

第3章 一元积分



本章解读

本章题目考点解读

试题编号	亮点 1	亮点 2
第 1 题	定积分的奇偶对称	反常积分
第 2 题	有理函数积分	积分结果不含反三角函数
第 3 题	非对称图形旋转体体积	
第 4 题	极限函数	反常积分
第 5 题	定积分计算图形面积	定积分计算旋转体体积
第 6 题	含对数的反常积分审敛	含三角函数的反常积分审敛
第 7 题	原函数的存在性	变限函数的导数
第 8 题	定积分的奇偶对称	周期函数的积分
第 9 题	积分递推关系	夹逼定理
第 10 题	利用二阶导比较积分值	
第 11 题	积分比较大小	
第 12 题	含变限函数的分部积分	高阶导数
第 13 题	含导函数的分部积分	
第 14 题	函数平均值	
第 15 题	确定积分的上限	
第 16 题	含反正切的积分	
第 17 题	微分等式	有理函数积分
第 18 题	含指数的积分	分段积分
第 19 题	含瑕点的积分	由秩求矩阵参数
第 20 题	反常积分收敛求参数	
第 21 题	反常积分收敛的个数	
第 22 题	极坐标曲线围成的面积	
第 23 题	双纽线面积	矩阵等价
第 24 题	按 x 分段的积分	伴随矩阵的行列式
第 25 题	参数方程曲线围成的面积	旋转体体积
第 26 题	定积分求图形面积	
第 27 题	旋转体体积	
第 28 题	积分中值定理	积分极限
第 29 题	含对数的反常积分审敛	
第 30 题	旋转体体积	极值点个数
第 31 题	函数平均值	



试题编号	亮点 1	亮点 2
第 32 题	积分值比较大小	
第 33 题	曲线弧长	曲线的曲率
第 34 题	曲线形心的横坐标	
第 35 题	余割的积分	
第 36 题	区间再现	
第 37 题	射线对质点引力的计算	
第 38 题	抽水做功的计算	
第 39 题	水压力的计算	
第 40 题	含对数的反常积分审敛	
第 41 题	伽马函数	
第 42 题	定积分抵消	
第 43 题	互补的定积分	
第 44 题	变限函数的渐近线	
第 45 题	反常积分审敛	
第 46 题	绕非坐标轴旋转的旋转体体积	
第 47 题	周期函数的平均值	周期函数的积分



1. 下列积分计算正确的有()。

① 由奇函数积分性质可得 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx = 0$

② 由奇函数积分性质可得 $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{x^2} dx = 0$

③ 由偶函数积分性质可得 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\ln(1+x^2)} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\ln(1+x^2)} dx$

④ 由偶函数积分性质可得 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(A) 1 个

(B) 2 个

(C) 3 个

(D) 4 个

2. 若不定积分 $\int \frac{3x+a}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$ 的结果中不含反三角函数, 则常数 a 满足 _____。

3. 曲线 $y=e^x$ 与直线 $x+y=e+1$ 及 y 轴所围成的平面图形为 D , 则图形 D 绕直线 $y=e$ 旋转一周得到的旋转体体积 V 为_____。

4. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}})$, 其中 $x > 0$, 则 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{(1+x)^2} dx =$ _____。

5. 设由曲线 $y = \ln x$ 、该曲线过原点的切线和 y 轴围成的无界图形为 D , 若 D 的面积为 A , 图形 D 绕 y 轴旋转一周得到的立体体积为 V , $\frac{V}{A} = (\quad)$ 。

(A) $\frac{\pi e}{2}$ (B) $\frac{2\pi}{e}$ (C) $\frac{\pi e}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{e}$

6. 关于反常积分, 下列说法正确的有()。

① 设 m, n 是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性与 m, n 取值均无关

② 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $0 < \alpha < 2$

③ 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x (\ln x)^k}{2+x^2} dx$ ($k \in (-\infty, +\infty)$) 的敛散性与 k 无关

④ 若反常积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$ 收敛, 则 $m < 1$ 且 $n < 1$

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

7. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 常数 a 等于 $\mathbf{A}^3$ 的秩, 若 $f(x) = \begin{cases} a, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $F(x) =$

$\int_0^x f(t) dt$, 则下列说法正确的有()。

- ① $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续
 ② $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但在 $x=0$ 点不可导
 ③ $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且满足 $F'(x) = f(x)$
 ④ $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 但不一定满足 $F'(x) = f(x)$
 ⑤ $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不存在原函数
 ⑥ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内不存在原函数

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

8. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则()是正确的。

- (A) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx \neq 0$
 (B) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx \neq 2 \int_0^a f(x) dx$
 (C) 若 $f(x)$ 为非奇非偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx \neq 0$
 (D) 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的奇函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 也是以 T 为周期的函数

9. 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n=0, 1, 2, \dots)$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} =$ _____。

10. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$, 则()。

- (A) $\int_{-1}^1 f(x) dx > 0$ (B) $\int_{-1}^1 f(x) dx < 0$
 (C) $\int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^1 f(x) dx$ (D) $\int_{-1}^0 f(x) dx < \int_0^1 f(x) dx$

11. $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx, I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx, I_3 = \int_0^\pi f(x) dx$, 其中 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt$,

则下列说法正确的是()。

- (A) $I_1 > I_2 > I_3$ (B) $I_3 > I_1 > I_2$ (C) $I_3 > I_2 > I_1$ (D) $I_2 > I_3 > I_1$

12. 设 $a = \int_0^\pi f(x) dx$, 其中 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 则 $g(x) = x^2 a^x$ 的高阶导数 $g^{(n)}(x) =$ _____。

13. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t) dt = e^{x^2} - 1$, 则 $\int_0^1 x f'(2x) dx =$ ()。

- (A) $\frac{7}{4}e^4 + \frac{1}{4}$ (B) $\frac{7}{4}e^4 - \frac{1}{4}$ (C) $\frac{5}{3}e^4 + \frac{1}{3}$ (D) $\frac{5}{3}e^4 - \frac{1}{3}$

14. 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 则函数 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均值为 _____。

15. 若 $\int_0^a \sqrt{1 - e^{-2x}} dx = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $a =$ _____。

16. 不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx =$ _____。

17. 设 $y = f(x)$ 是 $[0, 2]$ 上的连续函数, 且在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} \Delta x + o(\Delta x)$, 已知 $y(0) = 0$, 定积分 $\int_0^2 x f(x) dx =$ _____。

18. 设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, 则函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ 的表达式为_____。

19. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, 若存在三阶非零矩阵 B , 使得 $AB = O$, 则积分 $\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x - x^2|}} =$ _____。

20. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则()。

(A) $\alpha < -2$ (B) $\alpha > 2$ (C) $-2 < \alpha < 0$ (D) $0 < \alpha < 2$

21. 下列广义积分收敛的有()。

① $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ ② $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ ③ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ ④ $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[3]{x}} dx$

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

22. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 曲线的极坐标方程为 $\rho = e^{a\theta}$ ($a > 0$), 若齐次方程 $Ax = 0$ 有非零解,

则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为_____。

23. 若参数 a 能使 $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价, 则曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$ 所围成的区域面积为_____。

24. 已知 $\mathbf{A}$ 是三阶方阵, $|\mathbf{A}| = \sqrt{2}$, $a = \frac{1}{2} |\mathbf{A}^*|$, 设函数 $f(x) = \int_0^a |t^2 - x^2| dt$, $f(x)$ 的最小值为_____。

25. (数学三不要求) 已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t) \\ y = \cos t \end{cases} \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2}\right)$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(t) > 0 \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ 。若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 此曲线 L 与 x 轴及 y 轴围成无边界的区域 D 。
- (1) 函数 $f(t)$ 的表达式为_____。
- (2) 区域 D 的面积为_____。
- (3) 区域 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为_____。

26. 在曲线 $y = e^{-x} (x \geq 0)$ 上找一点, 使过该点的切线与两个坐标轴所围平面图形的面积最大, 该点的横坐标为_____。

27. 曲线 $y = e^{-x}$, x 轴, y 轴和直线 $x = \xi (\xi > 0)$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为 $V(\xi)$, 若常数 a 满足 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi)$, 则 $a =$ _____。

28. 设 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续, $0 < a < b$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = (\quad)$ 。
- (A) 0 (B) $f(0) \ln \frac{b}{a}$ (C) $f(0) \ln \frac{a}{b}$ (D) $f(0) \ln \frac{1+a}{b}$
29. 设 m, n 是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的敛散性()。
- (A) 仅与 m 的取值有关 (B) 仅与 n 的取值有关
(C) 与 m, n 取值都有关 (D) 与 m, n 取值都无关
30. 设曲线 $y = x^2 e^{-x^2}$ 。
- (1) 其渐近线方程为_____；
(2) 曲线与其渐近线所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为_____；
(3) 曲线极值点的个数为()。
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
31. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续非负函数, 且 $f(x) \cdot \int_0^x f(x-t) dt = \sin^4 x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的平均值为_____。
32. 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k=1, 2, 3)$, 则有()。
- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$ (C) $I_2 < I_3 < I_1$ (D) $I_2 < I_1 < I_3$

33. (数学三不要求)若曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 。

(1) 曲线的弧长为 _____;

(2) $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为 _____。

34. (数学三不要求)曲线 $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ 的形心的横坐标 $\bar{x} = (\quad)$ 。

(A) $\frac{2}{\pi}R$

(B) $\frac{\pi}{2}R$

(C) $\frac{3}{\pi}R$

(D) $\frac{\pi}{3}R$

35. 不定积分 $\int \sec^3 x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

36. 计算下列定积分:

(1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) $I = \int_0^2 \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x} + \sqrt{x+2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}。$

37. 在平面上,有一条从点 $(a, 0)$ 向右的射线,线密度为 ρ 。在点 $(0, h)$ 处(其中 $h > 0$)有一质量为 m 的质点,则射线对该质点的引力为 _____。

38. 一容器的内侧是由图 3-1 中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y$ ($y \geq \frac{1}{2}$) 与 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \leq \frac{1}{2}$) 连接而成。若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做的功为 _____。(长度单位: m, 重力加速度为 $g \text{ m/s}^2$, 水的密度为 10^3 kg/m^3)

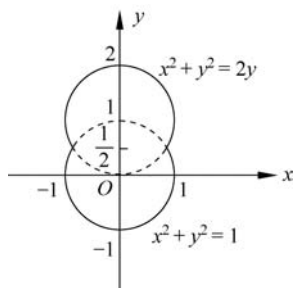


图 3-1

39. 某闸门的形状与大小如图 3-2 所示, 其中直线 l 为对称轴, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成。当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 $5:4$, 闸门矩形部分的高 $h =$ _____。

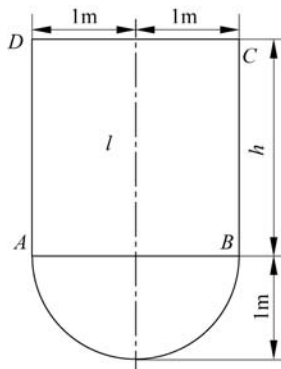


图 3-2

40. 设 $p > 0, q > 0$, 若积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 收敛, 则必有()。

(A) $p > 1, q > 1$ (B) $p > 1, q < 1$ (C) $p < 1, q > 1$ (D) $p < 1, q < 1$

41. 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^7 (1+x) e^{-x^2} dx =$ _____。

42. 不定积分 $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx =$ _____。

43. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx =$ _____。

44. 设函数 $f(x) = \int_1^x \frac{u e^{\arctan u}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ 。

(1) 函数 $f(x)$ 的表达式为 _____；

(2) 曲线 $y=f(x)$ 的渐近线为 _____。

45. 若广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ ($0 < q < p$) 收敛, 则参数 p, q 的取值范围分别为 _____。

46. 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 确定, 则图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积为 _____。

47. 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} =$ _____。