

所谓正弦交流电路,是指含有正弦电源(激励)而且电路各部分产生的电压和电流(响应)均按正弦规律变化的电路。在生产和生活上所用的交流电,一般都是指正弦交流电,因此,正弦交流电路是电路理论很重要的一部分内容。本章重点讨论正弦交流电的基本概念、相量分析方法、简单正弦交流电路分析、谐振现象及三相交流电的基本知识。

3.1 交流电的基本概念

交流电是指大小和方向随时间做周期性往复变化的电压和电流。图 3-1 给出了几种周期性交流电的波形。

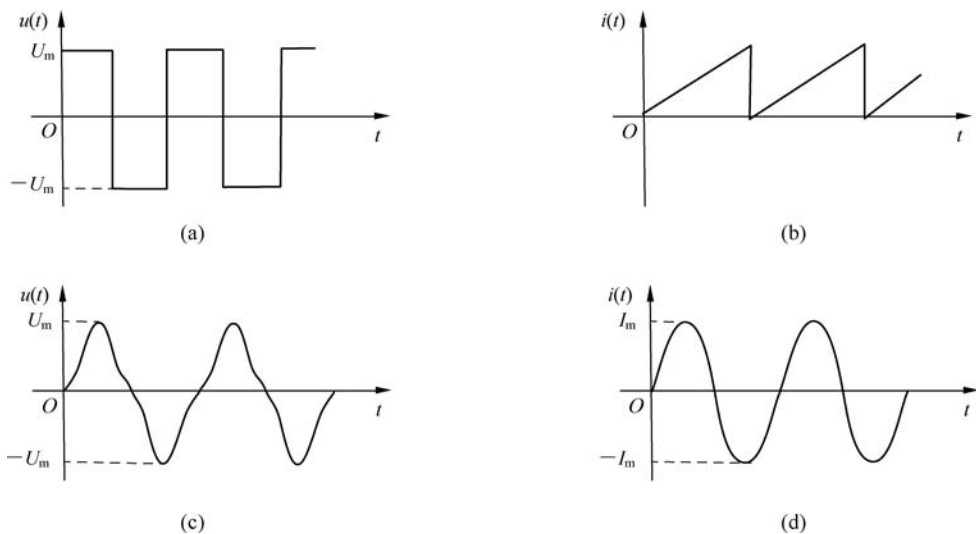


图 3-1 周期性交流电的一般波形

图 3-1(d)所示的交流电,其大小和方向随时间按正弦规律变化,称为正弦交流电,它是最常用的交流电。例如,发电厂提供的电能是正弦交流电的形式;在收音机里为了听到语音广播信号用到的“高频载波”是正弦波形;正弦信号发生器输出的信号电压,也是随时间按正弦规律变化的。

3.1.1 正弦交流电的三要素

图 3-2 示出了正弦量(以电流 i 为例)的一段变化曲线,该曲线可用下式表示

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3-1)$$

式中, i 表示交流电流的瞬时大小,称瞬时值; I_m 是瞬时值中最大的值,称幅值; ω 表示正弦电流的角频率; φ_0 表示正弦电流的初相位。幅值、角频率、初相位合称为正弦量的“三要素”,它们分别表示正弦交流电变化的幅度、快慢和初始状态。下面分别给予详细说明。

1. 幅值

幅值是瞬时值中的最大值,又称为最大值或峰值,通常用 I_m 或 U_m 表示,它们是与时间无关的常数。

2. 角频率

角频率是表示正弦量变化快慢的一个物理量,为了说明角频率的概念,先了解周期 T 和频率 f 的含义。

周期 T 是正弦量变化一周所需要的时间,周期 T 越大,波形变化越慢;反之,周期 T 越小,波形变化越快。周期 T 的单位是 s(秒)。

频率 f 表示每秒时间内正弦量重复变化的次数。 f 越大,正弦量变化越快,反之越慢。频率的单位是 Hz(赫兹),较高的频率用 kHz(千赫)和 MHz(兆赫)表示。 $1\text{kHz} = 10^3\text{Hz}$, $1\text{MHz} = 10^6\text{Hz}$ 。

周期 T 和频率 f 互为倒数,即

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{或} \quad f = \frac{1}{T} \quad (3-2)$$

中国发电厂提供的电能规定频率 $f = 50\text{Hz}$,即每变化一周需要的时间为

$$T = \frac{1}{50} = 0.02(\text{s})$$

正弦量变化一个周期,相当于正弦函数变化 2π 弧度,角频率 ω 表示正弦量每秒变化的弧度数,单位是 rad/s(弧度/秒),角频率与周期的关系为

$$\omega T = 2\pi$$

即

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (3-3)$$

中国电力系统提供的正弦交流电的频率 $f = 50\text{Hz}$,即角频率

$$\omega = 100\pi\text{rad/s} = 314\text{rad/s}$$

3. 初相位

式(3-1)中的 $\omega t + \varphi_0$ 称为正弦量的相位角,简称相位,相位角是时间的函数。当 $t = 0$ 时,正弦量的相位称为初相位,又称初相角。初相位 φ_0 的大小和正负,与选择的时间起点有关。

通常规定正弦量由负值变化到正值经过的零点为该正弦量的零点,离计时起点($t = 0$)最近的正弦量零点到计时起点之间对应的电角度即为初相位 φ_0 。 φ_0 的正负可以这样确

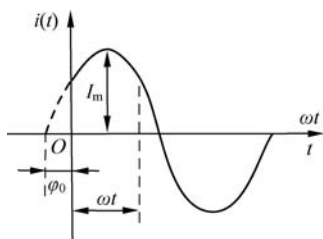


图 3-2 正弦波形

定:当正弦量的初始瞬时值为正时, φ_0 为正;初始瞬时值为负时, φ_0 为负。或从正弦零点所处的位置来看,如果离计时起点最近的正弦零点在纵轴的左侧时, φ_0 为正;若在右侧时, φ_0 为负。两种方法所得结果相同。图 3-3 给出了几种不同初相位的正弦电压波形。

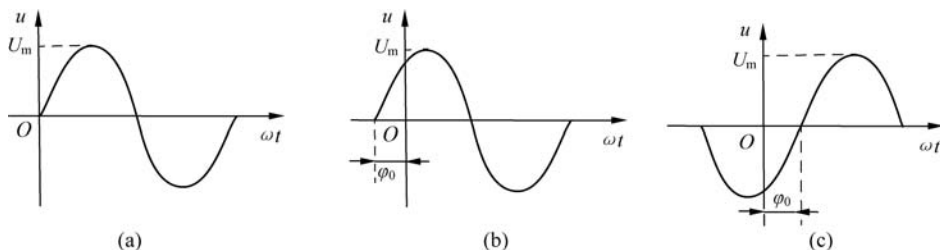


图 3-3 初相位

图 3-3(a)中, $\varphi_0=0$,这时正弦电压的表达式 $u=U_m \sin \omega t$ 。

图 3-3(b)中, $\varphi_0>0$,这时正弦电压的表达式 $u=U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ 。

图 3-3(c)中, $\varphi_0<0$,这时正弦电压的表达式 $u=U_m \sin(\omega t - \varphi_0)$ 。

由上述初相位的定义可知,其取值范围为 $-\pi < \varphi_0 < \pi$ 。

3.1.2 正弦交流电的相位差

两个同频率的正弦交流电在任何瞬时的相位之差或初相位之差称为相位差,用 φ 表示。

图 3-4 中, u 和 i 的波形可用下式表示

$$\begin{cases} u = U_m \sin(\omega t + \varphi_1) \\ i = I_m \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad (3-4)$$

u 和 i 的相位差为

$$\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (3-5)$$

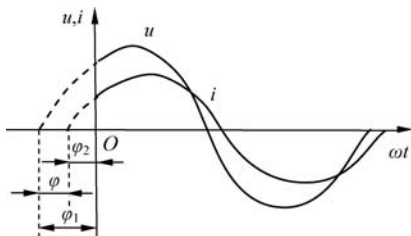


图 3-4 相位差

可见,相位差 φ 的大小与时间 t 、角频率 ω 无关,它仅取决于两个同频正弦量的初相位。

当两个同频正弦量的计时起点($t=0$)改变时,它们的相位和初相位随之改变,但两者的相位差始终不变。

由图 3-4 可见,因为 u 和 i 的初相位不同(不同相),所以它们的变化步调是不一致的,即不是同时到达正的幅值和零值。图中 $\varphi>0$ ($\varphi_1>\varphi_2$),所以 u 较 i 先到达正的幅值,称 u 比 i 超前 φ 角,或者 i 比 u

滞后 φ 角。图 3-5 示出了几种特殊的相位关系。

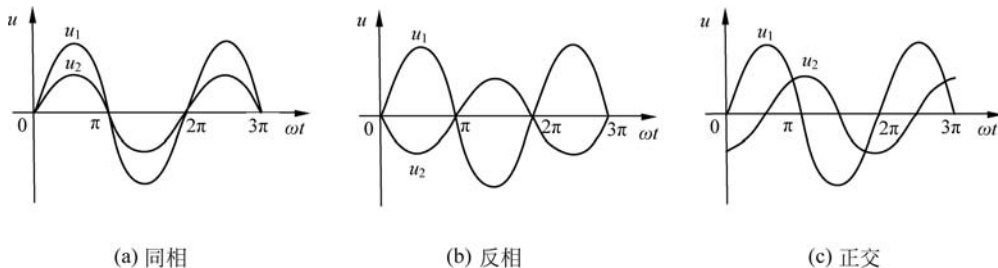


图 3-5 几个特殊的相位关系

图 3-5(a)中, $\varphi=0$, 称 u_1 和 u_2 同相; 图 3-5(b)中, $\varphi=\pi$, 称 u_1 和 u_2 反相; 图 3-5(c)中, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, 称 u_1 和 u_2 正交。

3.1.3 正弦交流电的有效值

无论从测量还是使用上, 用瞬时值或最大值表示交流电在电路中产生的效果(如热、机械、光等效应)既不确切也不方便。为了使交流电的大小能反映它在电路中做功的效果, 常用有效值表示交流电量的量值, 如常用的交流电压 220V、380V 等都是指有效值。

有效值是从电流的热效应来规定的, 因为在电路中电流常表现出其热效应。若某一周期电流 i 通过电阻 R (如电阻炉) 在一个周期内产生的热量, 和另一直流电流 I 通过同样大小的电阻在相等时间内产生的热量相等, 那么, i 的有效值在数值上就等于 I 。因此可得

$$\int_0^T Ri^2 dt = RI^2 T$$

由此得出交流电流的有效值

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3-6)$$

若 $i = I_m \sin \omega t$, 则

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m \quad (3-7)$$

同理

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707 U_m \quad (3-8)$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0.707 E_m \quad (3-9)$$

式(3-7)~式(3-9)表明, 正弦交流电的有效值等于它的最大值的 0.707 倍, 按照规定, 有效值都用大写字母表示。

所有交流用电设备铭牌上标注的额定电压、额定电流都是有效值, 一般交流电流表和电压表的刻度也是根据有效值来标定的。

【例 3-1】 在某电路中, $i = 100 \sin\left(6280t - \frac{\pi}{4}\right)$ mA。(1) 试指出它的频率、周期、角频率、幅值、有效值及初相位各为多少? (2) 画出该电流的波形图。

【解】 (1) 角频率。

$$\omega = 6280 \text{ rad/s}$$

频率

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6280}{2 \times 3.14} = 1000 (\text{Hz})$$

周期

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000} = 0.001 (\text{s})$$

幅值

$$I_m = 100 \text{ mA}$$

有效值

$$I = 0.707 I_m = 70.7 \text{ mA}$$

初相位

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$$

(2) 该电流的波形如图 3-6 所示。

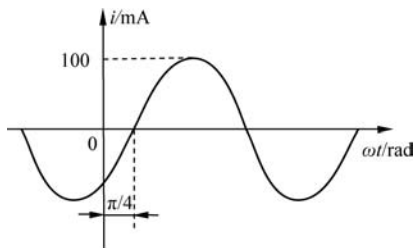


图 3-6 例 3-1 的图



3.2 正弦量的相量表示方法

如 3.1 节所述,一个正弦量具有幅值、角频率、初相位三个特征量(三要素),它可用三角函数式(见式(3-1))或正弦波形(见图 3-2)来表示,但用这两种方法来计算正弦交流电的和或差时,运算过程烦琐,很不方便。因此,在电路领域,常用相量表示正弦量,相量表示法的基础是复数,就是用复数表示正弦量。

3.2.1 用旋转相量表示正弦量

设有一正弦电压 $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, 如图 3-7(b)所示,用旋转相量表示的方法如下。

以直角坐标系的 O 点为原点,取相量的长度为振幅 U_m ,相量的起始位置与横轴正方向之间的夹角为初相位 φ_0 ,并以角频率 ω 绕原点按逆时针方向旋转,这样,该相量在旋转的过程中,它每一瞬时在纵轴上的投影即代表正弦电压在该时刻的瞬时值,如图 3-7(a)所示。

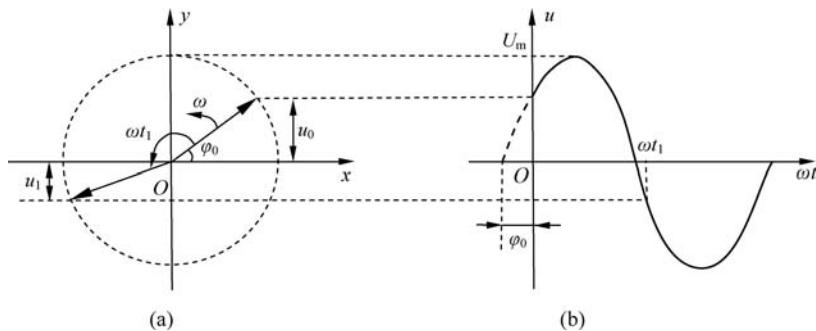


图 3-7 用旋转相量表示正弦量

例如, $t=0$ 时, $u_0 = U_m \sin \varphi_0$; $t=t_1$ 时, $u_1 = U_m \sin(\omega t_1 + \varphi_0)$ 。

如上所述,正弦量可用一条旋转的有向线段表示,而有向线段可用复数表示,所以正弦量也可用复数表示。为了与一般的复数相区别,把表示正弦量的复数称为相量,并在大写字母上打“·”表示,例如,正弦电压 $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ 的相量表示式为

$$\dot{U}_m = U_m (\cos \varphi_0 + j \sin \varphi_0) = U_m e^{j\varphi_0} = U_m \angle \varphi_0 \quad (3-10)$$

或

$$\dot{U} = U (\cos \varphi_0 + j \sin \varphi_0) = U e^{j\varphi_0} = U \angle \varphi_0 \quad (3-11)$$

$\dot{U}_m$ 是电压的幅值相量, $\dot{U}$ 是电压的有效值相量。注意, 相量只是表示正弦量, 而不是等于正弦量。另外, 式(3-10)或式(3-11)中只有两个特征量, 即模和幅角, 也就是正弦量的幅值(或有效值)和初相位。由于在线性电路中, 电路的输入和输出均为同频率的正弦量, 频率是已知的或特定的, 可不考虑, 只需求出正弦量的幅值(或有效值)和初相位即可。

3.2.2 相量图

按照各个正弦量的大小和相位关系用初始位置的有向线段画出的若干个相量的图形, 称为相量图。在相量图上能形象地看出各个正弦量的大小和相互间的相位关系。例如, 图 3-4 中用正弦波形表示的两个正弦量, 若用相量图表示则如图 3-8 所示。

由图 3-4 容易看出, 电压相量 $\dot{U}$ 比电流相量 $\dot{I}$ 超前 φ 角, 即正弦电压 u 比正弦电流 i 超前 φ 角。

关于相量表示法作以下几点说明。

(1) 只有正弦周期量才能用相量表示, 相量不能表示非正弦周期量。

(2) 只有同频率的正弦量才能画在同一相量图上, 不同频率的正弦量不能画在同一相量图上, 否则就无法进行比较和计算。

(3) 在相量图中, 可以用幅值相量, 也可化为有效值相量, 但是必须注意, 有效值相量在纵轴上的投影不再代表正弦量的瞬时值。

(4) 作相量图时, 各相量的相对位置很重要。一般任选一个相量为参考相量, 通常把它画在直角坐标系的横轴位置上, 其余各相量的位置, 则以与这个参考相量之间的相位差来确定, 如图 3-8 所示。

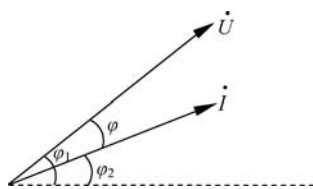


图 3-8 相量图

3.2.3 正弦交流电路的相量分析方法

在交流电路的分析计算中, 常常需要将几个同频率的正弦量相加或相减。如图 3-9 所示的电路中, 已知两正弦电流 $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$, $i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$, 试确定 $i = i_1 + i_2$ 。

求解总电流 i 的方法很多, 可用三角函数式求解, 也可用复数式求解, 还可用正弦波形求解, 这里仅讨论相量图求解法, 其具体方法如下。

如图 3-10 所示, 首先做出表示电流 i_1 和 i_2 的相量 $\dot{I}_{1m}$ 和 $\dot{I}_{2m}$, 然后以 $\dot{I}_{1m}$ 和 $\dot{I}_{2m}$ 为两邻边做一平行四边形, 其对角线即为总电流 i 的幅值相量 $\dot{I}_m$, 对角线与横轴正方向(参考相量)之间的夹角即为初相位 φ_0 。这就是相量运算中的平行四边形法则。

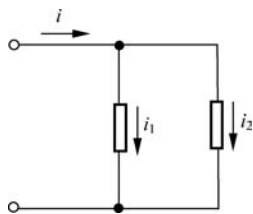


图 3-9 相量运算

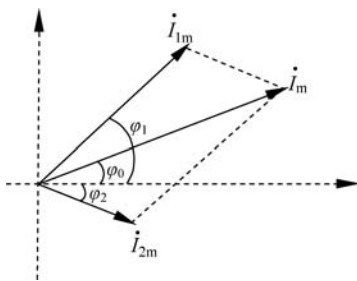


图 3-10 相量的加法运算

如果要进行正弦量的减法运算,仍可利用平行四边形法则。例如,在图 3-9 中,若已知 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, $i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$, 求 $i_1 = i - i_2$ 。

这时,首先用相量表示 i 和 i_2 。根据相量关系知道,求 $i - i_2$ 可通过求 $\dot{I}_m - \dot{I}_{2m}$ 得到,因减相量等于加负相量,故合成相量 $\dot{I}_{1m} = \dot{I}_m + (-\dot{I}_{2m})$ 。所以,以 $\dot{I}_m$ 和 $-\dot{I}_{2m}$ 为两邻边作一平行四边形,其对角线即为 i_1 的相量,如图 3-11 所示。

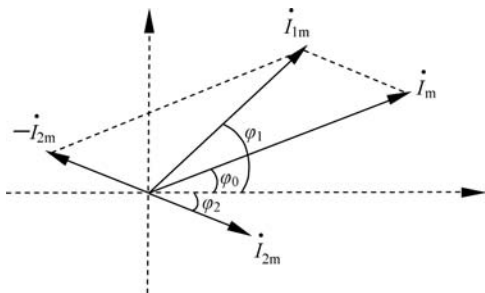


图 3-11 相量的减法运算

由上述可见,利用相量法进行正弦量的加、减运算十分简便,相量法是分析正弦交流电路的常用工具。

3.3 交流电路中的基本元件

电阻、电感与电容是组成电路的基本元件。本节重点讨论在正弦交流电路中,三种元件中电压与电流的一般关系及能量的转换问题。

3.3.1 电阻元件

图 3-12 中, u 和 i 为关联参考方向,根据欧姆定律得出

$$i = \frac{u}{R}$$

或

$$u = Ri \quad (3-12)$$

式(3-12)表明,电阻元件上的电压与通过它的电流成线性关系。

若式(3-12)两边同时乘以 i , 并积分, 则得

$$\int_0^t ui \, dt = \int_0^t Ri^2 \, dt$$

上式表明电能全部消耗在电阻上,转换为热能。

3.3.2 电感元件

图 3-13(a)所示是一个电感线圈,图 3-13(b)是电感元件的符号。

当电感线圈中通过电流 i 时,在线圈内部和外部建立磁场形成磁通 Φ (电感具有储存磁场能量的性质), Φ 与线圈 N 匝都交链,线圈各匝相链的磁通总和称为磁链 Ψ , 当线圈中没有铁磁材料时, Ψ 或 Φ 与 i 成正比关系,即

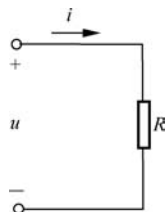


图 3-12 电阻元件

$$\Psi = N\Phi = Li \quad \text{或} \quad L = \frac{\Psi}{i} = \frac{N\Phi}{i} \quad (3-13)$$

当通过线圈的磁通(磁链)发生变化时,线圈中要产生感应电动势 e_L , 根据法拉第电磁感应定律(感应电动势等于回路包围的磁链变化率的负值)得

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (3-14)$$

将磁链 $\Psi = Li$ 代入上式中, 则得

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \quad (3-15)$$

e_L 称为自感电动势。式(3-15)表明, 当电流的

正值增大, 即 $\frac{di}{dt} > 0$ 时, e_L 为负值, 表明 e_L 的实际方向与电流的方向相反, 这时 e_L 要阻碍电

流的增大; 反之, 当电流的正值减小, 即 $\frac{di}{dt} < 0$ 时, e_L 为正值, 表明 e_L 的实际方向与电流的方向相同, 这时 e_L 要阻碍电流的减小。可见, 自感电动势具有阻碍电流变化的性质。

电感 L 的单位是 H(亨利)或 mH(毫亨), 线圈的电感与线圈的尺寸、匝数以及附近介质的导磁性能有关。例如, 有一密绕的长线圈, 其横截面积为 $S(\text{m}^2)$, 长度为 $l(\text{m})$, 匝数为 N , 介质的磁导率为 $\mu(\text{H/m})$, 则其电感 $L(\text{H})$ 为

$$L = \frac{\mu SN^2}{l} \quad (3-16)$$

由图 3-13(b)可列出 KVL 方程为

$$u + e_L = 0$$

即

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt} \quad (3-17)$$

式(3-17)表明, 电感元件上的电压与通过它的电流成导数关系。当线圈中通过不随时间变化的恒定电流(即在直流电路稳定状态下)时, 其上电压为零, 因此, 电感元件在直流电路中可视为短路。

最后, 讨论一下电感元件中的能量转换问题。将式(3-17)两边乘 i , 并积分, 得

$$\int_0^t ui \, dt = \int_0^t Li \, di = \frac{1}{2} Li^2 \quad (3-18)$$

式中的 $\frac{1}{2} Li^2$ 为磁场能量。式(3-18)表明, 当电感元件中的电流增大时, 磁场能量增大, 在此过程中电能转换为磁能, 即电感元件从电源取用能量; 当电流减小时, 磁能转换为电能, 即电感元件向电源放还能量。

3.3.3 电容元件

图 3-14(a)是电容元件的符号, 电容元件是实际电容器的理想模型。实际电容器的种类和规格很多, 然而就其构成的基本原理来说, 都是由被绝缘介质隔离的两片平行金属极板组

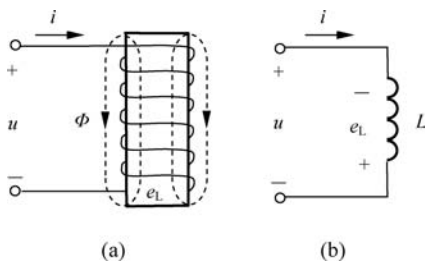


图 3-13 电感元件及其构成

成的,两极板用金属导线引出,如图 3-14(b)所示。

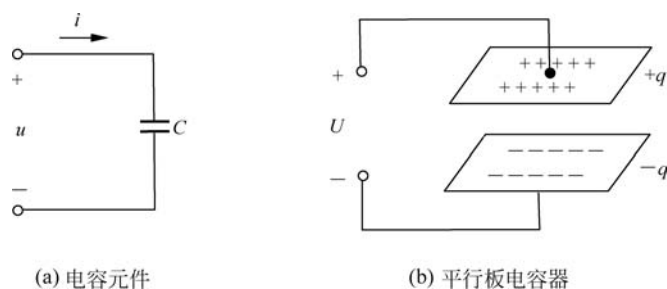


图 3-14 电容元件及其构成

当两极板间加电源时,与电源正极相连的金属板上就要积聚正电荷 $+q$,而与负极相连的金属板上就要积聚负电荷 $-q$,正、负电荷的电量是相等的(电容具有储存电场能量的性质)。电容器极板上所积聚的电量 q 与其上电压成正比,即

$$\frac{q}{u} = C \quad (3-19)$$

式中, C 称为电容,电容的单位是F(法拉)。当将电容器充上1V的电压时,极板上积累了1C的电荷量,则该电容器的电容就是1F。由于法拉的单位太大,工程上多采用 μF (微法)或 pF (皮法), $1\mu\text{F}=10^{-6}\text{F}$, $1\text{pF}=10^{-12}\text{F}$ 。

电容器的电容与极板的尺寸及其间介电常数有关。例如,有一极板间距离很小的平行板电容器,其极板面积为 $S(\text{m}^2)$,板间距离为 $d(\text{m})$,其间介质的介电常数为 $\epsilon(\text{F/m})$,则其电容 $C(\text{F})$ 为

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (3-20)$$

当极板上的电荷量 q 或电压 u 发生变化时,在电路中就要引起电流

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (3-21)$$

式(3-21)是在 u 和 i 为关联参考方向下(见图 3-14(a))得出的,否则要加一个负号。

当电容器两端加恒定电压(直流稳定状态)时,由式(3-21)可知, $i=0$,因此,在直流电路中,电容元件可视作开路。

将式(3-21)两边乘 u ,并积分,可得

$$\int_0^t ui \, dt = \int_0^t Cu \, du = \frac{1}{2}Cu^2 \quad (3-22)$$

式中的 $\frac{1}{2}Cu^2$ 为电容极板间的电场能量。式(3-22)表明,当电容元件上的电压增大时,电场能量增大,在此过程中电容元件从电源取用能量,电容处于充电状态;当电压减小时,电场能量减小,这时电容元件向电源放还能量,电容处于放电状态。

表 3-1 列出了电阻元件、电感元件和电容元件在几个方面的特征,希望有助于读者以比较的方式加深理解。

表 3-1 电阻、电感和电容元件的特征

特征	元 件		
	电阻元件	电感元件	电容元件
电压与电流的关系	$u=Ri$	$u=L \frac{di}{dt}$	$i=C \frac{du}{dt}$
参数意义	$R=\frac{u}{i}$	$L=\frac{N\Phi}{i}$	$C=\frac{q}{u}$
能量	$\int_0^t Ri^2 dt$	$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}Cu^2$

【例 3-2】 如图 3-15(a)所示电路,电流源 $i(t)$ 的波形如图 3-15(b)所示。(1)试画出电感元件中产生的自感电动势 e_L 和两端电压 u 的波形;(2)试计算在电流增大的过程中电感元件从电源吸取的能量和在电流减小的过程中它放出的能量。

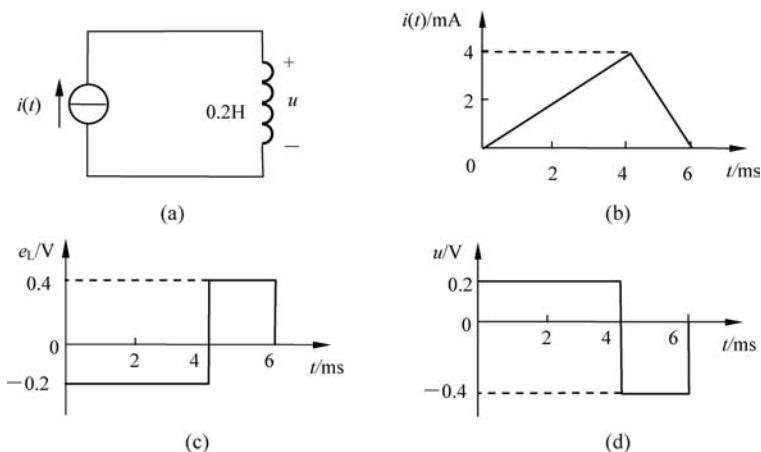


图 3-15 例 3-2 的图

【解】 (1) 电流 $i(t)$ 的函数表达式如下。

$$i(t) = \begin{cases} t \text{ mA}, & 0 \leq t \leq 4 \text{ ms} \\ (-2t + 12) \text{ mA}, & 4 \text{ ms} \leq t \leq 6 \text{ ms} \end{cases}$$

可分段计算 e_L 及 u 。

当 $0 \leq t \leq 4 \text{ ms}$ 时

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -0.2 \text{ V}$$

$$u = -e_L = 0.2 \text{ V}$$

当 $4 \text{ ms} \leq t \leq 6 \text{ ms}$ 时

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -0.2 \times (-2) = 0.4 \text{ (V)}$$

$$u = -e_L = -0.4 \text{ V}$$

e_L 和 u 的波形分别如图 3-15(c)、图 3-15(d)所示,由图可以看出,当电感电流变化率 (di/dt) 为正值时,电感电压 u 也为正值;当电感电流变化率为负值时,电感电压也为负值。

显然,电感电压与电流波形并不相同。

(2) 在电流增大的过程中电感元件所吸取的能量和在电流减小的过程中所放出的能量是相等的,即为 $t \leq 4\text{ms}$ 时的磁能。

$$\frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times (4 \times 10^{-3})^2 = 1.6 \times 10^{-6} (\text{J})$$

3.4 单一参数的正弦交流电路

分析各种交流电路时,必须首先掌握单一参数(电阻、电感、电容)交流电路中电压与电流之间的关系,因为其他电路无非是一些单一参数电路的组合而已。

3.4.1 纯电阻电路

图 3-16(a)是一个线性电阻元件的交流电路。

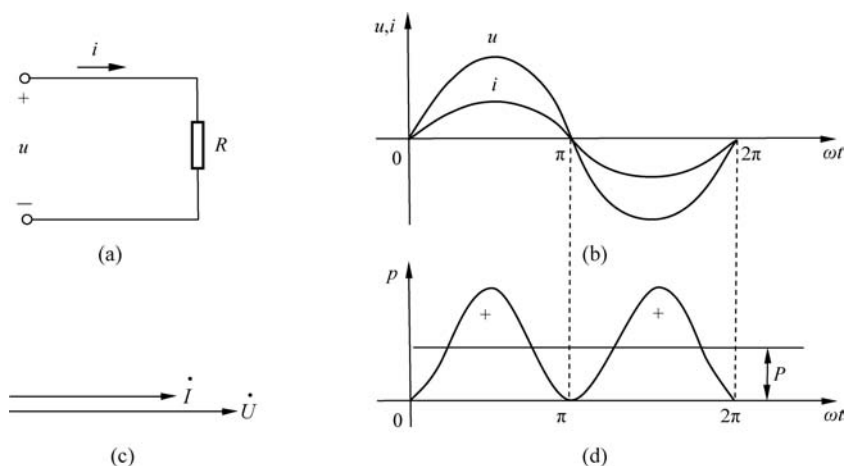


图 3-16 电阻元件的交流电路

电压 u 和电流 i 的参考方向如图 3-16(a)所示,两者的关系由欧姆定律确定,即

$$u = Ri$$

为了分析方便起见,选择电流经过零点并向正值增加的瞬间作为计时起点($t=0$),即设

$$i = I_m \sin \omega t \quad (3-23)$$

为参考相量,则

$$u = Ri = RI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t \quad (3-24)$$

也是一个同频率的正弦量。

比较式(3-23)、式(3-24)可以看出,在纯电阻交流电路中,电流与电压是同相的(相位差 $\varphi=0$),其波形如图 3-16(b)所示。

在式(3-24)中

$$U_m = RI_m$$

或

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = R \quad (3-25)$$

由此可见,在纯电阻正弦交流电路中,电压与电流的幅值(或有效值)的比值,就是电阻 R 。

若用相量表示电压与电流的关系,则为

$$\dot{U} = U e^{j0^\circ}, \quad \dot{I} = I e^{j0^\circ}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j0^\circ} = R$$

或

$$\dot{U} = R \dot{I} \quad (3-26)$$

式(3-26)是欧姆定律的相量形式,电压和电流的相量图如图 3-16(c)所示。

下面讨论纯电阻正弦交流电路中的功率问题。在任意瞬间,电压瞬时值 u 与电流瞬时值 i 的乘积,称为**瞬时功率**,用小写字母 p 表示,即

$$p = p_R = ui = U_m I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t) = UI (1 - \cos 2\omega t) \quad (3-27)$$

由式(3-27)可见, p 是由两部分组成的,第一部分是常数 UI ,第二部分是幅值为 UI 并以 2ω 的角频率随时间而变化的交变量 $UI \cos 2\omega t$ 。 p 随时间变化的波形如图 3-16(d)所示。

在纯电阻正弦交流电路中,由于 u 和 i 同相,它们或同时为正,或同时为负,所以瞬时功率总是正值,即 $p \geq 0$ 。这表明外电路总是从电源取用能量,即电阻从电源取用电能并转换为热能,这是一种不可逆的能量转换过程。

在纯电阻正弦交流电路中,**平均功率**为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI (1 - \cos 2\omega t) dt = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \quad (3-28)$$

它表示一个周期内电路消耗电能的平均功率。

3.4.2 纯电感电路

图 3-17(a)为一电感线圈组成的交流电路,假定这个线圈中只有电感,而忽略线圈电阻,此即一纯电感电路。设电流为参考正弦量,即

$$i = I_m \sin \omega t$$

则

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \\ &= U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \end{aligned} \quad (3-29)$$

也是一个同频率的正弦量。

比较以上两式可知,在纯电感正弦交流电路中,电流的相位滞后电压 90° (相位差 $\varphi = +90^\circ$) (通常规定,当电流滞后于电压时,相位差 φ 为正;当电流超前于电压时,相位差 φ 为负。这样规定是便于说明电路是电感性的还是电容性的),其波形如图 3-17(b)所示。

在式(3-29)中

$$U_m = \omega L I_m$$

或

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \omega L \quad (3-30)$$

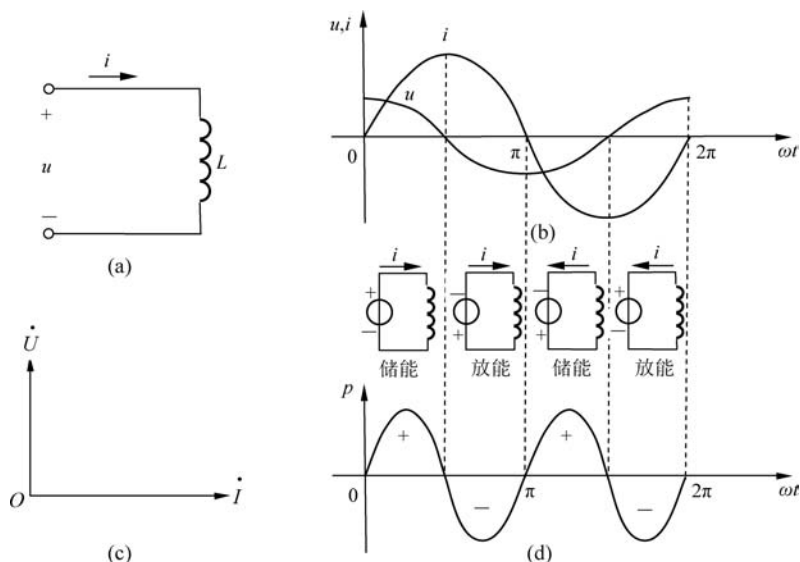


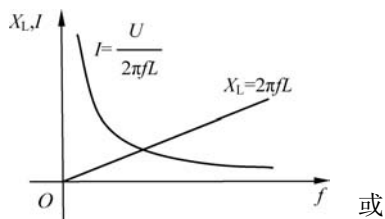
图 3-17 电感元件的交流电路

由此可见,在纯电感正弦交流电路中,电压与电流的幅值(或有效值)之比为 ωL ,显然,它的单位是 Ω (欧姆)。当电压 U 一定时, ωL 愈大,则电流 I 愈小,可见 ωL 具有阻碍交流电流的性质,故称为**感抗**,通常用 X_L 表示,即

$$X_L = \omega L = 2\pi fL \quad (3-31)$$

式(3-31)表明,感抗 X_L 与电感 L 、频率 f 成正比。因此,电感线圈对高频电流的阻碍作用很大,而对直流则可视作短路,即对直流来讲, $X_L = 0$ 。

当 U 和 L 一定时, X_L 和 I 与 f 的关系如图 3-18 所示。应该注意的一点是, X_L 只是电压与电流的幅值或有效值之比,而非它们的瞬时值之比,即 $X_L \neq \frac{u}{i}$ 。

图 3-18 X_L 和 I 与 f 的关系

如果用相量表示电压与电流的关系,则为

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U e^{j90^\circ} & \dot{I} &= I e^{j0^\circ} \\ \frac{\dot{U}}{\dot{I}} &= \frac{U}{I} e^{j90^\circ} = jX_L \end{aligned}$$

$$\dot{U} = jX_L \dot{I} = j\omega L \dot{I} \quad (3-32)$$

式(3-32)表明,在纯电感正弦电路中,电压的有效值等于电流的有效值与感抗的乘积,在相位上电压比电流超前 90° ,电压和电流的相量图如图 3-17(c)所示。

最后讨论纯电感正弦电路中的功率问题。

瞬时功率 p 为

$$\begin{aligned} p &= p_L = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (3-33)$$

由式(3-33)可见, p 是一个幅值为 UI 并以 2ω 的角频率随时间而变化的交变量, 其波形如图 3-17(d)所示。

平均功率(又称有功功率) P 为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0 \quad (3-34)$$

从图 3-17(d)可以看出, 在第一个和第三个 $1/4$ 周期内, 电流值在增大, 即磁场在建立, $p > 0$, 电感线圈从电源取用电能, 并转换为磁能而储存在线圈的磁场内; 在第二个和第四个 $1/4$ 周期内, 电流值在减小, 即磁场在消失, $p < 0$, 线圈放出原先储存的磁能并转换为电能而归还电源。这是一种可逆的能量转换过程, 线圈从电源取用的能量一定等于它归还给电源的能量, 所以平均功率 $P = 0$, 这一点从功率波形图上也容易看出。

由上述可知, 在纯电感正弦电路中, 没有能量消耗, 只有电源与电感之间的能量互换, 这种能量互换的规模可用无功功率 Q 来衡量。规定无功功率等于瞬时功率 p 的幅值, 即

$$Q = UI = X_L I^2 \quad (3-35)$$

无功功率的单位是乏(var, 相当于 $V \cdot A$)或千乏(kvar, 相当于 $kV \cdot A$)。应该注意, 它并不等于单位时间内互换了多少能量。

3.4.3 纯电容电路

图 3-19(a)为纯电容正弦交流电路, 电路中电流 i 和电容器两端电压 u 的参考方向如图所示。

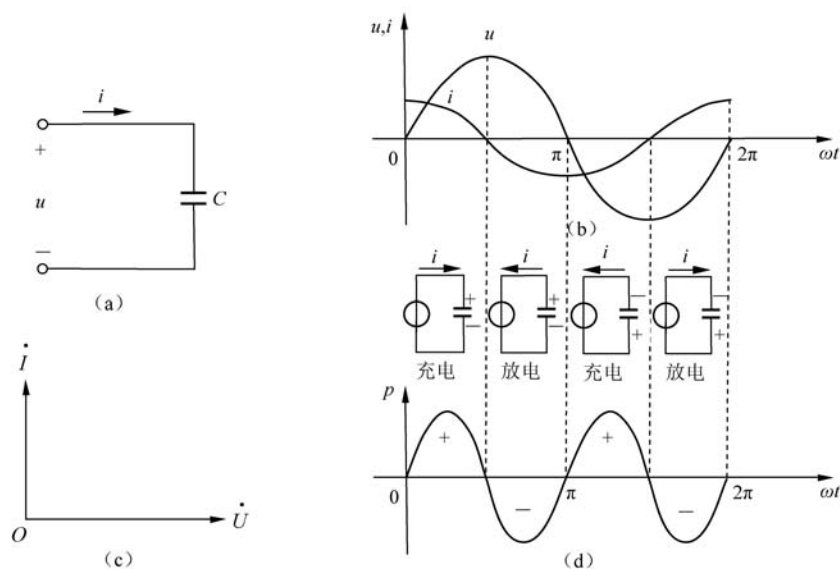


图 3-19 电容元件的交流电路

如果在电容器的两端加一正弦电压

$$u = U_m \sin \omega t$$

则

$$\begin{aligned}
 i &= C \frac{du}{dt} = C \frac{d(U_m \sin \omega t)}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \\
 &= I_m \sin(\omega t + 90^\circ)
 \end{aligned} \quad (3-36)$$

也是一个同频率的正弦量。

比较式(3-35)和式(3-36)可知,在纯电容正弦交流电路中,电流的相位超前于电压 90° (相位差 $\varphi = -90^\circ$)。电压和电流的波形如图 3-19(b)所示。

在式(3-36)中

$$I_m = \omega C U_m$$

或

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} \quad (3-37)$$

由此可见,在纯电容正弦交流电路中,电压与电流的幅值(或有效值)之比为 $\frac{1}{\omega C}$,显然,它的单位是 Ω (欧姆)。当电压 U 一定时, $\frac{1}{\omega C}$ 愈大,则电流 I 愈小,可见 $\frac{1}{\omega C}$ 具有阻碍交流电流的性质,故称为容抗,通常用 X_C 表示,即

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (3-38)$$

式(3-38)表明,容抗 X_C 与电容 C 、频率 f 成反比。这是因为电容愈大,在同样电压下,电容器所容纳的电荷量就愈大,因而电流愈大;当频率愈高时,电容的充放电速度愈快,在同样电压下,单位时间内电荷的移动量就愈多,因而电流愈大。所以,电容对高频电流所呈现的容抗愈小,而对直流($f=0$)所呈现的容抗 $X_C \rightarrow \infty$,可视为开路,因此,电容具有“通交流隔直”的作用。

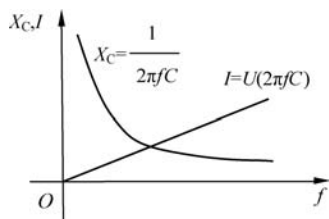


图 3-20 X_C 和 I 与 f 的关系

当电压 U 和电容 C 一定时, X_C 和 I 与 f 的关系如图 3-20 所示。

如果用相量表示电压与电流的关系,则为

$$\dot{U} = U e^{j0^\circ} \quad \dot{I} = I e^{j90^\circ}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{-j90^\circ} = -jX_C$$

或

$$\dot{U} = -jX_C \dot{I} = -j \frac{\dot{I}}{\omega C} = \frac{\dot{I}}{j\omega C} \quad (3-39)$$

式(3-39)表明,在纯电容正弦电路中,电压的有效值等于电流的有效值与容抗的乘积,在相位上电压比电流滞后 90° ,电压和电流的相量图如图 3-19(c)所示。

最后,讨论纯电容正弦电路中的功率问题。

瞬时功率 p 为

$$\begin{aligned}
 p &= p_C = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t \\
 &= \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t
 \end{aligned} \quad (3-40)$$

由式(3-40)可见, p 是一个幅值为 UI 并以 2ω 的角频率随时间变化的交变量, 其波形如图 3-19(d) 所示。

平均功率(或有功功率) P 为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t \, dt = 0$$

上式说明, 电容是不消耗能量的, 在电源与电容之间只发生能量的互换, 能量互换的规模用无功功率来衡量。

为了同纯电感电路的无功功率相比较, 仍设电流为参考相量, 即

$$i = I_m \sin \omega t$$

则

$$u = U_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

于是

$$p = p_c = ui = -UI \sin 2\omega t$$

因此, 纯电容电路的无功功率 Q 为

$$Q = -UI = -X_C I^2 \quad (3-41)$$

即电容性电路的无功功率取负值, 而电感性电路的无功功率取正值。

3.5 RLC 串联电路

3.4 节讨论了单一参数的正弦交流电路, 然而, 在实际电路中, 不但存在电阻性元件, 也存在感性及容性元件, 本节将讨论电阻、电感与电容串联的正弦交流电路。

RLC 串联电路如图 3-21(a) 所示, 电路中的电流及各电压的参考方向如图中所示, 由图可列出 KVL 方程如下

$$u = u_R + u_L + u_C \quad (3-42)$$

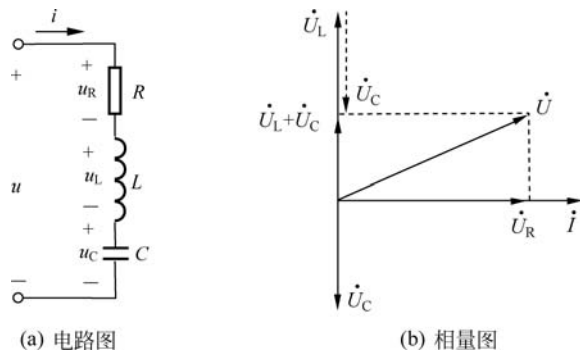


图 3-21 RLC 串联电路

设电流 $i = I_m \sin \omega t$ 为参考相量, 则

$$u = u_R + u_L + u_C = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (3-43)$$

也为同频率的正弦量, 其幅值为 U_m , 与电流 i 之间的相位差为 φ 。

将电压 u_R 、 u_L 、 u_C 用相量 $\dot{U}_R$ 、 $\dot{U}_L$ 、 $\dot{U}_C$ 表示, 把它们相加便得到电源电压 u 的相量 $\dot{U}$, 见

图 3-21(b)。可见,电压相量 $\dot{U}$ 、 $\dot{U}_R$ 及 $(\dot{U}_L + \dot{U}_C)$ 组成一个直角三角形,称为**电压三角形**,利用这个三角形可以方便地确定 u 的有效值 U 及相位差 φ 。

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{(RI)^2 + (X_L I - X_C I)^2} \\ = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

或写为

$$\frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (3-44)$$

由式(3-44)可见,在 RLC 串联正弦交流电路中,电压与电流的有效值(或幅值)之比为 $\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$,它的单位是 Ω (欧姆)。对电流起阻碍作用,称为电路的**阻抗模**,用 $|Z|$ 表示,即

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (3-45)$$

可见, $|Z|$ 、 R 、 $(X_L - X_C)$ 之间也可用一个直角三角形——**阻抗三角形**来表示(见图 3-23)。

电源电压 u 和电流 i 之间的相位差 φ 为

$$\varphi = \arctan \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} \quad (3-46)$$

由式(3-46)可以看出, φ 的大小决定于电路的参数。如果 $X_L = X_C$, 则 $\varphi = 0$, 这时电流 i 与电压 u 同相, 电路呈电阻性; 如果 $X_L > X_C$, 则 $\varphi > 0$, 这时电流 i 比电压 u 滞后 φ 角, 电路呈感性; 如果 $X_L < X_C$, 则 $\varphi < 0$, 这时电流 i 比电压 u 超前 φ 角, 电路呈容性。

如果用相量表示电压与电流的关系, 则为

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + jX_L\dot{I} - jX_C\dot{I} = [R + j(X_L - X_C)]\dot{I}$$

或

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j(X_L - X_C) \quad (3-47)$$

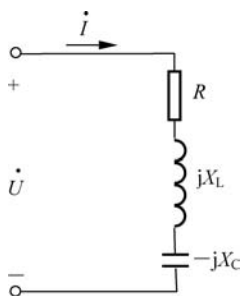


图 3-22 用相量和阻抗表示的 RLC 电路

式中的 $R + j(X_L - X_C)$ 称为电路的**阻抗**, 用大写的 Z 表示, 即

$$Z = R + j(X_L - X_C) = |Z| e^{j\varphi} \quad (3-48)$$

可见, 阻抗的实部为“阻”, 虚部为“抗”, 它既表示了电路中电压与电流之间大小关系(反映在阻抗模 $|Z|$ 上), 也表示了相位关系(反映在幅角 φ 上)。“阻抗”是交流电路中非常重要的一个概念, 必须很好地理理解掌握。用电压和电流的相量及阻抗表示的 RLC 串联电路如图 3-22 所示。

最后, 讨论 RLC 串联电路中的功率问题。

瞬时功率 p 为

$$p = ui = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] \\ = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi) \quad (3-49)$$

平均功率(有功功率) P 为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)] dt = UI \cos \varphi \quad (3-50)$$

在 RLC 串联电路中,电阻要消耗电能,而电感和电容要储放能量,它们与电源之间要进行能量互换,相应的**无功功率**可由式(3-35)、式(3-41)得出,即

$$Q = U_L I - U_C I = (U_L - U_C) I = (X_L - X_C) I^2 = UI \sin \varphi \quad (3-51)$$

式(3-50)、式(3-51)是计算正弦交流电路中有功功率和无功功率的一般公式。

由上述可知,一个交流发电机输出的功率不仅与发电机的端电压 u 及其输出电流 i 的有效值的乘积有关,而且还与负载的性质有关,所带负载不同(即电路参数不同), u 和 i 之间的相位差 φ 就不同,在相同的 U 和 I 条件下,电路的有功功率和无功功率也就不同。式(3-50)中的 $\cos \varphi$ 称为**功率因数**。

在交流电路中,平均功率一般不等于电压与电流有效值的乘积,若将两者的有效值相乘,则得到所谓的**视在功率** S ,即

$$S = UI = |Z| I^2 \quad (3-52)$$

视在功率的单位是 $V \cdot A$ (伏·安)或 $kV \cdot A$ (千伏·安)。

交流电气设备是按照规定的额定电压 U_N 和额定电流 I_N 来设计和使用的,如变压器的容量就是以额定电压和额定电流的乘积,即所谓的视在功率 $S = U_N I_N$ 表示的。

由式(3-50)、式(3-51)及式(3-52)可知, P 、 Q 、 S 这三个功率之间有一定的关系,即

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (3-53)$$

显然,它们也可用一个直角三角形——**功率三角形**来表示,如图 3-23 所示。

RLC 串联电路中的阻抗、电压及功率关系可以很直观地从图 3-23 来理解,引出这三个三角形的目的,主要是为了帮助分析和记忆。

【例 3-3】 图 3-21(a)所示电路中,已知 $R = 30\Omega$, $L = 127\text{mH}$, $C = 40\mu\text{F}$, 电源电压 $u = 220\sqrt{2} \sin(314t + 20^\circ)\text{V}$ 。(1)求感抗 X_L 、容抗 X_C 和阻抗模 $|Z|$; (2)确定电流的有效值 I 和瞬时值 i 的表达式; (3)确定各部分电压的有效值和瞬时值的表达式; (4)做相量图; (5)求有功功率 P 和无功功率 Q 。

【解】 (1) $X_L = \omega L = 314 \times 127 \times 10^{-3} = 40(\Omega)$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 40 \times 10^{-6}} = 80(\Omega)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (40 - 80)^2} = 50(\Omega)$$

$$(2) I = \frac{U}{|Z|} = \frac{220}{50} = 4.4(\text{A})$$

确定瞬时值 i 的表达式需要知道 u 和 i 之间的相位差 φ 。

$$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{40 - 80}{30} = -53^\circ$$

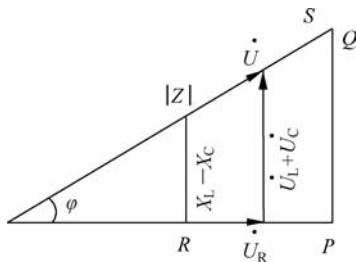


图 3-23 功率、电压、阻抗三角形

因为 $\varphi < 0$, 所以电路呈容性, 电流 i 比电压 u 超前 φ 角, 故 i 的表达式为

$$i = 4.4\sqrt{2} \sin(314t + 20^\circ + 53^\circ) = 4.4\sqrt{2} \sin(314t + 73^\circ) \text{ A}$$

$$(3) U_R = RI = 30 \times 4.4 = 132 \text{ (V)}$$

$$u_R = 132\sqrt{2} \sin(314t + 73^\circ) \text{ V}$$

$$U_L = X_L I = 40 \times 4.4 = 176 \text{ (V)}$$

$$u_L = 176\sqrt{2} \sin(314t + 73^\circ + 90^\circ)$$

$$= 176\sqrt{2} \sin(314t + 163^\circ) \text{ V}$$

$$U_C = X_C I = 80 \times 4.4 = 352 \text{ (V)}$$

$$u_C = 352\sqrt{2} \sin(314t + 73^\circ - 90^\circ)$$

$$= 352\sqrt{2} \sin(314t - 17^\circ) \text{ V}$$

(4) 相量图如图 3-24 所示。

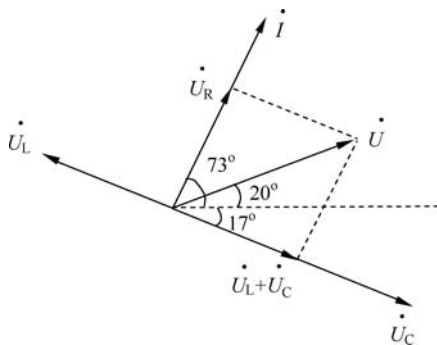


图 3-24 例 3-3 的图

$$(5) P = UI \cos \varphi = 220 \times 4.4 \times \cos(-53^\circ) = 220 \times 4.4 \times 0.6 = 580.8 \text{ (W)}$$

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \times 4.4 \times \sin(-53^\circ) = 220 \times 4.4 \times (-0.8)$$

$$= -774.4 \text{ (V} \cdot \text{A)} \text{ (电容性)}$$

3.6 正弦交流电路中的谐振

在具有电感和电容元件的交流电路中, 电路两端的电压与其中的电流一般是不同相的 ($\varphi \neq 0$)。如果调节电路中的元件参数或电源的频率使它们同相 ($\varphi = 0$), 这时电路中就会发生谐振现象。谐振有其有利的一面, 也有其不利的方面, 研究谐振的目的在于认识这种客观现象, 并在生产实践中充分利用谐振的特征, 同时预防它所产生的危害。谐振分为串联谐振和并联谐振, 下面分别讨论这两种谐振的产生条件及其特征。

3.6.1 串联电路的谐振

在 3.5 节已经提到, 在 RLC 串联电路(图 3-21(a))中, 当

$$X_L = X_C \quad \text{或} \quad 2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC} \quad (3-54)$$

时, $\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = 0$, 即电源电压 u 与电路中的电流 i 同相, 这时电路发生谐振, 称为串联谐振。

1. 串联谐振的条件

式(3-54)是发生串联谐振的条件, 并由此得出谐振频率

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3-55)$$

可见, 调节 L 、 C 或电源频率 f 都能使电路发生谐振。

2. 串联谐振的特征

电路发生串联谐振时, 具有以下特征。

(1) 电路的阻抗模 $|Z| = |Z_0| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$, 其值最小, 在电源电压 U 不变的前提下, 电路中的电流达到最大值, 即

$$I = I_0 = \frac{U}{R}$$

图 3-25 分别画出了阻抗模 $|Z|$ 和电流 I 随频率 f 变化的曲线。

(2) 电路呈纯阻性。电源供给电路的能量全被电阻所消耗, 电源与电路之间不发生能量互换, 能量的互换只发生在电感线圈与电容器之间。

(3) U_L 和 U_C 都高于电源电压 U , 所以串联谐振也称电压谐振。通常用品质因数 Q 表示 U_L 和 U_C 与 U 的比值, 即

$$Q = \frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (3-56)$$

它表示在串联谐振时, 电容或电感上的电压是电源电压的 Q 倍。

若 U_L 或 U_C 过高, 可能会击穿电感线圈或电容器的绝缘材料, 因此, 在电力工程中应尽力避免发生串联谐振, 但在无线电工程中, 常利用串联谐振进行选频, 并且抑制干扰信号。

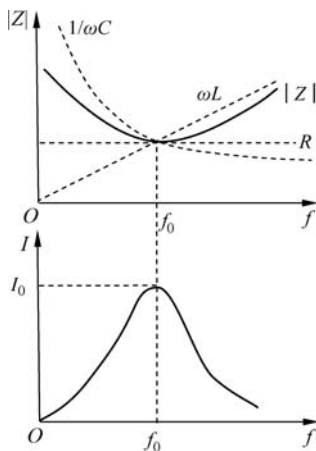


图 3-25 串联谐振时, $|Z|$ 和 I 随 f 变化的曲线

3.6.2 并联电路的谐振

图 3-26 所示是电容器与电感线圈并联的电路。电路的等效阻抗为

$$Z = \frac{\frac{1}{j\omega C}(R + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + (R + j\omega L)} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

1. 并联谐振的条件

若如图 3-26 所示的电路发生谐振, 则电压 u 和电流 i 同相, 即电路的等效阻抗为实数。一般在谐振时 $\omega L \gg R$, 故

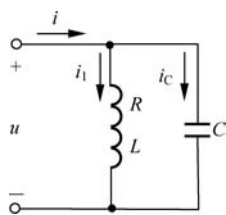


图 3-26 并联电路

$$Z \approx \frac{j\omega L}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{1}{\frac{RC}{L} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \quad (3-57)$$

发生谐振时, $\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} \approx 0$, 由此得并联谐振频率

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{或} \quad f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

与串联谐振频率近似相等。

2. 并联谐振的特征

电路发生并联谐振时, 具有以下特征。

(1) 电路的阻抗模 $|Z| = |Z_0| = \frac{L}{RC}$, 其值最大, 在电源电压 U 不变的前提下, 电路中的电流达到最小值, 即

$$I = I_0 = \frac{U}{|Z_0|} = \frac{U}{\frac{L}{RC}}$$

图 3-27 为阻抗模 $|Z|$ 和电流 I 的随频率 f 变化的曲线。

(2) 电路呈纯阻性。

(3) 并联支路的电流比总电流大许多倍,所以**并联谐振**又称**电流谐振**。通常品质因数 Q 表示支路电流 I_1 和 I_C 与总电流 I_0 的比值,即

$$Q = \frac{I_1}{I_0} = \frac{I_C}{I_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \quad (3-58)$$

并联谐振在无线电工程和工业电子技术中也常用到,例如利用并联谐振时阻抗模高的特点进行选频或消除干扰信号。

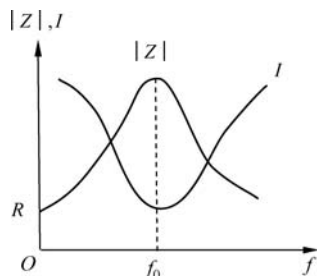


图 3-27 并联谐振时, $|Z|$ 和 I 随 f 变化的曲线

※3.7 三相交流电路

目前,交流电在动力方面的应用几乎都属于三相制。这是由于三相制在发电、输电和用电方面都有许多优点。发电厂均以三相交流电的方式向用户供电。遇到有单相负载时,可以使用三相中的任一相,如日常生活用电便是取自三相制中的一相。

3.7.1 三相交流电源

由三个幅值相等、频率相同、相位互差 120° 的单相交流电源所构成的电源称为三相交流电源。三相交流电源一般来自三相交流发电机或变压器副边的三相绕组。图 3-28 是三相交流发电机的示意图。

发电机的固定部分称为定子,其铁心的内圆周表面冲有沟槽,放置结构完全相同的三相绕组 U_1U_2 、 V_1V_2 、 W_1W_2 。它们的空间位置互差 120° ,分别称为 U 相、V 相、W 相。引出线的始端用 U_1 、 V_1 、 W_1 表示,末端用 U_2 、 V_2 、 W_2 表示。

转动的磁极称为转子,转子铁心上绕有直流励磁绕组。当转子被原动机拖动做匀速转动时,三相定子绕组切割转子磁场而产生三相交流电动势。

若将三个绕组的末端 U_2 、 V_2 、 W_2 连在一起引出一根连线称为**中性线 N**(中性线接地时又称为零线),三个绕组的始端 U_1 、 V_1 、 W_1 分别引出的三根线称为**端线 L_1 、 L_2 、 L_3** (中性线接地时又称为**火线**),这种连接称为电源的星形连接,如图 3-29 所示。

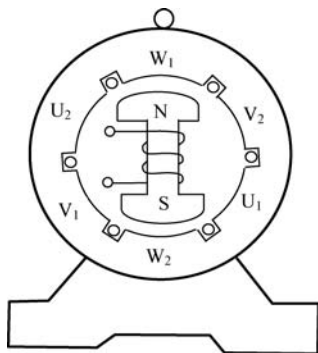


图 3-28 三相交流发电机示意图

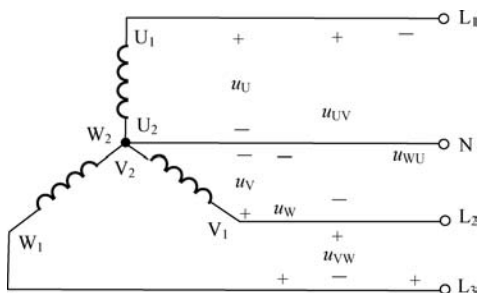


图 3-29 三相交流电源的星形连接

由三根端线和一根中性线所组成的供电方式称为三相四线制,只用三根端线组成的供电方式称为三相三线制。

三相电源每相绕组两端的电压称为**相电压**,其参考方向规定为从绕组始端指向末端,瞬时值分别用 u_U 、 u_V 、 u_W 表示,有效值用 U_P 表示。

三相交流电源相电压的瞬时值表达式为

$$\begin{cases} u_U = \sqrt{2}U_P \sin \omega t \\ u_V = \sqrt{2}U_P \sin(\omega t - 120^\circ) \\ u_W = \sqrt{2}U_P \sin(\omega t - 240^\circ) = \sqrt{2}U_P \sin(\omega t + 120^\circ) \end{cases} \quad (3-59)$$

其波形图和相量图如图 3-30 所示。

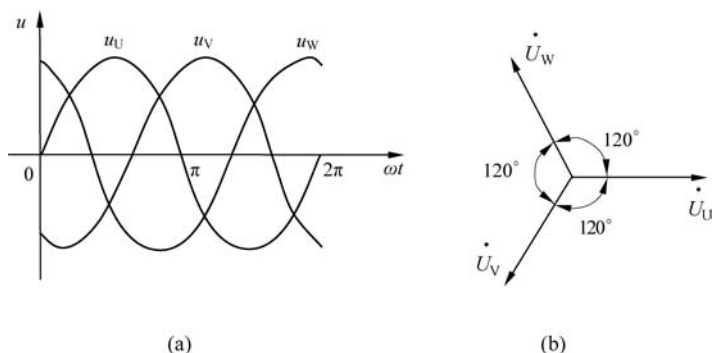


图 3-30 三相交流电源相电压的波形图和相量图

三相交流电源任意两根端线之间的电压称为**线电压**,分别用 u_{UV} 、 u_{VW} 、 u_{WU} 表示,其中的下标 UV、VW、WU 为各电压的参考方向。线电压和相电压之间的关系为

$$\begin{cases} u_{UV} = u_U - u_V \\ u_{VW} = u_V - u_W \\ u_{WU} = u_W - u_U \end{cases} \quad (3-60)$$

或用相量表示为

$$\begin{cases} \dot{U}_{UV} = \dot{U}_U - \dot{U}_V \\ \dot{U}_{VW} = \dot{U}_V - \dot{U}_W \\ \dot{U}_{WU} = \dot{U}_W - \dot{U}_U \end{cases} \quad (3-61)$$

用相量法进行计算得到三个线电压也是对称三相电压,如图 3-31 所示。设 U_L 表示线电压的有效值,从相量图上可以看出

$$\frac{1}{2}U_L = U_P \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}U_P$$

即

$$U_L = \sqrt{3}U_P \quad (3-62)$$

则有

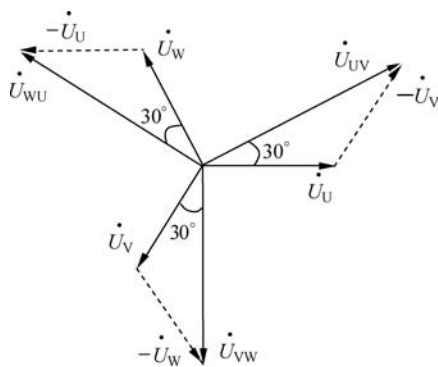


图 3-31 相电压与线电压的相量图

$$\begin{cases} u_{UV} = U_L \sin(\omega t + 30^\circ) = \sqrt{3} U_P \sin(\omega t + 30^\circ) \\ u_{VW} = U_L \sin(\omega t - 90^\circ) = \sqrt{3} U_P \sin(\omega t - 90^\circ) \\ u_{WU} = U_L \sin(\omega t + 150^\circ) = \sqrt{3} U_P \sin(\omega t + 150^\circ) \end{cases} \quad (3-63)$$

式(3-63)表明,三个线电压的有效值相等,均为相电压有效值的 $\sqrt{3}$ 倍。线电压的相位超前对应的相电压相位 30° 。线电压、相电压均为三相电压。

通常的三相四线制低压供电系统线电压为 380V ,相电压为 220V ,可以提供两种电压供负载使用。一般常提到的三相供电系统的电源电压都是指其线电压。

3.7.2 三相负载的连接

根据三相负载所需电压不同,三相负载有两种连接方式:星形(Y)连接和三角形(Δ)连接。

若负载所需的电压是电源的相电压,像电照明负载、家用电器等,应当将负载接到端线与中线之间。当负载数量较多时,应当尽量平均分配到三相电源上,使三相电源得到均衡的利用,这就构成了负载的星形连接,如图3-32(a)所示。

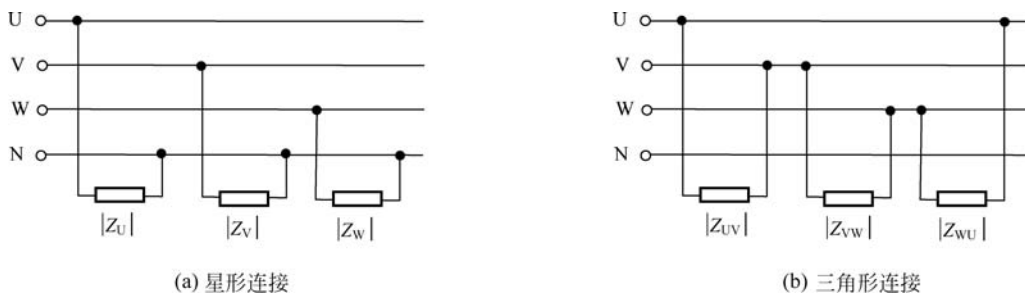


图 3-32 三相负载的两种连接方式

若负载所需的电压是电源的线电压,如电焊机、功率较大的电炉等,应当将负载接到端线与端线之间。当负载数量较多时,应当尽量平均分配到三相电源上,这就构成了负载的三角形连接,如图3-32(b)所示。

若三相电源上接入的负载完全相同,即阻抗值相同、阻抗角相等的负载,称为三相对称负载,如三相电动机、三相变压器等,它们均有三个相同的绕组。

1. 负载的星形连接

图3-33为三相负载的星形连接。每相负载两端的电压是电源的相电压,每相负载中的电流称为相电流 $I_P(I_{UN}, I_{VN}, I_{WN})$;每根端线上的电流称为线电流 $I_L(I_U, I_V, I_W)$;中线上的电流称为线电流 I_N 。

由图3-33可得各相负载电流的有效值为

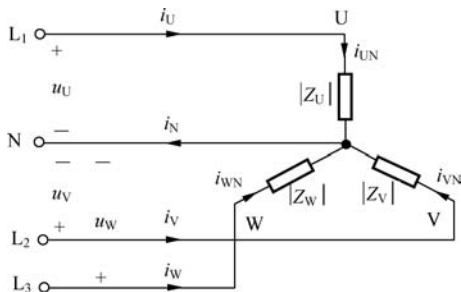


图 3-33 三相负载的星形连接

$$\begin{cases} I_{UN} = \frac{U_{UN}}{|Z_U|} \\ I_{VN} = \frac{U_{VN}}{|Z_V|} \\ I_{WN} = \frac{U_{WN}}{|Z_W|} \end{cases} \quad (3-64)$$

各端线电流等于对应的各相电流,即

$$I_U = I_{UN} \quad I_V = I_{VN} \quad I_W = I_{WN} \quad (3-65)$$

根据 KCL 得中性线电流为

$$i_N = i_{UN} + i_{VN} + i_{WN} = i_U + i_V + i_W \quad (3-66)$$

$$\dot{I}_N = \dot{I}_U + \dot{I}_V + \dot{I}_W \quad (3-67)$$

下面分两种情况讨论。

(1) 对称三相负载。

阻抗值相等、阻抗角相等且为同性质的负载即为对称三相负载。即

$$|Z_U| = |Z_V| = |Z_W| = |Z_P| \quad (3-68)$$

$$\varphi_U = \varphi_V = \varphi_W = \varphi_P \quad (3-69)$$

对称三相负载星形连接时,各相电流大小相等,相位依次互差 120° ,其电流瞬时值代数和、相量和均为零,中线电流为零,电流的波形图和相量图如图 3-34 所示。即

$$I_{UN} = I_{VN} = I_{WN} = I_P \quad (3-70)$$

$$i_N = i_{UN} + i_{VN} + i_{WN} = 0 \quad (3-71)$$

$$\dot{I}_N = \dot{I}_{UN} + \dot{I}_{VN} + \dot{I}_{WN} = 0 \quad (3-72)$$

因此,星形连接的三相对称负载,中性线可以省去,采用三相三线制供电。低压供电系统中的动力负载(电动机)就采用这样的供电方式。

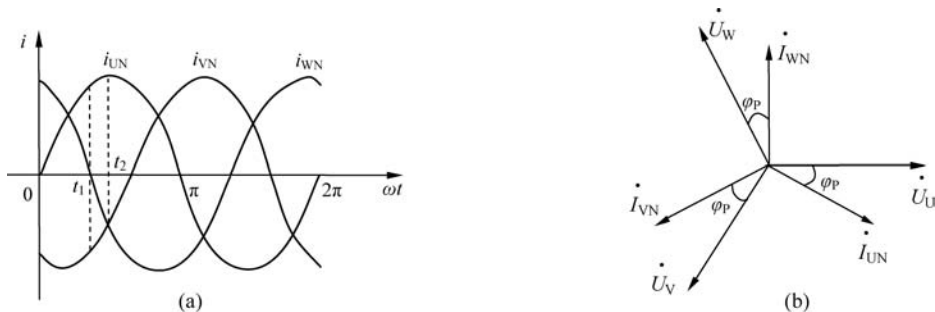


图 3-34 对称三相负载星形连接时电流的波形图和相量图

(2) 不对称三相负载。

三相负载不对称时,中性线电流不为 0,中性线不能省去,一定采用三相四线制供电。

中性线的存在,保证了每相负载两端的电压是电源的相电压,保证了三相负载能独立正常工作,各相负载有变化时都不会影响到其他相。如果中性线断开,中性线电流被切断,各相负载两端的电压会根据各相负载阻抗值的大小重新分配。有的相可能低于额定电压使负载不能正常工作;有的相可能高于额定电压以至将用电设备损坏,这是不允许的。因此,中

性线决不能断开,在中性线上不能安装开关、熔断器等装置。

2. 负载的三角形连接

图 3-35 为三相负载的三角形连接。每相负载两端的电压都是电源的线电压。各负载中流过的电流为负载的相电流,其有效值为

$$I_{UV} = \frac{U_{UV}}{|Z_{UV}|} \quad I_{VW} = \frac{U_{VW}}{|Z_{VW}|} \quad I_{WU} = \frac{U_{WU}}{|Z_{WU}|} \quad (3-73)$$

由基尔霍夫电流定律可确定各端线电流与各相电流之间的关系为

$$\dot{I}_U = \dot{I}_{UV} - \dot{I}_{WU} \quad \dot{I}_V = \dot{I}_{VW} - \dot{I}_{UV} \quad \dot{I}_W = \dot{I}_{WU} - \dot{I}_{VW} \quad (3-74)$$

假设三相负载为对称感性负载,每相负载上的电流均滞后于对应的电压 φ 角。图 3-36 示出了三角形连接时各相电流与各线电流的相量图。

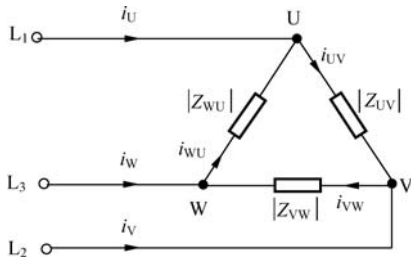


图 3-35 三相负载的三角形连接

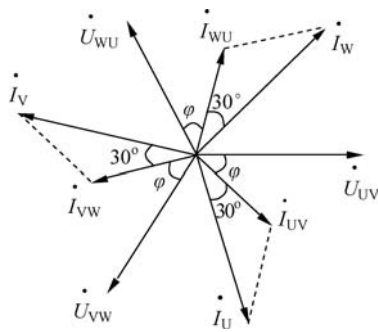


图 3-36 三相对称感性负载三角形连接时各相电流及各线电流的相量图

由相量图可知,三个相电流、三个线电流均为数值相等、相位互差 120° 的三相对称电流,可以证明,线电流等于 $\sqrt{3}$ 倍的相电流,即

$$I_L = \sqrt{3} I_P \quad (3-75)$$

【例 3-4】 三相对称负载,每相 $R = 6\Omega$, $X_L = 8\Omega$,接到 $U_L = 380V$ 的三相四线制电源上,试分别计算负载做星形连接、三角形连接时的相电流和线电流。

【解】 负载做星形连接时,每相负载两端承受的是电源的相电压,即

$$U_{UN} = U_{VN} = U_{WN} = U_P = 220V$$

每相负载的阻抗值为

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(\Omega)$$

相电流为

$$I_P = \frac{U_P}{|Z|} = \frac{220}{10} = 22(A)$$

线电流等于相电流,即

$$I_L = I_P = 22A$$

负载做三角形连接时,每相负载两端承受的是电源的线电压,即

$$U_{UV} = U_{VW} = U_{WU} = U_L = 380V$$

相电流为

$$I_P = \frac{U_P}{|Z|} = \frac{380}{10} = 38(\text{A})$$

线电流等于 $\sqrt{3}$ 倍相电流,即

$$I_L = \sqrt{3} I_P = \sqrt{3} \times 38 = 66(\text{A})$$

3.7.3 三相电路的功率

三相交流电路可以看成是三个单相交流电路的组合,因此,三相交流电路的有功功率、无功功率为各相电路有功功率、无功功率之和。无论负载是星形连接还是三角形连接,当三相负载对称时,电路总的有功功率、无功功率均是每相负载有功功率、无功功率的3倍,即

$$P = 3P_P = 3U_P I_P \cos\varphi \quad (3-76)$$

$$Q = 3Q_P = 3U_P I_P \sin\varphi \quad (3-77)$$

在实际中,线电流的测量比较容易,因此,三相功率的计算常用线电流 I_L 、线电压 U_L 表示,有

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi \quad (3-78)$$

$$Q = \sqrt{3} U_L I_L \sin\varphi \quad (3-79)$$

而视在功率

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} U_L I_L \quad (3-80)$$

【例 3-5】 计算例 3-4 中负载做星形、三角形连接时的有功功率、无功功率和视在功率。

【解】 负载做星形连接时

$$I_L = I_P = 22\text{A} \quad U_L = \sqrt{3} U_P = 380\text{V}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{|Z|} = \frac{6}{10} = 0.6 \quad \sin\varphi = \frac{X_L}{|Z|} = \frac{8}{10} = 0.8 \quad (\text{参考图 3-23 所示阻抗三角形})$$

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi = \sqrt{3} \times 380 \times 22 \times 0.6 \approx 8688(\text{W}) \approx 8.7(\text{kW})$$

$$Q = \sqrt{3} U_L I_L \sin\varphi = \sqrt{3} \times 380 \times 22 \times 0.8 \approx 11584(\text{V} \cdot \text{A}) \approx 11.6(\text{kV} \cdot \text{A})$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} U_L I_L = \sqrt{3} \times 380 \times 22 \approx 14480(\text{V} \cdot \text{A}) \approx 14.5(\text{kV} \cdot \text{A})$$

负载做三角形连接时

$$I_L = 66\text{A} \quad U_L = 380\text{V}$$

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi = \sqrt{3} \times 380 \times 66 \times 0.6 \approx 26063(\text{W}) \approx 26(\text{kW})$$

$$Q = \sqrt{3} U_L I_L \sin\varphi = \sqrt{3} \times 380 \times 66 \times 0.8 \approx 34751(\text{V} \cdot \text{A}) \approx 34.8(\text{kV} \cdot \text{A})$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} U_L I_L = \sqrt{3} \times 380 \times 66 \approx 43438(\text{V} \cdot \text{A}) \approx 43(\text{kV} \cdot \text{A})$$

思考题与习题

【3-1】 已知 $i_1 = 15\sin(314t + 45^\circ)\text{A}$, $i_2 = 10\sin(314t - 30^\circ)\text{A}$ 。

(1) 试问 i_1 和 i_2 的相位差等于多少?

(2) 画出 i_1 和 i_2 的波形图;

(3) 比较 i_1 和 i_2 的相位,谁超前,谁滞后?

【3-2】 已知 $i_1 = 15\sin(100\pi t + 45^\circ)\text{A}$, $i_2 = 15\sin(200\pi t - 15^\circ)\text{A}$, 两者的相位差为 60° , 对不对?

【3-3】 10A 的直流电流和最大值 $I_m = 12\text{A}$ 的交流电流分别通入阻值相同的电阻, 问在一个周期内哪个电阻的发热量大?

【3-4】 已知两正弦电流 $i_1 = 8\sin(314t + 60^\circ)\text{A}$, $i_2 = 6\sin(314t - 30^\circ)\text{A}$ 。试画出相量图。

【3-5】 有一个灯泡接在 $u = 311\sin(314t + \pi/6)\text{V}$ 的交流电源上, 灯丝炽热时电阻为 484Ω 。

(1) 试写出流过灯丝的电流瞬时值表达式;

(2) 如果每天用电 4 小时, 每月按 30 天计, 问一个月用电多少?

【3-6】 什么是感抗? 它的大小与哪些因素有关? 图 3-17(a) 所示电路中, 已知 $L = 20\text{mH}$, $u = 220\sqrt{2}\sin(314t + \pi/6)\text{V}$ 。

(1) 试求感抗 X_L ;

(2) 写出电流瞬时值的表达式;

(3) 计算电感的无功功率 Q_L ;

(4) 画出 $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 的相量图;

(5) 若电源频率增大一倍, 对感抗 X_L 和电流 i 有何影响?

【3-7】 什么是容抗? 它的大小与哪些因素有关? 图 3-19(a) 所示电路中, 已知 $u = 220\sqrt{2}\sin 100\pi t\text{V}$, $C = 5\mu\text{F}$ 。

(1) 试求容抗 X_C ;

(2) 写出电流瞬时值的表达式;

(3) 计算电容的无功功率 Q_C ;

(4) 画出 $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 的相量图。

【3-8】 日光灯管与镇流器接到交流电源上, 可以看成是 R 、 L 串联电路。若已知灯管的等效电阻 $R_1 = 280\Omega$, 镇流器的电阻和电感分别为 $R_2 = 20\Omega$, $L = 1.65\text{H}$, 电源电压 $U = 220\text{V}$ 。

(1) 试求电路中的电流;

(2) 计算灯管两端与镇流器上的电压, 这两个电压加起来是否等于 220V ?

【3-9】 图 3-37 所示电路中, 除 A 和 V 外, 其余电流表和电压表的读数在图上都已标出(都是指正弦量的有效值), 试求电流表 A 和电压表 V 的读数。

【3-10】 电路如图 3-21(a) 所示, 若将其接到 15V 的交流电源上, 设电阻 $R = 10\Omega$, 电感 $L = 3\text{mH}$, $C = 160\text{pF}$, 求谐振时:

(1) f_0 和 Q ;

(2) 电流 I_0 和电感电压 U_L 、电容电压 U_C 。

【3-11】 在图 3-38 所示电路中, 电源电压 $U = 10\text{V}$, 角频率 $\omega = 3000\text{rad/s}$, 调节电容使电路达到谐振。谐振时, 电流 $\dot{I}_0 = 100\text{mA}$, 电容电压 $\dot{U}_{C_0} = 200\text{V}$, 试求 R 、 L 、 C 的值及电路的品质因数。

【3-12】 三相交流电源做星形连接, 若其相电压为 220V , 线电压为多少? 若线电压为

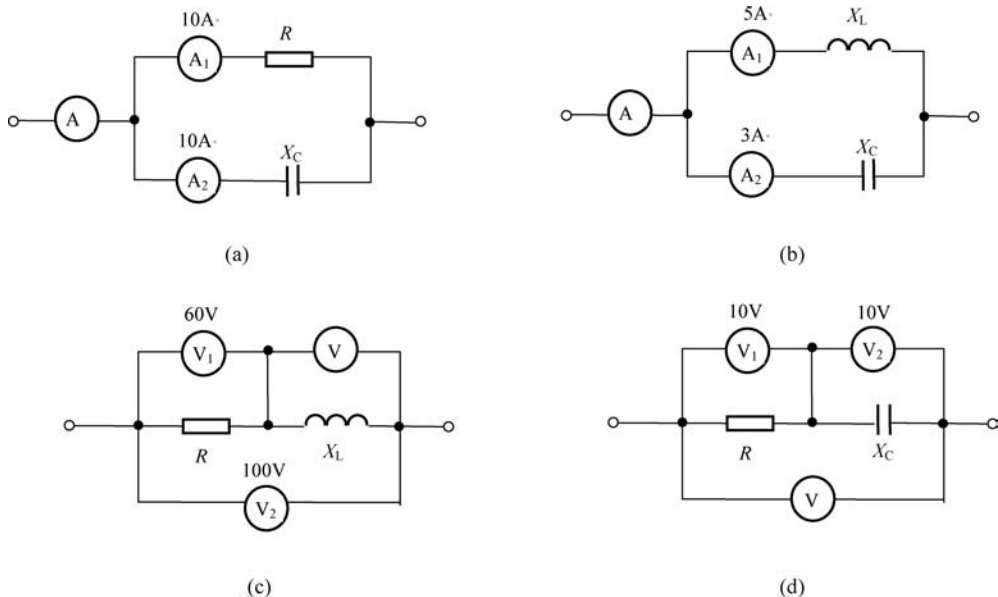


图 3-37 题 3-9 的图

220V, 相电压为多少?

【3-13】 根据三相交流电源相电压与线电压的关系, 若已知线电压, 试写出相电压与线电压的关系式。

【3-14】 三相负载的阻抗值相等, 是否就可以肯定它们一定是三相对称负载?

【3-15】 如图 3-39 所示, 三只额定电压为 220V, 功率为 40W 的白炽灯, 做星形连接接在线电压为 380V 的三相四线制电源上, 若将端线 L_1 上的开关 S 闭合和断开, 对 L_2 和 L_3 两相的白炽灯亮度有无影响? 若取消中线成为三相三线制, L_1 线上的开关 S 闭合和断开, 通过各相灯泡的电流各是多少?

【3-16】 三相对称负载, 每相 $R=5\Omega$, $X_L=5\Omega$, 接在线电压为 380V 的三相电源上, 求三相负载做星形连接、三角形连接时, 相电流、线电流、三相有功功率、三相无功功率各是多少?

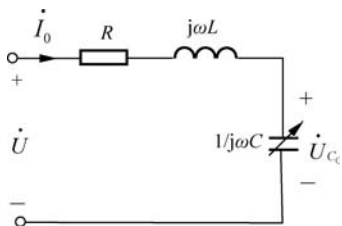


图 3-38 题 3-11 的图

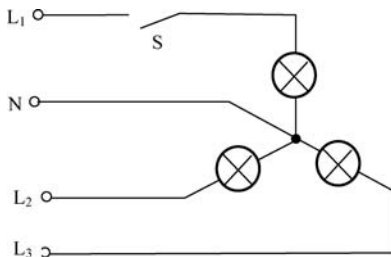


图 3-39 题 3-16 的图