

第3章

电路基本定理

内容提要：本章主要介绍线性网络的相关定理，其指出了线性电路的基本性质，是分析线性电路的重要依据。本章首先介绍叠加定理和替代定理，然后运用这两个定理推导出戴维南定理和诺顿定理，进而介绍特勒根定理和互易定理，最后简单介绍对偶原理的概念。

重点：叠加定理、戴维南定理和诺顿定理。

难点：各电路定理应用的条件；电路定理应用中受控源的处理；含有受控源的一端口电阻网络的输入电阻的求解。

3.1 线性电路的比例性

由线性元件(包括线性受控源)和独立源组成的电路称为线性电路。独立源是电路的输入,对电路起激励的作用,而电路中其他元件(或者其他部分)的电压和电流是激励引起的响应。在线性电路中,响应和激励之间存在线性关系。

例如,对于如图 3-1-1 所示单一激励的线性电路,可得

$$i_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} u_S \quad (3-1-1)$$

由式(3-1-1)可知,因为 R_1 、 R_2 、 R_3 均为常数,所以 i_1 正比于 u_S 。显然,若 u_S 变为原来的 K 倍, i_1 也变为原来的 K 倍。在该电路中,其他任何一处的电压和电流与激励 u_S 都存在这种线性关系,称为线性电路的比例性或齐次性。

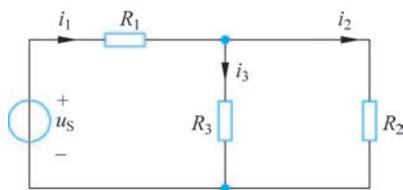


图 3-1-1 比例性示例

对于含有多个激励源的线性电阻电路,设电路由 m 个电压源和 n 个电流源共同激励,则任一响应电流(或电压) A 的数学表达式有如下一般化形式:

$$A = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_{S_k} + \sum_{q=1}^n \beta_q i_{S_q} \quad (3-1-2)$$

其中, α_k 、 β_q 是由电路结构和元件参数决定的常数, u_{S_k} 是第 k 个电压激励, i_{S_q} 是第 q 个电流激励。线性电路的比例性或齐次性可描述为:当所有激励同时变为原来的 K 倍时,响应也相应地变为原来的 K 倍,即

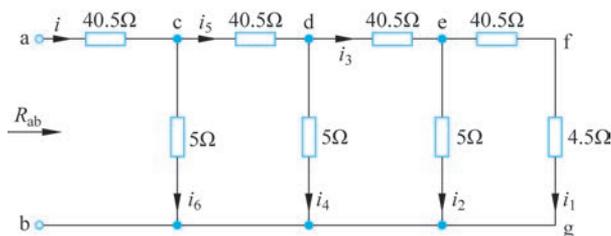
$$B = \sum_{k=1}^m \alpha_k (K u_{S_k}) + \sum_{q=1}^n \beta_q (K i_{S_q}) = K \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k u_{S_k} + \sum_{q=1}^n \beta_q i_{S_q} \right) = K A \quad (3-1-3)$$

需要注意的是:

- (1) 激励是指独立源,且是所有激励同时变为原来的 K 倍;
- (2) 当只有一个激励时,响应与激励成正比。

该性质提供了解决节点数很多的梯形网络问题的简单方法,即倒退法。下面用示例说明这种方法的应用。

【例 3-1-1】 对于如例图 3-1-1 所示的电路,(1)当端口电压 $U_{ab} = 50\text{V}$ 时,求输出电压 u_{fg} ; (2)计算端口等效电阻 R_{ab} 。



例图 3-1-1

解：(1) 由电路结构可知，该电路有 4 个节点(不考虑简单节点)、4 个网孔，能用前两章学过的各种方法求解，但却很复杂。此处尝试利用线性电路的齐次性求解。

先假定 $i_1 = 1\text{A}$ ，根据电路的结构和特点，则可以依次计算得到

$$u'_{fg} = 4.5\text{V}, \quad u'_{eg} = 45\text{V}, \quad i_2 = \frac{u'_{eg}}{5} = \frac{45}{5}\text{A} = 9\text{A}, \quad i_3 = i_1 + i_2 = 10\text{A}$$

$$u'_{dg} = 40.5i_3 + 45 = (40.5 \times 10 + 45)\text{V} = 450\text{V}, \quad i_4 = \frac{u'_{dg}}{5} = \frac{450}{5}\text{A} = 90\text{A}$$

$$i_5 = i_3 + i_4 = (10 + 90)\text{A} = 100\text{A}, \quad u'_{cg} = 40.5i_5 + 450 = (40.5 \times 100 + 450)\text{V} = 4500\text{V}$$

$$i_6 = \frac{u'_{cg}}{5} = \frac{4500}{5}\text{A} = 900\text{A}, \quad i = i_5 + i_6 = (100 + 900)\text{A} = 1000\text{A}$$

$$u'_{ab} = 40.5i + 4500 = (40.5 \times 1000 + 4500)\text{V} = 45000\text{V}$$

而实际端口电压 $u_{ab} = 50\text{V}$ ，则 $K = \frac{50}{45000} = \frac{1}{900}$ 。

所以，由线性电路的齐次性可得

$$u_{cg} = Ku'_{cg} = \frac{1}{900} \times 4500\text{V} = 5\text{V}, \quad u_{dg} = Ku'_{dg} = \frac{1}{900} \times 450\text{V} = 0.5\text{V}$$

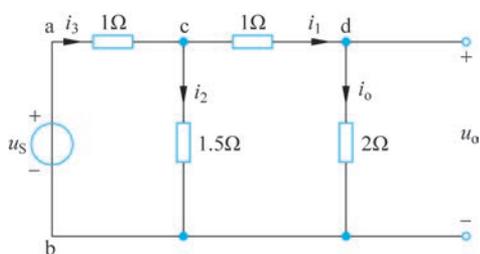
$$u_{eg} = Ku'_{eg} = \frac{1}{900} \times 45\text{V} = 0.05\text{V}, \quad u_{fg} = Ku'_{fg} = \frac{1}{900} \times 4.5\text{V} = 0.005\text{V}$$

(2) 端口等效电阻为

$$R_{ab} = \frac{u'_{ab}}{i} = \frac{45000}{1000}\Omega = 45\Omega$$

本题所用的方法称为倒退法。

【例 3-1-2】 求如例图 3-1-2 所示梯形网络的输出电压 u_o 与输入电压 u_s 的比值。



例图 3-1-2

解：本题仅求 u_o 与 u_s 的比值，所以用倒退法即可。设 $u_o = 1\text{V}$ ，则

$$i_o = i_1 = \frac{1}{2}\text{A}$$

$$u_{cb} = u_{cd} + u_o = 1 \times i_1 + u_o = 1.5\text{V}$$

$$i_2 = \frac{u_{cb}}{1.5} = \frac{1.5}{1.5}\text{A} = 1\text{A}$$

$$i_3 = i_2 + i_1 = (1 + 0.5)\text{A} = 1.5\text{A}$$

$$u_s = i_3 + 1.5 = (1.5 + 1.5)\text{V} = 3\text{V}$$

所以

$$H = \frac{u_o}{u_s} = \frac{1}{3}$$

其中， H 称为转移电压比。

通常，对于单一激励的线性时不变电路，其响应与激励之比定义为网络函数，即

$$H = \frac{\text{响应}}{\text{激励}}$$

网络函数可以认为是表征给定电路由输入端到某一指定输出端之间电路整体性质的参数。随着电路向集成化发展,人们关心的往往不是单个元件的性质,而是电路整体特性的表现。

【应用拓展】

线性电路的比例性(或称齐次性)反映的是支路电压或支路电流与电路中独立源取值的关系。假设电路中有 n 个独立源,取值分别为 x_1, x_2, \dots, x_n ,令 y 表示电路中任一支路电压或支路电流,则 y 可以表示为 x_1, x_2, \dots, x_n 的函数,即

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

对于线性电路而言,比例性是指函数 $f(\cdot)$ 满足性质:

$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = kf(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

对于单一独立源($n=1$)的情形,可简化为

$$f(kx) = kf(x)$$

其物理意义为:当电路中所有独立源的取值变为原来的 k 倍时,电路中各支路电压和支路电流将按比例变为原取值的 k 倍。利用线性电路这一性质,可以有效提高电路分析的效率。

【思考与练习】

3-1-1 在第1、2章中各找出一个例子用以表明只含电阻元件时转移电压比总小于1,含有受控源或运放时转移电压比则可能大于1。

3-1-2 判断下面说法是否正确:

- (1) 所有的电路都具有比例性。
- (2) 激励包括独立源和受控源,且比例性是指所有激励同时增大 K 倍。
- (3) 线性电路中响应和激励成正比。

3.2 线性电路的叠加性及叠加定理

3.2.1 叠加性

线性电路的另一个性质是叠加性,即在若干激励共同作用的线性电路中,任一元件上的响应(电流或电压)等于各个激励源单独作用时在该元件上响应(电流或电压)的代数和。

现在通过一个示例来说明这一性质。如图3-2-1所示电路,求电流 i_1 。

根据支路电流法可得

$$\begin{cases} \text{对节点 ① 列 KCL 方程: } -i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ \text{对左回路列 KVL 方程: } R_1 i_1 + R_3 i_3 = u_1 \\ \text{对右回路列 KVL 方程: } R_2 i_2 + R_3 i_3 = u_2 \end{cases} \quad (3-2-1)$$

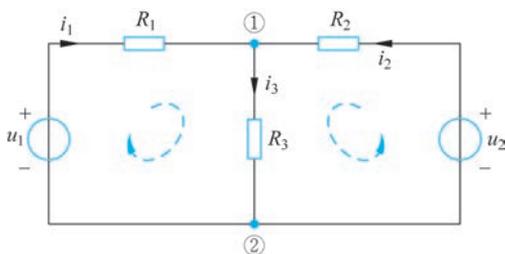


图 3-2-1 线性电路叠加性

用行列式求解上述方程组,得

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = -R_1R_2 - R_2R_3 - R_1R_3$$

$$\Delta i_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ u_1 & 0 & R_3 \\ u_2 & R_2 & u_1 \end{vmatrix} = -u_1R_2 + u_2R_3 - u_1R_3$$

$$i_1 = \frac{\Delta i_1}{\Delta} = \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}u_1 - \frac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}u_2$$

可以看出, i_1 由两项组成,而每一项只与一个激励有关。

若将式中第一项设为

$$i_1' = \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}u_1$$

第二项设为

$$i_1'' = \frac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}u_2$$

则

$$i_1 = i_1' - i_1''$$

由分析可知, i_1' 是该电路在 $u_2 = 0$, 即将 u_2 短路, 而由 u_1 单独作用时, 在 R_1 中产生的电流[如图 3-2-2(b)所示]; i_1'' 是该电路在 $u_1 = 0$, 即将 u_1 短路, 而由 u_2 单独作用时, 在 R_1 中产生的电流[如图 3-2-2(c)所示]。由于 i_1'' 的方向与 i_1 的参考方向相反, 所以带负号。同理, 可推出

$$i_2 = i_2'' - i_2'$$

$$i_3 = i_3' + i_3''$$

这一示例说明了线性电路满足叠加性。

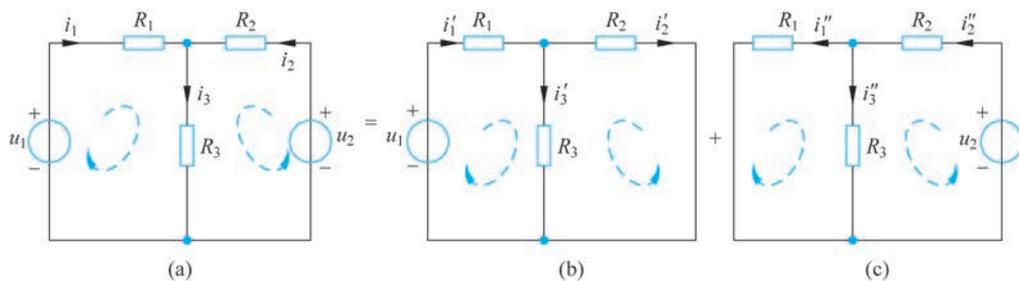


图 3-2-2 叠加定理示例

3.2.2 叠加定理^①

在含有 n 个独立源的线性电路中,在电路中任何一处的电流或电压都可以看成由电路中各个独立源(电压源、电流源)分别作用时,在该处所产生的电流或电压的代数和,这就是叠加定理。

叠加定理在线性电路的分析中起着重要作用,它是分析线性电路的基础。线性电路中很多定理都与叠加定理有关。应用叠加定理计算和分析电路时,可以把一个复杂的多电源电路分解为几个简单的单电源电路的叠加,也可以把所有的电源分成电源组的叠加,使复杂电路问题简单化。

应用叠加定理分析支路电流(或电压)的求解步骤如下:

- (1) 设原电路各支路电流(或电压)的参考方向。
- (2) 将多电源电路转换为单电源电路(或电源组)的叠加。除源的方法是把理想电压源短路,理想电流源开路,受控源保留。
- (3) 求出单电源电路中各支路电流(或电压)。
- (4) 由单电源电路中各支路电流(或电压)的代数和求各支路总电流(或电压)。当单电源电流(或电压)与原电流(或电压)参考方向相同时,取正值;反之,取负值。

应用叠加定理时应注意以下几点:

- (1) 叠加定理只适用于线性电路,不适用于非线性电路。
- (2) 让一个独立源单独作用时,其余独立源全部置零。除此之外,所有元件的参数和连接方式均不能改动。
- (3) 叠加定理只适用于电流和电压的分析计算,而不适用于功率,因为功率和电流或电压的关系不是线性的函数关系。

【例 3-2-1】 如例图 3-2-1(a)所示电路,已知 $R_1 = 6\Omega, R_2 = 4\Omega$,试用叠加定理求图示电路中的电压 u ,并计算电源向电路提供的总功率。

解: (1) 用叠加定理求电压 u 。

① 将例图 3-2-1(a)所示电路分解为例图 3-2-1(b)和例图 3-2-1(c)所示电路。

② 当电压源单独作用时,电流源应开路,如例图 3-2-1(b)所示。

这时各支路电流分别为

$$i'_1 = i'_2 = \frac{10}{6+4} \text{A} = 1 \text{A}$$

u' 为受控电压源电压与 R_2 上的电压的代数和,即

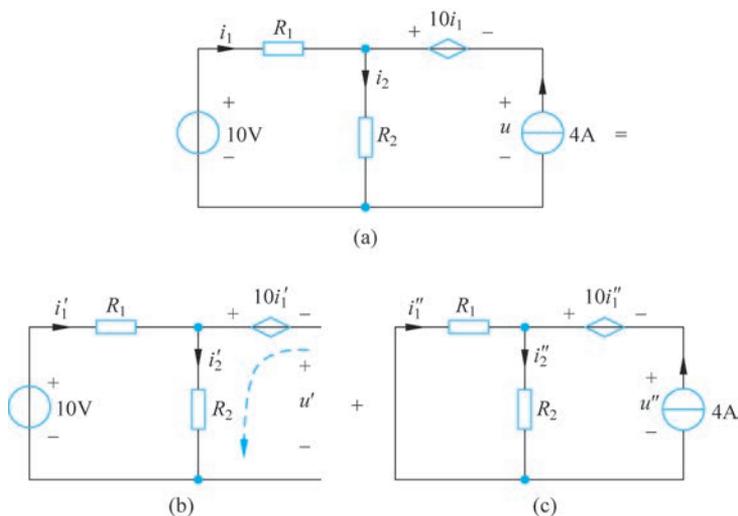
$$u' = -10i'_1 + 4i'_2 = (-10 + 4) \text{V} = -6 \text{V}$$

③ 当电流源单独作用时,电压源应短路,如例图 3-2-1(c)所示。

这时各支路电流分别为

$$i''_1 = -\frac{4}{6+4} \times 4 \text{A} = -1.6 \text{A}$$

^① 叠加定理的 Multisim 仿真实例参见附录 A 例 2-2。



例图 3-2-1

$$i_2'' = \frac{6}{6+4} \times 4\text{A} = 2.4\text{A}$$

u'' 仍为受控电压源电压与 R_2 上的电压的代数和, 即

$$u'' = -10i_1'' + 4i_2'' = (16 + 9.6)\text{V} = 25.6\text{V}$$

故两激励源共同作用时, 如例图 3-2-1(a) 所示, 电压为

$$u = u' + u'' = (-6 + 25.6)\text{V} = 19.6\text{V}$$

(2) 计算电源向电路提供的总功率。

电压源支路的电流为

$$i_1 = i_1' + i_1'' = (1 - 1.6)\text{A} = -0.6\text{A}$$

电压源消耗的功率为

$$P_U = -10i_1 = -10 \times (-0.6)\text{W} = 6\text{W}$$

电压源消耗的功率为 6W, 即提供功率 -6W (由于电压和电流为非关联参考方向, 所以计算消耗功率时公式前带“-”号)。

电流源消耗的功率为

$$P_I = -4u = -4 \times 19.6\text{W} = -78.4\text{W}$$

即电流源提供的功率为 78.4W。

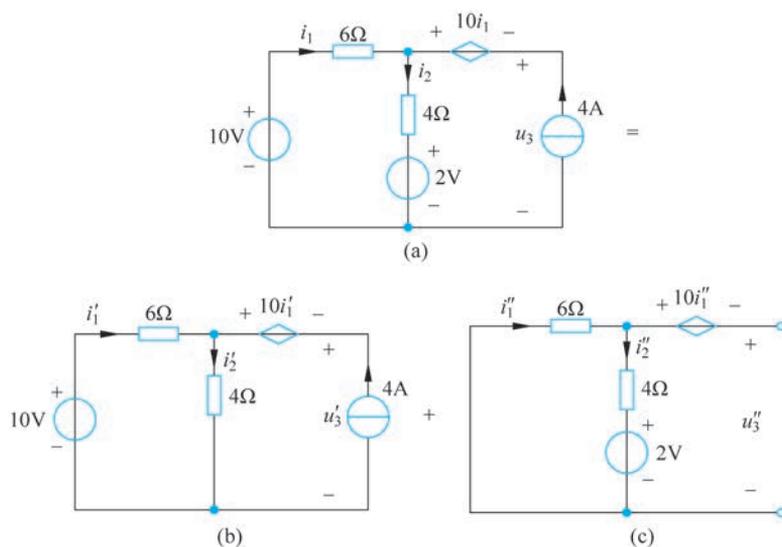
所以, 两电源向电路提供的总功率为

$$P = (78.4 - 6)\text{W} = 72.4\text{W}$$

【例 3-2-2】 将例图 3-2-1(a) 所示电路中的电阻 R_2 处再串接一个 2V 的电压源, 得到如例图 3-2-2(a) 所示电路, 利用例 3-2-1 的结果重新求解 u_3 。

解: 将例图 3-2-2(a) 所示电路分解为例图 3-2-2(b) 和例图 3-2-2(c) 所示电路。

例图 3-2-2(b) 中的 u_3' 已由例 3-2-1 求出, 例图 3-2-2(c) 中的 u_3'' 为 2V 电压源作用的结果。



例图 3-2-2

对于例图 3-2-2(c)所示电路,可得

$$i_1'' = i_2'' = -\frac{2}{6+4} \text{A} = -0.2 \text{A}$$

$$u_3'' = -10i_1'' + 4i_2'' + 2 = [-10 \times (-0.2) + 4 \times (-0.2) + 2] \text{V} = 3.2 \text{V}$$

所以

$$u_3 = u_3' + u_3'' = (19.6 + 3.2) \text{V} = 22.8 \text{V}$$

【例 3-2-3】 将例图 3-2-2(a)所示电路中 2V 的电源增至 8V,利用叠加定理计算电压 u_3 的变化(相对于 2V 时的 u_3)。

解: u_3 的变化为电压源从 2V 增至 8V 所致,所以只要把例图 3-2-2(c)中的电源 2V 改为 6V,计算此时的 u_3'' 即可,即

$$i_1'' = i_2'' = -\frac{6}{6+4} \text{A} = -0.6 \text{A}$$

$$u_3'' = -10i_1'' + 4i_2'' + 6 = 9.6 \text{V}$$

所以, u_3 增加了 9.6V。

【后续知识串联】

◇ 运放构成的求和与加减运算电路

本节所介绍的叠加定理在后续“模拟电子技术基础”课程中集成运放构成的基本运算电路的分析中有所应用。

对于电路形式而言,接入反馈的电路称作闭环电路。处于闭环状态下的运算放大器,可以通过变换反馈回路来改变输出量和输入量之间的运算关系。当多个信号同时作用于集成运放的输入端时,可以首先分别求出各输入电压单独作用时的输出电压,再利用叠加定理将它们的结果相加,便可以得到所有信号共同作用时的输出电压。下面以反

向求和运算电路和加减运算电路为例加以阐释^①。

1. 反向求和运算电路

当多个输入信号同时作用于集成运算放大器的反相输入端时(如图 3-2-3 所示),通过该电路可以实现信号的反向求和。

设 u_{i1} 单独作用,此时应将 u_{i2} 和 u_{i3} 接地,如图 3-2-4 所示。根据理想运算放大器虚短、虚断的条件,可得 R_2 和 R_3 的一端是“地”,一端是“虚地”,流经它们的电流为零。根据反馈回路中 R_1 和 R_f 的值可得出 u_{i1} 单独作用的输出电压为

$$u_{o1} = -\frac{R_f}{R_1}u_{i1} \quad (3-2-2)$$

即实现了反相比例运算。

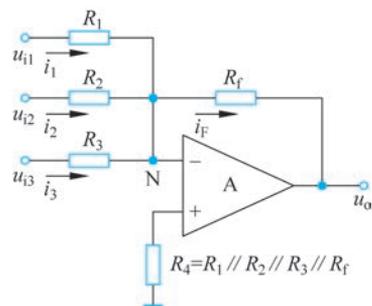


图 3-2-3 反向求和运算电路

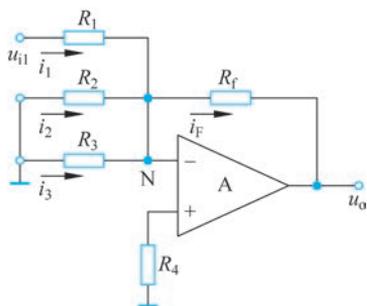


图 3-2-4 输入信号源单独作用时的等效电路

同理,可得出 u_{i2} 和 u_{i3} 单独作用时的输出电压

$$u_{o2} = -\frac{R_f}{R_2}u_{i2}, \quad u_{o3} = -\frac{R_f}{R_3}u_{i3} \quad (3-2-3)$$

最后,利用叠加定理可得到三者共同作用时的输出电压

$$u_o = u_{o1} + u_{o2} + u_{o3} = -\frac{R_f}{R_1}u_{i1} - \frac{R_f}{R_2}u_{i2} - \frac{R_f}{R_3}u_{i3} \quad (3-2-4)$$

即为各信号源单独作用时的输出电压之和,从而实现了求和功能。

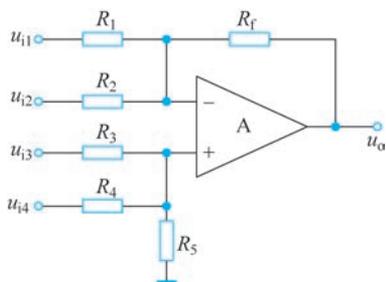


图 3-2-5 加减运算电路

2. 加减运算电路

当多个信号分别同时作用于集成运算放大器的同相端和反相端时,如图 3-2-5 所示,可实现信号的比例加减。

首先计算 4 个输入电压分别单独作用时的输出电压,再分别计算部分输入信号加在反相输入端时的输出电压

$$u_{o1} = -\left(\frac{R_f}{R_1}u_{i1} + \frac{R_f}{R_2}u_{i2}\right) \quad (3-2-5)$$

^① 童诗白,华成英. 模拟电子技术基础[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2015: 281-285.

和其他输入信号加在同相输入端时的输出电压

$$u_{o2} = \frac{R_f}{R_3} u_{i3} + \frac{R_f}{R_4} u_{i4} \quad (3-2-6)$$

电路连接形式如图 3-2-6 所示。

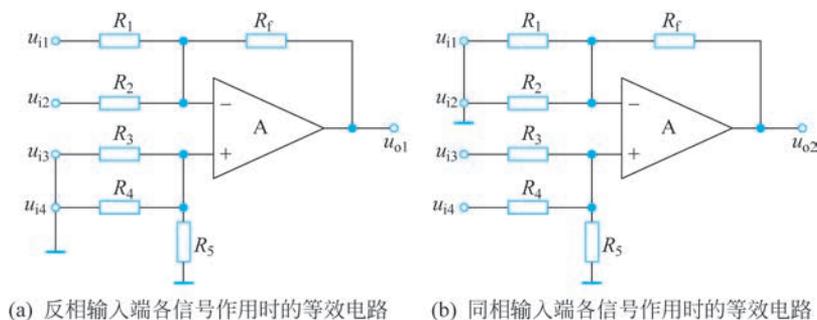


图 3-2-6 利用叠加原理求解时的等效电路

因此,所有输入信号共同作用时的输出电压

$$u_o = u_{o1} + u_{o2} = \left(\frac{R_f}{R_3} u_{i3} + \frac{R_f}{R_4} u_{i4} \right) - \left(\frac{R_f}{R_1} u_{i1} + \frac{R_f}{R_2} u_{i2} \right) \quad (3-2-7)$$

即为各信号源单独作用时的输出电压之和,并且实现了加减运算。

【应用拓展】

线性电路的叠加性(叠加定理)是线性电路的一个重要性质。假设电路中任一支路电压或支路电流 y 与 n 个独立源 x_1, x_2, \dots, x_n 的函数关系为

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

对于线性电路而言,叠加性(叠加定理)是指函数 $f(\cdot)$ 满足性质:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, 0, \dots, 0) + f(0, x_2, \dots, 0) + \dots + f(0, 0, \dots, x_n)$$

其物理意义为,电路中所有独立源共同作用的结果等价于每个独立源单独作用结果的叠加。利用线性电路这一性质,可以将一个含有多个独立源的复杂线性电路分解为多个仅含单一独立源的简单线性电路,达到“化繁为简”和“化整为零、各个击破”的目的。

在线性时不变系统的分析过程中,齐次性和叠加性同样有着重要的应用价值。对于系统分析而言,重点关注的是输出端口响应信号 $y(t)$ 与输入端口激励信号 $x(t)$ 的关系,二者之间同样可以描述为某个函数关系 $y(t) = f[x(t)]$,函数 $f[\cdot]$ 反映了对应系统的功能和特征。线性时不变系统满足如下性质:

$$f[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha f[x_1(t)] + \beta f[x_2(t)]$$

即同时满足齐次性和叠加性。可见,齐次性和叠加性为线性时不变系统中各种组合激励信号的响应信号分析提供了便利。

【思考与练习】

3-2-1 试说明叠加定理的内容,并总结应用叠加定理分析电路的步骤。

3-2-2 应用叠加定理分析电路时,若某个独立源单独作用,其余的电压源应该开路

还是短路？其余的电流源应该开路还是短路？

3-2-3 试判断下列说法是否正确：

- (1) 叠加定理适用于所有电路。
- (2) 让一个独立源单独作用时,其余独立源应该全部置零,但元件的参数和连接方式均不能变动。
- (3) 若电路中有一个电阻改为二极管,叠加定理仍然成立。
- (4) 求功率时,也能够应用叠加定理,即 $P = P_1 + P_2 + \dots$ 。

3.3 替代定理

实际电路可能非常复杂,假设可将整体电路分成两个相连的单口网络 N、M。其中, N 是要分析的目标网络, M 不是分析重点,如图 3-3-1 所示。若已知网络 M 的端口电压 $u(t)$ 或电流 $i(t)$,可否用简单的激励源或等效阻抗替代复杂网络 M? 替代后是否会影响

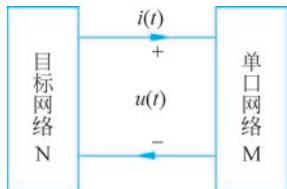


图 3-3-1 两个单口网络组成的实际电路

对网络 N 的分析结果? 若可以替代且不影响目标网络的分析结果,则可以大大简化电路分析。替代定理主要用于解决这类问题。

替代定理具有广泛的应用范围,也可以推广到非线性电路,其表述如下: 给定任一线性或非线性电路,已知第 k 条支路的电压 u_k 和电流 i_k ,只要该支路不是受控源支路,则可以用下列三种元件之一替代:

- (1) 电压值为 u_k 的理想电压源。
- (2) 电流值为 i_k 的理想电流源。
- (3) 电阻值为 $R_k = u_k / i_k$ 的电阻(如果网络为电阻性网络)。

这种替代不改变电路结构和 KCL、KVL 的约束关系,对整个电路的电压、电流不产生任何影响。

如图 3-3-2(a) 所示电路,已知 $u_1 = 20\text{V}$, $u_2 = 4\text{V}$, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 8\Omega$,根据前面的知识可求得 $i_1 = 2\text{A}$, $i_2 = -1\text{A}$, $i_3 = 1\text{A}$, $u_2 = 8\text{V}$ 。

根据替代定理可用以下两种元件替代:

(1) $u_S = u_2 = 8\text{V}$ 的电压源代替支路 2,如图 3-3-2(b) 所示,分析可知替代后原电路工作状态不变。

(2) 用电流 $i_S = i_2 = -1\text{A}$ 的电流源替代支路 2,如图 3-3-2(c) 所示,分析可知替代后原电路工作状态不变。

替代定理的正确性可用电压源、电流源的性质来说明:

当第 k 条支路被一个电压源 u_k 所替代,由于改变后的新电路和原电路的连接是完全相同的,所以两个电路的 KCL 和 KVL 方程也相同。两个电路的全部支路的约束关系,除了第 k 条支路外,也是完全相同的。替代后新电路的第 k 条支路的电压为 $u_S = u_k$,即等于原电路的第 k 条支路电压,而它的电流可以是任意的(电压源的特点)。据假

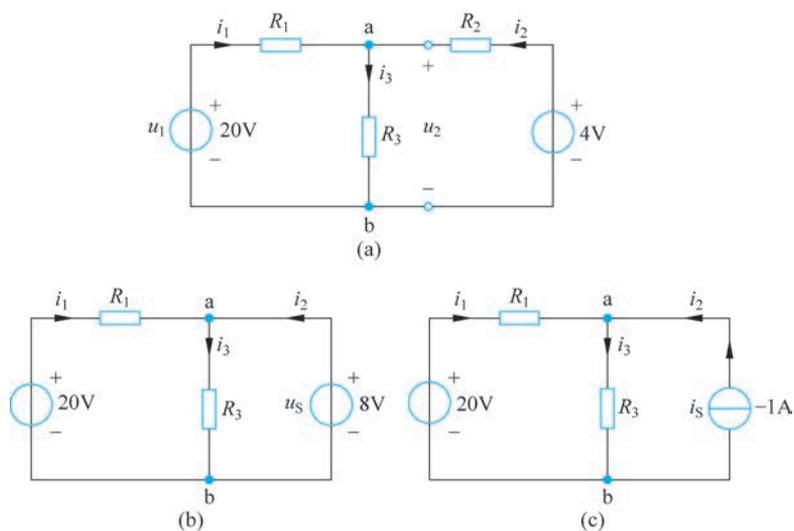


图 3-3-2 替代定理示例

定,电路在改变前后的各支路电压和电流均应是唯一的,而原电路的全部电压和电流又将满足新电路的全部约束关系,也是新电路的唯一解。

根据电流源的特点,其两端电压可以是任意的,第 k 条支路如被一个电流源所替代,原电路的解也将是新电路的唯一解。

【思考与练习】

3-3-1 什么是替代定理?为什么要对某一支路进行替代?

3-3-2 替代定理适用于所有类型的电路还是仅适用于线性电路?应用替代定理的前提条件是什么?

3.4 戴维南定理和诺顿定理

叠加定理可使多个激励或复杂激励电路的求解问题转化为简单激励电路的求解问题,但叠加定理只适用于线性电路。本节提出电路分析中广泛应用的另一类重要定理——戴维南定理和诺顿定理,它们可使结构复杂电路的求解问题转化为结构简单电路的求解问题,对于线性、非线性电路均适用。

在 2.1 节电路的等效变换中,讨论了单口网络的等效性,这类单口网络(或称二端网络)可以用一个电阻支路等效变换。而对于一个既含独立源又含受控源的单口网络,它的等效电路是什么?本节介绍的这两个定理就能解决这一问题。为了叙述方便,将此类单口网络称为含源单口网络。

3.4.1 戴维南定理

1. 戴维南定理的表述

任何一个含源单口网络,不论其结构多么复杂,都可以用一个电压源和电阻的串联

组合等效代替,其中电压源的电压等于该网络的开路电压 u_{oc} , 串联电阻 R_{eq} 等于将外电路断开后该网络内所有独立源置零后的端口电阻,即除源网络的等效电阻,如图 3-4-1 所示。若含源单口网络 N 的端口电压 u 和端口电流 i 取非关联参考方向,则其 VCR 可表示为

$$u = u_{oc} - R_{eq} i \quad (3-4-1)$$

上述电压源和电阻的串联组合称为戴维南等效电路,等效电路中的电阻常称为戴维南等效电阻。

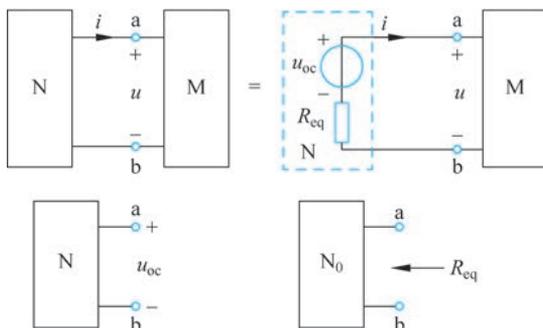


图 3-4-1 戴维南定理

除源的方法: 将独立电压源短路,将独立电流源开路。

一般设定 N 为含源单口网络; M 为任意外电路; N_0 为除源单口网络。

2. 戴维南定理的证明

戴维南定理可以用叠加定理和替代定理来证明。设一线性含源单口网络 N 与任意外电路 M 相连,如图 3-4-2(a)所示。

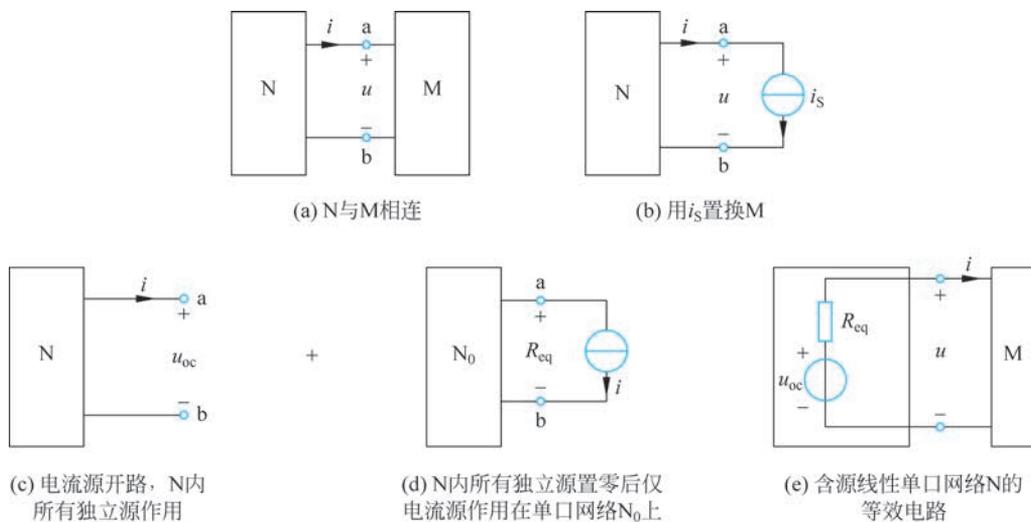


图 3-4-2 戴维南定理的证明

根据替代定理,用 $i_S = i$ 的电流源替代 M,如图 3-4-2(b)所示。由叠加定理可知,图 3-4-2(b)所示电路可以分解为图 3-4-2(c)和图 3-4-2(d)所示电路的叠加。由图可知,含源单口网络的端口电压 u 可以看成电流源 i_S 开路时网络 N 的开路电压 u_{oc} 和网络 N 中所有独立源置零后,仅由电流源 i_S 作用时在网络 N_0 处产生的端口电压 $R_{eq}i$ 的叠加,即 $u = u_{oc} - R_{eq}i$ 。

根据该表达式可以得出,含源单口网络 N 可用电压源与电阻的串联组合来等效,如图 3-4-2(e)所示,这就是戴维南定理。

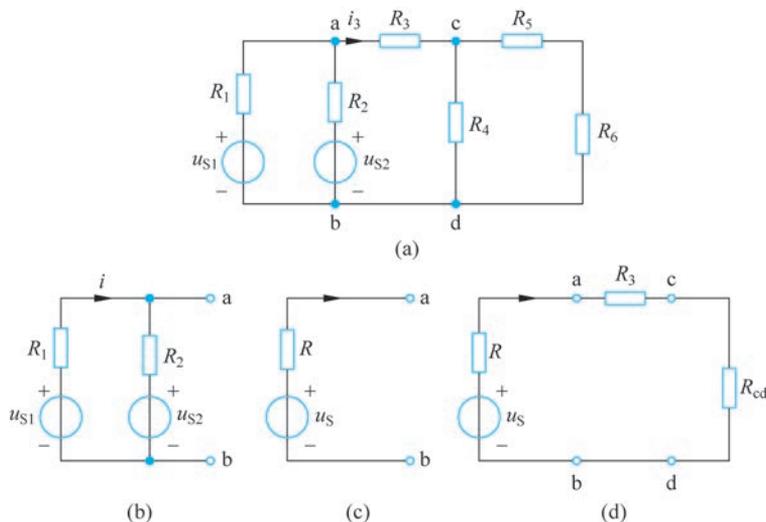
戴维南定理常用以简化一个复杂电路中不需要进行研究的含源网络部分。在有些情况下只需计算一个复杂电路中某一支路(或某一部分)的电压或电流。可以把这个支路(或部分)划出,而把其余部分看成一个含源单口网络,这个含源单口网络对于此支路(或部分)仅相当于一个电源。只要将这个网络用电压源与电阻的串联组合等效代替就可以使问题简单化。

求解含源单口网络的戴维南等效电路,关键是求开路电压 u_{oc} 和等效电阻 R_{eq} 。

求开路电压 u_{oc} 时,可以根据具体电路,选择支路分析法、回路分析法、节点分析法、叠加定理和等效变换等各种方法。

求等效电阻 R_{eq} 时,需要观察含源单口网络是否含有受控源。对于不含受控源的情形,除源后的单口网络仅由电阻元件构成,等效电阻可以通过电阻串联、并联和网络等效变换等方法求出。对于含受控源的情形,要用外施电压法或者短路电流法来求等效电阻。当然,外施电压法和短路电流法同样适用于不含受控源的情形。

【例 3-4-1】 如图例 3-4-1(a)所示电路,已知 $u_{S1} = 40\text{V}$, $u_{S2} = 40\text{V}$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 8\Omega$, $R_6 = 2\Omega$, 求流过 R_3 的电流 i_3 。



例图 3-4-1

解: 首先应用戴维南定理把左侧两条支路组成的一个含源单口网络,如例图 3-4-1(b)所示,用戴维南等效电路替代,如例图 3-4-1(c)所示。

其中

$$R = R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \times 2}{4 + 2} \Omega \approx 1.33 \Omega$$

$$u_S = u_{\text{oc}} = R_2 i + u_{S2} = \frac{u_{S1} - u_{S2}}{R_1 + R_2} R_2 + u_{S2} = \left(\frac{40 - 40}{4 + 2} \times 2 + 40 \right) \text{V} = 40 \text{V}$$

其次,求右边由电阻 R_4 、 R_5 、 R_6 组成的一端口网络的等效电阻 R_{cd} ,即

$$R_{\text{cd}} = \frac{R_4 (R_5 + R_6)}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{10 \times (8 + 2)}{10 + 8 + 2} \Omega = 5 \Omega$$

于是例图 3-4-1(a)可以化简为例图 3-4-1(d)所示电路,则通过电阻 R_3 的电流为

$$i_3 = \frac{u_S}{R + R_3 + R_{\text{cd}}} = \frac{40}{1.33 + 5 + 5} \text{A} \approx 3.53 \text{A}$$

3.4.2 诺顿定理

1. 诺顿定理的表述

诺顿定理是关于线性含源单口网络的并联型等效电路的定理。任何一个含源单口网络都可以用一个电流源和电阻的并联组合代替,如图 3-4-3(b)所示。其中,电流源的电流等于该含源单口网络的短路电流,如图 3-4-3(c)所示;电阻等于该网络中所有独立源置零后的端口等效电阻,如图 3-4-3(d)所示。

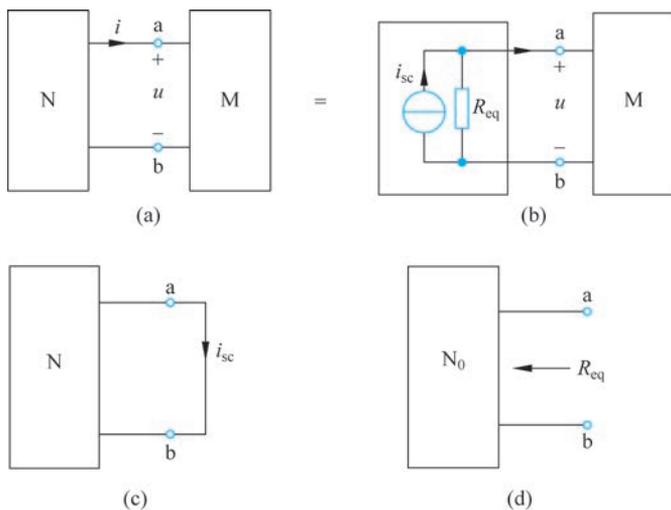


图 3-4-3 诺顿定理

2. 诺顿定理的证明

(1) 如图 3-4-3(a)所示电路中, M 支路用一理想电压源代替,此电压源的电压 u_S 等于被代替的单口网络的端口电压 u ,二者的参考方向也相同,如图 3-4-4(a)所示。

(2) 根据叠加定理,线性含源单口网络 N 的端口电流 i 可以看成两个分量叠加的结

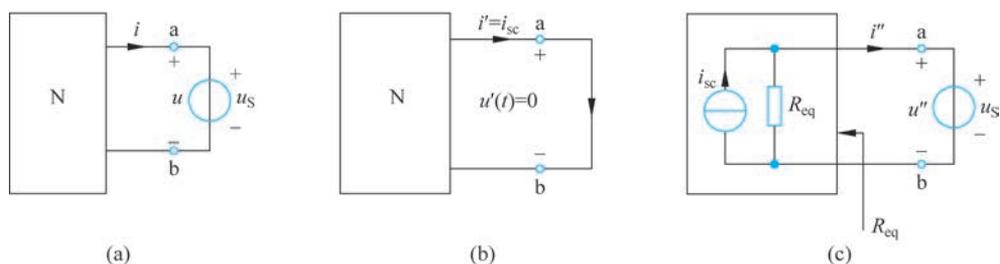


图 3-4-4 诺顿定理的证明

果：一个分量是该网络内部所有独立源共同作用时在网络端口处产生的电流，即端口短路电流 $i' = i_{sc}$ ，如图 3-4-4(b) 所示；另一个分量是仅由该网络外部的电压源单独作用时在同一端口处产生的电流，如图 3-4-4(c) 所示，此时无源网络的等效电阻为 R_{eq} ，有

$$i'' = -\frac{u_S}{R_{eq}} = -\frac{u}{R_{eq}}$$

根据叠加定理，可以确定原线性含源单口网络的端口电流为

$$i = i' + i'' = i_{sc} - \frac{u}{R_{eq}} \quad (3-4-2)$$

根据式(3-4-2)可以得出含源单口网络 N 可用电流源与电阻的并联组合来等效，如图 3-4-4(c) 所示。其中，电流源的电流等于含源单口网络的短路电流 i_{sc} ，电阻等于该网络除源(受控源保留)后的等效电阻 R_{eq} 。

3.4.3 戴维南定理和诺顿定理的转换^①

含源单口网络的戴维南定理与诺顿定理是互为对偶的网络定理，含源单口网络的戴维南等效电路与诺顿等效电路也是互为对偶的，它们可以相互转换。

对于同一个线性电阻性含源单口网络而言，戴维南等效电路和诺顿等效电路的电阻 R_{eq} 相等，而激励之间存在如下关系：

$$i_{sc} = \frac{u_{oc}}{R_{eq}} \quad (3-4-3)$$

或

$$u_{oc} = R_{eq} i_{sc} \quad (3-4-4)$$

从而

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} \quad (3-4-5)$$

这说明，除去独立源的线性电阻性单口网络的端口等效电阻等于原含源单口网络的开路电压与短路电流之比，这是短路电流法求等效电阻 R_{eq} 的依据。利用三个参数 u_{oc} 、 i_{sc} 和 R_{eq} 之间的关系，可以在戴维南等效电路与诺顿等效电路之间灵活转换。

当含源单口网络内存在受控源时，除源后网络呈现电阻性特征，但求解等效电阻 R_{eq}

^① 戴维南/诺顿定理的 Multisim 仿真实例参见附录 A 例 2-3。

不能使用串、并联化简法。此时,可以利用电阻性网络的 VCR 求出等效电阻 R_{eq} ,具体过程为:在除源网络端口施加外部电压源,再求解端口电流,外施电压源电压除以端口电流即得 R_{eq} ,此方法简称外施电压法。另外,也可以采用短路电流法求解 R_{eq} ,具体过程为:先求出含源单口网络的开路电压 u_{oc} 和短路电流 i_{sc} ,用 u_{oc} 除以 i_{sc} 即得 R_{eq} 。下面将通过例题说明用外施电压法和短路电流法求等效电阻 R_{eq} 的具体步骤。

【例 3-4-2】 求如例图 3-4-2(a)所示含源单口网络的戴维南等效电路和诺顿等效电路。(注:单口网络内部有一个电流控制电流源; $i_c=0.75i_1$ 。)

解:(1) 求开路电压 u_{oc} 。

如例图 3-4-2(a)所示,当端口 1-1' 开路时,根据 KCL 得

$$i_2 = i_1 + i_c = 1.75i_1$$

对网孔 1 列 KVL 方程得

$$5 \times 10^3 \times i_1 + 20 \times 10^3 \times i_2 = 40$$

代入 $i_2 = 1.75i_1$,可求得 $i_1 = 1\text{mA}$ 。因此, $i_2 = 1.75\text{mA}$ 。

而开路电压为

$$u_{oc} = 20 \times 10^3 \times i_2 = 35\text{V}$$

(2) 求短路电流 i_{sc} 。

如例图 3-4-2(b)所示,当端口 1-1' 短路时,可求得短路电流 i_{sc} ,即

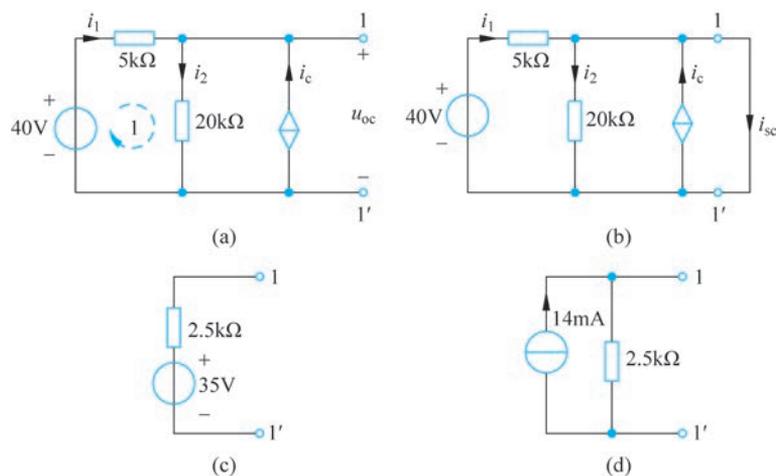
$$i_1 = \frac{40}{5 \times 10^3} \text{A} = 8\text{mA}$$

$$i_{sc} = i_1 + i_c = 1.75i_1 = 1.75 \times 8\text{mA} = 14\text{mA}$$

因此

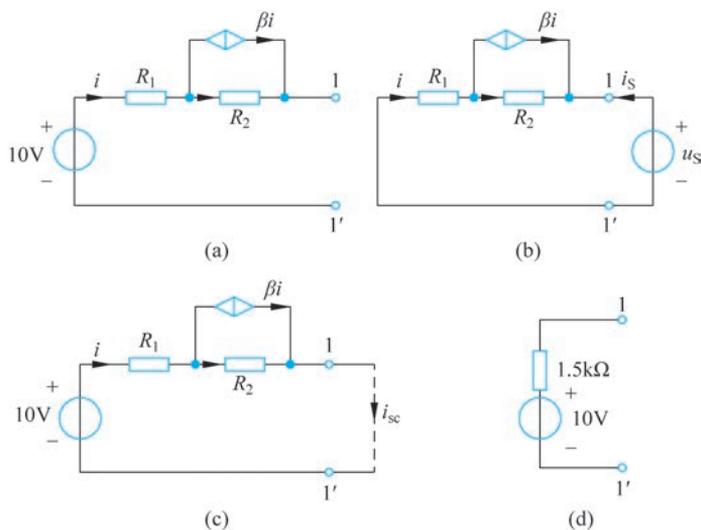
$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{35}{14} \text{k}\Omega = 2.5\text{k}\Omega$$

对应的戴维南等效电路和诺顿等效电路分别如例图 3-4-2(c)和例图 3-4-2(d)所示。



例图 3-4-2

【例 3-4-3】 求如例图 3-4-3(a)所示二端网络的戴维南等效电路,其中 $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$, 电流控制电流源的控制系数 $\beta = 0.5$ 。



例图 3-4-3

解: (1) 求开路电压 u_{oc} : 如例图 3-4-3(a)所示, 开路状态下, 电流 $i = 0\text{A}$, 所以电阻 R_1 和 R_2 上的电压均为 0V , 故 $u_{oc} = u_{11'} = 10\text{V}$ 。

(2) 求等效电阻 R_{eq} : 因为网络内含有受控源, 不能用串、并联化简法, 而可以用外施电压法和短路电流法, 分析如下:

① 外施电压法: 如例图 3-4-3(b)所示, 将 10V 电压源短路, 在 $1-1'$ 端加电压源 u_S , 产生电流 i_S 。由图可知

$$i_S = -i$$

根据 KVL 列出回路方程

$$\begin{aligned} u_S &= -R_1 i - R_2 (i - \beta i) = -i [1 + (1 - 0.5)] \times 10^3 \\ &= -1.5 \times 10^3 i = 1.5 \times 10^3 i_S \quad (\text{因为 } i_S = -i) \end{aligned}$$

根据电阻性网络 VCR, 可得

$$R_{eq} = \frac{u_S}{i_S} = 1500\Omega$$

② 短路电流法: 如例图 3-4-3(c)所示, 将 $1-1'$ 短路, 求短路电流 i_{sc} , 注意此时网络内部所有独立源均应保留。显然, $i_{sc} = i$ 。

根据 KVL, 列出回路方程:

$$10 = R_1 i_{sc} + (i_{sc} - \beta i_{sc}) R_2 = 1.5 \times 10^3 i_{sc}$$

所以

$$i_{sc} = \frac{1}{150} \text{A}$$

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = 1500 \Omega$$

其中, i_{sc} 为诺顿等效电路中电流源的电流。

求出 u_{oc} 和 R_{eq} 即可得到对应的戴维南等效电路, 如例图 3-4-3(d) 所示。

需要强调的是, 用外施电压法求含源单口网络的等效电阻时, 要将原网络内的所有独立源去掉, 外施电压源是该网络的激励; 用短路电流法时, 则要保留原网络内所有独立源, 它们是网络的激励。

综上所述, 诺顿等效电路可以通过两种途径求得。

- (1) 应用短路电流法: 求出 i_{sc} 与 R_{eq} 。
- (2) 利用等效变换: 将戴维南模型等效变换为诺顿模型。

由以上分析可知, 求戴维南等效电路和诺顿等效电路的问题, 实际上是求 u_{oc} 、 i_{sc} 和 R_{eq} 这三个重要参数的问题。戴维南定理和诺顿定理在电路分析中应用广泛, 除前面介绍的求复杂电路中某一支路(或某一部分)的电压、电流时可使问题简化外, 在分析电路中负载获得的最大功率、分析谐振电路或者分析测量仪器引起的测量误差等问题时, 这两个定理也尤为适用。

【思考与练习】

3-4-1 运用外施电压法和短路电流法求戴维南等效电阻时, 对原网络内部电源的处理是否相同? 为什么?

3-4-2 测得一个含源单口网络的开路电压 $u_{oc} = 8\text{V}$, 短路电流 $i_{sc} = 0.5\text{A}$, 试计算外接电阻为 24Ω 时的电流及电压。

3-4-3 某含源单口网络的开路电压为 u_{oc} , 接上负载 R_L 后, 其电压为 u_1 , 试证明该网络的戴维南等效电阻为

$$R_o = \left(\frac{u_{oc}}{u_1} - 1 \right) R_L$$

3-4-4 戴维南和诺顿定理是否适用于非线性电路? 为什么?

3.5 最大功率传输定理

在信息工程、通信工程和电子测量中, 常常遇到电阻负载能从电路中获得最大功率的问题, 这类问题可抽象为图 3-5-1(a) 所示的电路模型来分析。其中, N 为供给电阻负载能量的含源单口网络, 可用戴维南或诺顿等效电路代替, 如图 3-5-1(b)、(c) 所示。需要讨论的问题是: 负载电阻 R_L 为何值时, 可以从含源单口网络获得最大功率? 由图 3-5-1(b) 可知, 负载 R_L 为任意值时吸收功率的表达式为

$$P = i^2 R_L = \left(\frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_L} \right)^2 R_L \quad (3-5-1)$$

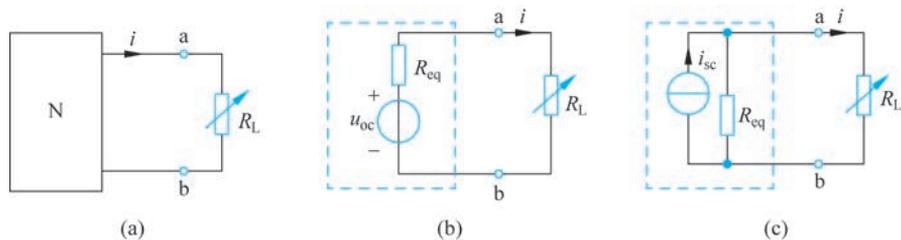


图 3-5-1 最大功率传输定理

显然,当 $\frac{dP}{dR_L} = 0$ 时, P 获得极值,即

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{(R_{eq} - R_L) u_{oc}^2}{(R_{eq} + R_L)^3} = 0$$

由此求得 P 获得极值的条件为

$$R_L = R_{eq} \quad (3-5-2)$$

由于

$$\left. \frac{d^2 P}{dR_L^2} \right|_{R_L=R_{eq}} = -\frac{u_{oc}^2}{8R_{eq}^3} < 0$$

所以,式(3-5-2)是负载电阻 R_L 从单口网络获得最大功率的条件。

最大功率传输定理: 含源线性单口网络传递给可变电阻负载 R_L 最大功率的条件是负载 R_L 应与单口网络的端口等效电阻 R_{eq} 相等。满足条件 $R_L = R_{eq}$ 时,称为最大功率匹配,此时负载获得的最大功率为

$$P_{max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}} \quad (3-5-3)$$

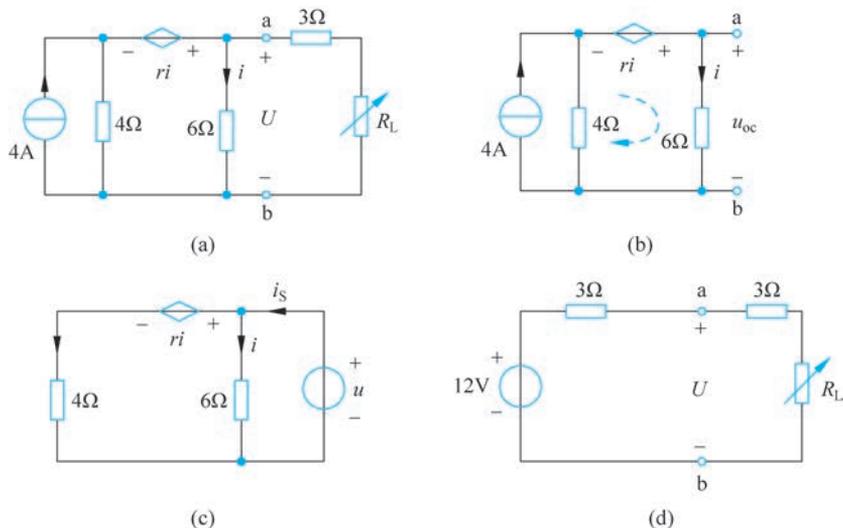
对于图 3-5-1(c)所示的诺顿等效电路,令 $G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$,则有

$$P_{max} = \frac{i_{sc}^2}{4G_{eq}} \quad (3-5-4)$$

需要指出的是,最大功率传输定理是在含源网络 N 固定,而 R_L 可变的条件下得出的。若含源网络 N 内阻 R_0 (即 R_{eq}) 可变,而 R_L 固定,则应使 R_0 尽量减小,才能使 R_L 获得更大功率。当 $R_0 = 0$ 时, R_L 获得最大功率,当然这是一种理想状态。

不难发现,满足最大功率匹配条件时, R_{eq} 与 R_L 吸收的功率相等,对电压源而言,功率传输效率 $\eta = 50\%$ 。在信息工程、通信工程和电子测量中,常常着眼于提取微弱信号并获得最大功率,而不看重效率的高低,所以最大功率匹配是以上各领域非常关注的问题。在电力系统中,则要求尽可能提高效率,以便充分地利用能源。

【例 3-5-1】 如例图 3-5-1(a)所示电路,已知 $r=2\Omega$,求电阻 R_L 获得的最大功率。



例图 3-5-1

解: 求 ab 左端单口网络的戴维南等效电路,问题即可解决。

(1) 如例图 3-5-1(b)所示,断开 a、b 右侧支路,求开路电压 u_{oc} 。

列出中间网孔的 KVL 方程

$$6 \times i + 4 \times (i - 4) - 2 \times i = 0$$

解得

$$i = 2\text{A}$$

所以,开路电压为

$$u_{oc} = 6 \times i = 6 \times 2\text{V} = 12\text{V}$$

(2) 如例图 3-5-1(c)所示,断开 4A 电流源,用外施电压法求端口等效电阻 R_{eq} 。显

然, $i = \frac{u}{6}$ 。根据 KCL,列出节点电流方程

$$i_S = i + \frac{u - ri}{4} = 0.5i + \frac{u}{4} = 0.5 \times \frac{u}{6} + \frac{u}{4} = \frac{u}{3}$$

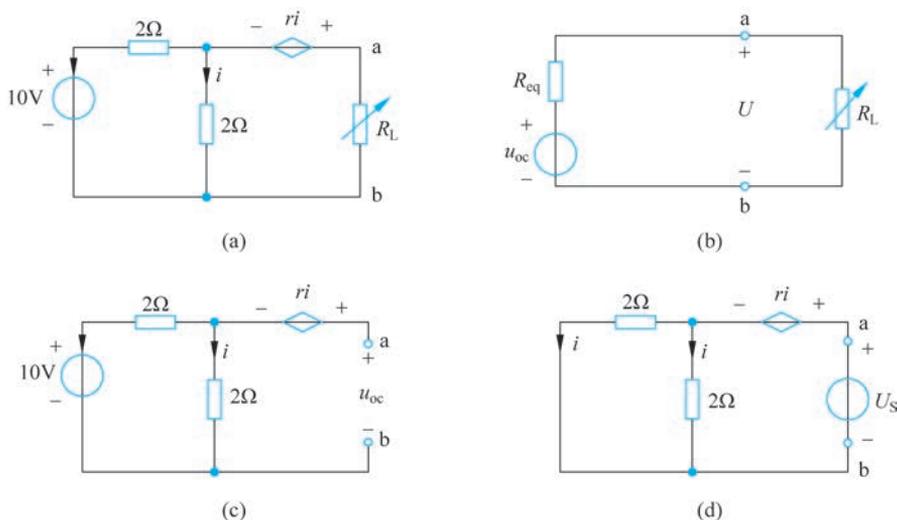
求得

$$R_{eq} = \frac{u}{i_S} = 3\Omega$$

因此,戴维南等效电路如例图 3-5-1(d)所示。所以,当 $R_L = 6\Omega$ 时获得最大功率,最大功率为

$$P_{\max} = \frac{12^2}{4 \times 6} \text{W} = 6\text{W}$$

【例 3-5-2】 如例图 3-5-2(a)所示电路,已知 $r=3\Omega$,求电阻 R_L 为何值时可获得最大功率?



例图 3-5-2

解: 根据题意,在如例图 3-5-2(a)所示电路的节点 a、b 处断开负载电阻 R_L ,求出含源单口网络的戴维南等效电路,可得如例图 3-5-2(b)所示的等效电路。

如例图 3-5-2(c)所示,可求得开路电压

$$u_{oc} = ri + 2i = 3i + 2i = 5i = 5 \times \frac{10}{2+2} \text{V} = 12.5 \text{V}$$

如例图 3-5-2(d)所示,采用外施电压法求等效电阻 R_{eq} 。

根据 KVL,右侧网孔电压方程为

$$U_S = ri + 2i$$

根据 KCL,显然电压源 U_S 的输出电流为 $2i$ 。

所以,可求出等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{U_S}{2i} = \frac{ri + 2i}{2i} = \frac{r + 2}{2} = \frac{3 + 2}{2} \Omega = 2.5 \Omega$$

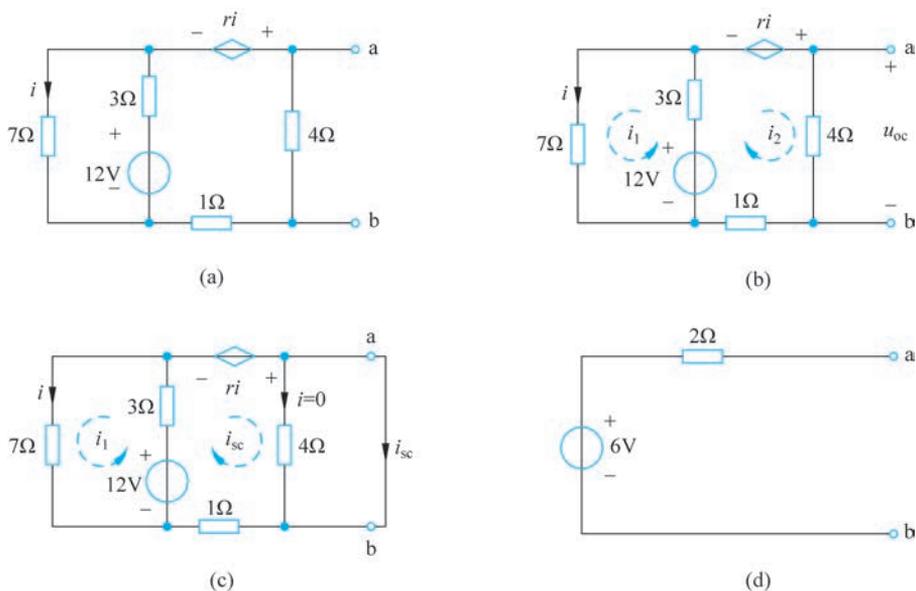
显然,当 $R_L = R_{eq} = 2.5\Omega$ 时获得最大功率,最大功率为

$$P_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{12.5^2}{4 \times 2.5} \text{W} = 15.625 \text{W}$$

【例 3-5-3】 如例图 3-5-3(a)所示电路,已知 $r=3\Omega$,求该单口网络向外传输的最大功率。

解: 根据题意,首先建立如例图 3-5-3(a)所示含源单口网络的戴维南等效电路。

如例图 3-5-3(b)所示,选定回路并设定回路电流的参考方向,应用回路电流法求 u_{oc} 。



例图 3-5-3

列出回路方程

回路 1: $(7+3)i_1 + 3i_2 = 12$

回路 2: $3i_1 + (3+4+1)i_2 = 12 + 3i_1$

整理得

回路 1: $10i_1 + 3i_2 = 12$

回路 2: $8i_2 = 12$

解得

$$i_1 = 0.75\text{A}, \quad i_2 = 1.5\text{A}$$

开路电压为

$$u_{oc} = 4i_2 = 4 \times 1.5\text{V} = 6\text{V}$$

如例图 3-5-3(c)所示,连接 a、b,应用短路电流法求 R_{eq} 。

由图可知,此时 4Ω 电阻支路被短路,无电流流过。根据两网孔电流的参考方向,列出网孔方程:

网孔 1: $(7+3)i_1 + 3i_{sc} = 12$

网孔 2: $3i_1 + (3+1)i_{sc} = 12 + 3i_1$

整理得

网孔 1: $10i_1 + 3i_{sc} = 12$

网孔 2: $4i_{sc} = 12$

解得

$$i_{sc} = 3\text{A}$$

所以,等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{6}{3}\Omega = 2\Omega$$

原含源单口网络的戴维南等效电路如例图 3-5-3(d)所示,该单口网络向外输出的最大功率为

$$P_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{6^2}{4 \times 2} \text{W} = 4.5 \text{W}$$

【应用拓展】

现实生活中,最大功率传输具有重要意义。在电影院、音乐厅、会议室等场景,通过选配合适的功率放大设备与音箱组成适用的音响系统。此时,功率放大设备的输出阻抗与音箱的输入阻抗应该满足匹配条件,以便使音箱发出大音量、高保真度的声音,同时也保证功率放大设备和音箱的安全。图 3-5-2 为典型的音响系统。

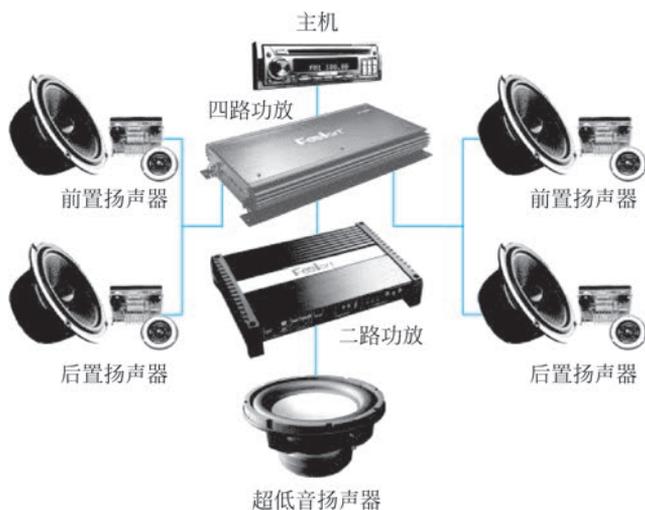


图 3-5-2 典型音响系统

在无线通信系统中,发射机将信息调制到高频电磁波上并进行功率放大,高频电磁波信号通过天线发射出去。如图 3-5-3 所示,发射机的电磁波传输电路必须实现输出阻抗与负载阻抗的“完美”匹配,才能保证电磁波信号无反射传输,实现功率最大化利用。若阻抗不匹配,则会引起严重的反射现象,传输线上将形成驻波,大量的功率消耗在反射功率上,使得能量利用率降低,并因反射功率过大将造成元器件的损坏,引起发射机故障。

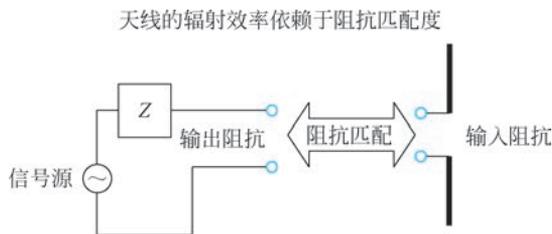


图 3-5-3 天线阻抗匹配

【思考与练习】

3-5-1 若负载 R_L 固定不变,试问单口网络的输出电阻 R_o 为何值时, R_L 可获得最大功率?

3-5-2 当负载 R_L 获得最大功率时,功率传输效率也是最大吗? 为什么?

3.6 特勒根定理

特勒根定理是电路理论中一个重要的定理,其适用于任何集总参数电路,且只与电路的结构有关而与支路性质无关,即特勒根定理适用的范围与基尔霍夫定律相同。特勒根定理有两种形式。

3.6.1 特勒根定理内容

特勒根定理 I (也称为特勒根功率定理): 具有 b 条支路、 n 个节点的任一集总参数电路 N ,各支路电压表示为 u_1, u_2, \dots, u_b ,各支路电流表示为 i_1, i_2, \dots, i_b ,在任一时刻 t ,各支路电压与其支路电流乘积的代数和恒等于零。若所有支路均采用关联参考方向,则有

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0 \quad (3-6-1)$$

该式说明各支路吸收功率的代数和等于零,其是功率平衡关系式,也是功率守恒的具体体现,所以此定理也称为功率守恒定理。

特勒根定理 II (也称为特勒根似功率定理): 具有 b 条支路、 n 个节点的两个任意集总参数电路 N 和 \hat{N} ,它们具有相同的有向图。 N 的各支路电压表示为 u_1, u_2, \dots, u_b ,各支路电流表示为 i_1, i_2, \dots, i_b ; \hat{N} 的各支路电压表示为 $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_b$,各支路电流表示为 $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_b$ 。在任一时刻 t ,网络 N 的各支路电压(或电流)与网络 \hat{N} 对应支路的电流(或电压)乘积的代数和恒等于零。若所有支路均采用关联参考方向,可表示为

$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = 0 \quad (3-6-2)$$

$$\sum_{k=1}^b i_k \hat{u}_k = 0 \quad (3-6-3)$$

式中, $u_k \hat{i}_k$ 和 $i_k \hat{u}_k$ 仅仅具有功率的形式,没有物理意义,所以称为似功率。

3.6.2 特勒根定理的证明

下面通过如图 3-6-1 所示的电路有向图证明这两个定理。

特勒根定理 I 证明如下:

图 3-6-1 是某电路的有向图。该电路有 4 个节点、6 条支路。以节点④为参考节点, 设 u_{10} 、 u_{20} 、 u_{30} 分别表示节点①、②、③的节点电压, 根据 KVL 可得出各支路电压与节点电压的关系为

$$\begin{cases} u_1 = u_{10} - u_{20} \\ u_2 = u_{20} - u_{30} \\ u_3 = u_{20} \\ u_4 = -u_{10} \\ u_5 = u_{30} \\ u_6 = -u_{10} + u_{30} \end{cases} \quad (3-6-4)$$

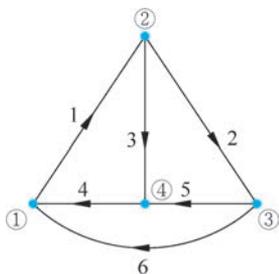


图 3-6-1 特勒根定理的证明

根据 KCL 可得节点①、②、③的方程为

$$\begin{cases} i_1 - i_4 - i_6 = 0 \\ -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_2 + i_5 + i_6 = 0 \end{cases} \quad (3-6-5)$$

而各支路吸收功率的代数和为

$$\sum_{i=1}^6 u_k i_k = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5 + u_6 i_6 \quad (3-6-6)$$

把式(3-6-4)代入式(3-6-6), 整理得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 u_k i_k &= u_{10} (i_1 - i_4 - i_6) + u_{20} (-i_1 + i_2 + i_3) + \\ &\quad u_{30} (-i_2 + i_5 + i_6) \end{aligned} \quad (3-6-7)$$

把式(3-6-5)代入式(3-6-7), 可知式(3-6-7)等于 0, 即

$$\sum_{k=1}^6 u_k i_k = 0 \quad (3-6-8)$$

将这一结论推广到任一具有 n 个节点、 b 条支路的电路, 则有

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0 \quad (3-6-9)$$

特勒根定理 II 证明如下:

设有两个由不同性质的二端元件组成的电路 N 和 \hat{N} , 两电路各元件间的连接情况以及相应支路的参考方向均相同, 即二者的有向图完全相同, 如图 3-6-1 所示。令电路 N 的各支路电压、电流分别为 u_1 、 u_2 、 u_3 、 u_4 、 u_5 、 u_6 和 i_1 、 i_2 、 i_3 、 i_4 、 i_5 、 i_6 ; 电路 \hat{N} 的各支路电压、电流分别为 \hat{u}_1 、 \hat{u}_2 、 \hat{u}_3 、 \hat{u}_4 、 \hat{u}_5 、 \hat{u}_6 和 \hat{i}_1 、 \hat{i}_2 、 \hat{i}_3 、 \hat{i}_4 、 \hat{i}_5 、 \hat{i}_6 。

对于电路 N , 根据 KVL, 可写出式(3-6-4), 对电路 \hat{N} 应用 KCL 可得

$$\begin{cases} \hat{i}_1 - \hat{i}_4 - \hat{i}_6 = 0 \\ -\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_3 = 0 \\ -\hat{i}_2 + \hat{i}_5 + \hat{i}_6 = 0 \end{cases} \quad (3-6-10)$$

将式(3-6-4)代入 $\sum_{k=1}^6 u_k \hat{i}_k$, 可得

$$\sum_{k=1}^6 u_k \hat{i}_k = u_{10}(\hat{i}_1 - \hat{i}_4 - \hat{i}_6) + u_{20}(-\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_3) + u_{30}(-\hat{i}_2 + \hat{i}_5 + \hat{i}_6) \quad (3-6-11)$$

由式(3-6-10)可知, 式(3-6-11)等于 0, 即

$$\sum_{k=1}^6 u_k \hat{i}_k = 0 \quad (3-6-12)$$

同理可得

$$\sum_{k=1}^6 i_k \hat{u}_k = 0 \quad (3-6-13)$$

将以上结论推广到任意两个具有 n 个节点、 b 条支路的电路 N 和 \hat{N} , 当它们所含二端元件的性质各异但有向图完全相同时, 则有

$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = 0 \quad (3-6-14)$$

和

$$\sum_{k=1}^b i_k \hat{u}_k = 0 \quad (3-6-15)$$

特勒根似功率定理仅仅表明了有向图相同的两个电路的似功率必然遵循的数学关系, 没有物理意义, 不能用功率守恒解释。似功率定理也适用于同一电路在不同时刻相应支路的电压和电流。该定理要求 u (或 \hat{u}) 和 i (或 \hat{i}) 应分别满足 KVL 和 KCL。

特勒根定理 II 比定理 I 更引人关注, 因为定理 II 把看上去没有直接联系的一个网络的电流(或电压), 与另一个网络的电压(或电流)用数学形式联系了起来。

如图 3-6-2 所示为两个有向图相同的电路, 各支路的元件不同, 这两个电路不仅功率守恒, 且似功率也是守恒的。读者可自行验证。

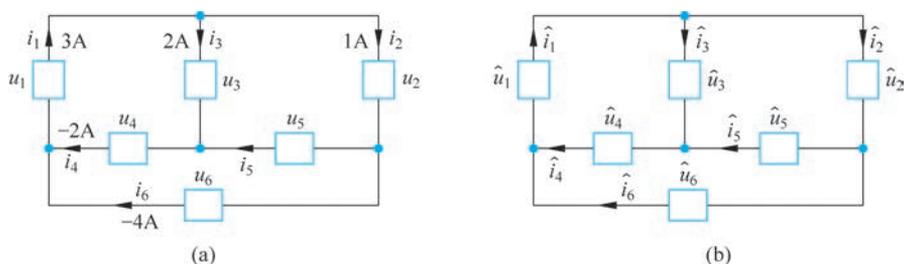


图 3-6-2 特勒根定理

【思考与练习】

3-6-1 叙述特勒根定理的内容, 并说明它的两种具体表现形式。

3-6-2 什么是似功率? 它有实际的物理意义吗?

3.7 互易定理

互易特性是网络具有的重要性质之一。一个具有互易性质的网络,在单一激励的情况下,当激励端口和响应端口互换而电路的几何结构不变时,同一数值激励所产生的响应在数值上将不会改变。并非任意网络都具有互易性,一般只有那些不含受控源和独立源的线性非时变网络才具有这种性质,因此,互易定理的适用范围比较窄。互易定理具有三种形式,下面分别予以介绍和证明。

3.7.1 互易定理的第一种形式

在图 3-7-1(a)所示方框中,是不含独立源和受控源的线性电阻网络 N_R ,左侧支路 1 接入理想电压源 u_S ,则在右侧支路 2 产生电流 i_2 ; 如图 3-7-1(b)所示,若在支路 2 中接入相同数值的电压源,即 $\hat{u}_S = u_S$,则在支路 1 中产生相同的电流,即 $\hat{i}_1 = i_2$,此为互易定理 I。

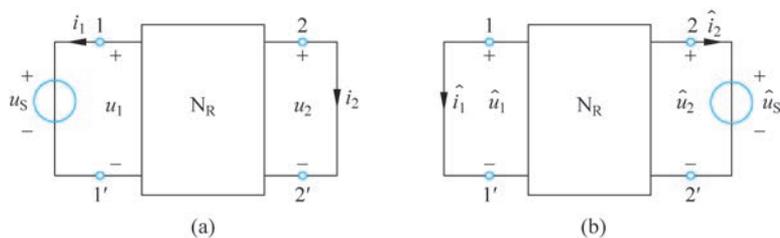


图 3-7-1 互易定理的第一种形式

互易定理 I 的证明:

设网络 N_R 中含有 $b-2$ 条支路,记为支路 $3 \sim b$,加上激励支路和响应支路,此网络共有 b 条支路。由于图 3-7-1(a)和图 3-7-1(b)具有相同的有向图,根据特勒根定理 II 必然可得

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^b u_k \hat{i}_k = 0 \quad (3-7-1)$$

$$\hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^b \hat{u}_k i_k = 0 \quad (3-7-2)$$

由于网络 N_R 是电阻网络,由支路约束关系可得

$$u_k = R_k i_k, \quad \hat{u}_k = R_k \hat{i}_k, \quad k = 3, \dots, b$$

故得

$$u_k \hat{i}_k = R_k i_k \hat{i}_k = R_k \hat{i}_k i_k = \hat{u}_k i_k$$

于是,根据式(3-7-1)和式(3-7-2),得到

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 \quad (3-7-3)$$

由图 3-7-1 可知, $u_1 = u_S, u_2 = 0, \hat{u}_1 = 0, \hat{u}_2 = \hat{u}_S$, 代入式(3-7-3)得

$$u_S \hat{i}_1 = \hat{u}_S i_2$$

因为

$$\hat{u}_S = u_S$$

所以

$$\hat{i}_1 = i_2 \quad (3-7-4)$$

即电压源激励端口与短路端口互换位置时, 得到的响应电流不变。

由此互易定理的第一种形式得证。

3.7.2 互易定理的第二种形式

在如图 3-7-2(a)所示方框中, 是不含独立源和受控源的线性电阻网络 N_R , 左侧支路 1 中接入理想电流源 i_S , 则在右侧支路 2 中产生电压 u_2 ; 如图 3-7-2(b)所示, 若在支路 2 中接入相同的电流源, 即 $\hat{i}_S = i_S$, 则在支路 1 中产生相同的电压, 即 $\hat{u}_1 = u_2$ 。此为互易定理 II。

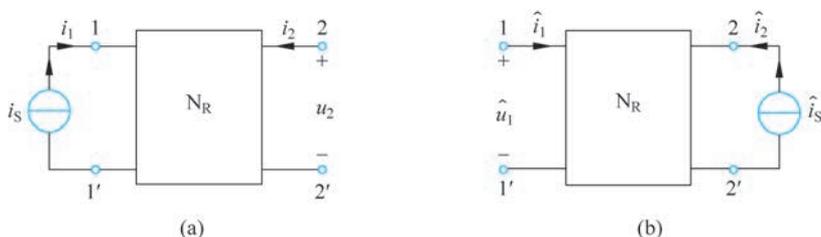


图 3-7-2 互易定理的第二种形式

互易定理 II 的证明:

对图 3-7-2(a)和图 3-7-2(b)所示电路, 应用特勒根定理可得到与式(3-7-3)相同的关
系式

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

由图 3-7-2 可知, $i_2 = \hat{i}_1 = 0, i_1 = i_S, \hat{i}_2 = \hat{i}_S$, 代入上式, 可得

$$u_2 \hat{i}_S = \hat{u}_1 i_S$$

因为

$$\hat{i}_S = i_S$$

所以

$$\hat{u}_1 = u_2 \quad (3-7-5)$$

即电流源激励端口与开路端口互换位置时, 得到的响应电压不变。

由此互易定理的第二种形式得证。

3.7.3 互易定理的第三种形式

在如图 3-7-3(a)所示方框中,是不含独立源和受控源的线性电阻网络 N_R ,左侧支路 1 接入理想电流源 i_S ,则在右侧支路 2 产生电流 i_2 ;如图 3-7-3(b)所示,若在支路 2 中接入与图 3-7-3(a)中 i_S 数值相同的电压源 \hat{u}_S ,则在支路 1 中产生的电压 \hat{u}_1 在数值上与图 3-7-3(a)中支路 2 的电流 i_2 相同,即在数值上满足 $\hat{u}_1 = i_2$,此为互易定理 III。

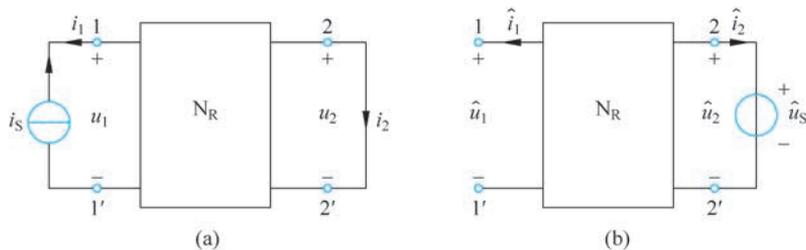


图 3-7-3 互易定理的第三种形式

互易定理 III 的证明:

对图 3-7-3(a)和图 3-7-3(b)所示电路,应用特勒根定理同样可得到与式(3-7-3)相同的关系式

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

由图 3-7-3 可知, $i_1 = -i_S$, $u_2 = 0$, $\hat{i}_1 = 0$, $\hat{u}_2 = \hat{u}_S$,代入上式,可得

$$\hat{u}_1 i_S = \hat{u}_S i_2$$

因为

$$\hat{u}_S = i_S$$

所以

$$\hat{u}_1 = i_2 \quad (3-7-6)$$

即以激励电压源 \hat{u}_S 取代激励电流源 i_S 并交换位置,且数值上 $\hat{u}_S = i_S$ 时,短路端口的响应电流与开路端口的响应电压数值相等。

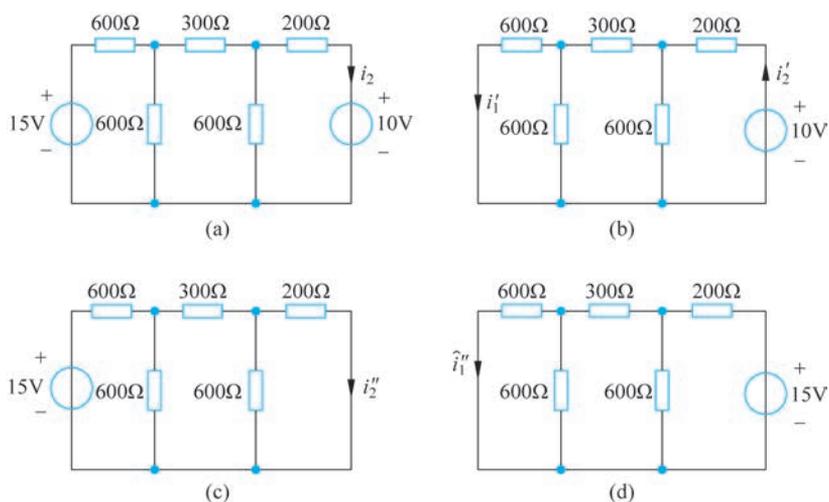
由此互易定理的第三种形式得证。

互易定理是有关单一激励的定理。应用互易定理时,必须注意网络 N 外部支路中电压、电流的参考方向,此时利用特勒根定理来判别会很方便。各相应支路的电压与电流,在关联方向下乘积为正,反之乘积为负。对含多个独立源,但不含受控源的线性网络,可将叠加定理和互易定理联合运用,即独立源单独作用,利用互易定理分别求响应,然后再叠加,以求出总响应。

【例 3-7-1】 求如图例 3-7-1(a)所示电路中的电流 i_2 。

解: 可用叠加定理和互易定理联合求解。

可首先将例图 3-7-1(a)所示电路分解为例图 3-7-1(b)和例图 3-7-1(c)所示电路相叠



例图 3-7-1

加的形式。

(1) 10V 电压源单独作用时,如例图 3-7-1(b)所示,可得

$$i_2' = \frac{10}{200 + 300} \text{A} = 20 \text{mA}$$

$$i_1' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times i_2' = \frac{1}{4} \times 20 \text{mA} = 5 \text{mA}$$

(2) 15V 电压源单独作用时,如例图 3-7-1(c)所示,应用互易定理求 i_2'' ,互易后的网络如例图 3-7-1(d)所示。比较例图 3-7-1(b)和例图 3-7-1(d)可知,只是电压源的电压增大了 1.5 倍,所以利用线性电路的比例性可得

$$i_2'' = 1.5i_1' = 1.5 \times 5 \text{mA} = 7.5 \text{mA}$$

(3) 10V 和 15V 两电压源共同作用时,可得

$$i_2 = i_2'' - i_2' = (7.5 - 20) \text{mA} = -12.5 \text{mA}$$

【应用拓展】

对于满足互易性质的双口网络,互易定理提供了一种便捷、高效的分析思路。同时,

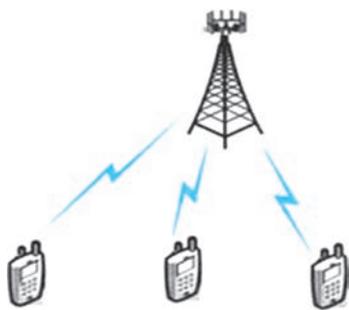


图 3-7-4 蜂窝移动通信系统

互易定理的思想也在许多领域得到推广和应用。如图 3-7-4 所示,在蜂窝移动通信系统中,移动终端(例如手机)通过基站与外界联系,由于移动终端与基站之间的信道条件会随两者之间的距离、障碍物和周围环境而变化。为保证稳定的通信质量,移动终端需要不断测量信道参数并据此调整发射功率等指标,信道测量与计算工作将消耗可观的移动终端电池能量,不利于维持移动终端的待机时长。基于移动终端与基站之间信道的对称特征,采用互易思想,实际蜂窝移动通信系统中信道测量任务由能量充足且算力强大的基站设备完成,可以

达到相同的目的,同时也保证了移动终端的正常待机时长。

【思考与练习】

3-7-1 分别叙述互易定理的三种形式,并说明区别与联系。

3.8 对偶原理

一一对应、成双成对出现的事物可以称为对偶事物。例如,电场和磁场是互为对偶的物理场,电压和电流是互为对偶的物理量,电阻元件和电导元件是互为对偶的元件。为了阐释对偶原理的内涵,先来看一个示例。

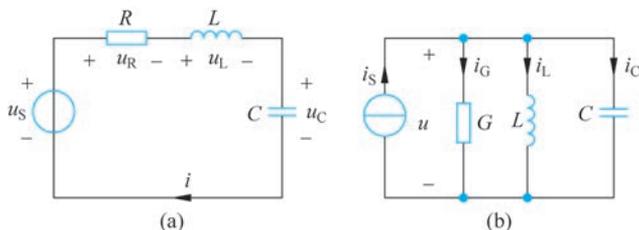


图 3-8-1 对偶电路

对于图 3-8-1(a)所示的串联 RLC 电路而言,由 KVL 可得

$$u_s(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \quad (3-8-1)$$

对于图 3-8-1(b)所示的并联 GCL 电路而言,由 KCL 可得

$$i_s(t) = Gu(t) + C \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \quad (3-8-2)$$

将式(3-8-1)和式(3-8-2)加以比较可以看出,若将两式中的电路变量 u 和 i 互换,电路元件 R 和 G 互换, L 和 C 互换,其中的一个公式就可以变换为另一个公式。这种关系(方程)之所以能彼此转换,是因为它们的数学表达形式完全相似。电路中某些元素之间的关系(方程)用它们的对偶元素对应地置换后,所得新关系也一定成立,后者和前者互为对偶,这就是对偶原理。

根据对偶原理,如果导出了某一关系式或结论,就相当于解决了和它对偶的另一个关系式和结论。若两个电路对偶且对偶元件的参数值相等,则两者对偶变量的关系式(即方程)及对偶变量的值(响应)一定相等。

现已学过的对偶关系如表 3-8-1 所示。

表 3-8-1 对偶关系

对偶名称	原电路	对偶电路	对偶名称	原电路	对偶电路
电路变量	电压 u	电流 i	电路元件及 元件方程	电阻 R $u = Ri$	电导 G $i = Gu$
	网孔电流	独立节点电位		VCVS $u_2 = \mu u_1$	CCCS $i_2 = \beta i_1$
	开路电压	短路电流		VCCS $i_1 = g u_1$	CCVS $u_2 = r i_1$

续表

对偶名称	原电路	对偶电路	对偶名称	原电路	对偶电路
电路结构	串联	并联	电路基本定律和定理	KVL	KCL
	开路	短路		戴维南定理	诺顿定理
	节点	回路		网孔方程	节点方程

【后续知识串联】

◇ 数字逻辑运算中的对偶原理

本节所介绍的对偶原理在后续“数字电子技术基础”课程中有所应用。

逻辑代数是数字逻辑电路中重要的数学工具。在逻辑代数中,常采用逻辑函数表达式来描述事物的因果关系,这样可以避免用冗繁的文字来描述一个逻辑问题。函数表达式由变量和运算符组成。

逻辑代数中的变量称为逻辑变量,一般用大写字母 A 、 B 、 C 、 X 、 Y 、 Z 等表示,并规定逻辑变量的取值只有“1”或“0”两种可能。这里的“1”和“0”本身没有数值意义,并不代表数量的大小,而仅作为一种符号,代表事物的两种不同逻辑状态,将“1”和“0”称为逻辑常量^①。

与、或、非是三种最基本的逻辑运算。逻辑“与”表示决定事物结果的全部条件同时具备时,结果发生,以“ \cdot ”表示“与”运算,通常写表达式时“ \cdot ”可以省略不写;逻辑“或”表示决定事物的诸多条件中只要有任何一个满足,结果发生,以“ $+$ ”表示“或”运算;逻辑“非”表示条件不具备时,结果发生,以变量右上角的“ $'$ ”表示“非”运算^②。

因此,两个逻辑变量 A 、 B 进行“与”逻辑运算可表示为

$$Y = A \cdot B = AB$$

两个逻辑变量 A 、 B 进行“或”逻辑运算可表示为

$$Y = A + B$$

逻辑变量 A 进行“非”逻辑运算可表示为

$$Y = A'$$

下面以一个例子来具体解释。图 3-8-2 给出了三个指示灯的控制电路,并分别用 A 、 B 表示两个开关闭合的状态(“1”表示闭合,“0”表示断开),用 Y 表示指示灯亮的状态(“1”表示灯亮,“0”表示灯灭)。

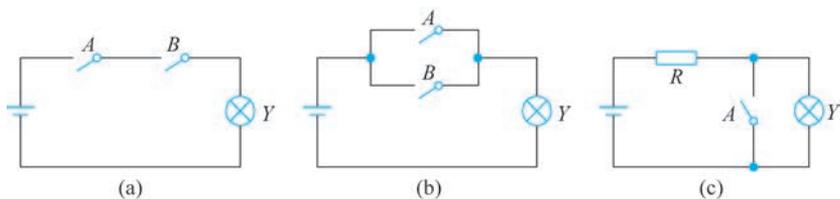


图 3-8-2 逻辑“与”“或”“非”的电路模型

① 罗杰. Verilog HDL 与 FPGA 数字系统设计[M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 2022: 11-14.
 ② 阎石. 数字电子技术基础[M]. 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2016: 28.

图 3-8-2(a)中,只有两个开关同时闭合时指示灯才会亮,即

$$Y = AB$$

图 3-8-2(b)中,两个开关只要有一个闭合指示灯就会亮,即

$$Y = A + B$$

图 3-8-2(c)中,只有开关断开时指示灯才会亮,即

$$Y = A'$$

对于一个逻辑式 Y ,将式中的“ \cdot ”换成“ $+$ ”,“ $+$ ”换成“ \cdot ”,“ 0 ”换成“ 1 ”,“ 1 ”换成“ 0 ”,得到一个新的逻辑式 Y^* ,称 Y^* 为 Y 的对偶式,或者说 Y 和 Y^* 互为对偶式。例如,

若 $Y = A + BC$,则 $Y^* = A(B + C)$

若 $Y = (A + B)' + CD$,则 $Y^* = (AB)'(C + D)$

若 $Y = (AB + C)'$,则 $Y^* = [(A + B)(C + D)]'$

若两个逻辑式相等,则它们的对偶式相等,这就是逻辑代数中的对偶原理。

【例 3-8-1】 试证明以下等式成立。

$$(A + B)(A + C) = A + BC$$

解:首先写出等式两边的对偶式分别为

$$AB + AC \text{ 和 } A(B + C)$$

根据乘法分配律可得 $A(B + C) = AB + AC$,因此,以上两对偶式相等。根据对偶原理可得原来两式相等,等式得证。

【思考与练习】

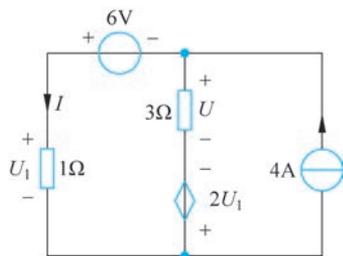
3-8-1 除了已经列举的例子外,思考常用的对偶量还有哪些。

3-8-2 什么是对偶原理?若两个电路对偶且对偶元件的参数值相等,则两者对偶变量的关系式(即方程)及对偶变量的值(响应)一定相等吗?

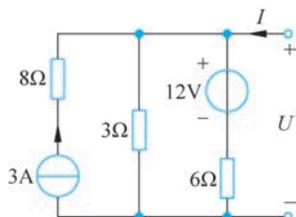
习题

3-1 用叠加定理求如题图 3-1 所示电路中的电流 I 和电压 U 。

3-2 用叠加定理求如题图 3-2 所示单口网络的电压-电流关系。



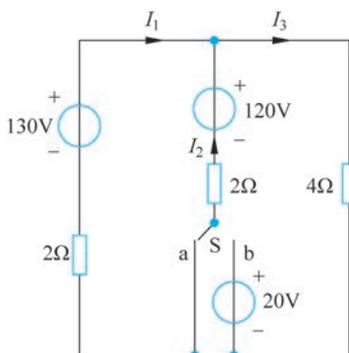
题图 3-1



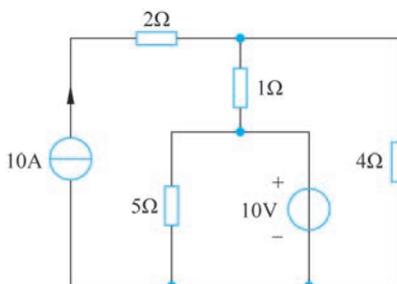
题图 3-2

3-3 如题图 3-3 所示电路,(1)当将开关 S 合在 a 点时,求电流 I_1 、 I_2 和 I_3 ; (2)当将开关 S 合在 b 点时,利用(1)的结果,用叠加定理计算电流 I_1 、 I_2 和 I_3 。

3-4 试用叠加定理计算如题图 3-4 所示电路中各支路的电流和各元件(电源和电阻)两端的电压,并分析功率平衡关系。



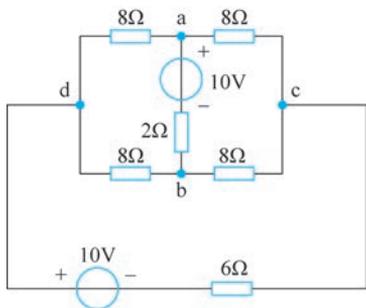
题图 3-3



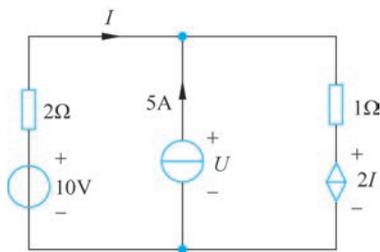
题图 3-4

3-5 利用叠加定理计算如题图 3-5 所示电路中的各支路电流。

3-6 利用叠加定理求如题图 3-6 所示电路中的电流 I 和电压 U 。



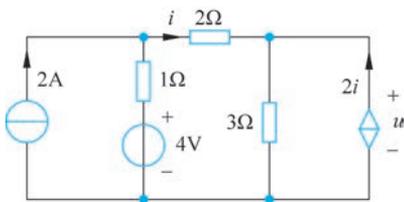
题图 3-5



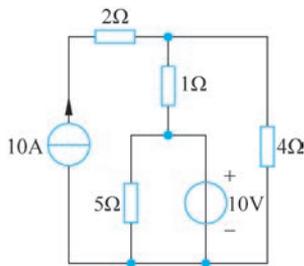
题图 3-6

3-7 利用叠加定理求如题图 3-7 所示电路中的电压 u 和受控源吸收的功率。

3-8 利用节点电压法和戴维南定理求如题图 3-8 所示电路中流过 1Ω 电阻的电流。



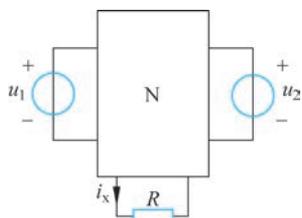
题图 3-7



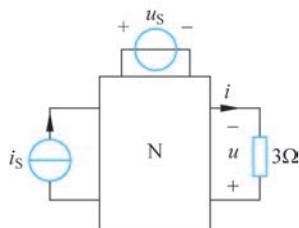
题图 3-8

3-9 如题图 3-9 所示电路,(1)若 N 为仅由线性电阻构成的网络,当 $u_1 = 2\text{V}, u_2 = 3\text{V}$ 时, $i_x = 20\text{A}$; 而当 $u_1 = -2\text{V}, u_2 = 1\text{V}$ 时, $i_x = 0$ 。求 $u_1 = u_2 = 5\text{V}$ 时的电流 i_x ; (2)若将 N 换为含有独立源的网络,当 $u_1 = u_2 = 0$ 时, $i_x = -10\text{A}$,且上述已知条件仍然适用,求当 $u_1 = u_2 = 5\text{V}$ 时的电流 i_x 。

3-10 已知如题图 3-10 所示电路中的网络 N 是由线性电阻组成, 当 $i_S = 1\text{A}$, $u_S = 2\text{V}$ 时, $i = 5\text{A}$; 当 $i_S = -2\text{A}$, $u_S = 4\text{V}$ 时, $u = 24\text{V}$ 。求 $i_S = 2\text{A}$, $u_S = 6\text{V}$ 时的电压 u 。

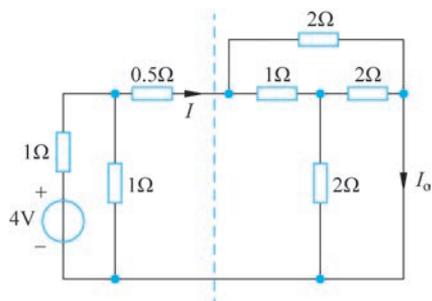


题图 3-9

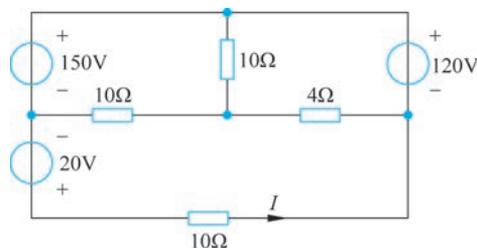


题图 3-10

3-11 如题图 3-11 所示电路, (1) 求虚线右边部分电路的端口等效电阻; (2) 求图示电流 I ; (3) 用替代定理求图示电流 I_0 。

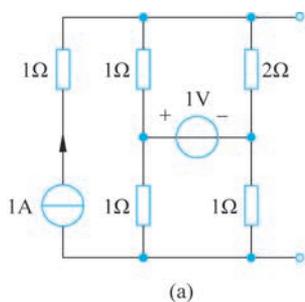


题图 3-11

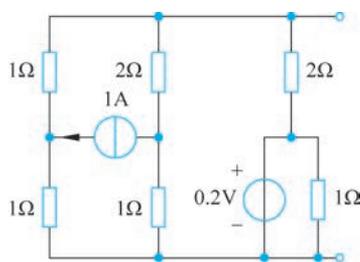


题图 3-12

3-13 求如题图 3-13 所示两个含源电路的戴维南等效电路及诺顿等效电路。



(a)



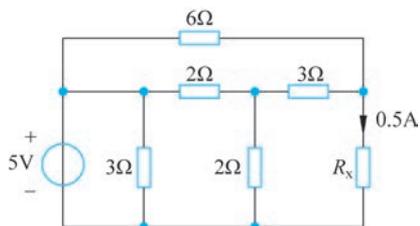
(b)

题图 3-13

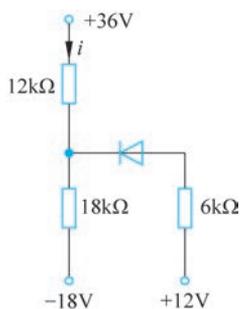
3-14 如题图 3-14 所示电路, 已知 R_x 支路的电流为 0.5A , 求 R_x 。

3-15 在分析含理想二极管电路时, 需要先确定二极管是否导通, 运用戴维南定理可以很方便地解决这一问题。当理想二极管导通时, 其电阻可视为零; 当截止时, 其电阻可视为无穷大。设含理想二极管的电路如题图 3-15 所示, 求电流 i 。

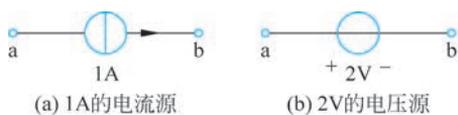
3-16 如题图 3-16 所示电路, 设元件 N 分别为(a)、(b)、(c)三种情况, 求以上三种不同情况下的电压 U_x 。



题图 3-14

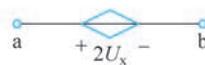


题图 3-15

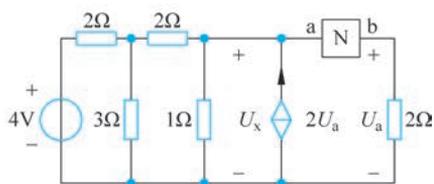


(a) 1A的电流源

(b) 2V的电压源

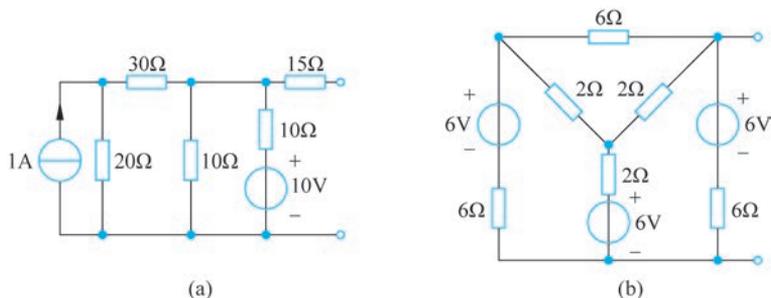


(c) 电压控电压源



题图 3-16

3-17 求如题图 3-17 所示电路的戴维南等效电路和诺顿等效电路。



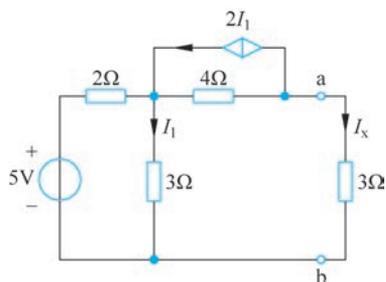
(a)

(b)

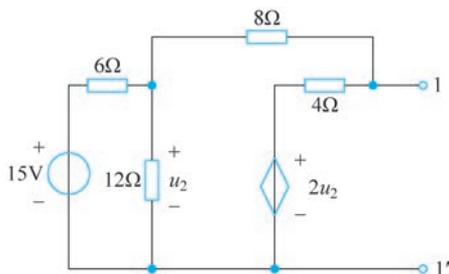
题图 3-17

3-18 求如题图 3-18 所示电路中 a、b 两端左侧电路的戴维南等效电路,并求解流过右侧电阻的电流 I_x 。

3-19 求如题图 3-19 所示含源单口网络的戴维南和诺顿等效电路。



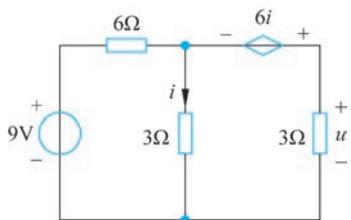
题图 3-18



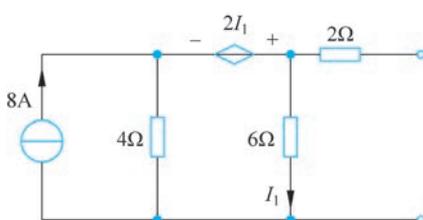
题图 3-19

3-20 用戴维南定理求解如题图 3-20 所示电路中的电压 u 。

3-21 求如题图 3-21 所示含源网络的戴维南等效电路。



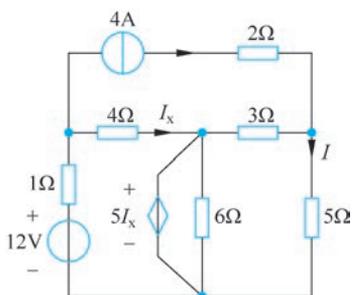
题图 3-20



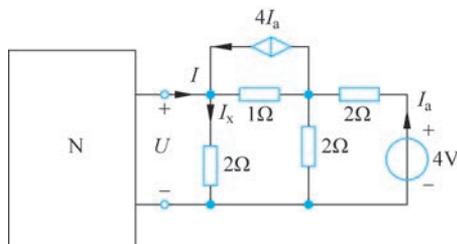
题图 3-21

3-22 用戴维南定理求如题图 3-22 所示电路中的电流 I 。

3-23 如题图 3-23 所示电路,已知线性网络 N 的端口电压-电流关系式为 $I = (-3U + 6)$ A,求支路电流 I_x 。

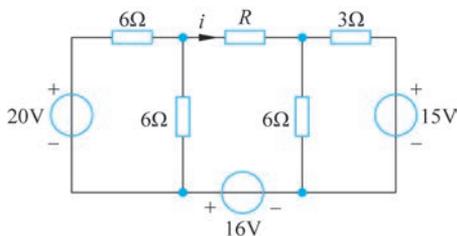


题图 3-22



题图 3-23

3-24 如题图 3-24 所示电路,(1)若 $R = 3\Omega$,试用戴维南定理求电流 i ; (2)若使 R 获得最大功率,则 R 的取值应为多少?



题图 3-24

3-25 求如题图 3-25(a)所示电路中电阻 R_L 获得的最大功率;对于题图 3-25(b)所示电路,电阻 R_L 可变,试问 R_L 取何值时可以获得最大功率?

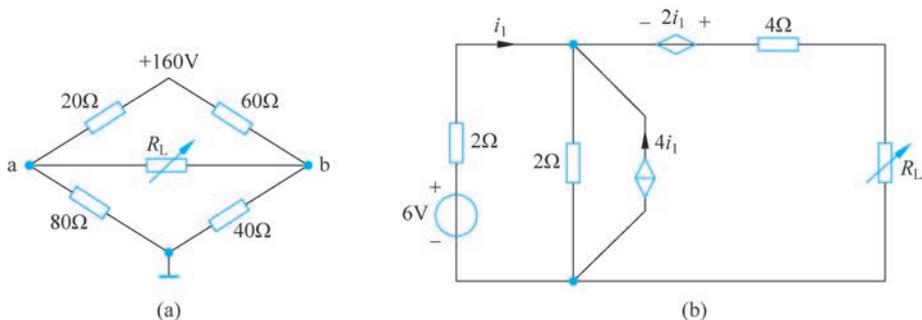
3-26 如题图 3-26 所示电路,

(1) R 取何值时,其吸收的功率最大? 求此最大功率。

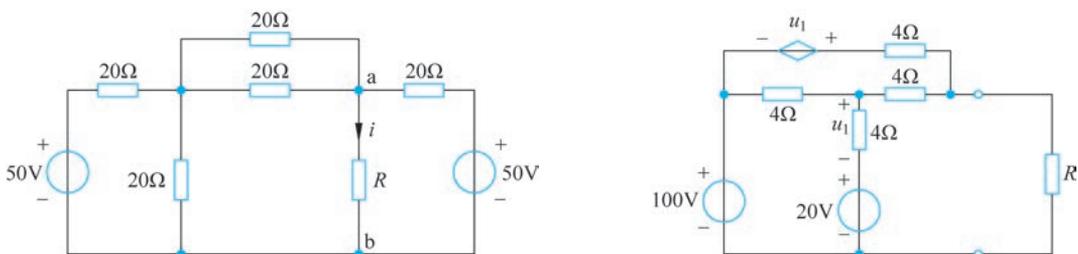
(2) 若 $R = 80\Omega$,欲使 R 中电流为零,则 a、b 间应并接什么元件,其参数是什么?

3-27 如题图 3-27 所示电路,求:(1) R 获得最大功率时的阻值;(2)在此情况下, R 获得的功率;(3)100V 电源对电路提供的功率;(4)受控源的功率;(5) R 所得功率占电

源产生功率的百分比。

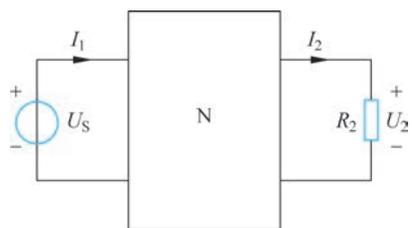


题图 3-25



题图 3-26

题图 3-27

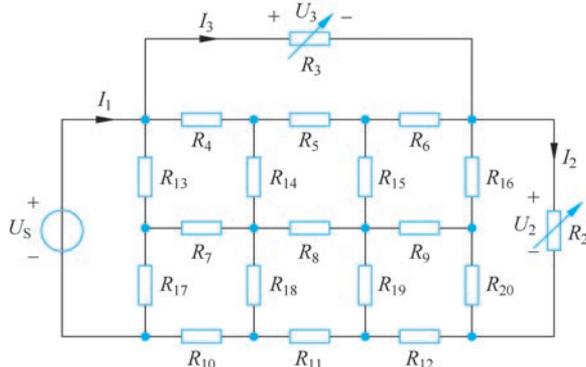


题图 3-28

3-28 如题图 3-28 所示电路, 设 N 为仅由电阻组成的无源线性网络。当 $R_2 = 2\Omega, U_S = 6V$ 时, $I_1 = 2A, U_2 = 2V$; 当 $R'_2 = 4\Omega, U'_S = 10V$ 时, $I'_1 = 3A$ 。试根据上述数据求 U'_2 。

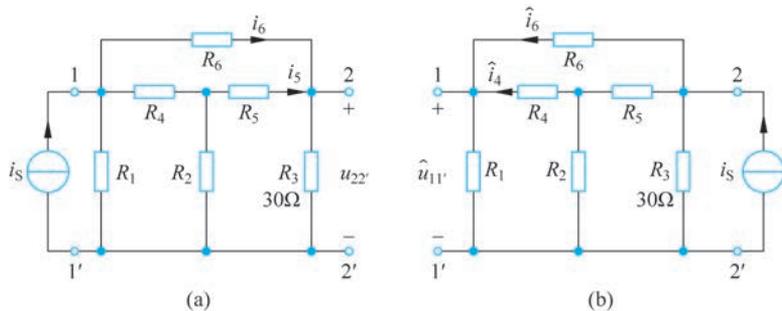
3-29 如题图 3-29 所示电阻网络, 电压源的电压 U_S 及电阻 R_2, R_3 可调。在 U_S, R_2, R_3 为两组不同数值的情况下, 分别进行两次测量, 测得数据

如下: (1) 当 $U_S = 3V, R_2 = 20\Omega, R_3 = 5\Omega$ 时, $I_1 = 1.2A, U_2 = 2V, I_3 = 0.2A$; (2) 当 $U_S = 5V, R_2 = 10\Omega, R_3 = 10\Omega$ 时, $I_1 = 2A, U_3 = 2V$ 。求在第二种情况下的电流 I_2 。



题图 3-29

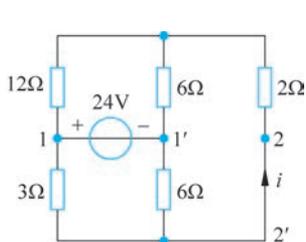
3-30 对如题图 3-30 所示电阻网络进行两次测量。第一次在 1、1' 端间加上电流源 i_S , 2、2' 端开路[题图 3-30(a)], 测得 $i_5 = 0.1i_S, i_6 = 0.4i_S$; 第二次以同一电流源接到 2、2' 端, 1、1' 端开路[题图 3-30(b)], 测得 $i_4 = 0.1i_S, i_6 = 0.2i_S$ 。求电阻 R_1 。



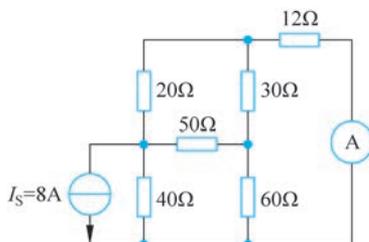
题图 3-30

3-31 用互易定理求如题图 3-31 所示电路中的电流 i 。

3-32 用互易定理的第三种形式求出如题图 3-32 所示直流电阻网络中电流表的读数(注: 电流表的内阻可忽略不计)。



题图 3-31



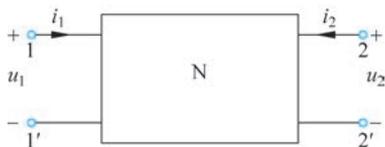
题图 3-32

3-33 如题图 3-33 所示, 网络 N 仅由电阻组成, 端口电压和电流之间的关系可表示为

$$i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2$$

$$i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2$$

试证明 $G_{12} = G_{21}$ 。如果 N 内部含独立源或受控源, 上述结论是否成立? 为什么?



题图 3-33