长平行双导线产生的矢量磁位  $\mathbf{A}$ , 如图 3-4 所示。

**解** 真空中任一点  $P$  的矢量磁位  $\mathbf{A}$  是由两个载流直导线分别产生的矢量磁位叠加而成。设电流正方向沿  $z$  方向, 根据例题 3-3 给出的单个无限长载流直导线产生的矢量磁位, 可得

$$A_z = A_+ + A_- = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{r_-}{r_+} \right)$$

其中  $r_+, r_-$  为点  $P$  分别到两条直导线的垂直距离。

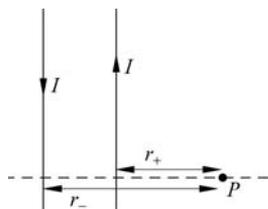


图 3-4 平行双导线

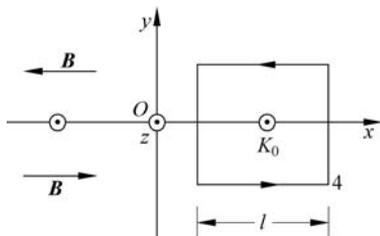


图 3-5 无限大载流导电平面

**例题 3-5** 在空气中, 有载有恒定电流密度为  $\mathbf{K}_0$  的无限大平面, 求其产生的磁感应强度  $\mathbf{B}$ 。如果无限大平面的厚度为  $d$ , 电流密度为  $\mathbf{J}_0$ , 求空间磁感应强度  $\mathbf{B}$  的分布。

**解** 如图 3-5 所示, 设无限大载流平面位于  $xOz$  平面, 电流方向沿  $z$  轴,  $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{e}_z$ 。根据电流方向和对称性可知, 在  $y > 0$  区域,  $\mathbf{B}$  沿  $-\mathbf{e}_x$  方向,  $y < 0$  区域,  $\mathbf{B}$  沿  $\mathbf{e}_x$  方向,  $\mathbf{B}$  的大小与  $x, z$  无关, 且在到平面距离相同处

$\mathbf{B}$  的大小相等。取长度为  $l$  的矩形闭合回路, 根据安培环路定理得

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 K_0 l$$

其中,  $C$  为积分环路。由于在  $y$  方向上  $\mathbf{B}$  的积分为零, 所以

$$2Bl = \mu_0 k_0 l, \quad B = \frac{\mu_0 K_0}{2}$$

即

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 K_0}{2}, & y > 0 \\ \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 K_0}{2}, & y < 0 \end{cases}$$

如果无限大平面的厚度为  $d$ , 则导体板的两平面分别位于  $y = d/2$  及  $y = -d/2$  处, 此时体电流密度为  $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_z$ 。同样取长度为  $l$  的矩形闭合回路, 根据安培环路定理得:

(1) 在导体板外部

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S J_0 \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} = \int_{-d/2}^{d/2} \mu_0 J_0 l dy$$

两边积分得

$$2Bl = \mu_0 J_0 d l, \quad B = \frac{\mu_0 J_0 d}{2}$$

即

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 J_0 d}{2}, & y > d/2 \\ \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 J_0 d}{2}, & y < -d/2 \end{cases}$$

(2) 在导体板内部距离位于  $xOz$  平面为  $y$  处

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S J_0 \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} = \int_{-y}^y \mu_0 J_0 l dy$$

两边积分得

$$2Bl = 2\mu_0 J_0 y l, \quad B = \mu_0 J_0 y$$

即

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\mathbf{e}_x \mu_0 J_0 y, & 0 < y < d/2 \\ \mathbf{e}_x \mu_0 J_0 y, & -d/2 < y < 0 \end{cases}$$

**例题 3-6** 真空中半径为  $a$  的无限长导体圆柱上沿轴方向电流密度为  $J_0$ , 求导体内外的磁场。

**解** 如图 3-6 所示, 取圆柱坐标系, 导体轴沿  $z$  轴, 根据对称性则磁场大小只与径向  $\rho$  有关, 且方向为  $\mathbf{e}_\phi$ 。取半径为  $\rho$  的积分回路, 根据安培环路定理得

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi = \mu_0 I$$

所以

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

由于当  $\rho \geq a$  时,  $I = J_0 \pi a^2$ ; 当  $\rho < a$  时,  $I = J_0 \pi \rho^2$ 。因此有

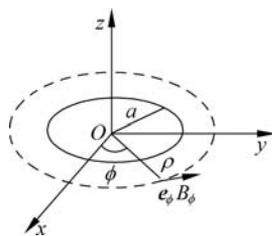


图 3-6 载流导体圆柱

$$B_{\phi} = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_0 \rho}{2}, & \rho < a \\ \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2\rho}, & \rho \geq a \end{cases}$$

### 3.3 磁偶极子与介质的磁化

#### 3.3.1 磁偶极子及其矢量磁位

一个小载流圆环称为磁偶极子。设载流圆环的电流为  $i$ , 面积为  $\Delta S$ , 则此磁偶极子的磁偶极矩(简称磁矩)为  $\mathbf{m} = i\Delta S$ , 其中  $\mathbf{m}$  和  $\Delta S$  的方向与电流方向满足右手螺旋定则, 如图 3-7 所示。

类似于电偶极子会产生电位(标量位), 磁偶极子也会产生矢量磁位。下面计算如图 3-8 所示半径为  $a$ , 电流为  $I$  的小电流环在远处( $r \gg a$ )产生的矢量磁场位  $\mathbf{A}$ 。

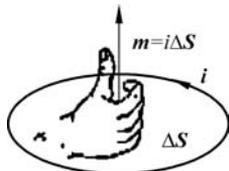


图 3-7 磁偶极子

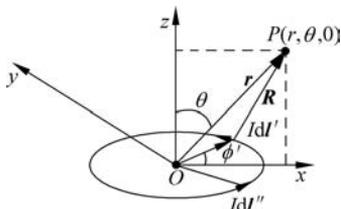


图 3-8 磁偶极子

如图 3-8 所示, 选用球坐标系, 使电流环在  $xOy$  平面, 且中心在坐标原点。由于电流环结构的对称性, 其在空间产生的矢量磁位  $\mathbf{A}$  具有轴对称性, 即  $\mathbf{A}$  与角度  $\phi$  无关。不失一般性, 取观察点位于  $P(r, \theta, 0)$  点, 电流元  $I dl'$  位于  $(a, \frac{\pi}{2}, \phi')$  处。由上节可知, 线分布电流在观察点  $P$  产生的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \frac{I}{R} dl'$$

结合图 3-8 可知, 此时  $dl' = a d\phi'$ ,  $\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r - a\mathbf{e}_\rho$ , 其中  $\mathbf{e}_\rho$  为  $xOy$  平面的径向单位矢量; 根据矢量的叠加性, 电流元  $I dl'$  与其对称位置  $(a, \frac{\pi}{2}, -\phi')$  处电流元  $I dl''$  产生的矢量磁位  $\mathbf{A}$  在  $\mathbf{e}_x$  方向的分量相互抵消, 只存在  $\mathbf{e}_y$  方向的分量  $\mathbf{A}_\phi$ , 在  $r-\theta$  平面即  $\mathbf{A}_\phi$ 。因此

$$\mathbf{A}_\phi = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I \cos\phi'}{R} dl' = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a \cos\phi'}{R} d\phi'$$

与直角坐标系相对应, 观察点  $P$  和电流元  $I dl'$  的坐标分别为  $(r \sin\theta, 0, r \cos\theta)$ 、 $(a \cos\phi', a \sin\phi', 0)$ , 因此,  $R = \sqrt{(r \sin\theta - a \cos\phi')^2 + (a \sin\phi')^2 + (r \cos\theta)^2}$ , 进一步整理得

$$R = r \left[ 1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{2a}{r} \sin\theta \cos\phi' \right]^{1/2}$$

利用小变量近似  $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \dots$ , 并忽略高阶小项, 由上式得



微课视频

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{2a}{r} \sin\theta \cos\phi' \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{a}{r} \sin\theta \cos\phi' \right]$$

再将上式代入  $\mathbf{A}_\phi$  的表达式, 即得

$$\mathbf{A}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{a}{r} \sin\theta \cos\phi' \right) \cos\phi' a d\phi' = \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \cos^2\phi' d\phi' = \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4r^2}$$

利用磁偶极矩  $\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{e}_z$ , 上式可以表示为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_r \quad (3-22)$$

根据前面  $\mathbf{A}_\phi$  的表达式, 又  $A_r=0, A_\theta=0$ , 故在球坐标系下磁感应强度  $\mathbf{B}$  为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin\theta} \mathbf{e}_r & \frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin\theta A_\phi \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r 2\cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta) \quad (3-23)$$

显然, 上式与电偶极子的电场强度  $\mathbf{E}$  的表达式(2-20)互为对偶关系。由式(3-22)还可得空间任意点磁偶极子的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_R = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \mathbf{m} \times \mathbf{R} \quad (3-24)$$

其中,  $\mathbf{R}$  为观察场点到磁偶极子中心的位移矢量。注意, 上述矢量磁位  $\mathbf{A}$  和磁感应强度  $\mathbf{B}$  的表达式是在  $r \gg a$  的条件下得到的。

### 3.3.2 介质的磁化

当研究物质的磁效应时, 物质被视为磁介质。根据物质的基本原子模型, 物质由原子或者分子构成, 而原子由一个带正电的原子核和大量绕其环绕的带负电的电子构成。环绕轨道旋转的电子产生环路分子电流和微观的磁偶极子。此外, 原子的电子和原子核以确定的磁偶极矩围绕各自的轴旋转。相对而言, 原子核的质量很大而角速度很小, 原子自旋产生的磁偶极矩通常可以被忽略, 电子自旋的磁偶极矩也可忽略。这样, 每个磁介质分子(或者原子)等效为一个分子电流环。当不存在外磁场时, 大多数材料分子磁矩的取向是杂乱无章的, 故导致合成磁矩(净磁矩)为零, 介质对外不显磁性。当存在外磁场时, 分子磁矩会沿外磁场方向重新取向, 合成磁矩不为零, 对外显示磁性, 即介质的磁化, 如图 3-9 所示。

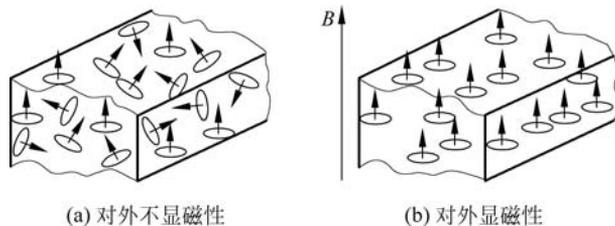


图 3-9 介质的磁化

介质磁化后将出现磁化电流(束缚电流), 并作为二次源产生附加磁场。如果附加磁场与外磁场方向相反, 使总磁场减弱, 则物质被称为抗磁质; 如果附加磁场与外磁场同向, 使

总磁场增强,则物质被称为顺磁质。而对于铁磁性物质,能够产生显著的磁性,有剩磁和磁滞现象,存在磁畴。磁介质中的磁感应强度  $\mathbf{B}$  可以看作是真空中传导电流产生的磁感应强度  $\mathbf{B}_0$  与磁化电流产生的磁感应强度  $\mathbf{B}'$  的叠加,即

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$$

为了描述介质的磁化效应对磁感应强度  $\mathbf{B}$  产生的影响,下面引入磁化强度矢量  $\mathbf{P}_m$ ,即单位体积中的分子磁矩的矢量和。

$$\mathbf{P}_m = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k}{\Delta V} \quad (3-25)$$

其中,  $\mathbf{m}_k$  为第  $k$  个分子的磁矩。  $\mathbf{P}_m$  是一个宏观的矢量点函数,表示单位体积中磁矩的统计平均值,单位为安培/米(A/m)。如果磁介质中某区域内各点的磁化强度相同,则称为均匀磁化,否则称为非均匀磁化。

介质被磁化后,在其内部及表面会出现磁化电流分布,这种磁化电流是分子电流叠加的整体效应。在第2章,曾利用电偶极子产生的电位与电荷密度之间的联系分析并得出了电介质中极化电荷的分布密度,而本节将基于磁化强度的定义计算磁化电流密度(也可以利用磁偶极子产生的矢量磁位与电流分布之间的关系式分析),即如图3-10所示,计算穿过由周界曲线  $C$  包围的曲面  $S$  的磁化电流。可见,只有环绕  $C$  的分子电流(磁偶极子)对穿越  $S$  的磁化电流有贡献。如图3-10(a)所示,因为当分子环流在  $C$  以内,并不与  $C$  交链时,该电流会沿相反的方向两次穿过曲面  $S$  而使其作用抵消;当分子环流在  $C$  以外,不与  $C$  交链时,就不会穿越曲面  $S$ ,对磁化电流也没有贡献。即,在  $C$  上取积分元  $d\mathbf{l}$ ,并以分子电流的环面积  $\Delta\mathbf{S}$  为底,以  $d\mathbf{l}$  为斜高作一圆柱体,如图3-10(b)所示,则只有分子电流中心在圆柱体内的分子电流才能与  $d\mathbf{l}$ (或  $C$ )交链,才会对圆柱体的磁化电流有贡献。

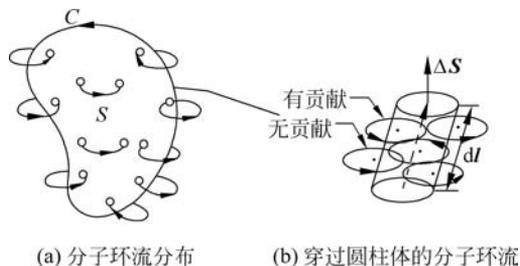


图3-10 介质的磁化

设磁介质单位体积内的分子数为  $N$ ,每个分子的磁矩为  $\mathbf{m} = i\Delta\mathbf{S}$ ,根据磁化强度的定义,则在图3-10(b)圆柱体内与  $d\mathbf{l}$  交链的磁化电流为

$$dI_m = Ni(\Delta\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}) = N\mathbf{m} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{l}$$

因此,穿越曲面  $S$  的磁化电流为

$$I_m = \oint_C dI_m = \oint_C \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{l}$$

将磁化电流表示为磁化电流密度  $\mathbf{J}_m$  的通量形式,并对上式应用斯托克斯定理得

$$I_m = \iint_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{P}_m) \cdot d\mathbf{S} \quad (3-26)$$

因为曲面  $S$  是任意的,故

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{P}_m \quad (3-27)$$

式(3-27)中  $\mathbf{J}_m$  为磁化体电流密度。同理,可以在磁介质内紧贴表面取一切向长度元  $d\mathbf{l} = e_t dl$ , 其中  $e_t$  为介质表面的切向单位矢量。则与  $d\mathbf{l}$  交链的磁化电流为  $dI_m = \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{P}_m \cdot e_t dl = P_{mt} dl$ , 故磁化面电流密度的大小为  $J_{sm} = P_{mt}$ , 其中  $P_{mt}$  是磁化强度的切向分量; 由于磁化面电流密度的方向与  $\mathbf{P}_m$  垂直(因分子电流方向与磁矩满足右手螺旋定则), 也与介质表面法向垂直(因考虑的是磁化电流面分布), 所以将磁化面电流密度写成矢量表示形式为

$$\mathbf{J}_{sm} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{e}_n \quad (3-28)$$

其中  $\mathbf{e}_n$  为介质表面的法向单位矢量。

图 3-11 为磁介质的一个横截面, 假设在外磁场的作用下该介质被磁化。在介质表面, 面电流密度大小为  $J_{sm}$ , 其方向由矢量积  $\mathbf{P}_m \times \mathbf{e}_n$  确定。对于均匀极化, 在介质中  $\mathbf{P}_m$  的方向是统一的, 那么沿相反方向流动的相邻分子电流  $i$  将被处处抵消, 介质内部不存在净电流(磁化体电流密度)。这还可以从式(3-27)中看出, 因为对恒定的  $\mathbf{P}_m$  进行空间求导后为零。然而, 对于非均匀极化,  $\mathbf{P}_m$  有空间变化, 内部的分子电流不会完全抵消, 这导致产生了磁化体电流密度  $\mathbf{J}_m$ 。

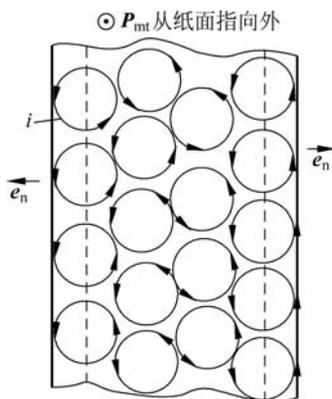


图 3-11 磁介质横截面

### 3.3.3 介质中的恒定磁场方程

磁化电流具有与传导电流相同的磁效应。磁介质被磁化后, 其中的磁感应强度  $\mathbf{B}$  是真空中传导电流与磁化电流共同作用的结果, 因此在磁介质中描述磁场旋度与磁场源的关系为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) \quad (3-29)$$

将式(3-27)代入上式得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{P}_m$$

即

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P}_m \right) = \mathbf{J}$$

令

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P}_m \quad (3-30)$$

其中,  $\mathbf{H}$  称为磁场强度, 单位为安/米(A/m)故有

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3-31)$$

上式即任意磁介质中安培环路定理的微分形式, 表明磁介质中任一点磁场强度的旋度只与该点的自由电流密度有关。

电流密度的通量为电流。对式(3-31)两边进行任意曲面的面积分, 并应用斯托克斯定

理得

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (3-32)$$

上式即磁介质中安培环路定理的积分形式,其中  $l$  的方向和电流  $I$  的方向满足右手螺旋定则。它表明在电流周围存在一个磁场的闭合路径,并且任意闭合路径中磁场强度的环量与该路径包围的自由电流相等。

**注意:** 虽然磁场强度  $\mathbf{H}$  的环量和旋度只与自由电流分布有关,但是,一般情况下磁场强度  $\mathbf{H}$  不仅与传导电流分布有关,还与磁化电流分布有关。本书只讨论线性、均匀、各向同性介质的情况,此时  $\mathbf{H}$  只与自由电流分布有关。

实验证明,除铁磁介质外,在各向同性、线性介质中,  $\mathbf{P}_m$  和  $\mathbf{H}$  成正比,即

$$\mathbf{P}_m = \chi_m \mathbf{H} \quad (3-33)$$

其中,  $\chi_m$  称为介质的磁化率,是一个无量纲常数,它取决于物质的物理、化学性质。在真空中  $\chi_m = 0$ 。一般对于非铁磁物质  $\chi_m \approx 1$ 。

在顺磁介质中  $\chi_m > 0$ ,顺磁性主要由旋转电子的磁偶极矩引起。顺磁介质通常有很小的正磁化率,例如铝、镁、钛、钨等,其磁化率大约为  $10^{-5}$ 。温度会对顺磁性造成影响,在温度较低时,热撞击会减弱,顺磁性则会变强。

在抗磁介质中  $\chi_m < 0$ ,抗磁性的成因主要是由施加的外磁场在电子轨道上产生一个力,并引导磁化形成净磁矩,等效为负磁化。抗磁介质的磁导率也很小,例如铋、铜、铅、水银、锗、银、金、钻石等,其  $\chi_m$  的大小约为  $10^{-5}$ 。抗磁性本质上与温度无关。

对于铁磁物质,  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  呈非线性关系,其磁化本领要比顺磁性物质强很多。例如钴、镍、铁等,它们包含由电子旋转导致的被排列好的大量磁偶极子,其  $\chi_m$  可以达到  $50 \sim 5000$ ,甚至到  $10^6$  (对一些特殊的合金甚至更高)。这些材料的磁导率不仅与  $\mathbf{H}$  的大小有关,还与材料的性质有关。

将式(3-33)代入式(3-30)得

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}$$

令

$$\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (3-34)$$

则

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (3-35)$$

其中,  $\mu_r$  为介质的相对磁导率,是一个无量纲常数。而  $\mu = \mu_0 \mu_r$  通常被称为介质的磁导率,单位为亨利/米(H/m)。磁导率和相对磁导率反映了磁介质的磁化特性,属物质的三个基本电磁参数之一。式(3-35)即磁介质中的磁场物质(本构)方程。

由于自然界中没有发现孤立的磁荷存在,因此式(3-11)描述的磁通连续性原理在磁介质中仍然成立,即

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3-36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-37)$$

以上磁场基本方程表明,磁场是无源(无通量源)、有旋场;恒定电流是产生恒定磁场的旋涡源,磁感线是与源电流相交链的闭合曲线。

**例题 3-7** 磁导率为  $\mu$ , 内外半径分别为  $a$ 、 $b$  的无限长空心圆柱体, 其中存在轴向均匀电流密度  $J$ , 求各处的磁场强度和磁化电流密度。

**解** 取半径为  $r$  的积分环路, 根据式(3-32)安培环路定理得

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$$

其中,  $l$  为积分环路。磁场沿  $\mathbf{e}_\phi$  方向。于是

当  $0 < r < a$  时,  $J = 0, I = 0$ , 所以  $\mathbf{H} = 0$ ;

当  $a < r \leq b$  时,  $I = J(\pi r^2 - \pi a^2)$ , 所以  $\mathbf{H} = \frac{J(r^2 - a^2)}{2r} \mathbf{e}_\phi$ ;

当  $r > b$  时,  $I = J(\pi b^2 - \pi a^2)$ , 所以  $\mathbf{H} = \frac{J(b^2 - a^2)}{2r} \mathbf{e}_\phi$ 。

由式(3-27)得

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{P}_m = \nabla \times (\mu_r - 1)\mathbf{H} = (\mu_r - 1) \nabla \times \mathbf{H}$$

因此, 磁化电流体密度为

$$\mathbf{J}_m = \begin{cases} (\mu_r - 1)J\mathbf{e}_z, & a < r < b \\ 0, & 0 < r < a, r > b \end{cases}$$

在边界处, 由式(3-28)得

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{P}_m \times \mathbf{e}_n = (\mu_r - 1)\mathbf{H} \times \mathbf{e}_n$$

故在  $r = a^+$  处, 磁化电流面密度为

$$\mathbf{J}_{ms} = (\mu_r - 1)H\mathbf{e}_\phi \times (-\mathbf{e}_r) |_{r=a} = 0$$

在  $r = b^-$  处, 磁化电流面密度为

$$\mathbf{J}_{ms} = (\mu_r - 1)H\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r |_{r=b} = -(\mu_r - 1) \frac{J(b^2 - a^2)}{2b} \mathbf{e}_z$$

**例题 3-8** 求被均匀磁化了的磁介质圆柱体轴上的磁通量密度。设圆柱的半径为  $b$ , 长为  $L$ , 轴向磁化强度为  $\mathbf{M}$ 。

**解** 如图 3-12 所示, 在圆柱坐标系下, 磁化圆柱体的轴与  $z$  轴重合。因为在柱内磁化强度  $\mathbf{M}$  是定值, 故  $\mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbf{M} = 0$ , 其中没有等效电流体密度。在圆柱侧面的磁化电流面密度  $\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_z \times \mathbf{M} \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\phi M$ 。

此时圆柱体被视为分布有面电流密度  $\mathbf{J}_{ms}$  的圆柱筒, 在顶面和底面没有面电流。为了求出观察点  $P(0, 0, z)$  的  $\mathbf{B}$ , 考虑一段微分宽度为  $dz'$  的电流环, 电流记为  $\mathbf{e}_\phi M dz'$ , 由例题 3-2 结论, 电流圆环在轴线上产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 M b^2 dz'}{2[(z - z')^2 + b^2]^{3/2}}$$

所以

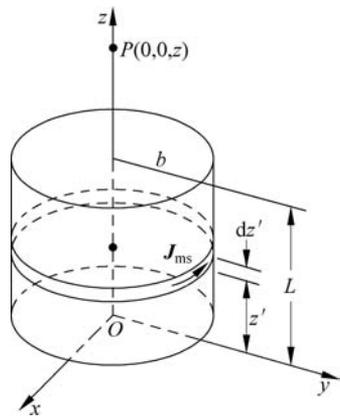


图 3-12 磁化的介质圆柱体

$$B = \int d\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \int_0^L \frac{\mu_0 M b^2 dz'}{2[(z-z')^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 M}{2} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + b^2}} \right]$$

### 3.4 恒定磁场的边界条件

在描述媒质分界面两侧电磁场的变化情况时,由于媒质参数和场量不连续,微分不存在,故不能用微分方程。从数学上讲,用微分方程求解电磁场时必须要有边界条件才能有确定解。而用积分方程求解不需要边界条件,事实上积分方程就包含了边界条件。因此,在第2章中用积分方程导出了静电场的边界条件。与其类似,本节将应用恒定磁场基本方程的积分形式,具体讨论磁介质分界面的磁场边界条件。正如第1章所述,通量体现了矢量在曲面法线方向分量的量度,而环量体现了矢量在闭合曲线切线方向分量的量度。因此,分析各场量边界条件的共同特点是,对于通量密度矢量(例如  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{J}$  等),利用通量(闭合曲面积分)研究其法向分量的连续性;而对于场强度矢量(例如  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  等),利用环量(闭合曲线积分)研究其切向分量的连续性。

#### 3.4.1 磁感应强度的法向边界条件

如图 3-13 所示,通过媒质分界面构建一个足够小的闭合圆柱面,圆柱体各表面处的恒定磁场可以视为均匀分布。令圆柱面的高度趋于零,则场量在侧面上的积分结果也会趋于零。设在磁导率为  $\mu_1$  的媒质 1 中  $\Delta\mathbf{S}_1$  处分布的磁感应强度为  $\mathbf{B}_1$ ,磁导率为  $\mu_2$  的媒质 2 中  $\Delta\mathbf{S}_2$  处分布的磁感应强度为  $\mathbf{B}_2$ 。因此,式(3-36)中磁通量的计算式如下:

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \stackrel{\Delta h \rightarrow 0}{=} \mathbf{B}_1 \cdot \Delta\mathbf{S}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \Delta\mathbf{S}_2 = 0$$

由于圆柱体上下底面的关系为  $\Delta\mathbf{S}_1 = -\Delta\mathbf{S}_2 = \mathbf{e}_n \Delta S$ 。因此可得

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (3-38)$$

上式即恒定磁场磁感应强度边界条件的矢量形式,其中  $\mathbf{e}_n$  代表的是垂直于分界面、由媒质 2 指向媒质 1 的单位方向矢量。式(3-38)的标量形式为

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (3-39)$$

以上两式也称为磁感应强度的法向分量边界条件,即媒质分界面两侧磁感应强度的法向分量是连续的。

根据式(3-35)及式(3-39)可得

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

由于分界面两侧  $\mu_1 \neq \mu_2$ ,则  $H_{1n} \neq H_{2n}$ ,可见分界面处  $\mathbf{H}$  的法向分量不连续。

如果两媒质中有一个是理想导体(其内部没有电磁场存在,也没有电流),则其边界条

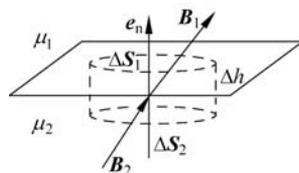


图 3-13 磁感应强度的法向边界条件



微课视频

件为

$$B_n = 0$$

根据上式可知,导体表面没有恒定磁场的法向分量存在。

### 3.4.2 磁场强度的切向边界条件

如图 3-14 所示,在媒质分界面两侧构建矩形积分回路。设该矩形积分回路足够小,高度  $\Delta h$  趋于零,沿线的磁场可以被视为均匀分布。考虑到场量的大小有限,因此场量沿  $\Delta h$  的积分结果也会趋于零,此时环量将仅取决于场量沿  $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$  积分的结果。令磁导率为  $\mu_1$  的媒质中磁场强度为  $\mathbf{H}_1$ ,磁导率为  $\mu_2$  的媒质中磁场强度为  $\mathbf{H}_2$ 。 $\mathbf{J}_s$  为交界面处的表面电流密度。右手四指沿回路方向弯曲,而拇指方向为  $\mathbf{J}_s$  的方向。由式(3-32),此时环量为

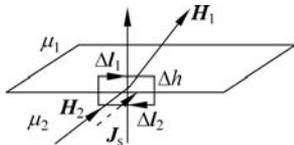


图 3-14 磁场强度的切向边界条件

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{\Delta h \rightarrow 0}{=} \mathbf{H}_1 \cdot \Delta l_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta l_2 = J_s \Delta l$$

考虑到矩形积分回路中  $\Delta l_1 = -\Delta l_2 = \Delta l = \mathbf{e}_t \Delta l$ ,因此上式表示为

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{e}_t = J_s$$

其中,  $\mathbf{e}_t$  为分界面的切向单位矢量。上式又可以用法向单位矢量  $\mathbf{e}_n$  表示为

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (3-40)$$

上式即恒定磁场中磁场强度边界条件的矢量形式,在明确  $\mathbf{e}_t$  具体方向的前提下,上式的标量形式为

$$H_{1t} - H_{2t} = J_s \quad (3-41)$$

以上两式也被称为磁场强度的切向分量边界条件。通常对电导率有限的两种媒质而言,电流由体电流密度定义,所以自由表面电流不会在交界面处出现,此时  $J_s$  等于零。因此,穿过几乎所有物理介质边界的  $\mathbf{H}$  切向分量是连续的。

根据式(3-35)及式(3-41)可以得到

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = J_s$$

由式(3-41),如果在媒质分界面上  $J_s = 0$ ,虽然  $H_{1t} = H_{2t}$ ,但是由于在分界面两侧  $\mu_1 \neq \mu_2$ ,根据上式  $B_{1t} \neq B_{2t}$ ,可见,磁感应强度  $\mathbf{B}$  的切向分量  $B_t$  一般不连续。

只有当分界面为理想导体或超导体表面时,  $\mathbf{H}$  的切向分量可能不连续。如果媒质 2 为导体(其内部  $H_2 = 0$ ),则其边界条件为

$$H_t = J_s$$

根据上式可知,如果导体表面有自由面电流存在,它将产生与导体表面平行的磁场强度分量。

### 3.4.3 恒定磁场位函数的边界条件

#### 1. 矢量磁位的边界条件

如图 3-15(a)所示,在媒质分界面两侧构建足够小的矩形积分回路,其高度  $\Delta h$  趋于零,

回路所包围的面积也趋于零,因此通过回路面积的磁通量  $\Phi_m$  趋于零。类似于 3.4.2 节的分析,矢量磁位  $\mathbf{A}$  的沿线积分结果为

$$\Phi_m = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{\Delta h \rightarrow 0}{=} \mathbf{A}_1 \cdot \Delta \mathbf{l}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \Delta \mathbf{l}_2 = 0$$

因为  $\Delta \mathbf{l}_1 = -\Delta \mathbf{l}_2 = \Delta \mathbf{l} = \mathbf{e}_t \Delta l$ , 因此上式表示为

$$A_{1t} = A_{2t}$$

故矢量磁位  $\mathbf{A}$  的切向分量连续。

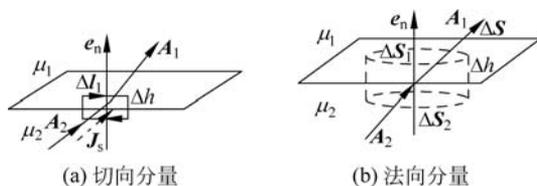


图 3-15 矢量磁位的边界条件

如图 3-15(b)所示,在媒质分界面两侧构建足够小的闭合圆柱面,其高度  $\Delta h$  趋于零,则圆柱面的侧面积也趋于零。由于圆柱体上下底面的关系为  $\Delta \mathbf{S}_1 = -\Delta \mathbf{S}_2 = \mathbf{e}_n \Delta S$ , 应用散度定理,并考虑到静态场中库仑规范  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , 得

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \stackrel{\Delta h \rightarrow 0}{=} \mathbf{A}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 = 0$$

故

$$A_{1n} = A_{2n}$$

所以,矢量磁位  $\mathbf{A}$  的法向分量连续。

综上所述,在媒质分界面两侧矢量磁位  $\mathbf{A}$  是连续的,即

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad (3-42)$$

## 2. 标量磁位的边界条件

类似于电位函数  $\varphi$  的边界条件,考虑到媒质分界面两侧两点的间隔距离趋于零,而且磁场强度的大小是有限值,根据式(3-20),  $\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$ , 即媒质分界面上的标量磁位必须是连续的,否则磁场强度的大小将趋于无穷大。故有

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad (3-43)$$

根据磁感应强度的边界条件式(3-39)和式(3-20),以及磁介质的物质方程,得

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \quad (3-44)$$

因此,在媒质分界面两侧,标量磁位的导数不连续。

**例题 3-9** 磁导率为  $\mu$ 、气隙宽度为  $d$  的环形铁芯上密绕了  $N$  匝线圈,如图 3-16 所示。求线圈电流为  $I$  时,气隙中的磁感应强度。

**解** 根据式(3-32)安培环路定理得

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

其中,  $l$  为积分环路。磁场沿  $\mathbf{e}_\phi$  方向。

在铁芯内:  $\mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{H}_1$ ; 在铁芯外:  $\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2$ 。根据恒定磁场的边界条件有

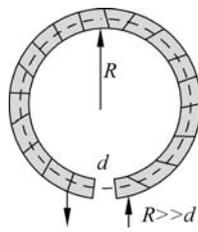


图 3-16 通电线圈

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B} = B\mathbf{e}_\phi$$

故有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_1(2\pi r - d) + H_2 d = \frac{B}{\mu}(2\pi r - d) + \frac{B}{\mu_0}d = IN$$

即

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0 NI}{\mu d + \mu_0(2\pi r - d)} \mathbf{e}_\phi$$

**例题 3-10** 在磁化率为  $\chi_m$  的媒质与空气分界面上, 已知靠近空气一侧的磁感应强度  $B_0$  与媒质表面的法线成  $\alpha$  角。求靠近媒质一侧的  $\mathbf{B}$  及  $\mathbf{H}$ 。

**解** 如图 3-17 所示, 将  $B_0$  分解成沿法向和切向的分量  $B_{0n}$ 、 $B_{0t}$ , 则其大小分别为

$$B_{0t} = B_0 \sin\alpha, \quad B_{0n} = B_0 \cos\alpha$$

根据恒定磁场的边界条件  $B_n = B_{0n}$ , 及  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  得

$$B_n = B_{0n} = B_0 \cos\alpha, \quad H_n = B_n / \mu = \frac{B_0 \cos\alpha}{(1 + \chi_m)\mu_0}$$

假设媒质材料的电导率有限, 则界面上没有自由电流, 故  $H_t = H_{0t}$ , 即

$$H_t = H_{0t} = \frac{B_0 \sin\alpha}{\mu_0}, \quad B_t = \mu H_t = \frac{\mu B_0 \sin\alpha}{\mu_0} = (1 + \chi_m) B_0 \sin\alpha$$

因此, 靠近媒质一侧的  $\mathbf{B}$  及  $\mathbf{H}$  为

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_n B_n + \mathbf{e}_t B_t = \mathbf{e}_n B_0 \cos\alpha + \mathbf{e}_t (1 + \chi_m) B_0 \sin\alpha$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_n H_n + \mathbf{e}_t H_t = \mathbf{e}_n \frac{B_0 \cos\alpha}{(1 + \chi_m)\mu_0} + \mathbf{e}_t \frac{B_0 \sin\alpha}{\mu_0}$$

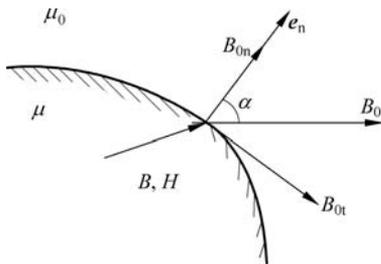


图 3-17 媒质与空气分界面



微课视频

## 3.5 电感

根据毕奥-萨伐尔定律, 在线性和各向同性介质中, 磁场与其激发电流成正比。因此, 穿过回路的磁通量(或磁链)也与电流有关。为了描述回路的磁通量与电流的关系, 引入电感  $L$ , 即穿过回路的磁通量  $\Phi$ (或磁链  $\psi$ ) 与产生该磁通的电流的比值。又根据法拉第电磁感应定律, 变化的磁通量会产生感应电动势, 因此通过电感还可以进一步由电流计算感应电动势。

### 3.5.1 自电感

设回路电流产生的磁场能够与该回路交链, 该磁链  $\psi$  与电流  $I$  的比值称为自感(自电感), 单位是亨利(H)。

$$L = \frac{\psi}{I} \quad (3-45)$$

自感又分为内自感  $L_i$  和外自感  $L_o$ 。内自感是导体内部的磁场仅与部分电流交链的磁链  $\psi_i$  与回路电流  $I$  的比值, 如图 3-18(a) 所示。

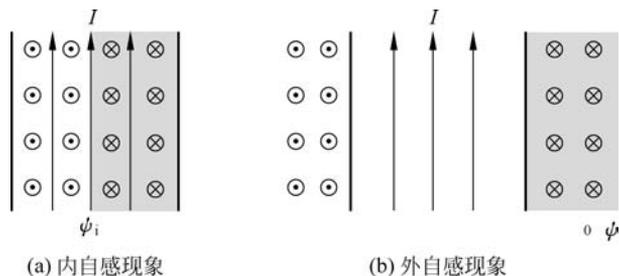


图 3-18 自感应现象

$$L_i = \frac{\psi_i}{I} \quad (3-46)$$

外自感是导体外部闭合的磁链  $\psi_0$  与回路电流  $I$  的比值,如图 3-18(b)所示。

$$L_0 = \frac{\psi_0}{I} \quad (3-47)$$

因此,回路的总自感为

$$L = L_i + L_0 \quad (3-48)$$

虽然自感可以用磁链和电流计算,但是在线性各向同性媒质中, $L$  仅与回路的几何尺寸、媒质参数有关,与回路的电流无关。

### 3.5.2 互电感

回路电流产生的磁场与其他回路交链,该磁链与电流的比值称为互感(互电感)。

如图 3-19 所示,回路 1 的电流  $I_1$  产生与回路 2 相交链的磁链  $\psi_{21}$ ,并与  $I_1$  成正比,则

$$\psi_{21} = M_{21} I_1$$

因此,定义回路 1 对回路 2 的互感为

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} \quad (3-49)$$

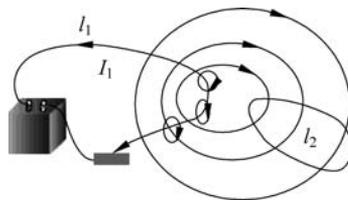


图 3-19 互感现象

互感的单位也是亨利(H)。

可以利用聂以曼公式(见下节)证明:  $M_{12} = M_{21} = M$ 。互感是一个回路电流在另一个回路所产生的磁效应,与两个回路的几何尺寸和周围媒质,以及两个回路之间的相对位置有关,而与回路电流无关。

### 3.5.3 电感的计算

#### 1. 互感的计算

如图 3-20 所示,设回路 1 通以电流  $I_1$ ,则在空间任一点产生的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{I_1}{R} d\mathbf{l}_1$$

所以,回路 1 的电流在回路 2 产生的磁通为

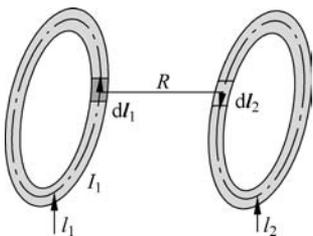


图 3-20 互感计算

$$\begin{aligned}\Phi_{21} &= \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{l_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \left( \oint_{l_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1}{R} \right) \cdot d\mathbf{l}_2\end{aligned}$$

因此

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R}$$

同理

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{R} \quad (3-50)$$

因此

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (3-51)$$

若回路 1、2 分别由  $N_1$ 、 $N_2$  匝细线密绕, 则互感为

$$M = \frac{N_1 N_2 \mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{R} \quad (3-52)$$

式(3-50)、式(3-52)称为聂以曼公式。

## 2. 外自感的计算

还可以利用聂以曼公式计算外自感, 如图 3-21 所示。

在计算外磁通时, 认为电流集中在导线的轴线  $l_1$  上, 并考虑穿过导线外表面之内轮廓  $l_2$  所限定的面积。电流  $I$  产生的磁场与  $l_2$  交链的磁通为

$$\Phi_0 = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{l_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \left( \oint_{l_1} \frac{I d\mathbf{l}_1}{R} \right) \cdot d\mathbf{l}_2$$

因此, 外自感为

$$L_0 = \frac{\Phi_0}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (3-53)$$

如果导线为  $N$  匝, 则

$$L_0 = \frac{\psi_0}{I} = \frac{N^2 \mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (3-54)$$

## 3. 内自感的计算

设长直导线半径为  $a$ , 载有均匀分布的电流  $I$ , 如图 3-22 所示, 下面计算其内自感。

首先利用安培环路定理求出在距离轴线  $r$  处的磁场。此时, 环路包围的电流为  $I'$ , 设对应的等效匝数为  $N$ , 则:  $I' = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2$ ,

$$N = \frac{I'}{I} = \frac{r^2}{a^2}。因此$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I' = \frac{I}{a^2} r^2$$

所以

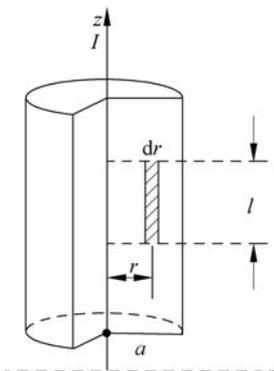


图 3-22 内自感计算模型

$$H = \frac{I}{2\pi a^2} r$$

通过长度为  $l$  的面积元  $d\mathbf{S} = e_\phi l dr$  的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r l dr$$

磁链为

$$\psi_i = \iint_S N d\Phi = \int_0^a \frac{\mu_0 I l r}{2\pi a^2} \cdot \frac{r^2}{a^2} dr = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

故内自感为

$$L_i = \frac{\psi_i}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \quad (3-55)$$

如上所述,如果要确定两回路之间的电感,在选择合适的坐标系后,步骤为:假定  $I \rightarrow$  计算磁感应强度  $\mathbf{B} \rightarrow$  在面上对  $\mathbf{B}$  积分得到磁通  $\Phi$  (或者通过对矢量磁位  $\mathbf{A}$  进行闭合曲线积分)  $\rightarrow$

由  $\psi = N\Phi$  得到磁链  $\psi \rightarrow$  计算出互感  $M = \frac{\psi}{I}$ 。

**例题 3-11** 假设  $N$  匝线圈紧紧缠在尺寸如图 3-23(a) 所示的环形框架的矩形截面上,线圈横截面的尺寸如图 3-23(b) 所示,环形框架的内半径为  $a$ ,外半径为  $b$ ,高为  $h$ 。假定介质的磁导率为  $\mu_0$ ,试求环形线圈的自感。

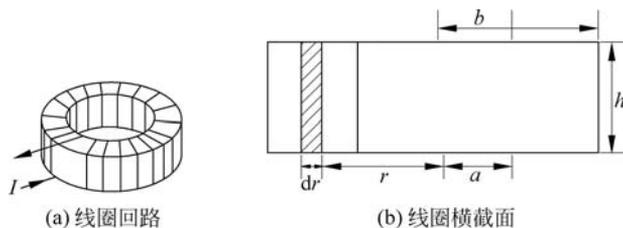


图 3-23 线圈回路及其横截面

**解** 因为环形结构关于轴对称,故选取圆柱坐标系。假定导线中电流为  $I$ ,对于半径为  $r$  ( $a < r < b$ ) 的环形路径,包围环路的总电流为  $NI$ ,根据安培环路定理有

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} e_\phi B \cdot r e_\phi d\phi = 2\pi r B = \mu_0 NI$$

所以

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} e_\phi$$

根据图 3-23(b),穿过每匝线圈的磁通量为

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left( e_\phi \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \right) \cdot (e_\phi h dr) = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

故穿过  $N$  匝线圈的磁链为

$$\psi = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

因此,得到自感(单位: H)为

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

**例题 3-12** 设空气同轴传输线的内导体半径为  $a$ , 有非常薄的外导体半径为  $b$ 。试求同轴线每单位长度的电感。

**解** 如图 3-24 所示, 假设电流  $I$  流过内导体, 从其他方向经由外导体返回。因为具有轴对称性, 并且  $B$  只存在两个区域: (a) 在内导体内; (b) 在内导体和外导体之间。同样假定电流  $I$  在内导体的横截面是均匀分布的。



图 3-24 同轴传输线的电感计算

(1) 如图 3-24(a)所示, 在内导体内部的磁链引起内自感, 由式(3-55)可得单位长度的内自感为

$$L_i = \frac{\psi_i}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi}, \quad 0 \leq r \leq a$$

(2) 如图 3-24(b)所示, 在内导体和外导体之间( $a \leq r \leq b$ )

$$\mathbf{B} = e_\phi B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} e_\phi$$

首先考虑在半径  $r$  到  $r + dr$  单位长度的面积元被磁通交链, 则穿过内外导体间的磁通为

$$\Phi = \int_a^b B dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

所以, 外自感为

$$L_o = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

因此, 单位长度的同轴线的电感为

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

**例题 3-13** 如图 3-25 所示, 两个匝数分别为  $N_1$ 、 $N_2$  的线圈, 缠绕在半径为  $a$  的无磁同芯直圆柱上, 绕组的长分别为  $l_1$ 、 $l_2$ 。试求出两线圈间的互感。

**解** 根据安培环路定理  $H = \frac{N_1}{l_1} I_1$ , 假定流过内部线圈的电流为  $I_1$ , 可以得出螺线管芯处与外部线圈交链的磁通为

$$\Phi_{21} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \mu_0 H S = \mu_0 \left( \frac{N_1}{l_1} \right) (\pi a^2) I_1$$

外部线圈的匝数为  $N_2$ , 故通过它的磁链为

$$\psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = \frac{\mu_0}{l_1} N_1 N_2 \pi a^2 I_1$$

因此互感为

$$M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{l_1} N_1 N_2 \pi a^2$$

**例题 3-14** 如图 3-26 所示, 试求直角三角形回路与长直导线间的互感。

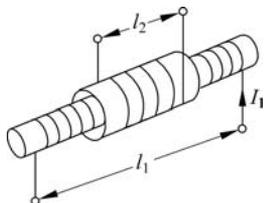


图 3-25 同芯绕组的螺线管

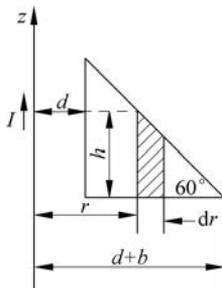


图 3-26 直角三角形回路和长直导线

**解** 根据直角三角形回路的电流很难求出各处的磁通量密度。但可以应用安培环路定理,写出由长直导线中沿  $z$  方向的电流  $I$  引起的  $\mathbf{B}$  的表达式为

$$\mathbf{B} = e_{\phi} B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} e_{\phi}$$

因此,穿过三角形回路的磁链为

$$\psi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{h}{r} dr$$

而  $h$  与  $r$  的关系由三角形斜边得出

$$h = [(d+b) - r] \tan 60^\circ = \sqrt{3} [(d+b) - r]$$

故有

$$\psi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{[(d+b) - r]}{r} dr = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi} \left[ (d+b) \ln\left(1 + \frac{b}{d}\right) - b \right]$$

因此,互感为

$$M = \frac{\psi}{I} = \frac{\sqrt{3}\mu_0}{2\pi} \left[ (d+b) \ln\left(1 + \frac{b}{d}\right) - b \right]$$

## 3.6 恒定磁场的能量和磁场力

### 3.6.1 恒定磁场的能量及能量密度

磁场对运动电荷、电流等会产生作用力,这表明磁场存储着能量。一个载流系统的磁场能量是在建立电流的过程中由外电源供给的。在回路电流由初始零值增加到最终稳定值的过程中,回路中产生的感应电动势会阻止电流的增加。因此,外电源要克服感应电动势的阻止作用而做功,并由此供给载流回路能量,该能量就作为磁场能存储于磁场之中。假设整个过程没有机械功,并忽略热损耗,这样,外电源所做的功就全部转化为系统的磁场能。

根据法拉第电磁感应定律,设回路  $j$  中的感应电动势为

$$\mathcal{E}_j = - \frac{d\psi_j}{dt}$$

其中,  $\psi_j$  为与回路  $j$  较链的磁链。为克服此感应电动势的阻止作用,外加电压为

$$u_j = - \mathcal{E}_j = \frac{d\psi_j}{dt}$$



微课视频

因此,外电源做的功为

$$dW_j = u_j dq_j = \frac{d\psi_j}{dt} i_j dt = i_j d\psi_j$$

其中,  $i_j$  为回路  $j$  中的电流。对于  $N$  个回路的系统,则增加的磁场能为

$$dW_m = \sum_{j=1}^N i_j d\psi_j \quad (3-56)$$

考虑到回路  $j$  的磁链为

$$\psi_j = \sum_{k=1}^N M_{jk} i_k$$

其中  $M_{jk}$  为互感,当  $k=j$  时为自感。将上式代入式(3-56)得

$$dW_m = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N i_j M_{jk} di_k$$

不失一般性,假设回路中的电流按照相同的百分比  $\alpha$  上升,即  $i_j = \alpha I_j$ ,故  $di_k = I_k d\alpha$ ,于是有

$$dW_m = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N I_k I_j M_{jk} \alpha d\alpha$$

对上式积分,即得系统的磁场能量为

$$W_m = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N I_k I_j M_{jk} \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N I_j I_k M_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \psi_j \quad (3-57)$$

其中  $\psi_j$  为与回路  $j$  相链的自磁链和互磁链之和。上式也可表示为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^N M_{jk} I_k I_j \quad (3-58)$$

其中,  $L_i$  为第  $i$  个回路的自感。

例如,对于两个回路的情况,式(3-58)可以表示为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 = \frac{1}{2} L_1 \left( I_1 + \frac{M}{L_1} I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) I_2^2$$

为了保证磁场能量总为正,由上式可得

$$L_2 - \frac{M^2}{L_1} \geq 0$$

即

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (3-59)$$

可由此定义耦合系数为

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (3-60)$$

由式(3-57)得

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \oint_{l_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \oint_{l_j} I_j \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_j$$

将  $I_j d\mathbf{l}_j = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}_j = \mathbf{J} dV$  代入上式,并利用  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ,将积分代替求和,得

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dV$$

再利用恒等式  $\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ , 及散度定理, 上式可写为

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$$

在上式中, 右端的第一项  $A \propto \frac{1}{r}$ ,  $H \propto \frac{1}{r^2}$ , 而  $dS \propto r^2$ , 所以其积分结果与  $1/r$  成比例关系。另外, 考虑到上式中的闭合积分曲面  $S$  为无限大空间  $V$  的外表面, 即  $r \rightarrow \infty$ , 因此上述表达式中面积分的结果必然为零, 故有

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \quad (3-61)$$

因此, 磁场能量密度为

$$W_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (3-62)$$

能量密度的单位为焦耳/米<sup>3</sup> (J/m<sup>3</sup>)。比较式(3-62)与式(2-51)可知, 磁场能量密度与电场能量密度呈对偶关系。

在各向同性的线性媒质中, 将式(3-35)代入式(3-62)可得

$$\omega_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (3-63)$$

### 3.6.2 恒定磁场的磁场力

磁场能量的宏观效应就是对载导体或运动电荷有力的作用, 如式(3-4)所示。但是, 在实际应用中, 这种安培力的计算往往比较困难, 下面介绍借助于虚位移法计算磁场力的方法。

对于有  $N$  个电流回路构成的系统, 回路电流分别为  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , 仿照 2.10.3 节静电场的情况, 当回路仅有一个广义坐标发生位移  $d\mathbf{l}$  时, 系统发生的功能过程是

$$dW = dW_m + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (3-64)$$

即, 电源提供的能量  $dW$  转化为系统磁场能量  $dW_m$  的增量以及磁场力所做的功  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ 。外电源克服感应电动势的阻止作用所做的功为

$$dW = \sum_{j=1}^N I_j \frac{d\psi_j}{dt} dt = \sum_{j=1}^n I_j d\psi_j \quad (3-65)$$

下面针对两种情况进行讨论。

(1) 常电流系统 ( $I_j$  为常数)

根据式(3-57)及式(3-65)可得

$$dW_m \Big|_{I_j = \text{常量}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j d\psi_j = \frac{1}{2} dW$$

这表明, 外源提供的能量一半用于增加磁场能量, 另一半提供磁场力做功。即

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = dW_m \Big|_{I_j = \text{常量}}$$

由此得广义力, 即磁场力为

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial l} \Big|_{I_j = \text{常量}} \quad (3-66)$$

(2) 常磁链系统( $\psi_j$  为常数)

由于各回路磁链  $\psi_j$  保持不变,故各回路没有感应电动势,外电源不提供能量,即  $dW = 0$ ,所以,只有依靠减少磁场能量来提供磁场力做功,由式(3-64)得

$$\mathbf{F} d\mathbf{l} = -dW_m \Big|_{\psi_j = \text{常量}}$$

所以,磁场力为

$$F = -\frac{\partial W_m}{\partial l} \Big|_{\psi_j = \text{常量}} \quad (3-67)$$

**例题 3-15** 一对宽为  $a$  相距为  $h$  的平行带传输线,其中电流方向相反。设带线宽  $a \gg h$ ,如图 3-27 所示。忽略边缘效应,求带线间单位长度上的作用力。

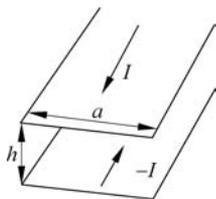


图 3-27 平行带传输线

**解** 忽略边缘效应,可认为带间磁场均匀。  
由安培环路定理得

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ha = I$$

所以

$$H = \frac{I}{a}$$

由式(3-63)可得带线间单位长度磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mu_0 H^2 dV = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{I}{a}\right)^2 ah = \frac{\mu_0}{2} \frac{I^2}{a} h$$

故,代入式(3-66)计算带线间单位长度上磁场力的大小为

$$F = \frac{dW_m}{dh} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I^2}{a}$$

显然,根据安培力定律可知该力为排斥力。

**例题 3-16** 如图 3-28 所示的电磁铁,其上绕有  $N$  匝线圈并通有电流  $I$ ,在磁路产生一个磁通为  $\Phi$  的磁场,下面有一电枢。磁芯的横截面积为  $S$ 。试确定对该电枢的升力。

**解** 设电枢有虚位移  $dy$ ,并保持磁通量连续不变。电枢位移变化引起空气间隙长度的变化,并导致两个空气间隙中的磁场能量发生改变。由式(3-63)得

$$dW_m = d(W_m)_{\text{air}} = 2 \left( \frac{B^2}{2\mu_0} S dy \right) = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} dy$$

因此,根据式(3-67)得到电枢的升力为

$$F = -\frac{dW_m}{dy} = -\frac{\Phi^2}{\mu_0 S}$$

这里,负号表示该力趋于减少空气间隙的长度。也就是说,这个力是引力。

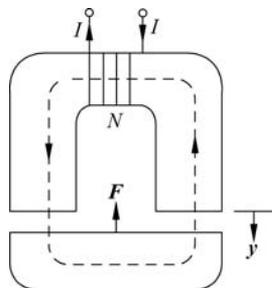


图 3-28 电磁铁的作用力

## 习题

**3-1** 设点电荷的运动速度为  $\mathbf{v}$ ,证明磁感应强度  $\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}$ ,其中  $\mathbf{E}$  为点电荷产生的电场强度。

3-2 在  $xOy$  平面有一宽度为  $W$  的无限长导电板,其上电流密度为  $\mathbf{J}_s = J_0 \mathbf{e}_y$ ,求  $xOz$  平面任一点的磁感应强度,如习题 3-2 图所示。

3-3 在真空中,电流分布如下,求磁感应强度。

$$\mathbf{J} = 0, \quad 0 \leq \rho \leq a$$

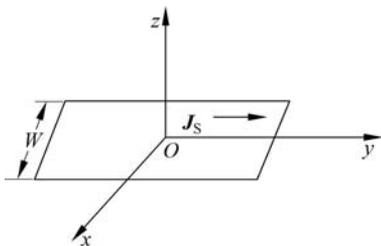
$$\mathbf{J} = \frac{\rho}{b} \mathbf{e}_z, \quad a < \rho < b$$

$$\mathbf{J}_s = J_0 \mathbf{e}_z, \quad \rho = b$$

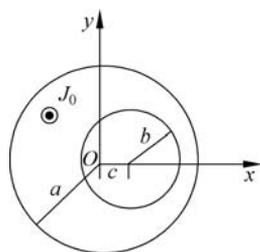
$$\mathbf{J} = 0, \quad \rho > b$$

3-4 一个半径为  $a$  的导体球带电量为  $q$ ,当球体以均匀角速度  $\omega$  绕直径( $z$  轴)旋转时,试求球心处的磁感应强度。

3-5 已知无限长导体圆柱半径为  $a$ ,其内部有一半径为  $b$  的圆柱形空腔,导体圆柱的轴线与圆柱形空腔的轴线相距为  $c$ ,如习题 3-5 图所示。若导体中均匀分布的电流密度为  $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_z$ ,试求空腔中的磁感应强度。



习题 3-2 图



习题 3-5 图

3-6 两个平行无限长直导线的距离为  $a$ ,分别载有同向的电流  $I_1, I_2$ ,求单位长度导线所受到的力。

3-7 在圆柱坐标系中,已知电流密度为  $\mathbf{J} = kr^2 \mathbf{e}_z (r \leq a)$ 。

(1) 求磁感应强度;

(2) 证明  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ 。

3-8 一个沿  $z$  方向分布的电流为  $J_z = r^2 + 4r (r \leq a)$ ,求磁感应强度。

3-9 空心长直导体管的内半径为  $R_0$ ,管壁厚度为  $d$ ,管中电流为  $I$ 。试求空间 ( $0 \leq r < \infty$ ) 中的磁感应强度  $\mathbf{B}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$ ,并验证分别满足的边界条件。

3-10 无限长直电流  $I$  垂直于磁导率分别为  $\mu_1 (z > 0$  空间)、 $\mu_2 (z < 0$  空间) 的两种磁介质的分界面 ( $z = 0$ ),试求两种媒质中的磁感应强度  $\mathbf{B}_1$  和  $\mathbf{B}_2$ 。

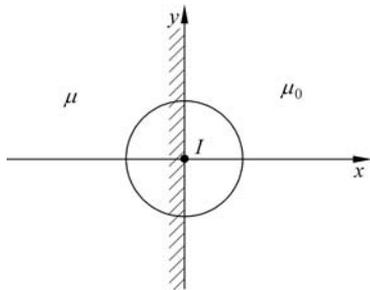
3-11 间距为  $d$  的相互平行的无限大金属板,分别流过大小相同、方向相反的均匀电流密度  $\mathbf{J}_s$ 。设电流沿  $z$  轴方向,试求空间各处的磁场强度  $\mathbf{H}$ 。

3-12 在  $x < 0$  的半空间中充满磁导率为  $\mu$  的均匀介质,  $x > 0$  的半空间为真空,如习题 3-12 图所示。今有一电流沿  $z$  轴流动,求磁场强度  $\mathbf{H}$ 。

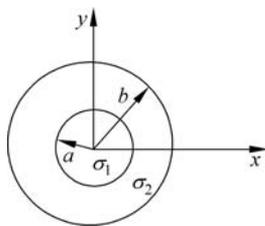
3-13 已知圆柱坐标系中磁感应强度  $\mathbf{B}$  的分布为  $\mathbf{B} = 0 (0 < r < a)$ ,  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi (r > b)$ ,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} [(r^2 - a^2)/(b^2 - a^2)] \mathbf{e}_\phi (a < r < b)$$
。求空间各处的电流密度。

- 3-14 证明在两种媒质界面上的磁化电流面密度为  $J_{ms} = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$ 。其中,  $\mathbf{e}_n$  的方向为从媒质 2 指向媒质 1 的单位法向矢量,  $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{M}_2$  分别为两种媒质的磁化强度。
- 3-15 由两层电导率不同的导体构成无限长同轴导电圆柱体, 其中内层半径为  $a$ , 外层半径为  $b$ , 内外导体的电导率分别为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ , 如习题 3-15 图所示。导体中总的轴向电流为  $I$ , 求导体圆柱内外的磁场分布。

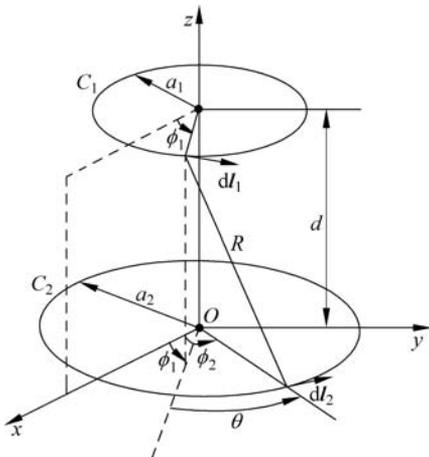


习题 3-12 图



习题 3-15 图

- 3-16 一根很细的圆铁杆和一个很薄的圆铁盘样品放在磁场  $\mathbf{B}_0$  中, 并使它们的轴与  $\mathbf{B}_0$  平行(铁的磁导率为  $\mu$ )。求两样品的  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$  和磁化强度  $\mathbf{M}$ 。
- 3-17 设双线传输线的半径为  $a$ , 长度为  $l$ , 间距为  $D$ , 试求双线传输线的自感。
- 3-18 如习题 3-18 图所示, 两个互相平行且共轴的圆线圈, 半径分别为  $a_1$ 、 $a_2$ , 中心相距为  $d$ 。设  $a_1 \ll d$ , 或者  $a_2 \ll d$ 。求两线圈之间的互感。



习题 3-18 图

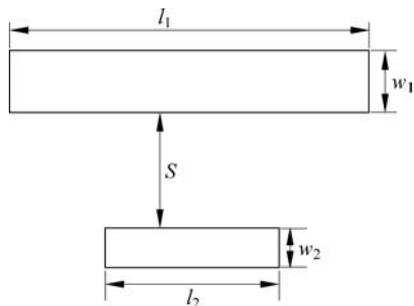
- 3-19 利用磁场储存能量, 试确定具有内导体半径  $a$  和一层很薄的外导体内半径  $b$  的空气同轴传输线的单位长度电感。
- 3-20 一个铁磁芯环, 内半径为 30 cm, 外半径为 40 cm, 截面为矩形, 高为 5 cm, 相对磁导率为 500, 均匀绕线圈 500 匝, 电流强度为 1 A。分别计算磁芯中的最大和最小磁感应强度, 以及穿过磁芯截面的磁通量。
- 3-21 在截面为正方形  $a \times a$ , 半径为  $R$  ( $R \gg a$ ) 的磁环上, 密绕了两个线圈, 一个线圈为  $m$

匝,另一个为  $n$  匝。磁芯的磁导率为  $\mu$ 。试分别近似计算两个线圈的自感及互感。

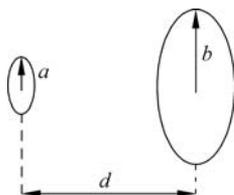
- 3-22 两个长的矩形线圈,放置于同一平面上,长度分别为  $l_1$  和  $l_2$ ,宽度分别为  $w_1$  和  $w_2$ ,两个线圈最近的边之间的距离为  $S$ ,如习题 3-22 图所示。设  $l_1 \gg l_2, l_1 \gg S$ ,证明两线圈的互感为  $M = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \ln \frac{S+w_2}{S(1+\frac{w_2}{S+w_1})}$ 。

$$M = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \ln \frac{S+w_2}{S(1+\frac{w_2}{S+w_1})}$$

- 3-23 已知两个相互平行,间隔为  $d$  的共轴线圈,其中一个线圈的半径为  $a$  ( $a \ll d$ ),另一个线圈的半径为  $b$ ,如习题 3-23 图所示。求两线圈的互感。



习题 3-22 图

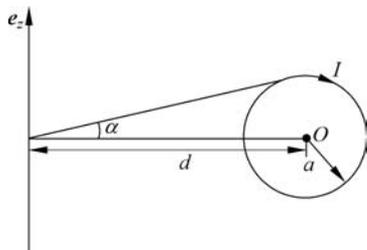


习题 3-23 图

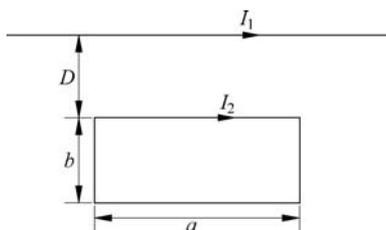
- 3-24 一无限长直导线与一半径为  $a$  的圆环共面,圆环圆心到直导线的距离为  $d$  ( $a \ll d$ ),如习题 3-24 图所示。求直导线与圆环之间的互感。(提示:用圆环产生的矢量磁位在直导线回路的磁通计算更为方便)

- 3-25 在上题中,假设长直导线的电流为  $I_1$ ,线圈的电流为  $I_2$ ,试证明两电流间的相互作用力为  $F_m = \mu_0 I_1 I_2 (\sec \alpha - 1)$ 。其中  $\alpha$  是圆环对直线最接近圆环的点所张的角,如习题 3-24 图所示。

- 3-26 设一无限长直细导线与一矩形回路共面,其尺寸及电流方向如习题 3-26 图所示,其中电流单位为 A,  $D$ 、 $b$ 、 $a$  单位均为 m。试利用虚位移法计算直导线和矩形回路之间的力。



习题 3-24 图



习题 3-26 图