第 5 章 CHAPTER 5

z 变换及其反变换

问渠哪得清如许？为有源头活水来。

——南宋 · 朱熹

与拉普拉斯变换在连续时间信号分析中的地位和作用类似，z 变换在离散时间信号和系统分析中也处于核心地位。拉普拉斯变换是连续时间傅里叶变换（CTFT）在复频域的拓展，而 z 变换是离散时间傅里叶变换（DTFT）在复频域的拓展，它们显著地扩大了分析对象及频域的覆盖范围。z 变换可以将卷积运算转换为乘法运算，将差分方程转换为代数方程，为离散时间的信号分析和系统设计提供了快捷的工具。本章将重点讨论 DTFT 和 z 变换的内在联系、序列的 z 变换及有理系统函数、典型序列的 z 变换及收敛域、z 反变换的计算方法、z 变换的主要性质等内容。

5.1 z 变换及其收敛性

5.1.1 DTFT 和 z 变换

当序列 $x[n]$ 满足绝对值可求和的条件时，其离散时间傅里叶变换（DTFT）定义为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{5-1}$$

因此，序列 $x[n]r^{-n}$ $(r > 0)$ 的傅里叶变换可以表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]r^{-n}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)^{-n} \tag{5-2}$$

令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 并代入式 (5-2)，可以得到 $x[n]$ 的 z 变换定义式

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\} \tag{5-3}$$

通常式 (5-3) 是复变量 z 的无穷幂级数或无限项求和，它将离散的信号 $x[n]$ 转换为连续的函数 $X(z)$。$x[n]$ 和 $X(z)$ 之间的可逆变换关系记作

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \tag{5-4}$$

根据式 (5-2) 和式 (5-3)，可以将序列 $x[n]$ 的 z 变换看作 $x[n]$ 与 r^{-n} 的乘积 $x[n]r^{-n}$ 的离散时间傅里叶变换。虽然某个序列 $x[n]$ 可能不满足绝对值可求和条件（如单位阶跃序列 $u[n]$），即不存在离散时间傅里叶变换，但是由于引入了衰减序列 r^{-n} $(r > 0)$，可以使 $x[n]$ 存在 z 变换，即 z 变换扩大了可变换序列的覆盖范围。

与此同时，如果令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$（$r = 1$），则根据式 (5-1) 和式 (5-2)，$x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 退化成它的离散时间傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，即

$$X(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} = \left.\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{5-5}$$

由于 $X(z)$ 是复变量 z 的函数，因此在 z 的复平面（简称 z 平面）上描述 $X(z)$ 更加方便。z 平面的实轴和虚轴分别对应着 z 的实部 $\mathrm{Re}(z)$ 和虚部 $\mathrm{Im}(z)$。特别地，$z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 在 z 平面上的轮廓是以单位值 1 为半径的圆形（即单位圆 $|z| = 1$），如图 5-1 所示。如果将 ω 表示为向量 $\boldsymbol{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 与实轴之间的角度（$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 的辐角），则单位圆表示当 $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$（或 $-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$）时 z 平面上所有点 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 的集合。根据式 (5-5) 和图 5-1 可知，$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 反映 $X(z)$ 在单位圆上的情况，即傅里叶变换对应于单位圆上的 z 变换。

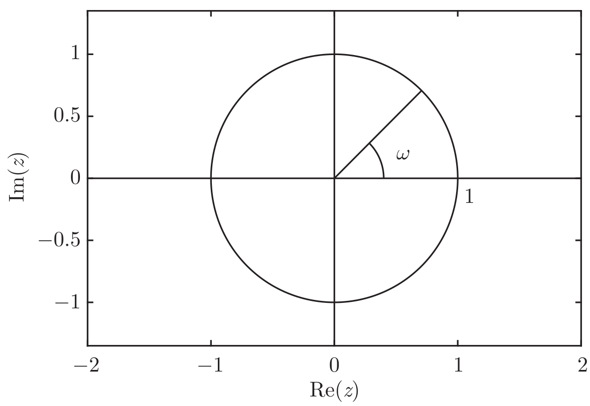


图 5-1 复数的 z 平面和单位圆

在 z 平面上计算傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 时，如果沿着单位圆从 $z = 1$（$\omega = 0$）到 $z = \mathrm{j}$（$\omega = \pi/2$）再到 $z = -1$（$\omega = \pi$），则可以得到当 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 时的傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$；如果继续沿着单位圆前进，从 $z = -1$（$\omega = \pi$）到 $z = -\mathrm{j}$（$\omega = 3\pi/2$）再到 $z = 1$（$\omega = 2\pi$），则可以得到当 $\pi \leqslant \omega \leqslant 2\pi$ 时的傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。因此在单位圆上 ω 连续地变化 2π 弧度，对应着 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 遍历单位圆一周并返回到初始位置，即 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 具有以 2π 弧度为周期的固有特性。

5.1.2 z 变换的收敛性

根据第 3 章可知，由幂级数表示的离散时间傅里叶变换，不是对所有的序列 $x[n]$ 都收敛，即无限项的求和结果可能不是有限值，也就是不满足条件 $|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| < \infty$。同理，序列

的 z 变换定义复变量 z 的幂级数形式为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n} \tag{5-6}$$

也不是对所有的序列 $x[n]$ 或所有的 z 值都收敛，即不满足条件 $|X(z)|<\infty$。使式 (5-6) 收敛的所有 z 值的集合，称为 z 变换的收敛域（Region of Convergence，ROC）。

根据式 (5-6) 可知，如果序列 $x[n]$ 存在着 z 变换，则必须满足条件

$$|X(z)|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}\right|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]||z|^{-n}<\infty \tag{5-7}$$

式 (5-7) 表明，$|z|$ 的取值范围确定了 $X(z)$ 的收敛特性。

将 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$（$|z|=r>0$）代入式 (5-7)，可以得到

$$\left|X(r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\right|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]r^{-n}|<\infty \tag{5-8}$$

由于 $x[n]$ 与 r^{-n} 进行了乘法运算，对傅里叶变换（$r=1$）无法收敛的序列，对 z 变换可能是收敛的序列。虽然单位阶跃序列 $x[n]=u[n]$ 不是绝对可求和的，即傅里叶变换不存在，但是当 $r>1$ 时，$u[n]r^{-n}$ 是绝对可求和的，即 $u[n]$ 的 z 变换存在，它的收敛域是 $|z|=r>1$。

如果某个复数值 $z=z_0$ 位于收敛域内，则由 $|z|=|z_0|$ 确定的圆形上的所有 z 值都在收敛域内，因此 z 变换的收敛域（假定存在）是以原点为中心的环型区域，如图 5-2（a）所示。对于特定的序列 $x[n]$，圆环的外边界可能向外延伸至无穷远，如图 5-2（b）所示；或者圆环的内边界可能向内压缩至原点，如图 5-2（c）所示。特别地，如果 z 变换的收敛域包含了单位圆，如图 5-2（d）所示，则意味着当 $|z|=1$ 时 z 变换收敛，即傅里叶变换存在；反之，如果收敛域内不包含单位圆，则傅里叶变换不存在。根据 z 变换的收敛域是否包含单位圆可以判定傅里叶变换是否存在，这在离散时间系统分析中有着广泛的应用。

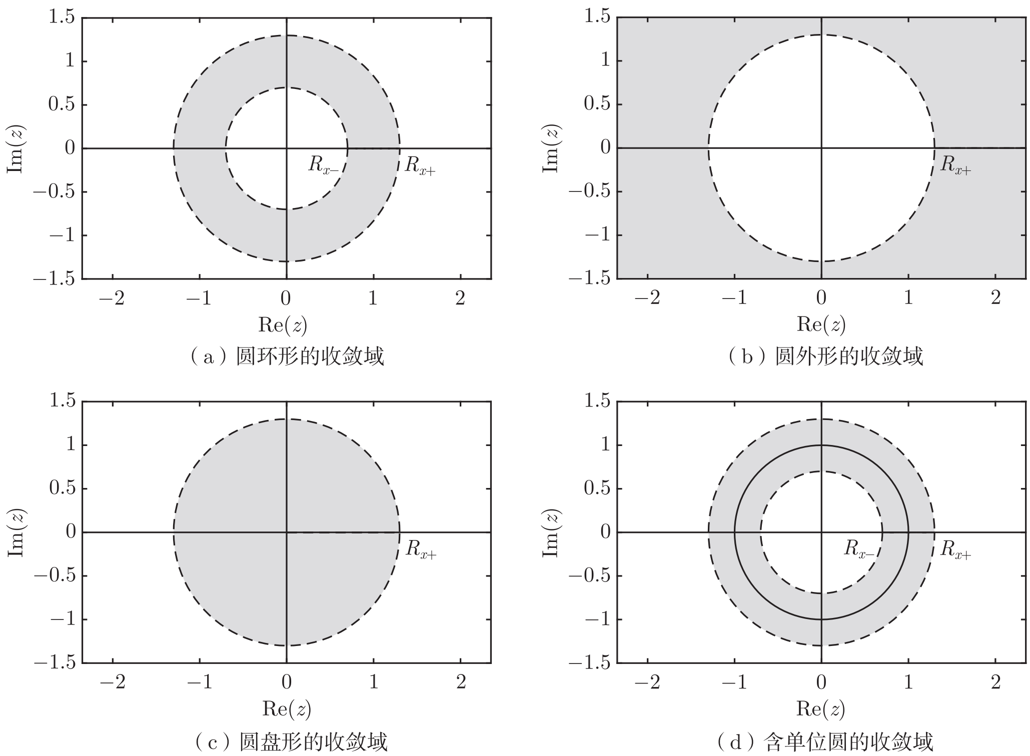
5.1.3 有理函数及零极点图

如果式 (5-6) 所示的无限项求和结果可以表示为封闭的数学形式（简单的数学表达式），则 $X(z)$ 在收敛域内是有理函数，即

$$X(z)=\frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{N}a_kz^{-k}} \tag{5-9}$$

其中：分子 $P(z^{-1})$ 是关于 z^{-1} 的 M 阶多项式，$\{b_k|k=0,1,\cdots,M\}$ 是分子多项式的系数；分母 $Q(z^{-1})$ 是关于 z^{-1} 的 N 阶多项式①，$\{a_k|k=0,1,\cdots,N\}$ 是分母多项式的系数。

① 用 z^{-1} 代替 z 作为自变量，可以使分析过程更加简便。



（a）圆环形的收敛域　（b）圆外形的收敛域

（c）圆盘形的收敛域　（d）含单位圆的收敛域

图 5-2　z 变换的收敛域

通常，称使 $X(z)=0$ 的 z 值为零点，即分子多项式 $P(z^{-1})$ 的根；称使 $X(z)=\infty$ 的 z 值为极点，即分母多项式 $Q(z^{-1})$ 的根。因此，在数学上用零极点形式等价地描述式 (5-9) 为

$$X(z)=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}(1-c_kz^{-1})}{\prod\limits_{k=1}^{N}(1-d_kz^{-1})} \tag{5-10}$$

其中：b_0 和 a_0 是非零的常数，c_k 是零点 $(k=1,2,\cdots,M)$，d_k 是极点 $(k=1,2,\cdots,N)$。如果 $X(z)$ 存在着共轭的极点（或零点），则它们一定成对地出现。特别地，极点 d_k $(k=1,2,\cdots,N)$ 对 $X(z)$ 的收敛域有着直接的影响。

根据式 (5-10) 中分子多项式的第 k 项（$k=1,2,\cdots,M$）可以得到

$$1-c_kz^{-1}=\frac{z-c_k}{z}$$

它为 $X(z)$ 同时贡献了一个零点 $z_k=c_k$ 和一个极点 $p_k=0$。同理，根据式 (5-10) 中分母多项式的第 k 项（$k=1,2,\cdots,N$）可以得到

$$1-d_kz^{-1}=\frac{z-d_k}{z}$$

它为 $X(z)$ 同时贡献了一个零点 $z_k=0$ 和一个极点 $p_k=d_k$。由此可知，式 (5-10) 中分子（或分母）的每一项都贡献一个零点和一个极点，且所有的零点和极点都在有限的 z 平面上，因此 $X(z)$ 的零点数目和极点数目总是相等的。

在计算软件 MATLAB 的数字信号处理工具箱中，为绘制 $X(z)$ 的零极点图形（简称零极点图）提供了 zplane() 函数，它有两种使用方法：①输入是系数向量形式 zplane($\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}$)，其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 分别是式 (5-9) 中分子多项式系数和分母多项式系数按照 z 的降幂形式构成的向量。②输入是零点-极点形式 zplane($\boldsymbol{Z},\boldsymbol{P}$)，其中 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 分别是式 (5-10) 中所有零点和所有极点构成的向量。当使用 zplane() 绘制零极点图时，“○”表示零点，“×”表示极点，单位圆作为参考圆。特别地，如果某个零点或极点的阶数是二阶及以上时，则在“○”或“×”的旁边用数字标识出它们的阶数。

例 5.1　绘制有理函数的零极点图： 确定有理函数

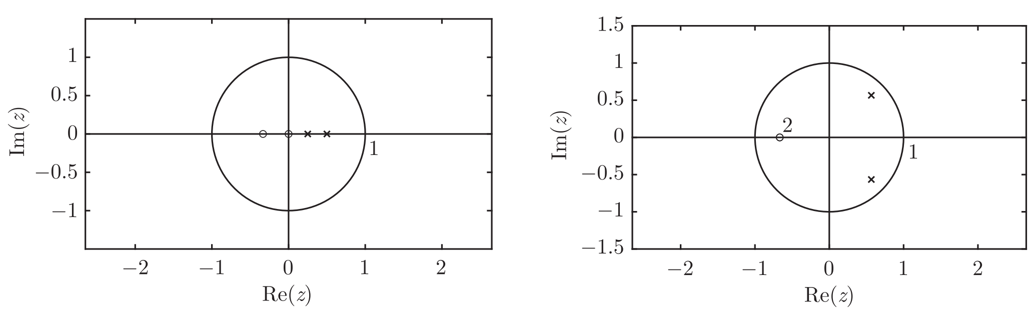
$$X_1(z)=\frac{1+\dfrac{1}{3}z^{-1}}{1-\dfrac{3}{4}z^{-1}+\dfrac{1}{8}z^{-2}}\quad \text{和}\quad X_2(z)=\frac{\left(1+\dfrac{2}{3}z^{-1}\right)^2}{1-\dfrac{4\sqrt{2}}{5}z^{-1}+\dfrac{16}{25}z^{-2}}$$

的极点和零点，并用 MATLAB 软件中的函数 zplane() 绘制 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 的零极点图。

解　将 $X_1(z)$ 的分子和分母分别乘上 z^2，可以得到

$$X_1(z)=\frac{1+\dfrac{1}{3}z^{-1}}{1-\dfrac{1}{4}z^{-1}+\dfrac{1}{8}z^{-2}}\cdot\frac{z^2}{z^2}=\frac{z^2+\dfrac{1}{3}z}{z^2-\dfrac{3}{4}z+\dfrac{1}{8}}=\frac{z\left(z+\dfrac{1}{3}\right)}{\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\left(z-\dfrac{1}{4}\right)}$$

因此，$X_1(z)$ 的零点 $z_1=0$ 和 $z_2=-\dfrac{1}{3}$，且都是一阶零点；$X_1(z)$ 的极点 $p_1=\dfrac{1}{2}$ 和 $p_2=\dfrac{1}{4}$，且都是一阶极点。将系数向量 $\boldsymbol{B}=\left[1,\ \dfrac{1}{3}\right]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}=\left[1,-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{8}\right]^{\mathrm{T}}$ 代入 MATLAB 函数 zplane()，可以得到 $X_1(z)$ 的零极点图，如图 5-3（a）所示。



（a）$X_1(z)$的一阶零点和一阶极点　　（b）$X_2(z)$的共轭极点和二阶零点

图 5-3　$X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 的零极点图

将 $X_2(z)$ 表示为式 (5-9) 和式 (5-10) 所示的规范形式，可以得到

$$X_2(z)=\frac{1+\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{4}{9}z^{-2}}{1-\frac{4\sqrt{2}}{5}z^{-1}+\frac{16}{25}z^{-2}}=\frac{\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)}{\left[1-\frac{4}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1}\right]\left[1-\frac{4}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1}\right]}$$

因此，$X_2(z)$ 的二阶零点 $z_{1,2}=-\frac{2}{3}$，$X_2(z)$ 的一阶共轭极点 $p_{1,2}=\frac{4}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。将系数向量 $\boldsymbol{B}=\left[1,\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{9}\right]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}=\left[1,\ \ -\frac{4\sqrt{2}}{5},\ \frac{16}{25}\right]^{\mathrm{T}}$ 代入 MATLAB 函数 zplane()，可以得到 $X_2(z)$ 的零极点图，如图 5-3（b）所示。

5.2 典型序列的 z 变换

计算 z 变换的直接方法是利用 z 变换的定义式

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n} \tag{5-11}$$

只有式 (5-11) 所示的幂级数收敛时，$X(z)$ 才有实际意义。$x[n]$ 的特性不同导致 $X(z)$ 的收敛域不同，下面讨论有限长序列、右边序列、左边序列和双边序列的 z 变换及其收敛域。

5.2.1 有限长序列

有限长序列是当 $N_1\leqslant n\leqslant N_2$ 时 $x[n]$ 有实际值的序列，它的 z 变换可以表示成有限项之和的形式

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]z^{-n} \tag{5-12}$$

由于当 $N_1\leqslant n\leqslant N_2$ 时 $x[n]$ 有界，且当 $0<|z|<\infty$ 时 $|z^{-n}|<\infty$，即求和公式一定收敛，且收敛域是除了 $z=0$ 和 $z=\infty$ 之外的开区域 $(0,\infty)$，又称作“有限 z 平面”，因此有限长序列 $x[n]$ 的 z 变换及其收敛域为

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]z^{-n},\quad 0<|z|<\infty \tag{5-13}$$

当 N_1 和 N_2 取特殊值时，可能扩大式 (5-13) 的收敛域，使收敛域包含 $z=0$ 或 $z=\infty$：①当 $N_1\geqslant 0$ 时，式 (5-13) 仅包含 z 的负幂次项，收敛域是 $0<|z|\leqslant\infty$；②当 $N_2<0$ 时，式 (5-13) 仅包含 z 的正幂次项，收敛域是 $0\leqslant|z|<\infty$。

例 5.2　计算单位脉冲序列 $\delta[n]$ 的 z 变换。

解　可以将单位脉冲序列 $\delta[n]$ 看作当 $N_1 = N_2 = 0$ 时的特殊有限长序列

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

它的 z 变换可以表示为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1, \quad 0 \leqslant |z| \leqslant \infty$$

即 $X(z)$ 的收敛域是整个 z 平面（闭合平面）。

例 5.3　计算矩形序列 $R_N[n]$ 的 z 变换。

解　可以将矩形序列 $R_N[n]$ 看作是 $N_1 = 0$ 且 $N_2 = N - 1$ 时的特殊序列

$$R_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

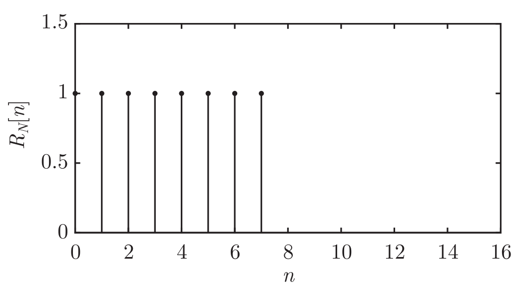
它的 z 变换可以表示为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$$

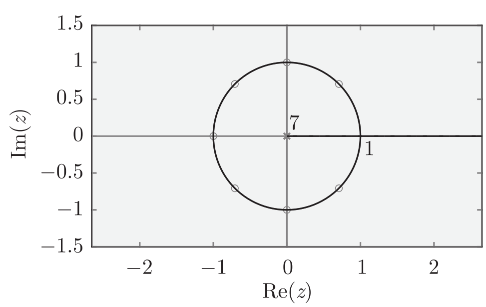
利用等比数列的求和公式（公比是 z^{-1}），可以得到

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \cdot \frac{z^N - 1}{z - 1}, \quad |z| > 0$$

即 $X(z)$ 的收敛域是不包含 $z = 0$ 的整个 z 平面（$0 < |z| \leqslant \infty$）。$X(z)$ 的 N 个零点均匀地分布在单位圆上，$N - 1$ 个极点在 $z = 0$ 位置形成 $N - 1$ 阶极点，特别地，在 $z = 1$ 位置一阶零点与一阶极点相互抵消。当 $N = 8$ 时，$R_N[n]$ 及其收敛域如图 5-4 所示。



（a）矩形序列 $R_N[n]$



（b）收敛域

图 5-4　矩形序列及其收敛域（$N = 8$）

5.2.2　右边序列

右边序列是当 $n \geqslant N_1$ 时 $x[n]$ 有实际值，且当 $n < N_1$ 时 $x[n]=0$ 的序列（N_1 是整数），它的 z 变换可以表示为

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=N_1}^{-1} x[n]z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{5-14}$$

其中：第一项是有限长序列的 z 变换，它的收敛域是包括 $z=0$ 的有限 z 平面，即 $0 \leqslant |z|<\infty$；第二项是 z 的负幂级数，根据级数收敛的阿贝尔 (N.Abel) 定理可知，它收敛域是以原点为中心、以 R_{x-} 为半径的圆周外部，即 $R_{x-}<|z| \leqslant \infty$。取上述收敛域的重合部分（交集），可以得到 $X(z)$ 的收敛域 $R_{x-}<|z|<\infty$，因此右边序列 $x[n]$ 的 z 变换及其收敛域为

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad R_{x-}<|z|<\infty \tag{5-15}$$

其中：R_{x-} 是收敛域的最小半径。

特别地，当 $N_1=0$ 时，右边序列退化为因果序列，即当 $n \geqslant 0$ 时 $x[n]$ 有实际值且当 $n<0$ 时 $x[n]=0$ 的右边序列。由于因果序列的 z 变换只包含 z 的零次幂项和负次幂项，即式 (5-14) 的第二项，因此它的收敛域是以 R_{x-} 为半径的圆周外部，即 $R_{x-}<|z| \leqslant \infty$。因果序列 $x[n]$ 的 z 变换及其收敛域可以表示为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad R_{x-}<|z| \leqslant \infty \tag{5-16}$$

当 $N_1>0$ 时，右边序列是当 $n \geqslant N_1$ 时 $x[n]$ 有值且当 $n<N_1$ 时 $x[n]=0$ 的序列，此时它的 z 变换及其收敛域可以表示为

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad R_{x-}<|z| \leqslant \infty$$

它的收敛域形式与因果序列相同。

例 5.4　计算右边序列 $x[n]=a^n u[n]$ 的 z 变换。

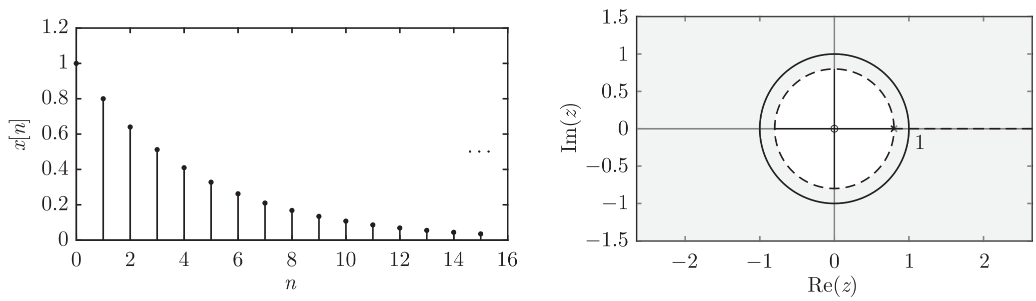
解　将因果序列 $x[n]=a^n u[n]$ 代入 z 变换的定义式，可以得到

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a^n u[n])z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^{-n}$$

如果 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$，则可以得到

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}, \quad |z|>|a| \tag{5-17}$$

因此，$X(z)$ 的收敛域是以原点为中心、以 $|a|$ 为半径的圆周外部。当 $a=0.8$ 时，$x[n]$ 及其收敛域分别如图 5-5 所示。



（a）因果序列　（b）收敛域

图 5-5　因果序列及其收敛域

5.2.3　左边序列

左边序列是当 $n \leqslant N_2$ 时 $x[n]$ 有实际值，且当 $n > N_2$ 时 $x[n]=0$ 的序列（N_2 是整数），它的 z 变换可以表示为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n}+\sum_{n=0}^{N_2} x[n]z^{-n} \tag{5-18}$$

其中：第一项是 z 的正幂级数，根据级数收敛的阿贝尔 (N.Abel) 定理可知，它的收敛域是以原点为中心，以 R_{x+} 为半径的圆周内部，即 $0 \leqslant |z| < R_{x+}$；第二项是有限长序列的 z 变换，它的收敛域是不包含 $z=0$ 的 z 平面，即 $0<|z| \leqslant \infty$。取上述收敛域的重合部分（交集），可以得到 $X(z)$ 的收敛域 $0<|z|<R_{x+}$，因此左边序列 $x[n]$ 的 z 变换及其收敛域为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n}, \quad 0<|z|<R_{x+} \tag{5-19}$$

其中：R_{x+} 是收敛域的最大半径。

特别地，当 $N_2=-1$ 时，左边序列转化成反因果序列，即当 $n \leqslant -1$ 时 $x[n]$ 有值，且当 $n \geqslant 0$ 时 $x[n]=0$ 的左边序列。由于反因果序列的 z 变换只包含 z 的正次幂项，即式 (5-18) 的第一项，因此它的收敛域是以 R_{x+} 为半径的圆周内部，即 $0 \leqslant |z| < R_{x+}$。因此，反因果序列 $x[n]$ 的 z 变换及其收敛域可以表示为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n}, \quad 0 \leqslant |z| < R_{x+} \tag{5-20}$$

当 $N_2<-1$ 时，左边序列是当 $n \leqslant N_2$ 时 $x[n]$ 有值，且当 $n>N_2$ 时 $x[n]=0$ 的序列，此时它的 z 变换及其收敛域可以表示为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{N_2}x[n]z^{-n},\quad 0\leqslant|z|<R_{x+}$$

它的收敛域形式与反因果序列相同。

例 5.5　计算左边序列 $x[n]=-a^n u[-n-1]$ 的 z 变换。

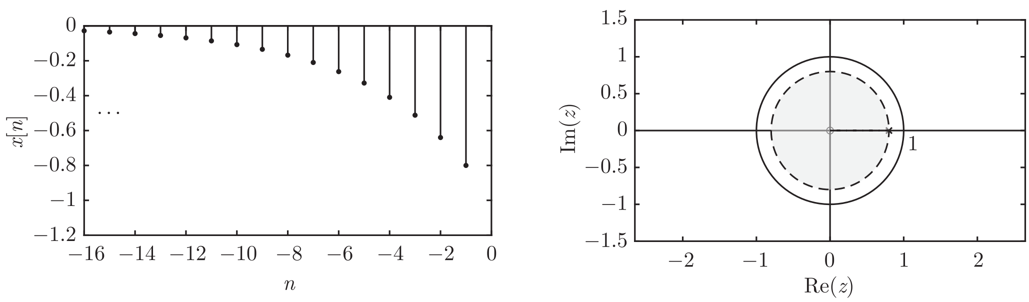
解　将非因果序列 $x[n]=-a^n u[-n-1]$ 代入 z 变换的定义式，可以得到

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-a^n u[-n-1])z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^n z^{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty}a^{-n}z^n$$

如果 $|a^{-1}z|<1$，即 $|z|<|a|$，则利用等比序列求和公式可以得到

$$X(z)=-\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},\quad |z|<|a| \tag{5-21}$$

$X(z)$ 的收敛域是以原点为中心、以 $|a|$ 为半径的圆周内部（$|z|<|a|$）。当 $a=0.8$ 时，$x[n]$ 及其收敛域分别如图 5-6 所示。注意：虽然式 (5-17) 和式 (5-21) 的数学形式相同，但是由于它们的收敛域不同，因此对应着不同的原始序列。



（a）非因果序列　　（b）收敛域

图 5-6　非因果序列及其收敛域（$a=0.8$）

5.2.4　双边序列

双边序列是当 n 取任意值（正整数、负整数和零）时 $x[n]$ 都有实际值的序列，它的 z 变换可以表示为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x[n]z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n} \tag{5-22}$$

其中：第一项是 z 的正幂级数，它的收敛域是以原点为中心、以 R_{x+} 为半径的圆周内部，即 $0\leqslant|z|<R_{x+}$；第二项是 z 的负幂级数和零幂次项，它的收敛域是以原点为中心、以 R_{x-} 为半径的圆周外部，即 $R_{x-}<|z|\leqslant\infty$。如果 $R_{x-}>R_{x+}$，则上述收敛域不存在重合部分（公共收敛域），即 $X(z)$ 不收敛；如果 $R_{x-}<R_{x+}$，则上述收敛域存在公共收敛区域，即：满足 $R_{x-}<|z|<R_{x+}$ 的圆环区域。