

第5章 函 数

函数是具有特殊性质的二元关系。以往学习函数是从变量的角度在实数集上来探讨其连续性。而在计算机科学领域,数据本身具有离散性,因此可以把函数看作输入/输出的关系,它把一个集合(输入集合)的元素变成另一个集合(输出集合)的元素。例如,计算机中的程序可以把一定范围内的任意一组数据变换成另一组数据。

本章将定义一般函数类和各种特殊子类,并将函数定义推广到任意集合上,作为特殊二元关系,侧重讨论离散函数。

本章学习目标及思政点

学习目标

- 函数或映射、像、原像、定义域和值域、空函数、常函数、恒等函数等
- 函数的性质(单射、满射、双射)
- 复合函数、复合运算、幂等函数
- 逆函数、逆运算

思政点

培养认知事物的科学精神,形成负责的学习态度,既勇于探究新知又坚持实事求是;培养研究问题的科学方法,运用函数思想寻找解决问题的共同属性,发现定量和变量之间的联系;学会用辩证的映射方法建立事物之间的内在联系,树立辩证唯物主义哲学观,培养事物之间存在普遍联系的认识观。

5.1 函数的基本概念

函数建立了从一个集合到另一个集合的变换关系,计算机执行任何类型的程序都是这样的变换。例如,编译程序可以把源程序转换为机器语言的指令集合(目标程序)。下面将函数放在任意集合上来讨论函数概念以及常用和特殊的函数。

定义 5.1 设 X 和 Y 是集合,一个从 X 到 Y 的函数 f (记为 $f: X \rightarrow Y$) 是一个满足以下条件的关系:

对任意 $x \in X$, 都存在唯一的 $y \in Y$, 使 $\langle x, y \rangle \in f$ 。

$\langle x, y \rangle \in f$ 通常记作 $f(x) = y$, x 称作函数的自变量, y 称作对应于自变量 x 的函数值。把 X 称作函数 f 的前域, y 称作函数 f 的陪域。

从定义 5.1 可以看出, X 到 Y 的函数 f 和一般 X 到 Y 的二元关系有以下两个不同点:

- (1) X 的每一元素都必须作为 f 的序偶的第一元素出现;
- (2) 如果 $f(x) = y_1$ 和 $f(x) = y_2$, 那么 $y_1 = y_2$ 。

通常也把函数 f 看作是一个映射(变换)规则,使得 X 中的每个元素都可以在 Y 中找

到唯一的元素与之对应,因而 $f(x)$ 又叫作 x 的映像。

注意: (1) 一般用 dom 来标记定义域,即 $\text{dom}f = X$ 。由此可知函数的定义域就是前域 X ,而不是 X 的某个真子集;也就是说, x 中的每个元素都必须作为 f 序偶的第一元素出现。

(2) 一般用 ran 来标记值域,有 $\text{ran}f \subseteq Y$,即值域 $\text{ran}f$ 是陪域的一部分。

例 5.1 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$,判断下列基于 A 到 B 上的二元关系哪些是映射?

(1) $R_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 4, a \rangle\}$ 。

(2) $R_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, c \rangle\}$ 。

(3) $R_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, b \rangle\}$ 。

解: 根据函数定义,映射关系必须满足两个条件: ① X 的每一元素都必须作为 f 的序偶的第一元素出现。② 如果 $f(x) = y_1$ 和 $f(x) = y_2$,那么 $y_1 = y_2$ 。

(1) $R_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 4, a \rangle\}$,集合 A 的元素 3 没有作为序偶的第一元素出现,因此它不是映射关系。

(2) $R_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, c \rangle\}$,虽然集合 A 的所有的元素都有作为序偶的第一元素出现,但因为 $f(1) = a$ 、 $f(1) = b$,显然 $a \neq b$,所以也不是映射关系。

(3) $R_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, b \rangle\}$,集合 A 的所有的元素都作为序偶的第一元素出现,并且不同的 A 作为第一元素输入时,输出的第二元素也是唯一的,因此该关系是映射关系。

由于对于任意的 $x \in X$,都存在唯一的 $y \in Y$,使 $\langle x, y \rangle \in f$ 。所以通常的多值函数的概念是不符合这里的函数定义的。如 $R_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, c \rangle\}$ 只是一个关系,而不是函数。

通常把函数 f 称为映射(变换),它把 X 的每一个元素映射到(变换为) Y 的一个元素,因此 $f(x)$ 也可以称为 x 的像,而称 x 为 $f(x)$ 的原像。

在定义一个函数时,必须指定定义域、陪域和变换规则,变换规则必须覆盖所有可能的自变量的值。

例 5.2 实数集 $\mathbf{R}$ 上的二元关系 $f_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a^2 = b\}$, $f_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b^2\}$,试判定 f_1 和 f_2 是不是函数。

解: 根据函数定义,函数 f_1 在实数集上依据表达式 $a^2 = b$ 均以第一元素出现,并且对应的第二元素是唯一的,因此符合函数的定义。

根据函数定义,函数 f_2 在实数集上依据表达式 $a = b^2$,有序偶对 $\langle 4, -2 \rangle$ 和 $\langle 4, 2 \rangle$,即 $f(4) = 2$ 和 $f(4) = -2$, $2 \neq -2$ 所以 f_2 不是函数。

例 5.3 设集合 $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,从 X 到 Y 的一个函数 $f = \{\langle a, 5 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle d, 1 \rangle\}$,试求 $\text{dom}f$ 、 $\text{ran}f$ 和 $y = f(x)$ 。

解: 由 $f = \{\langle a, 5 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle d, 1 \rangle\}$ 可得

$\text{dom}f = X$, $\text{ran}f = \{1, 3, 5\}$

$f(a) = 5, f(b) = 3, f(c) = 3, f(d) = 1$

定义 5.2 设 f 和 g 是从集合 A 到集合 B 的两个函数,若对任意 $a \in A$,有 $f(a) = g(a)$,则称函数 f 和 g 相等,记作 $f = g$ 。

由定义可知,两个函数相等,它们的定义域一定相等,即 $\text{dom}f = \text{dom}g$ 。

例如, $f(a) = \frac{a^2 - 1}{a - 1}$, $g(a) = a + 1$, 因为 $\text{dom}f = \{a \mid a \in \mathbb{R} \text{ 且 } a \neq 1\}$, 而 $\text{dom}g = \mathbb{R}$, 即 $\text{dom}f \neq \text{dom}g$, 所以 $f \neq g$ 。

定义 5.3 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A , 读作“ B 上 A ”。符号化表示为

$$B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$$

下面讨论像这样从集合 A 到集合 B 可以定义多少个不同的函数。

设 $|A| = m$, $|B| = n$, 由关系的定义可知, $A \times B$ 的子集都是 A 到 B 的关系, 则集合 A 到集合 B 的二元关系是 2^{mn} 。但根据函数的定义, $A \times B$ 的子集不一定是 A 到 B 的函数。因为对 A 中 m 个元素中的任意元素 x , 可在 B 的 n 个元素中任取一个元素作为 x 的像, 因此 A 到 B 的函数有 n^m 个, 用 B^A 表示 A 到 B 的全部函数组成的集合, 则 $|B^A| = n^m$ 。

例 5.4 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 求 B^A 。

解: 因为 $|A| = 2$, $|B| = 3$, 所以 $|B^A| = 3^2 = 9$, 实际上, 从 A 到 B 的 9 个函数具体如下:

$$\begin{aligned} f_1 &= \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, f_2 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}, f_3 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle\}, \\ f_4 &= \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, f_5 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}, f_6 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle\}, \\ f_7 &= \{\langle a, 3 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, f_8 = \{\langle a, 3 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}, f_9 = \{\langle a, 3 \rangle, \langle b, 3 \rangle\} \end{aligned}$$

$$\text{即 } B^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}.$$

定义 5.4 设函数 $f: X \rightarrow Y$, $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$, 则有

(1) 令 $f(X_1) = \{f(x) \mid x \in X_1\}$, 称 $f(X_1)$ 为 X_1 在 f 下的像。特别地, 当 $X_1 = X$ 时, 称 $f(X)$ 为函数的像。

(2) 令 $f^{-1}(Y_1) = \{x \mid x \in X \wedge f(x) \in Y_1\}$, 称 $f^{-1}(Y_1)$ 为 Y_1 在 f 下的完全原像。

在这里要注意区别函数的值和像是两个不同概念。函数 $f(x) \in Y$ 是一个元素, 而像 $f(X_1) \subseteq Y$ 是一个集合。

设 $Y_1 \subseteq Y$, 显然 Y_1 在 f 下的完全原像 $f^{-1}(Y_1)$ 是 X 的子集。如果 $X_1 \subseteq X$, 那么 $f(X_1) \subseteq Y$ 。

$f(X_1)$ 的完全原像是 $f^{-1}(f(X_1))$ 。一般来说, $f^{-1}(f(X_1)) \neq X_1$, 但是 $X_1 \subseteq f^{-1}(f(X_1))$ 。例如, 函数 $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1\}$, 满足 $f(1) = f(2) = 0$, $f(3) = 1$ 。令 $X_1 = \{1\}$, 那么有 $f^{-1}(f(X_1)) = f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{0\}) = \{1, 2\}$, 这时 $X_1 \subset f^{-1}(f(X_1))$ 。

例 5.5 设 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 且 $f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{若 } x \text{ 为偶数} \\ x+1, & \text{若 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$, 令 $X = \{0, 1\}$, $Y = \{2\}$, 求

$f(X)$ 和 $f^{-1}(Y)$ 。

解: $f(X) = f(\{0, 1\}) = \{f(0), f(1)\} = \{0, 2\}$ 。

函数是一种特殊的关系, 它与一般关系的差别如下:

(1) 从 A 到 B 的不同关系有 $2^{|A| \times |B|}$ 个, 但从 A 到 B 的不同函数却仅有 $|B|^{|A|}$ 个;

- (2) 关系的第一个元素可以相同,函数的第一元素一定互不相同;
 (3) 每一个函数的基数都为 $|A|$ 个($|f|=|A|$),但关系的基数却是从0到 $|A|\times|B|$ 。

5.2 特殊函数与常函数

本节在介绍特殊函数之前先讨论函数的几个性质,包括了函数的满射性质、单射性质和双射性质。

定义 5.5 设函数 $f:A\rightarrow B$ 。

(1) 如果对于任意的 $y\in B$,都存在 $x\in A$,使得 $f(x)=y$,那么称 f 为满射的(到上的)。

(2) 如果对于任何的 $a_1, a_2\in A$,若 $a_1\neq a_2$,则有 $f(a_1)\neq f(a_2)$,那么称 f 为单射的(一对一的)。

(3) 设函数 $f:A\rightarrow B$,若 f 既是满射的,又是单射的,则称 f 为双射的(一一到上的)。

具有这些性质的函数分别叫作满射函数、单射函数和双射函数。

如果 $f:X\rightarrow Y$ 是满射的,那么任意元素 $y\in Y$ 均在 f 的像中;如果 f 是单射的,那么前域中不同的元素会映射到陪域中不同的元素;如果 f 是双射的,那么 Y 的每一元素 y 是且仅是 X 的某个元素 x 的映像,常称双射为一一对应。

图 5.1 用来说明定义 5.5 中各类函数的概念,函数的前域和陪域分别用左边和右边的空心圆点来表示。

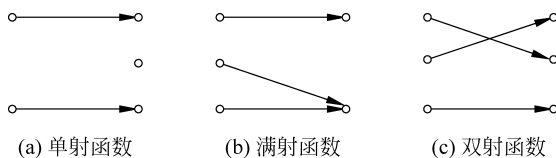


图 5.1 函数关系图

从图 5.1(a)可以看出,该映射是单射的但不是满射的,图 5.1(b)是满射但不是单射的,图 5.1(c)是双射的。显然,如果 f 是满射的,那么至少有一条弧终止于陪域的每一元素。如果 f 是单射的,那么终止于陪域的每一元素的弧不多于一条。如果 f 是双射的,那么有且只有一条弧终止于陪域的每一元素。

例 5.6 判断下列函数是否为满射、单射和双射。

- (1) $f:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{Z}, f(n)=\text{小于 } n \text{ 的完全平方数的个数}$ 。
 (2) $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}, f(x)=3x+7$ 。
 (3) $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{Z}, f(x)=[x], [x]$ 表示取整数。
 (4) $f:\mathbf{R}^+\rightarrow\mathbf{R}^+, f(x)=(x^2+1)/x$, 其中 $\mathbf{R}^+$ 为正实数。

解: (1) 由 f 的定义可得 $f=\{<0,0>, <1,1>, <2,2>, <3,2>, <4,2>, <5,3>, \dots\}$
 f 既不是满射函数,又不是单射函数,也不是双射函数。

(2) 因为 $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}, f(x)=3x+7$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 值域也为 $\mathbf{R}$, 并且也是一一对应的,所以该 f 是满射函数、单射函数,也是双射函数。

(3) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = [x]$, f 是满射函数, 但不是单射函数, 也不是双射函数。如 $f(1.4) = f(1.6) = 1$ 。

(4) $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$ 不是单射函数, 也不是满射函数。因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; 而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$ 。在 $x=1$ 处函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(1) = 2$ 。所以该函数既不是单射函数也不是满射函数。

一般情况下, 函数是满射函数还是单射函数, 没有必然的联系, 但当 A, B 都是有限集时, 则有如下定理:

定理 5.1 设 X 和 Y 为有限集, 若 $|X| = |Y|$, 则 $f: X \rightarrow Y$ 是单射函数, 当且仅当 f 为满射函数。

证明: 充分性。若 f 为满射函数, 根据定义必有 $Y = f(X)$, 于是

$$|X| = |Y| = |f(X)| \quad ①$$

因此 f 是一个单射函数。否则存在 $x_1, x_2 \in A$, 虽然 $x_1 \neq x_2$, 但 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以 $|f(X)| < |X| = |Y|$ 。

这与①矛盾, 故由 f 是满射函数可推出 f 是单射函数。

必要性。若 f 是单射函数, 则 $|X| = |f(X)|$, 因为 $|X| = |Y|$, 从而

$$|f(X)| = |Y| \quad ②$$

又 $f(X) \subseteq Y$, 所以 $f(X) = Y$ 。因此由 f 是单射函数可以推出 f 为满射函数。

定义 5.6 (1) 设 f 是从集合 A 到 B 的函数, 若存在一个 $b \in B$, 使得对所有的 $a \in A$, 都有 $f(a) = b$, 则称 f 是从 A 到 B 的常函数。

(2) 集合 A 上的恒等关系 I_A 称为 A 上的恒等函数, 即对所有的 $a \in A$, 都有 $I_A(a) = a$ 。

(3) 设 f 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数, 对任意的 $a_1, a_2 \in A$, 如果 $a_1 < a_2$, 有 $f(a_1) \leq f(a_2)$, 则称 f 为单调递增的; 如果由 $a_1 < a_2$, 可得 $f(a_1) < f(a_2)$, 则称 f 为严格单调递增的。类似地, 可以定义单调递减和严格单调递减的函数。

(4) 设 A 为集合, 对任意子集 $A' \subseteq A$, A' 的特征函数 $\chi_{A'}: A \rightarrow \{0, 1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & a \in A' \\ 0, & a \in A - A' \end{cases}$$

(5) 设 R 是集合 A 上的等价关系, 令 g 为从 A 到 A/R 的函数, 即 $g(a) = [a]$, 则称 g 为从 A 到商集 A/R 的自然映射。

例如, 设集合 $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$, 从 A 到 B 的一个函数为 $f_1 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle d, 2 \rangle, \langle e, 2 \rangle \}$, 则 f_1 是一个常数函数。

设整数集 $\mathbf{Z}$ 上的函数 $f_2(a) = a + 1$, 则 f_2 是一个严格单调递增函数。

实数集 $\mathbf{R}$ 上的常函数, 既是单调递增函数, 又是单调递减函数。

设实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f_3(a) = a^2$, 则 f_3 既不是单调递增函数, 也不是单调递减函数。

设集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的等价关系 $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \} \cup I_A$, 则从 A 到 A/R 的自然映射 g 为

$$\begin{aligned} g: \{a, b, c\} &\rightarrow \{ \{a, b\}, \{c\} \} \\ g(a) = g(b) &= \{a, b\}, g(c) = \{c\} \end{aligned}$$

注意: 一般来说, 常函数不是单射函数, 恒等函数是双射函数。

5.3 复合函数与逆函数

5.3.1 复合函数

由第4章关系中可知,对二元关系进行复合运算,可以产生一种新的关系。而函数是一种特殊的二元关系,按照关系的复合运算可以给出复合函数的定义。

定义 5.7 设函数 $f:A \rightarrow B, B \rightarrow C$, 则将复合关系 $g \circ f = \{ \langle a, c \rangle \mid a \in A, c \in C, \text{且存在 } b \in B, \text{使 } f(a)=b, g(b)=c \}$ 是从 A 到 C 的函数,称为函数 f 和 g 复合函数。

在定义 5.7 中,隐含了函数 f 的值域是函数 g 的定义域的子集,即 $\text{ran} f \subseteq \text{dom} g$ 。这一条件保证了复合函数 $g \circ f$ 是非空的。如果 $g \circ f$ 是非空集,可以证明下述定理成立。

定理 5.2 设函数 $f:A \rightarrow B, B \rightarrow C$, 那么复合函数 $g \circ f$ 是一个从 A 到 C 的函数,而且,对任意一个 $a \in A$, 都有 $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ 。

例如,设集合 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}, C = \{e, f, g\}$, 从 A 到 B 的函数为 $f = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \}$, 从 B 到 C 的函数为: $g = \{ \langle 1, e \rangle, \langle 2, g \rangle \}$, 那么, $g \circ f = \{ \langle a, e \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, g \rangle \}$ 是一个由 A 到 C 的函数。

例 5.7 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的两个函数分别为 $f = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$, $g = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$, 试求复合函数 $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ 。

解: $f = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}, g = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \},$

$f \circ g = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}, g \circ f = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}, f \circ f = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}, g \circ g = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$

例 5.8 设实数集 $\mathbf{R}$ 上的 3 个函数分别为 $f(a) = 3 - a, g(a) = 2a + 1, h(a) = a/3$, 试求复合函数 $g \circ f, h \circ g, h \circ (g \circ f), (h \circ g) \circ f$ 。

解: $f(a) = 3 - a, g(a) = 2a + 1, h(a) = a/3,$

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(3 - a) = 2(3 - a) + 1 = 7 - 2a$

$(h \circ g)(a) = h(g(a)) = h(2a + 1) = (2a + 1)/3$

$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(7 - 2a) = (7 - 2a)/3$

$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = (h \circ g)(3 - a) = (2(3 - a) + 1)/3 = (7 - 2a)/3$

由例 5.8 可以看出,函数的复合运算不满足交换律,但满足结合律。因此可得到下面的定理。

注意: 函数 f 和 g 可以复合 $\Leftrightarrow \text{ran} f = \text{dom} g; \text{dom}(f \circ g) = \text{dom} f, \text{ran}(f \circ g) = \text{ran} g$; 对任意 $x \in A$, 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$ 。

定理 5.3 设函数 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$, 则

(1) 若 f 和 g 是满射的, 则 $g \circ f:A \rightarrow C$ 是满射的。

(2) 若 f 和 g 是单射的, 则 $g \circ f:A \rightarrow C$ 是单射的。

(3) 若 f 和 g 是双射的, 则 $g \circ f:A \rightarrow C$ 是双射的。

证明: (1) 对于 $c \in C$, 因 g 是满射的, 所以存在 $b \in B$, 使 $g(b) = c$ 。对于 $b \in B$, 因 f 是满射的, 所以存在 $a \in A$, 使 $f(a) = b$ 。于是 $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$, 因此 $g \circ f$ 是满射的。

(2) 对于 $a, b \in A$, 若 $a \neq b$, 因为 f 是单射的, 则 $f(a) \neq f(b)$ 。又因 g 是单射的, 所以 $g(f(a)) \neq g(f(b))$, $g \circ f$ 是单射的。

(3) 因为 f 和 g 是满射和单射的, 由(1)(2)可知 $g \circ f$ 也是满射和单射的, 因此 $g \circ f$ 是双射的。

上述的定理说明, 函数的复合运算能够保持函数满射、单射和双射特性。但是定理 5.3 的逆定理只有部分成立。

定理 5.4 设函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则

(1) 若 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是满射的, 则 g 是满射的。

(2) 若 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是单射的, 则 f 是单射的。

(3) 若 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是双射的, 则 g 是满射的, 且 f 是单射的。

证明: (1) 因为 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是满射, 所以, 对于任意的 $c \in C$, 存在 $a \in A$, 使得 $g \circ f(a) = c$, 即 $g(f(a)) = c$ 。又因为 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 则有 $b = f(a) \in B$, 而 $g(b) = c$, 因此, g 是满射的。

(2) 用反证法。设 $a_1, a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$, 但 $f(a_1) = f(a_2)$, 而 $g: B \rightarrow C$ 是函数, 所以 $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$, 这与 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是单射的矛盾, 故 f 是单射的。

(3) 因为 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是双射的, 所以 $g \circ f$ 既是满射的, 又是单射的, 因此, g 是满射的且 f 是单射的。

定理 5.5 设 $f: A \rightarrow B$ 是任意一个函数, I_A, I_B 分别为 A, B 上的恒等函数, 求证 $I_B \circ f = f \circ I_A = f$ 。

证明: 因为 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 所以对任意 $a \in A$, 存在 $b \in B$, 使 $f(a) = b$, 而 $(I_B \circ f) = I_B(f(a)) = I_B(b) = b$, $(f \circ I_A)(a) = f(I_A(a)) = f(a) = b$, 可得 $I_B \circ f = f \circ I_A = f$ 。

5.3.2 逆函数

在第4章关系中定义了逆关系, 即把从集合 A 到 B 的二元关系 R 中的所有有序对的两个元素交换位置, 就能够得到 R 的逆关系 R^{-1} 。但是, 对于任意给定的一个函数 f , 它的逆 f^{-1} 不一定是函数, 只是一个二元关系。

例如, 从集合 $A = \{a, b, c\}$ 到集合 $B = \{1, 2, 3, 4\}$ 的函数 $f = \{\langle a, 3 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$, 则它的逆关系 $f^{-1} = \{\langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 1, c \rangle\}$ 。显然, f^{-1} 不是函数, 因为对于 $3 \in \text{dom} f^{-1}$, 有 a 和 b 两个值与之对应, 这不满足函数的单值性。

若从集合 A 到集合 B 的单射函数为 $g = \{\langle a, 3 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$, 则它的逆关系 $g^{-1} = \{\langle 3, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 1, c \rangle\}$ 满足函数的定义, g^{-1} 是函数。

如果取集合 $C = \text{rang} = \{1, 2, 3\}$, 函数 $g: A \rightarrow C$ 不仅是满射的, 也是单射的, 故它是双射的, 而且逆关系 $g^{-1}: C \rightarrow A$ 是一个函数。

为说明这一点, 令函数 $f: A \rightarrow B$, f^{-1} 表示 f 的逆关系, 有两个原因可以看出 f^{-1} 不一定是函数。

(1) 当 f 是单射的而不是满射的时(见图 5.2(a)), f^{-1} 是函数, 但 f^{-1} 的定义域 $\text{ran} f$ 不是 B , 而是 B 的真子集。

(2) 当 f 是满射的而不是单射的时(见图 5.2(b)), f^{-1} 不满足函数值的唯一性条件,

如函数 $f = \{ \langle a, 3 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}$, 对于自变量 $3 \in \text{dom} f^{-1}$ 来说, 同时有 $\langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle \in f^{-1}$, 不满足函数的定义, 所以 f^{-1} 不是函数。

不难看出, 对于给定的函数 $f: A \rightarrow B$, 只有当 f 是双射的时, f^{-1} 是从 B 到 A 的函数, 即 $f^{-1}: B \rightarrow A$, 且也是双射的, 如图 5.2(c) 所示。

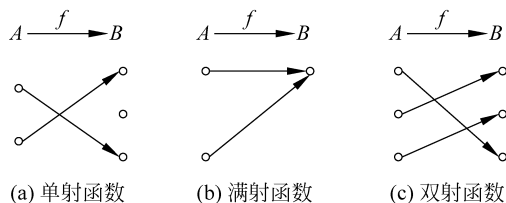


图 5.2 函数关系图

定理 5.6 设函数 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 求证 f 的逆关系 f^{-1} 是 B 到 A 的函数。

证明: 对于任意的 $y \in B$, 由于 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 即 $f: A \rightarrow B$ 是满射的, 则存在 $x \in A$, 使得 $\langle x, y \rangle \in f$, 由逆关系的定义可得 $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$; 另一方面, 若有 $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$ 且 $\langle y, x' \rangle \in f^{-1}$, 由逆关系的定义可得 $\langle x, y \rangle \in f$ 且 $\langle x', y \rangle \in f$, 而 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 即 $f: A \rightarrow B$ 是单射的, 所以 $x = x'$ 。

综合上述, 对于任意的 $y \in B$, 存在唯一的 $x \in A$, 使得 $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$ 。由函数的定义可知, f 的逆关系 f^{-1} 是 B 到 A 的函数。

定义 5.8 设函数 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则将 f 的逆关系称为逆函数, 记作 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 。如果函数存在反函数 f^{-1} , 则称 f 是可逆的。

例 5.9 函数 $f: Z \rightarrow Z; f = \{ \langle i, i^2 \rangle \mid i \in Z \}$ 是否存在逆函数?

解: f 的逆函数 $f^{-1} = \{ \langle i^2, i \rangle \mid i \in Z \}$, 显然, f^{-1} 不是从 Z 到 Z 的函数。这个例子说明, 不能把逆函数直接定义为逆关系。

定理 5.7 若 $f: A \rightarrow B$ 是双射, 则 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 也是双射。

证明: 若 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则由定理 5.6 和定义 5.8 可知 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是函数。要证明 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是双射的, 需先证 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是满射的。因为 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 所以, 对每一个 $a \in A$, 必有 $b \in B$ 使 $b = f(a)$, 从而有 $f^{-1}(b) = a$, 所以 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是满射的。

再证明 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是单射的。若 $f^{-1}(b_1) = a, f^{-1}(b_2) = a$, 则 $f(a) = b_1, f(a) = b_2$ 。因为 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 有 $b_1 = b_2$, 所以 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是单射的。

综上所述, 若 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 那么 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 也是双射的。

定理 5.8 若函数 $f: A \rightarrow B$ 存在逆函数 f^{-1} , 则 $f^{-1} \circ f = I_A, f \circ f^{-1} = I_B$ 。

证明: $f^{-1} \circ f$ 与 I_A 的定义域相同, 都是 A 。

因为 f 是双射的, 所以 f^{-1} 也是双射的。

若 $f: x \rightarrow f(x)$, 则 $f^{-1}(f(x)) = x$, 因此 $f^{-1} \circ f = I_A$ 。

同理可证 $f \circ f^{-1} = I_B$ 。

例 5.10 函数 $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ 是双射的, 求 $f^{-1} \circ f$ 和 $f \circ f^{-1}$ 。

由定理 5.8 可知, $f^{-1} \circ f = I_A = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$,

$$f \circ f^{-1} = I_B = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle \}.$$

定理 5.9 设函数 $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ 都是双射的, 则 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

证明: 由假设和复合定理可知, $f \circ g$ 是 A 到 C 的双射, 所以 $(f \circ g)^{-1}$ 是 C 到 A 的双射, 又因为 g^{-1} 是 C 到 B 的双射, f^{-1} 是 B 到 A 的双射, 所以 $g^{-1} \circ f^{-1}$ 是 C 到 A 的双射.

下面证明对于任何的 $c \in C, (f \circ g)^{-1}(c) = g^{-1} \circ f^{-1}(c)$. 事实上, 对于任意的 $c \in C, f^{-1}(c) = b, g^{-1}(b) = a$, 则有 $(g^{-1} \circ f^{-1})(c) = g^{-1}(f^{-1}(c)) = g^{-1}(b) = a$. 又因为 $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = c$, 所以 $(f \circ g)^{-1}(c) = a$.

综上所述, $(f \circ g)^{-1}(c) = g^{-1} \circ f^{-1}$.

例 5.11 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}, g(x) = x + 2$. 求 $g \circ f, f \circ g$, 如

果 f 和 g 存在逆函数, 求出它们的逆函数.

$$\text{解: } g \circ f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g \circ f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 3 \\ 0, & x < 3 \end{cases}$$

$$f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f \circ g(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x \geq 1 \\ -2, & x < 1 \end{cases}$$

因为 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 不是双射的, 所以不存在逆函数; 而 $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是双射的, 它的逆函数为 $g^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g^{-1}(x) = x - 2$.

5.4 例题解析

例 5.12 设 $\mathbf{Z}$ 是整数集, $\mathbf{Z}^+$ 是正整数集, 函数 $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}^+, f(x) = |x| + 2$. 求它的值域.

解: 因为 $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}^+, f(x) = |x| + 2$, 即 $x \in \mathbf{Z}, |x| \geq 0$, 则 $f(x) = |x| + 2 \geq 2$, 故函数的值域为 $\text{ran} f = \mathbf{N} - \{0, 1\}$.

例 5.13 设 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c\}$, 确定下列关系是否为从 X 到 Y 的函数; 如果是, 找出定义域和值域.

$$(1) \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, c \rangle \}.$$

$$(2) \{ \langle 1, c \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle \}.$$

解: (1) $\{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, c \rangle \}$ 是 X 到 Y 的函数, 其定义域为 $\text{dom} f = A = \{1, 2, 3\}$, 其值域为 $\text{ran} f = \{a, c\}$.

(2) $\{ \langle 1, c \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle \}$ 是 X 到 Y 的函数, 其定义域为 $\text{dom} f = A = \{1, 2, 3\}$, 其值域为 $\text{ran} f = B = \{a, b, c\}$.

例 5.14 给定函数 f 和集合 A, B , 对每一组 f 和 A, B , 求 A 在 f 下的像 $f(A)$ 和 B 在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B)$.

$$(1) f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}, f(x) = \langle x, x+1 \rangle, A = \{5\}, B = \{ \langle 2, 3 \rangle \}.$$

$$(2) f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}, f(x) = 2x+1, A = \{2, 3\}, B = \{1, 3\}.$$

$$(3) f: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \mathbf{S} = \{0, 1\}, f(x) = x/2 + 1/4, A = (0, 1), B = [1/4, 1/2].$$

解: (1) $f(A) = f(\{5\}) = \{\langle 5, 6 \rangle\}$, $f^{-1}(B) = f^{-1}(\{\langle 2, 3 \rangle\}) = \{2\}$ 。

(2) $f(A) = f(\{2, 3\}) = \{5, 7\}$, $f^{-1}(B) = f^{-1}(\{1, 3\}) = \{0, 1\}$ 。

(3) $f(A) = f(\langle 0, 1 \rangle) = (1/4, 3/4)$, $f^{-1}(B) = f^{-1}([1/4, 1/2]) = [0, 1/2]$ 。

例 5.15 举出满足下列要求的例子。

(1) 单射但非满射。

(2) 满射但非单射。

(3) 既非单射也非满射。

(4) 既是单射也是满射。

解: (1) $f: I \rightarrow I, f(x) = x^3$ 。

(2) $f: N \rightarrow \{0, 1\}, f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 是奇数} \\ 0, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$ 。

(3) $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 + 1$ 。

(4) $f: I \rightarrow I, f(x) = x + 1$ 。

例 5.16 (1) 设 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, f 是从 A 到 A 的函数: $f(x) = 4x \pmod{5}$ 。试将 f 写成序偶组成的集合, 判断 f 是单射的还是满射的?

(2) 设 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, f 是从 A 到 A 的函数: $f(x) = 4x \pmod{6}$ 。试将 f 写成序偶组成的集合, 判断 f 是单射的还是满射的?

解: (1) $f = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$, 由图 5.3(a) 可知, f 是双射的。

(2) $f = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$, 由图 5.3(b) 可知, f 既不是单射的也不是满射的。

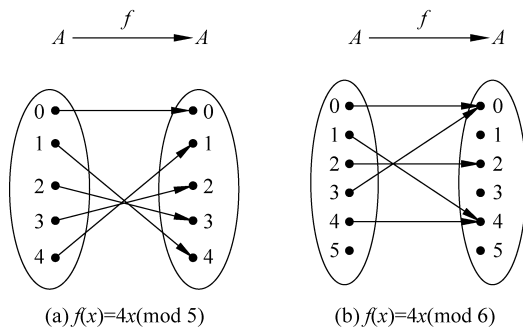


图 5.3 函数关系图

例 5.17 设 N 是自然数集, f 和 g 都是从 $N \times N$ 到 N 的函数, 且 $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy$ 。求证: f 和 g 是满射的, 不是单射的。

证明: 设任意 $n \in N$, 存在 $\langle n, 0 \rangle \in N \times N$, 则 $f(n, 1) = n \in N$, $g(n, 1) = n \in N$, 故 f, g 是满射。但 f, g 不是单射的, 如 $f(2, 2) = 4 = f(3, 1)$, $g(3, 4) = g(2, 6) = 12$ 。

例 5.18 设 $f: R \times R \rightarrow R \times R, f(\langle x, y \rangle) = \langle (x+y)/2, (x-y)/2 \rangle$, 求证 f 是双射的。

证明: 对于 $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \in R \times R$, 设 $f(\langle x, y \rangle) = f(\langle u, v \rangle)$, 可得 $\langle (x+y)/2,$

$(x-y)/2 \geq \langle (u+v)/2, (u-v)/2 \rangle$, 即 $(x+y)/2 = (u+v)/2, (x-y)/2 = (u-v)/2$, 解得 $x=u, y=v$, 故 $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$, 因此 f 是单射的;

对于任意 $\langle u, v \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, 令 $f(\langle x, y \rangle) = \langle u, v \rangle$, 可得 $\langle (x+y)/2, (x-y)/2 \rangle = \langle u, v \rangle$, 即 $(x+y)/2 = u, (x-y)/2 = v$, 只要取 $x = u+v, y = u-v$ 就可使该式成立, 因为 $\langle u, v \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, 所以 $\langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. 故 f 是满射的。

综上所述, f 是双射的。

例 5.19 设函数 $f: A \rightarrow B$ 是双射函数。求证: f 的逆关系 $\{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in f\}$ 是 B 到 A 的函数。

证明: 对于任意 $b \in B$, 因为 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 即 $f: A \rightarrow B$ 是满射的, 则存在 $a \in A$ 使 $\langle a, b \rangle \in f$, 由逆关系定义可得 $\langle b, a \rangle \in f^{-1}$; 若 $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$ 且 $\langle y, x_1 \rangle \in f^{-1}$, 由逆关系定义得可 $\langle x, y \rangle \in f$ 且 $\langle x_1, y \rangle \in f$. 又因为 $f: A \rightarrow B$ 是单射的, 故 $x = x_1$.

综上所述, 由函数定义可知, f^{-1} 是 B 到 A 的函数。

例 5.20 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \cos x$, 试问 f 有没有逆函数? 为什么? 如果没有, 将如何修改 f 的定义域或值域使 f 有逆函数。

解: 没有, 因为 f 不是双射函数。若将函数 f 的定义域和值域分别改为 $[0, \pi]$ 和 $[-1, 1]$, 则 f 有逆函数。

例 5.21 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, f \circ g: A \rightarrow C$ 是双射的。证明下列各命题。

(1) $f: A \rightarrow B$ 是单射的。

(2) $g: B \rightarrow C$ 是满射的。

证明: (1) 因为 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是双射的, 所以 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是单射的。假设 $a_1, a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$, 则 $f(a_1) = f(a_2)$ 。而 $g: B \rightarrow C$ 是函数, 则 $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$, 这与 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是单射的矛盾, 故 f 是单射的;

(2) 因为 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是双射的, 所以 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是满射的。对于任意 $c \in C$, 存在 $a \in A$, 使得 $g \circ f(a) = g(f(a)) = c$ 。又因为 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 故存在 $b = f(a) \in B$ 。因此, 存在 $b \in B$ 使得 $g(b) = c$, 故 g 是满射的。

例 5.22 设函数 $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$, 回答命题(1)~(6)。若命题为真, 则证明; 若命题为假, 则给出反例。

(1) 若 f 是单射的, 则 $f \circ g$ 是单射的。

(2) 若 f 是满射的, 则 $f \circ g$ 是满射的。

(3) 若 $f \circ g$ 是单射的, 则 f 是单射的。

(4) 若 $f \circ g$ 是单射的, 则 g 是单射的。

(5) 若 $f \circ g$ 是满射的, 则 f 是满射的。

(6) 若 $f \circ g$ 是双射的, 则 f 是满射的, g 是单射的。

解: (1) 假。例如, 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y\}, C = \{1, 2, 3\}$ 。尽管 $f = \{\langle x, 1 \rangle, \langle y, 2 \rangle\}$ 是单射的, 但若 $g = \{\langle a, x \rangle, \langle b, x \rangle, \langle c, y \rangle\}$, 则 $f \circ g = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle\}$ 不是单射的。

(2) 假。例如, 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y\}, C = \{1, 2\}$, 若设 $g = \{\langle a, x \rangle, \langle b, x \rangle,$

$\langle c, x \rangle\}$, 尽管 $f = \{\langle x, 1 \rangle, \langle y, 2 \rangle\}$ 是满射的, 但 $f \circ g = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$ 不是满射的。

(3) 假。例如, 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y, z, w\}, C = \{1, 2, 3\}$ 。若设 $g = \{\langle a, x \rangle, \langle b, y \rangle, \langle c, z \rangle\}, f = \{\langle x, 1 \rangle, \langle y, 2 \rangle, \langle z, 3 \rangle, \langle w, 2 \rangle\}$, 虽然 $f \circ g = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\}$ 是单射的, 但 f 不是单射的。

(4) 真。证明: 用反证法。设有 $a_1, a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$, 但 $g(a_1) = g(a_2)$, 而 $f: B \rightarrow C$ 是函数, 所以 $f \circ g(a_1) = f \circ g(a_2)$, 这与 $f \circ g: A \rightarrow C$ 是单射的矛盾。故 g 是单射的。

(5) 真。证明: 因为 $f \circ g$ 是满射的, 所以, 对于任意的 $c \in C$, 存在 $a \in A$, 使得 $f \circ g(a) = c$, 即 $f(g(a)) = c$ 。又因为 $g: A \rightarrow B$ 是函数, 所以有 $b = g(a) \in B$, 使得 $f(b) = c$ 。因此 f 是满射的。

(6) 真。证明: 因为 $f \circ g$ 是双射的, 所以 $f \circ g$ 既是满射的, 又是单射的, 由(4)、(5)可知 f 是满射的, g 是单射的。

例 5.23 (1) 设 f 是从 A 到 B 的一个函数, 定义 A 上的关系 $R: aRb$ 当且仅当 $f(a) = f(b)$ 。证明 R 是 A 上的等价关系。

(2) 设 f 是 A 中特征函数。定义 A 上关系 $R: aRb$ 当且仅当 $f(a) = f(b)$ 。由(1)知 R 是一个等价关系。试问等价类是什么?

(1) 证明: 因为 f 是从 A 到 B 的函数, 所以 $f(a) = f(a)$, 因此 aRa , 即 R 是自反的; 对于任意的 $a, b \in A$, 若 aRb , 则 $f(a) = f(b)$, 所以 $f(b) = f(a)$, 因此 bRa , 即 R 是对称的; 对于任意的 $a, b, c \in A$, 若 aRb, bRc , 则 $f(a) = f(b), f(b) = f(c)$, 所以 $f(a) = f(c)$, 即 aRc , 因此 R 是传递的。

(2) 解: 等价类是 $\{A, \bar{A}\}$ 。

例 5.24 求证: 从 $A \times B \rightarrow B \times A$ 存在单射函数, 并且此函数为满射函数。

证明: 设 $f: A \times B \rightarrow B \times A, f(a, b) = \langle b, a \rangle$, 对任意 $\langle a, b \rangle \in A \times B$ 均成立。对任意 $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$, 由函数 $f: A \times B \rightarrow B \times A$ 可得 $f(a_1, b_1) = \langle b_1, a_1 \rangle, f(a_2, b_2) = \langle b_2, a_2 \rangle$ 。若 $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$, 则 $\langle b_1, a_1 \rangle = \langle b_2, a_2 \rangle$, 因此 $b_1 = b_2, a_1 = a_2$, 所以 $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle$, 故 f 是单射的。

若对于任意 $\langle b, a \rangle \in B \times A$ (这里 $b \in B, a \in A$), 根据定义可知 $\langle b, a \rangle$ 的原象是 $\langle a, b \rangle \in A \times B$, 满足满射函数的定义, 故 f 是满射函数。

例 5.25 求证: 若 $f: A \rightarrow B$ 是单射的, 则对集合 A 的所有子集 X 和 $Y, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ 。

证明: 对于任意的 $y \in f(X \cap Y)$, 存在 $x \in X \cap Y$, 使得 $y = f(x)$, 这是因为 $x \in X \cap Y$, 则 $x \in X$ 且 $x \in Y$, 因此, $f(x) \in f(X), f(x) \in f(Y)$, 所以 $f(x) \in f(X) \cap f(Y)$, 即 $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ 。

任取 $u \in f(X) \cap f(Y)$, 则 $u \in f(X), u \in f(Y)$, 因此, 存在 $x \in X$ 且 $y \in Y$, 使得 $u = f(x), u = f(y)$, 即 $f(x) = f(y)$ 。又因为 $f: A \rightarrow B$ 是单射的, 所以 $x = y$, 故 $x \in X \cap Y$ 。因此, $f(x) \in f(X \cap Y)$, 即 $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$ 。

综上所述, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ 。

本章小结

1. 重点与难点

本章重点：

- (1) 从集合 A 到集合 B 的函数、求由 A 到 B 的函数个数；
- (2) 判断和证明函数性质(单射、满射、双射)；
- (3) 常函数、恒等函数及商集的概念；
- (4) 复合函数与逆函数的概念及性质。

本章难点：

- (1) 从集合 A 到集合 B 的函数或映射的判定和证明；
- (2) 从集合 A 到集合 B 的函数性质(单射、满射、双射)的判定和证明；
- (3) 求一个集合到其商集的典型(自然)映射；
- (4) 复合函数与逆函数的概念,复合运算与逆运算的性质。

2. 思维导图



习 题

1. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z, w\}$, 判断命题(1)~(5)的每个关系是不是从 A 到 B 的一个函数。如果是函数,找出其定义域和值域,并确定它是不是单射的或满射的。如果它既是单射又是满射的,那么给出用有序对的集合描述的逆函数,并给出该逆函数的定义域和值域。

(1) $\{ \langle 1, x \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, z \rangle, \langle 4, y \rangle \}$ 。

(2) $\{ \langle 1, z \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, y \rangle, \langle 4, z \rangle, \langle 2, w \rangle \}$ 。

$$(3) \{ \langle 1, z \rangle, \langle 2, w \rangle, \langle 3, x \rangle, \langle 4, y \rangle \}.$$

$$(4) \{ \langle 1, w \rangle, \langle 2, w \rangle, \langle 4, x \rangle \}.$$

$$(5) \{ \langle 1, y \rangle, \langle 2, y \rangle, \langle 3, y \rangle, \langle 4, y \rangle \}.$$

2. 设 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, 确定下列关系是否为从 X 到 Y 的函数。如果是, 找出其定义域和值域。

$$(1) \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, c \rangle \}.$$

$$(2) \{ \langle 1, c \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle \}.$$

$$(3) \{ \langle 1, c \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 3, a \rangle \}.$$

$$(4) \{ \langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle \}.$$

3. 设 $A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b\}$, 求 B^A 。

4. 设 $\mathbf{N}$ 是自然数, 确定下列函数中哪些是双射的? 哪些是满射的? 哪些是单射的?

$$(1) f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(n) = n + 1.$$

$$(2) f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

$$(3) f: \mathbf{N} \rightarrow \{0, 1\}, f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

$$(4) f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 + 1.$$

5. 考虑下述从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数: $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = x + 7$, $h(x) = x/3$, $k(x) = x - 4$ 。试构造 $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ h$, $g \circ h$ 。

6. 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 2$, $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x + 4$, $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = x^3 - 1$, 试求:

$$(1) g \circ f, f \circ g.$$

(2) $g \circ f$ 和 $f \circ g$ 是否为单射的、满射的和双射的?

(3) f, g, h 中哪些函数有逆函数? 如果有, 求出这些逆函数。