

本章导读：静电场是由静止电荷所产生的电场，其分布不随时间变化。在导体回路中，由稳恒电源提供的电场为稳恒电场，处于稳恒电场中定向运动的电荷产生稳恒电流。稳恒电流产生的磁场不随时间而变，故称为稳恒磁场，也称为静磁场。

本章的主要内容包括稳恒电流分布与稳恒电流的电场、稳恒电流与磁场分布之间的关系；稳恒电场和磁场的基本性质、基本方程和边界条件；磁矢势和磁标势的引入及方程；磁场能量等。要求重点掌握两种场的基本性质、基本方程及求解磁场的主要方法。电和磁是电磁场理论的“左手”和“右手”，利用对照的方法学习是非常重要的。在学习中注重区别与静电场本质的不同，以及体会分析方法的相似之处。

3.1 电流密度和电荷守恒定律

3.1.1 电流与电流密度

电流是电荷在电场的作用下定向运动而形成的。定量描述电流大小的物理量是电流强度 I ，其定义为单位时间内通过导体中任一横截面的电量，即

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (3-1)$$

电流可根据其值是否随时间变化分为稳恒电流和时变电流。稳恒电流是大小及其正负都不随时间变化的电流，即直流电流；时变电流是指随时间而变化的电流。时变电流又包括脉动电流、一般交变电流、瞬态电流、时谐电流（交流电）等，如图 3-1 所示。其中，电流 1 是直流电流；电流 2 是脉动直流，其大小随时间变化，但其符号不随时间而变，如整流器整流出的电流；电流 3 是一般随时间变化的交变电流，其大小及其符号均随时间而变，如交变的三角形电流；电流 4 是常用的随时间按正弦规律变化的交变电流即时谐电流或正弦电流，如发电机和振荡器产生的电流等。本章只讨论电流 1 的情形。

电流强度不能精确描述导电媒质内不同位置的电流分布情况，为此需引入一个矢量场（即电流场）来描述，该矢量场不仅规定了空间各点流动的强度，而且规定了它的方向。与流体力学中相似，可以设想一根水管中的水流由无穷多根细的流线组成。在某一横截面上，不同位置的流速一般不同，中间区域的水流快一些，而边缘区域会慢一些，它们在各处的方向都与流线相切，于是可用流速场描述各点的流动情况。在导电媒质内选取与电流线正交的



动画视频

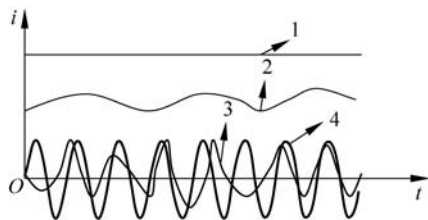


图 3-1 随时间变化的各种电流

某一横截面 $\Delta S'$, 若通过该截面的电流强度为 ΔI , 则定义该点处的电流密度为

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S'} \mathbf{J}^0 = \frac{dI}{dS'} \mathbf{J}^0 \quad (3-2)$$

电流密度(即体电流面密度)用矢量 $\mathbf{J}$ 表示, 其方向沿着通过该点的电流线, 大小则等于通过该点附近单位横截面积的电流, $\mathbf{J}^0$ 为单位矢量, 如图 3-2 所示。于是, 通过任一面积 S' 的电流等于电流密度 $\mathbf{J}$ 穿过该面的通量, 即

$$I = \int_{S'} J \cos \theta dS' = \int_{S'} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}' \quad (3-3)$$

式中, θ 是电流密度 $\mathbf{J}$ 与面元矢量 $d\mathbf{S}'$ 之间的夹角。

电流密度 $\mathbf{J}$ 属于矢量, 反映的是导体内某一点邻域的电流分布和方向, 是一个微观量; 而电流强度 I 则属于标量, 反映的是导体内某一横截面上总的电流, 是一个宏观量。

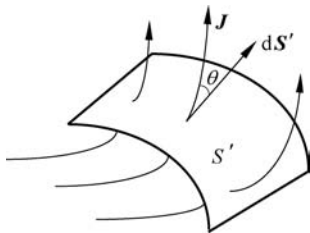
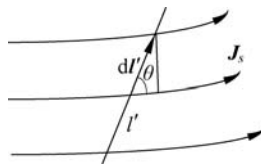
若电流只分布于导电媒质的厚度趋近于零的薄层内(例如频率为 100MHz 的交流电通过铜导线时, 由于趋肤效应, 电流只分布在外壁附近, 厚度约 $6.6\mu\text{m}$), 这时电流穿过的横截面趋近于一条曲线, 于是可以用通过单位长度横截线的电流来描述电流的分布, 其方向仍为电流线的方向, 称为面电流密度 $\mathbf{J}_s$ (即面电流线密度):

$$\mathbf{J}_s = \frac{dI}{dl'} \mathbf{J}^0 \quad (3-4)$$

如图 3-3 所示, 通过导电媒质表面上任一线段 l' 的电流为

$$I = \int_{l'} |\mathbf{J}_s \times d\mathbf{l}'| \quad (3-5)$$

其中, θ 是 $\mathbf{J}_s$ 与线元矢量 $d\mathbf{l}'$ 之间的夹角。

图 3-2 通过面 S' 的体电流图 3-3 通过线 l' 的面电流

3.1.2 电流元

如果电流以体密度 $\mathbf{J}$ 分布在体积 V' 中, 称 $\mathbf{J} dV'$ 为 V' 内的体电流元; 电流以面密度 $\mathbf{J}_s$

分布在面积 S' 中, 称 $\mathbf{J}_s dS'$ 为 S' 内的面电流元; 电流 I 分布在细线 l' 中, 称 $I dl'$ 为 l' 内的线电流元。电流元是研究磁场问题中场源或场作用对象的基本单元, 其地位等同于静电场中的电荷元。

3.1.3 传导电流与运流电流

根据电流所处媒介的不同, 可将电流分为两类: 传导电流和运流电流。

传导电流是指导电媒质中的电流, 其电流密度用 $\mathbf{J}_c$ 来表示。实验表明: 电流密度服从欧姆定律的微分形式, 即

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (3-6)$$

式中, σ 是导电媒质的电导率, $\mathbf{E}$ 是导电媒质中的电场。当温度一定时, 对于一定的材料, 电导率是与电场强度无关的一个常数。因此, 导电媒质中传导电流的电流密度与电场强度成正比, 且方向相同。

对于一段长为 L 、横截面积为 S 、电导率为 σ 的导体, 若两端的电压为 U , 则据电压公式可得到欧姆定律的积分形式为

$$U = \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_L \frac{\mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{l}}{\sigma} = \int_L \frac{I dl}{\sigma S} = I \frac{L}{\sigma S} = IR \quad (3-7)$$

式中, $R = \frac{L}{\sigma S}$ 是导体的电阻, I 是其中的电流。

运流电流是指真空或气体中的自由电荷在电场的作用下形成的电流 (例如电子管、离子管或粒子加速器中的电流)。和传导电流不同, 式 (3-7) 不适用于运流电流。

在运流电流中取一个体积元 $dV' = dS' dl'$ (见图 3-4), 假设其中的电荷密度为 ρ , 自由电荷的运动速度为 $\mathbf{v}$ 。设在 dt 时间内体积元内的电荷 $dQ = \rho dV'$ 全部从截面 dS' 穿出, 因而形成的运流电流元为

$$dI = \frac{dQ}{dt} = \frac{\rho dV'}{dt} = \rho \frac{dl'}{dt} dS' = \rho v dS'$$

其中, $v = \frac{dl'}{dt}$ 。因此, 运流电流的电流密度为

$$\mathbf{J}_v = \frac{dI}{dS'} = \rho \mathbf{v} \quad (3-8)$$

即

$$\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v} \quad (3-9)$$

传导电流和运流电流统称为自由电流。在后面的章节中, 传导电流或运流电流往往不加下标, 读者可根据上下文理解为其中的一种或兼而有之。

3.1.4 电动势

导体中要维持一定的电流就必须有电源, 正如一个自来水管中要维持其内源源不断的水流需要水泵不断给水塔供水一样。而维持导体中的稳恒电流就必须使电路与直流电源相接, 如图 3-5 所示。在外部电路, 导体中的正电荷在稳恒电场强度 $\mathbf{E}$ (库仑场) 的作用下从电源正极通过外电路到达负极, 形成稳恒电流。在电源内部, 有两部分电场: 库仑场强 $\mathbf{E}$ 以

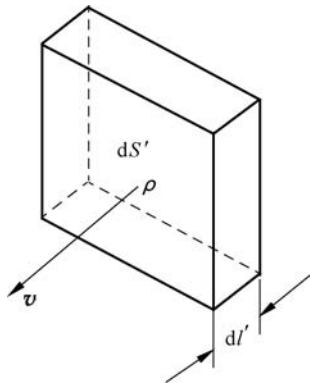


图 3-4 运流电流中的体积元

及一种与 $\mathbf{E}$ 方向相反的局外场强 $\mathbf{E}_e$ 。局外场的作用是将这些自由电荷在它的作用下从电源负极 B 搬到正极 A , 使电源两极上的电荷维持恒定, 从而保持导体中的电场恒定。不难理解, 为维持电路中持续的稳恒电流, 电源内部的局外场强应大于实际导体中的库仑场强; 仅当电源开路时, 二者相等, 处于平衡状态。

导体中的稳恒电场或称电流场的性质和静电场具有相似性, 它是由聚集在电源两极的电荷来决定的, 由于电荷总量不变, 故为一种动态平衡。将单位正电荷沿着电源正极板出发通过导体回路到达负极板, 再由电源内部负极回到正极, 电场力所做的功等于零, 即

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3-10)$$

或

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3-11)$$

可见, 恒定电场也是势场(保守场), 同样可引入标量电势 ϕ , 即

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (3-12)$$

而电源内部的局外场强 $\mathbf{E}_e$ 是克服静电场对单位正电荷的作用所提供的一种非静电场, 故它是非保守场。电源内部的合成场强为 $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}$ 。它沿闭合电流回路的线积分为

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{l} &= \oint_l \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} + \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_B^A \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \end{aligned} \quad (3-13)$$

定义 $\mathcal{E}$ 为电源的电动势, 它是局外电场力将单位正电荷由负极 B 送至正极 A 所做的功。

如果电源内部是理想导体(也称完纯导体, $\sigma = \infty$), 即其内阻为零, 则据欧姆定律 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_t$, 由于电源内部的 $\mathbf{J}$ 为有限值, 所以必有 $\mathbf{E}_t = 0$, 故 $\mathbf{E}_e = -\mathbf{E}$, 于是

$$\mathcal{E} = \int_B^A \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U_{AB} \quad (3-14)$$

这表明当电源内阻为零时, 电源的电动势等于其端电压 U_{AB} ; 另一种情况, 当电流回路开路其中电流为零, 即 $I=0$ 或 $\mathbf{J}=0$ 时, $\mathbf{E}_t=0$, $\mathcal{E}=U_{AB}$, 则电源的电动势也等于其开路电压。

当考虑电源内部的内阻为 r 时, $\mathbf{E}_t \neq 0$, 故有 $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}$, 于是

$$\int_B^A \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{l} = \int_B^A (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = \int_B^A \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} - U_{AB} = Ir$$

即

$$\mathcal{E} = U_{AB} + Ir \quad (3-15)$$

这表明当电源内阻不为零时, 电源的电动势等于其端电压 U_{AB} 与降落在电源内阻上的电压之和, 这与基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律结果相同。

3.1.5 电荷守恒定律——电流连续性方程

电荷守恒定律是自然界中一条最基本的普遍定律。实验证明, 电荷既不能被产生, 也不能被消灭, 它们只能从一个物体转移到另一个物体, 或者从物体的一部分转移到另一部分, 即在任何物理过程中, 电荷的代数和总是守恒的。这个定律称为电荷守恒定律。电荷守恒

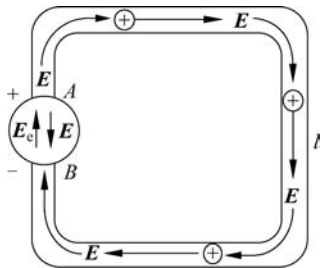


图 3-5 稳恒电流回路

定律不仅在一切宏观物理的过程中成立,而且在一切微观物理过程中也成立。

电荷守恒定律在数学上可通过电流连续性方程来表示。在导电媒质中,考虑一个由闭合面 S' 所包围的体积 V' ,在时间 Δt 内穿出闭合面 S' 的净自由电荷量必等于在这同一时间里体积 V' 内净电荷的减少量。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,从闭合面 S' 流出的电流等于单位时间内体积 V' 中净电荷的减少量,即

$$\oint_{S'} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}' = - \int_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV' \quad (3-16)$$

式中, $\mathbf{J}$ 是包括传导电流与运流电流在内的自由电流密度。式(3-16)就是电荷守恒定律(即电流连续性方程)的积分形式。应用高斯散度定理,将面积分变换为体积分,便得到电荷守恒定律的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3-17)$$

如果式(3-16)中的 V' 是无限大空间(全空间), S' 为无穷大球面,由于在 S' 面上无电流流过,故式(3-16)左边的面积分为零,由此可得

$$\int_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV' = 0 \quad (3-18)$$

该式表示全空间的电荷是守恒的。

在稳恒电流的情况下,导电媒质中的电场及电荷分布

不随时间而变化,即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 于是有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3-19)$$

或

$$\oint_{S'} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}' = 0 \quad (3-20)$$

这表明流入任一闭合面 S' 的电流等于流出 S' 的电流,电流线是连续的闭合曲线。这称为电流的连续性原理。对于图 3-6 所示的几个导体分支的节点,由式(3-20)可以得到电路中的基尔霍夫(Kirchhoff)第一定律,即电流定律为

$$\sum_i I_i = 0 \quad (3-21)$$

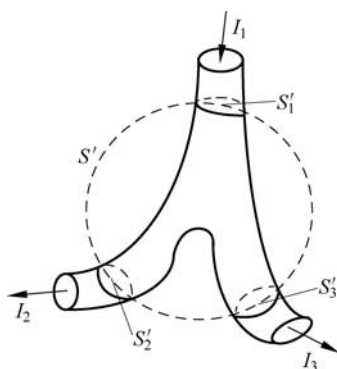


图 3-6 电流的连续性

3.2 稳恒电流的电场

3.2.1 导电媒质中稳恒电场的基本方程

根据 3.1 节的内容,可以得出导电媒质中稳恒电场的基本性质是稳恒电场既无旋度,也无散度。描述这两个基本性质的方程再加上欧姆定律,便构成稳恒电场的基本方程,即

$$\begin{array}{ll} \text{积分形式} & \text{微分形式} \\ \left\{ \begin{array}{l} \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \\ \oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ U = IR \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right. \end{array} \quad (3-22)$$

因此,稳恒电场是无源无旋场。

在介质中,无源分布区域的静电场,即 $\rho=0$ 时,有

$$\begin{array}{ll} \text{积分形式} & \text{微分形式} \\ \left\{ \begin{array}{l} \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \\ \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \end{array} \right. \\ \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \end{array} \quad (3-23)$$

可见,导电媒质中的稳恒电场和介质中无源区域的静电场相类似, $\mathbf{J}$ 、 σ 和 I 分别与 $\mathbf{D}$ 、 ϵ 和 Q 具有对偶关系,即

$$\begin{array}{ll} \text{稳恒电场} & \text{介质中的静电场} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} \\ \sigma \\ I \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} \\ \epsilon \\ Q \end{array} \right. \end{array} \quad (3-24)$$

同时,这两种电场的电势均满足拉普拉斯方程,即

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3-25)$$

上式说明两种场的解具有相同的形式。

3.2.2 稳恒电场的边界条件

图 3-7 示出了电导率分别为 σ_1 和 σ_2 的两种导电媒质的分界面。设分界面的法线正方向由导电媒质 2 指向导电媒质 1。在分界面上取一个无限薄的扁平小圆柱闭合面,根据稳恒电流的连续性方程(3-20),则有

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J_{1n} \Delta S - J_{2n} \Delta S = 0$$

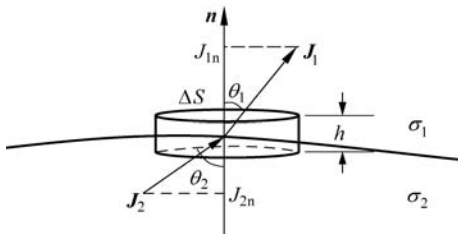


图 3-7 求 J_n 的边界条件

即

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (3-26)$$

这表明恒定电场中电流密度的法向分量具有连续性。电场强度的切向分量连续关系与 2.6 节式(2-82)的结果相同。即

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (3-27)$$

根据欧姆定律 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 及 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, 边界条件也可表示为

$$\sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad (3-28)$$

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (3-29)$$

当然上述关系也可以根据介质中静电场($\rho=0$)的边界条件 $D_{1n}=D_{2n}$ (即 $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$) 和 $E_{1t}=E_{2t}$ 及对偶关系得出。

在稳恒电流场中,除了导电媒质中存在运动电荷外,由于静电感应,在导电媒质分界面或表面上存在着静电荷。动电荷在稳恒电场的作用下定向运动形成电流,并产生稳恒磁场,静电荷则产生库仑场。因此,在导电媒质内总电场应为库仑场和恒定电场叠加之和,总场满足高斯定理。若电流通过两种不同导电媒质,在其分界面上分布有面电荷,则此面电荷是在稳恒电流建立的过程中聚集在分界面上的,以满足电流的边界条件。由静电场的边界条件 $D_{1n}-D_{2n}=\rho_s$ 与 $\mathbf{J}_c=\sigma\mathbf{E}$ 可得电荷面密度为

$$\rho_s = J_n \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) \quad (3-30)$$

式中, $J_n = J_{1n} = J_{2n}$ 。只有当 $\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ 或 $J_n = 0$ 时, $\rho_s = 0$, $D_{1n} = D_{2n}$ 。而当 $\sigma_1 \rightarrow 0$, 即媒质 1

为理想介质时,电流只出现在媒质 2 中, $J_n \rightarrow 0$, 故 $\rho_s = \frac{\epsilon_1 J_{1n}}{\sigma_1} = D_{1n}$ 。

3.2.3 焦耳定律

导电媒质中的焦耳定律可通过欧姆定律和电功率公式得到。

在导电媒质中取一个体积元(见图 3-8),其两端的电压为

$$dU = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

通过横截面的电流为 $dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$, 故此体积元内损耗的功率为

$$dP = dU dI = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad (3-31)$$

因此,单位体积内损耗的焦耳热功率即耗散的功率密度为

$$p = \frac{dP}{dV} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{J^2}{\sigma} = \sigma E^2 \quad (3-32)$$

这就是焦耳定律的微分形式。若一段导体的横截面积为 S , 长为 l , 其中的电流密度 $\mathbf{J} = \frac{I}{S}$ 和体积 $V = Sl$, 将上式积分可得焦耳定律的积分形式, 即

$$P = UI = I^2 R \quad (3-33)$$

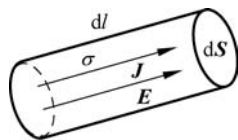


图 3-8 导电媒质中的一个体积元

3.2.4 稳恒电场的静电比拟和电导

从前面的分析中可以看到,稳恒电场和静电场(无源区域)都满足拉普拉斯方程。当两种场具有相同的微分方程和边界条件时,由唯一性定理(详见 4.1 节)可知这两种场解的形式必然相同。因此,对于这类问题,可以利用上面的对偶关系直接得出其解,而不需要重新求解拉普拉斯方程,该方法被称为静电比拟法。

下面,用静电比拟法进行电导计算,即由电容器的电容可求得其漏电导。

若考虑电容器内的介质是非理想的、有耗的,具有电导率 σ , 设通过电容器两极板间的漏电流为 I , 则其漏电导为

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\oint_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\sigma \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (3-34)$$

其中, S_1 是包含任一导体表面的面积。而电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\epsilon \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (3-35)$$

将上面两式相除, 可得

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (3-36)$$

因此, 只要求得电容器的电容, 便可以求出其漏电导, 或知道漏电导便可求出其电容器的电容。可见, 只需将电容器的电容表示式中的 ϵ 换成 σ 便得到其漏电导, 这称为静电比拟法。

例 3.1 由第 2 章可知, 同轴线单位长的电容为 $C_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$, 用静电比拟法求该同轴线

单位长的漏电导。

解 由式(3-36), 可得

$$G_0 = \frac{\sigma}{\epsilon} C_0 = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

本题也可以直接用电导计算公式计算, 用设电压法或设电流法。以设电流法为例, 设同轴线内、外导体间单位长度上的电流为 I_0 , 则距离轴线为 r ($r_1 < r < r_2$) 处的电流密度为

$$\mathbf{J} = \frac{I_0}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

相应的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I_0}{2\pi\sigma r} \mathbf{e}_r$$

则内外导体间的电压为

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{I_0}{2\pi\sigma r} dr = \frac{I_0}{2\pi\sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

故同轴线单位长度内外导体间的漏电导为

$$G_0 = \frac{I_0}{U} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (3-37)$$

此结果与静电比拟法相同。在电工技术中, 式(3-37)中的 G_0 是一个很重要的电参数。

例 3.2 已知空气中有一根半径为 a 、电导率为 σ 的圆形直导线, 其中通有电流 I , 表面均匀分布着密度为 ρ_s 的面电荷。试求导线内及导线表面处的电场强度。

解 采用圆柱坐标系, 设导线中的电流沿 z 轴 (z 轴与导线的轴重合) 方向流动, 故导线中的电场强度为

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{J}{\sigma} \mathbf{e}_z = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \mathbf{e}_z$$

由边界条件可知,导线表面处场强的法向与切向分量分别为

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad \text{与} \quad E_z = E_i$$

因此,导线表面处的电场强度为

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_z \mathbf{e}_z = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \mathbf{e}_r + \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \mathbf{e}_z$$

可见,导体表面处的电场与导体表面不再垂直,这与静电场有本质的区别。

例 3.3 在电力系统中,当接地器不深埋时,可近似地用图 3-9 所示的半径为 a 的半球形接地器代替。试求半球形接地器的接地电阻及跨步电压。

解 接地电阻是电流在大地中所遇到的电阻,实际上是两个相隔很远的接地器之间土壤的电阻,即接地器(电极)至无穷远处的大地电阻。因为在远离电极处,电流流过的面积很大,而在接地器附近电流流过的面积很小,故接地电阻主要分布在接地器附近,且此处电流密度和电场也最大。在电力系统中,由于短路等原因导致有很大的电流流入大地中时,接地器附近地面两点间的电压会相当大,从而使人遭受电击。人跨一步(约 0.8m)时两脚间的电压称为跨步电压。

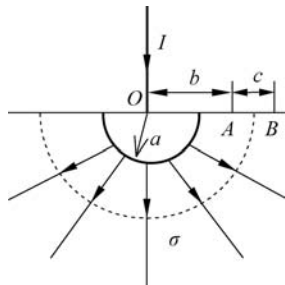


图 3-9 半球形接地器

选用球坐标系求解。半球的接地电导为一个完整的球的接地电导的一半,因半径为 a 的孤立导体球的电容为 $C = 4\pi\epsilon a$,由静电比拟法可得导体球的电导为 $G = 4\pi\sigma a$,故半球的电导为 $G_h = 2\pi\sigma a$ 。因此,半球的接地电阻为

$$R_h = \frac{1}{G_h} = \frac{1}{2\pi\sigma a}$$

其中, σ 是土壤的电导率。可见,接地电阻与土壤的电导率和接地器半径成反比。因此,增大接地器的表面积和在其附近的土壤中渗入电导率高的物质,都可以减小接地电阻从而保证设备与大地有良好的电接触。

大地中的电场可由同样的方法求得。一个带电量为 Q 、半径为 a 且处于介电常数为 ϵ 的介质中的导体球的电场可由高斯定理求得为 $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$,故处于无限大导电媒质中一个

球形电极的电场为 $\mathbf{E} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \mathbf{e}_r$,则半球电极的电场为 $\mathbf{E}_h = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \mathbf{e}_r$,因此,在距接地点为 b 和 $c+b$ 的 A 、 B 两点间的电压为

$$U = \int_b^{b+c} \mathbf{E}_h \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_b^{b+c} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{c}{b(b+c)}$$

若取 $c = 0.8\text{m}$,即得到距接地点 b 处的跨步电压。由此可见,距接地点越近(b 越小),人的步子越大(c 越大),跨步电压越大,因而危险性也就越大。

几种常用电容器的电容与漏电导或漏电阻及其电场如表 3-1 所示。

表 3-1 几种常用电容器的电容与漏电导或漏电阻及其电场

物理量	平行板	双根线	同轴线	球形	孤立球
$C_0(C)$	$\frac{\epsilon S}{d}$	$\frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{D}{a}}$	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$	$\frac{4\pi\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$	$4\pi\epsilon a$
$G_0(G)$	$\frac{\sigma S}{d}$	$\frac{\pi\sigma}{\ln \frac{D}{a}}$	$\frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$	$\frac{4\pi\sigma r_1 r_2}{r_2 - r_1}$	$4\pi\sigma a$
$E(Q)$	$\frac{\rho_s}{\epsilon} \mathbf{n}$	—	$\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r} \mathbf{e}_r$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$
$E(U)$	$\frac{U}{d} \mathbf{n}$	—	$\frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \mathbf{e}_r$	$\frac{r_1 r_2 U}{(r_2 - r_1) r^2} \mathbf{e}_r$	$\frac{a\phi}{r^2} \mathbf{e}_r$

由表 3-1 可知,对于整个球或整个圆柱的问题分别有 4π 或 2π 的因子,双根线的问题有 π 的因子,平行直板的问题则无 π 的因子。对于部分球或圆柱的问题,可以应用类比的方法,将 4π 或 2π 的因子换为立体角 Ω 或二面角 α 。

* 3.3 科技前沿: 直流电型隐身衣

所谓直流电型隐身衣,是导电媒质中针对特定区域的隐身装置。通过将人工制作的特殊导电材料层覆盖在目标周围,能够控制电流线(电力线)绕过目标物体,从而使得该区域不被探测者所发现。

采用变换光学原理设计直流电型隐身衣非常简单。在充满导电媒质的虚拟空间(没有隐藏目标时的背景空间称为“虚拟”空间)中任选一个闭合曲面及其包裹的任意一点,然后让这个点向四周膨胀至另外一个较小的封闭曲面,同时保持外部曲面不变化。于是得到一个压缩后形成的套层及其包裹的封闭区域(由点膨胀得到)。该封闭区域就是隐身区域,相应地,由两个封闭曲面构成的套层就是隐身衣。由于在此过程中虚拟空间部分区域受到了压缩,套层中的材料需要重新计算得到,且具有隐身的特性。最终得到的包含隐藏区域并具有覆盖层的空间一般称为“物理”空间。

从虚拟空间到物理空间的变化,可以用一点 $P(x, y, z)$ 到其像点 $P'(x', y', z')$ 的某种对应法则 $\mathbf{X}' = \mathbf{X}'(\mathbf{X})$ 来表述,其本质上也就是一个坐标变换。作为麦克斯韦方程组在稳恒情况下的特例,稳恒电场的基本方程具有协变性,即: 其在两个空间具有相同的形式。在虚拟空间,有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \quad (3-38)$$

在物理空间,对应的形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{J}' = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}' = 0 \quad \mathbf{J}' = \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{E}' \quad (3-39)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\mathbf{J}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}'$ 、 $\mathbf{J}'$ 、 $\mathbf{E}'$ 分别表示虚拟空间和物理空间的电导率、电流密度和电场强度。

对照式(3-38)和式(3-39),可推得(这当然不是一件容易的事情)

$$\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{X}') = \frac{\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A}^T}{\det \mathbf{A}} \quad (3-40)$$

其中, $\mathbf{A} = \partial \mathbf{X}' / \partial \mathbf{X}$ 就是大家所熟知的雅可比矩阵。

根据上式可知, 直流电型隐身衣装置需选用各向异性导电材料, 它沿不同的方向有不同的电导率。其有不同种实现方法, 如采用多层结构进行媒质等效、利用各向异性电阻网络来等效等。下面以后者为例进行介绍, 如图 3-10 所示为一个圆柱形隐身衣示意图, 其核心问题是各向异性电阻单元的设计。图 3-10 中, 取该环状直流电型隐身衣的部分扇形区域, 假设该扇形导体平板的内、外半径分别为 R_1 、 R_2 , 夹角为 α , 沿径向和角向的电导率则为 σ_ρ 和 σ_φ 。考虑二维的情况, 取平板的厚度为 h 。用电阻网络近似模拟这个导体板的导电参数。采用极坐标系, 将该导电板分成许多个小扇形网格, 每个小扇形区用一对径向和角向的各向异性电阻来模拟, 如图 3-10(c) 所示。

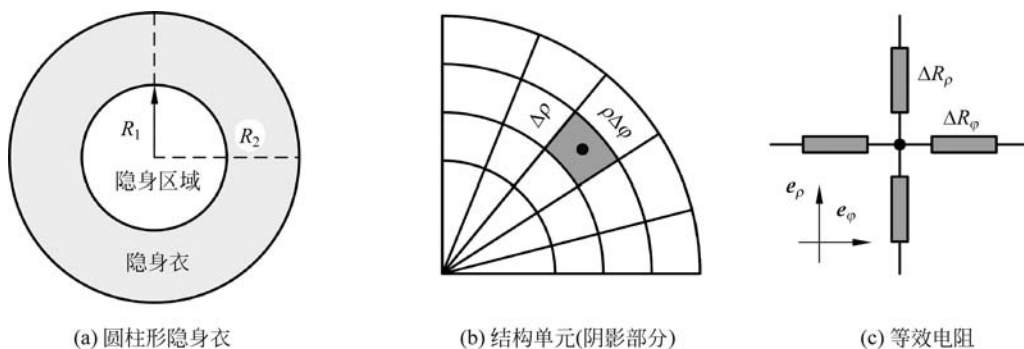


图 3-10 直流电型隐身衣等效电阻原理示意图

等效阻值根据电阻的计算公式 $R = \frac{l}{\sigma S}$ 来计算, l 为电流方向上的长度, S 为垂直于电流方向的横截面积, σ 为对应电流方向上的电导率。则沿径向 e_ρ 的电阻和沿角向 e_φ 的电阻可分别近似表示为

$$\Delta R_\rho = \frac{\Delta \rho}{\sigma_\rho \rho \Delta \varphi h} \quad (3-41)$$

$$\Delta R_\varphi = \frac{\rho \Delta \varphi}{\sigma_\varphi \Delta \rho h} \quad (3-42)$$

图 3-11 为基于上述原理的圆盘形直流电型隐身衣及其仿真结果。从图 3-11(b) 可以看出, 点源发出的电流线, 能够绕过隐身区域, 之后又恢复原来的传播方向。从外部观察, 根本觉察不到中心导体区域的存在。图 3-11 中与白色电流线垂直的是等势线。

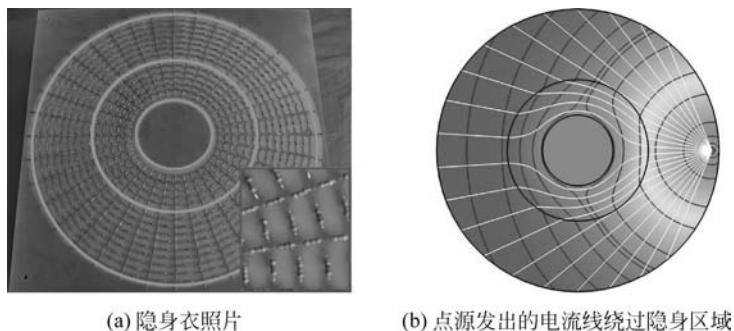


图 3-11 直流电型隐身衣及其仿真结果

3.4 安培定律和磁感应强度

稳恒电流产生的磁场为稳恒磁场,或称为静磁场。描述磁场的基本物理量是磁感应强度。本节首先介绍静磁场中的两个基本实验定律,即安培定律和毕奥-萨伐尔定律,在此基础上给出磁感应强度的三种定义式,进而介绍稳恒磁场的基本计算方法;本节还推导出了洛伦兹力公式——电磁场理论基础之一。

3.4.1 安培定律

安培定律表明了真空中两个电流回路之间相互作用力的规律,与静电场中的库仑定律地位相当。它是磁场的一个基本实验定律,由安培最早通过实验发现。两电流元间的安培力如图 3-12 所示,电流回路 I_1 中的任一电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 对电流回路 I_2 中的任一电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的作用力可表示为

$$d\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R_{12}^2} d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{R_{12}}) \quad (3-43)$$

式中,常数 μ_0 是真空中磁导率, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 。

由式(3-43)可见,两个电流元之间的相互作用力(称为安培力或磁场力),和静电场中两个点电荷之间的库仑力相似,安培力的大小与两电流元的乘积成正比而与它们之间距离的平方成反比,它的方向垂直于电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 。对两个电流回路积分,可得电流回路 I_1 对电流回路 I_2 的作用力,即安培力为

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{I_2} \oint_{I_1} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{R_{12}})}{R_{12}^2} \quad (3-44)$$

上式所表示的安培力是电流回路 I_1 对电流回路 I_2 作用力的合力。由于安培力中的电流元都是矢量,故它的计算要比库仑力复杂得多。

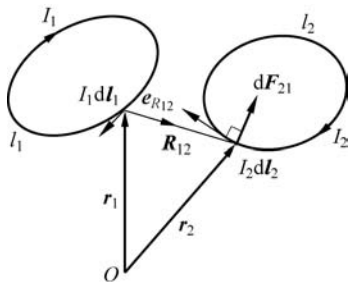


图 3-12 两电流元之间的安培力

3.4.2 磁感应强度: 毕奥-萨伐尔定律

根据法拉第提出的场的概念,电荷周围存在电场。电流周围存在磁场,电荷或电流间的相互作用是通过场的作用而不是直接的超距作用。与静电场中电场强度的定义 $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}$ 类似,一电流元作用于另一电流元的安培力(即磁场力)与被作用的电流元之比,可定义为磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。式(3-43)可写为

$$d\mathbf{F}_{21} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R_{12}^2} (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{R_{12}}) = I_2 d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B}_1 \quad (3-45)$$

式中, $d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R_{12}^2} (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{R_{12}})$ 是电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 在电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 处所产生的磁感应强度。同

样地,电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 在电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 处所产生的磁感应强度则为 $d\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R_{21}^2} (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_{R_{21}})$,

其中 $\mathbf{e}_{R_{21}} = -\mathbf{e}_{R_{12}}$ 。磁感应强度 $\mathbf{B}$ 是表述磁场特征的基本物理量,它与电场中的电场强度 $\mathbf{E}$ 相对应。

电流回路 l' 中的任一电流元 $I d\mathbf{l}'$ 在空间某一场点 P 处所产生的磁感应强度可表示为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R \quad (3-46)$$

因此,整个电流回路 l' 即线电流 I 在 P 点所产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (3-47)$$

如果体电流密度 $\mathbf{J}$ 分布在体积 V' 中,则由于电流元 $I d\mathbf{l}' = \mathbf{J} dS' d\mathbf{l}' = \mathbf{J} dV'$, 因此,密度为 $\mathbf{J}$ 的体电流在 P 点所产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \quad (3-48)$$

对于面电流以密度 $\mathbf{J}_s$ 分布在空间曲面 S' 上的情形,由于电流元 $I d\mathbf{l}' = \mathbf{J}_s d\mathbf{l}' = \mathbf{J}_s dS'$, 密度为 $\mathbf{J}_s$ 的面电流在 P 点所产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_s \times \mathbf{e}_R}{R^2} dS' \quad (3-49)$$

上述关于线电流、体电流和面电流产生磁场的式(3-47)~式(3-49)称为毕奥-萨伐尔定律。它也是磁场的基本实验定律。

毕奥-萨伐尔定律是分析、计算磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的最基本的一种方法。由于上述积分是矢量积分,一般较难计算,故只对简单电流分布才能计算。

解题点拨: 在用毕奥-萨伐尔定律计算出磁感应强度 $\mathbf{B}$ 时,应先选合适的坐标系并进行定性分析,再从电流元入手计算,同时注意发现和总结规律,即坚持“三先一找”的原则。

例 3.4 真空中有一长为 L 并通有电流 I 的细直导线。试求它在空间任一点 P 处所产生的磁感应强度。

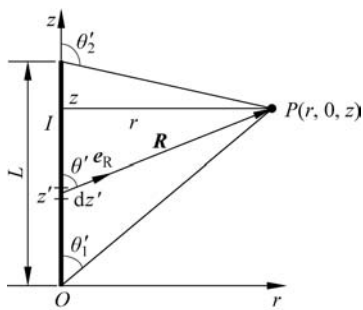


图 3-13 计算直线电流的磁感应强度

解 采用圆柱坐标系,使直线电流与圆柱坐标系的 z 轴重合,并取电流 I 沿 z 轴为正,如图 3-13 所示。由于电流具有轴对称性,可知磁场与方位角 φ 无关。因为源点与场点的坐标之间有如下关系:

$$z' = z - r \cot \theta'$$

故电流元可表示为

$$I d\mathbf{l}' = I dz' \mathbf{e}_z = I r \csc^2 \theta' d\theta' \mathbf{e}_z$$

电流元到场点 P 处的距离矢量则为

$$\mathbf{R} = R \mathbf{e}_R = r \csc \theta' (\sin \theta' \mathbf{e}_r + \cos \theta' \mathbf{e}_z)$$

由毕奥-萨伐尔定律,可得场点 P 处的磁感应强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^L \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \frac{r \csc^2 \theta' d\theta' \mathbf{e}_z \times (\sin \theta' \mathbf{e}_r + \cos \theta' \mathbf{e}_z)}{r^2 \csc^2 \theta'} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \mathbf{e}_\varphi \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \sin \theta' d\theta' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta'_1 - \cos \theta'_2) \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

其中, $\cos\theta'_1 = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$, $\cos\theta'_2 = \frac{z-L}{\sqrt{r^2+(L-z)^2}}$ 。

当直线电流为无限长时, $\theta'_1=0$, $\theta'_2=\pi$, 于是得到无限长直线电流的磁场的一个重要公式, 即

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi \quad (3-50)$$

可见, 无限长直线电流的磁场是以直线上的点为中心的同心圆环, 其大小与电流 I 成正比, 而与环的半径 r 成反比, 其方向与电流的正方向符合右手螺旋定则。

解题技巧: 以上计算中采用角度为积分变量, 比用长度更为简单。关于这一点, 大家可以仔细体会。

例 3.5 空气中有一通有恒定电流强度为 I 的圆形闭合电流线, 其半径为 a , 求该圆环轴线上任一点的磁感应强度。

解 采用圆柱坐标系, 取电流环轴线为 z 轴, 如图 3-14 所示。

在圆环上任取一电流元 $I d\mathbf{l}'$, 由毕奥-萨伐尔定律, 可得场点 P 处的磁感应强度元为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \sin 90^\circ}{R^2}$$

其方向如图 3-14 所示。在环上关于原点 O 的对称位置取另一电流元 $I d\mathbf{l}'$, 产生的磁感应强度元 $d\mathbf{B}$ 与前者大小相等、关于 z 轴对称, 合成总场量只有 z 方向分量, 即

$$dB_z = dB \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{a}{R} = \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

故可得总磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a^2 d\varphi' \mathbf{e}_z}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$$

既然在静电场中能用电力线($\mathbf{E}$ 线)来描写电场, 那么在稳恒磁场中也可以用磁感应线($\mathbf{B}$ 线)来描写磁场。几种简单电流分布的磁感应线如图 3-15 所示, 由图 3-15 可知, 与电力线不同, 磁感应线都是闭合回线。

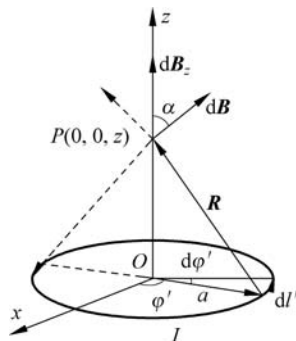


图 3-14 计算圆形线电流的磁感应强度

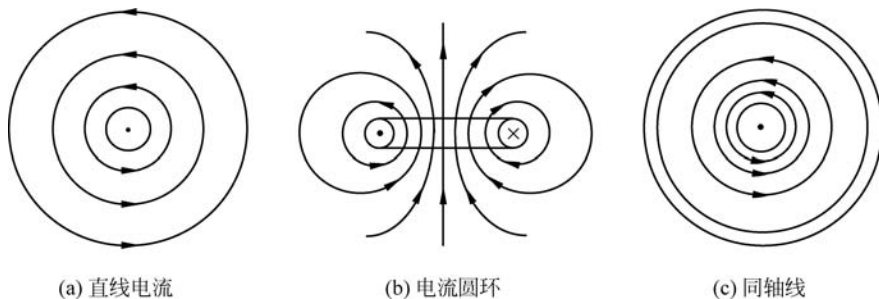


图 3-15 几种简单电流分布的磁感应线

* 3.4.3 磁单极子

人们对磁现象的最早认识来自于自然界磁铁的相互作用。磁铁具有两个极性,分别称为北极(N极)和南极(S极)。实验表明,同极相斥,异极相吸。上述现象与电荷之间的作用规律极为相似。历史上库仑等人受此启发,引入磁荷概念,也称为磁单极子。

在静电场中,电场线由正电荷出发,汇聚于负电荷,这表明电单极子是存在的。在 3.4.2 节中,由毕奥-萨伐尔定律计算了几种稳恒电流分布所产生的磁感应强度,其磁感应线均为闭合曲线。理论上可以进一步证明任何情况下磁感应线都是闭合回线(详见 3.5.1 节),这一点与静电场完全不同。大量实验表明,磁场中的 N 极和 S 极总是成对的,至今未观察到单独存在的磁荷。这表明,磁荷的概念尚没有从实验上得到证实。

尽管如此,人们在对静磁场和静磁相互作用的分析中提出一种基于磁荷概念的方法,称为磁荷法,而把基于电流的方法称为电流法。而且,在某些情况下,磁荷法比电流法更为简便。在不存在传导电流的空间,两种方法具有等效性。

近代物理中,科学家们做出种种猜想,希望用磁单极子的概念理解和解释一些物理现象。早在 1931 年,狄拉克为解释电荷的量子化现象,把量子力学与宏观电磁理论结合起来进行研究时发现,由于电荷量子化,在微观领域允许磁单极子的存在。若这种磁单极子的磁荷量为 g , 根据狄拉克的电荷量子化条件,电荷 e 与磁荷 g 有如下的定量关系:

$$e = n \left(\frac{hc}{2g} \right) \quad (3-51)$$

式中, n 为任意整数, c 为真空中的光速, h 为普朗克常量。如果磁单极子存在,就可以用上式解释电荷的量子化现象。1968 年,吴大峻和杨振宁推广了狄拉克的理论,给出了磁单极子矢量势更好的描述方式,并得到了第一个杨-米尔斯场方程的解,这个解描述了一个点状且到处带有 $1/r$ 势的磁单极子,这种磁单极子被称为吴-杨磁单极子。随后,许多物理学家从多个方面寻求磁单极子。直至最近几年,有些凝聚态物理学家把目光投向动量空间及凝聚态物质(如自旋冰)并获得磁单极子在凝聚态物质中存在的证据。这些研究结果相继发表在《自然》《科学》等重要刊物上。

综上所述,磁单极子的寻找之路充满谜团,虽然迄今未果,但物理学家并没有因此而放弃。磁单极子到底存不存在,仍需拭目以待。

3.4.4 洛伦兹力

由式(3-44)与式(3-47)可知,电流回路 l' 在电流回路 l 的磁场中所受到的安培力(即磁场力)为

$$\mathbf{F} = \oint_{l'} I d\mathbf{l}' \times \mathbf{B} \quad (3-52)$$

由此可见,磁场作用在任一电流元 $I d\mathbf{l}'$ 上的磁场力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l}' \times \mathbf{B} \quad (3-53)$$

如果自由电荷在磁场中以速度 $\mathbf{v}$ 运动,设 dt 时间内电荷元 dQ 的位移为 $d\mathbf{l}' = \mathbf{v} dt$, 则由于 $I d\mathbf{l}' = \frac{dQ}{dt} d\mathbf{l}' = \mathbf{v} dQ$, 故运动电荷元 dQ 所受到的磁场力为

$$d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3-54)$$

因此,磁场对以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的电荷 Q 的作用力

$$\boldsymbol{F} = Q \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \quad (3-55)$$

称为洛伦兹力。上式表明,在磁场中静止电荷不受洛伦兹力的作用;又因为洛伦兹力的方向与速度垂直,故它只改变速度的方向而不改变其大小,所以洛伦兹力不做功。在显像管和回旋加速器中就是用偏转线圈产生的磁场改变电子的运动方向。

在既有电场又有磁场的空间,电荷同时受库仑力和磁场力的作用。以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的点电荷 Q 所受的洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \quad (3-56)$$

对于连续的电荷分布,由于 $I d\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{J} dV' = \boldsymbol{v} dQ$,故 $\boldsymbol{v} dQ$ 或 $Q \boldsymbol{v}$ 可分别视为运动的电荷元或点电荷的电流元,于是运动的电荷元 $dQ = \rho dV'$ 在电磁场中所受到的作用力可写为

$$d\boldsymbol{F} = dQ\boldsymbol{E} + dQ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = (\rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) dV'$$

因此,单位体积的运动电荷在电磁场中所受到的力(即洛伦兹力密度)为

$$\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{F}}{dV'} = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \quad (3-57)$$

上式既适用于载流导体中的传导电流,也适用于运流电流。安培力与洛伦兹力是等效的。磁场中载流导线所受到的安培力就是导线中自由电子所受到的洛伦兹力的宏观表现。洛伦兹力或洛伦兹力密度反映了电磁场对运动电荷与电流的作用规律,因此,它是电磁理论的重要组成部分。

3.5 矢量势、稳恒磁场的基本性质

磁场的基本性质是通过磁感应强度的通量和环量来描述,对应于微分形式即为磁感应强度的散度和旋度。通过引入矢量势来分析和计算磁场、揭示磁场的基本性质极为方便。

3.5.1 磁通连续性原理

磁通的定义和电场中 $\boldsymbol{E}$ 通量或电通量(即 $\boldsymbol{D}$ 通量)的定义类似。在磁场中磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 穿过某一曲面 S 的通量,称为磁通量或磁通。表示为

$$\phi_m = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S B \cos\theta dS \quad (3-58)$$

其中, θ 是磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 与面元矢量 $d\boldsymbol{S}$ 之间的夹角。若取 $d\boldsymbol{S}$ 与该处的 $\boldsymbol{B}$ 同方向,则有 $d\phi_m = B dS$, 于是 $B = \frac{d\phi_m}{dS}$ 。可见 $\boldsymbol{B}$ 的值是单位横截面积中通过的磁通量,因此, $\boldsymbol{B}$ 也称为磁通密度(即磁通面密度)。

如静电场中由库仑定律推导出高斯定理一样,在稳恒磁场中可由安培定律或毕奥-萨尔定律推导出磁通连续性原理(也称为磁场的高斯定理)。对式(3-48)取散度,并注意到 ∇ 是对场点 (x, y, z) 的微分算符而与源点无关,则有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{e}_R}{R^2} dV'$$

利用矢量微分恒等式

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} \times \frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} \right) = \frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{J}) - \boldsymbol{J} \cdot \left(\nabla \times \frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} \right)$$

由于 $\mathbf{J}(x', y', z')$ 是源点的函数, 故 $\nabla \times \mathbf{J} = 0$; 又由 $\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2}$, 则 $\nabla \times \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} = \nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla \times \nabla \frac{1}{R} = 0$, 因此有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-59)$$

这是磁场的一个基本方程。对上式应用高斯散度定理, 可得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3-60)$$

这表明磁场是无通量源的场, 即 $\mathbf{B}$ 线总是呈闭合回线, 因为它不能由任何闭合面内发出或终止, 故穿入与穿出任一闭合面 S 的磁通量总相等。表述磁场这个基本性质的式(3-59)与式(3-60)称为磁通连续性原理。

3.5.2 矢量势及其微分方程

由于静电场是无旋场, 故可在静电场中引入标量电势 ϕ , 从而从另一个方面描述静电场的基本性质, 可使静电场问题的计算得以简化。同样在稳恒磁场中也企图找到类似的函数, 以简化磁场的计算。因为 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 由矢量分析可知, 任一矢量场 $\mathbf{F}$ 的旋度的散度恒等于零, 即 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \equiv 0$, 因此, $\mathbf{B}$ 可以表示为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-61)$$

式中, $\mathbf{A}$ 称为磁场的矢量势或矢量磁位, 简称矢势。

矢量势 $\mathbf{A}$ 的表达式可由毕奥-萨伐尔定律导出。由于 $\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2}$, 故式(3-48)可改写成

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J} \times \nabla \frac{1}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \frac{1}{R} \times \mathbf{J} dV'$$

利用如下的矢量微分恒等式:

$$\nabla \times \frac{1}{R} \mathbf{J} = \nabla \frac{1}{R} \times \mathbf{J} + \frac{1}{R} \nabla \times \mathbf{J}$$

因为 $\mathbf{J}(x', y', z')$ 是源点的函数, 则 $\nabla \times \mathbf{J} = 0$; 考虑到上述积分是对源点进行的, 于是可得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \frac{\mathbf{J}}{R} dV' = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{R} dV' = \nabla \times \mathbf{A}$$

式中,

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{R} dV' \quad (3-62)$$

可见, 矢势 $\mathbf{A}$ 的方向与电流密度 $\mathbf{J}$ 同方向, 它的每一个分量可以通过电流密度 $\mathbf{J}$ 的相应分量来计算, 例如在直角坐标系中, 有

$$\begin{cases} A_x(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x(x', y', z')}{R} dV' \\ A_y(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_y(x', y', z')}{R} dV' \\ A_z(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_z(x', y', z')}{R} dV' \end{cases} \quad (3-63)$$

面电流和线电流分布的矢势分别为

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_S(x', y', z')}{R} dS' \quad (3-64)$$

和

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{l'} \frac{d\mathbf{l}'}{R} \quad (3-65)$$

由此可见,由电流分布求得矢势 $\mathbf{A}$,再取其旋度即得磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。这要比直接由毕奥-萨伐尔定律计算磁感应强度简便得多,因为矢势 $\mathbf{A}$ 的每个分量可以通过一个标量积分来计算。同电场中的场量 $\mathbf{E}$ 与 ϕ 都满足叠加原理一样,磁场中的场量 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$ 也都和场源具有线性关系,故它们也满足叠加原理。

无限长直线电流的磁场与无限长直线电荷的电场类似,如果电流 I 沿 z 轴流动为正,则 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 只有 z 分量,建立如图 3-13 所示的坐标系,显然 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 与 (ϕ, z) 无关,由式(3-65)可得距离无限长直线电流 I 为 r 的任一点的矢势为

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Idl'}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Idz'}{\sqrt{z'^2 + r^2}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C$$

最后,得

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C \right) \mathbf{e}_z \quad (3-66)$$

或

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{r} \mathbf{e}_z \quad (3-67)$$

式中, C 或 a 都是与矢势参考点有关的常数。和在例 2.4 中求解无限长直线电荷的电势一样,无限长直线电流的矢势参考点不能选在无穷远处,否则矢势为无穷大。

将式(3-67)取旋度,便可得到式(3-50)。

引入矢势 $\mathbf{A}$ 后,磁通还可以用矢势 $\mathbf{A}$ 的环流来计算。将 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 代入式(3-58),并应用斯托克斯定理,得

$$\psi_m = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3-68)$$

其中, l 是围绕曲面 S 边缘的闭合路径。

由矢势 $\mathbf{A}$ 可以唯一地确定 $\mathbf{B}$, 但由 $\mathbf{B}$ 并不能唯一地确定 $\mathbf{A}$, 因为可以在 $\mathbf{A}$ 上附加任何旋度为零的矢量而并不影响 $\mathbf{B}$ 的值。由于任一标量函数 f 的梯度的旋度必等于零, 于是 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ 。这种自由变换称为规范变换。为确定 $\mathbf{A}$, 需对它加上一个辅助的限制条件。下面, 对 $\mathbf{A}$ 的散度来进行限制。

因为 $\mathbf{J}(x', y', z')$ 是源点的函数, 而 ∇ 是对场点的微分算符, 由式(3-62)有

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \nabla \frac{1}{R} dV'$$

由于 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$, 故 $\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$, 而 ∇' 是对源点的矢量微分算符。应用如下矢量微分恒等式:

$$\nabla' \cdot \frac{1}{R} \mathbf{J} = \mathbf{J} \cdot \nabla' \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{J}$$

得

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \nabla' \frac{1}{R} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}}{R} dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}}{R} dV'\end{aligned}$$

式中, S' 是包围所有电流分布区域 V' 的闭合曲面, 因而没有电流通过 S' , 故上式中第一项的闭合面积分为零; 而由稳恒电流的连续性可知 $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$, 则上式中的第二项体积分也为零。因此, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。如果选择

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3-69)$$

则很方便。这种选择称为库仑规范条件。

前面已根据毕奥-萨伐尔定律导出了磁通连续性原理和矢势 $\mathbf{A}$ 的表达式, 由此定律还可以导出矢势 $\mathbf{A}$ 所满足的微分方程。由于 $\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2}$, 并注意到 $\mathbf{J}$ 是源点的矢量函数, ∇ 是对场点的微分算符, 因此, 由式(3-62)可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J} \nabla^2 \frac{1}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J} \nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J} \nabla \cdot \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} dV'$$

因为当 $\mathbf{R} \neq 0$ 时, $\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} = 0$, 因此上式只可能在 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 的点上不为零, 可参考第2章 δ 函数及式(2-52), 于是体积分仅需对包围该点的小球积分, 这时 $\mathbf{J}(x', y', z') = \mathbf{J}(x, y, z)$ 可提出积分号外, 并应用高斯散度定理, 则有

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J} \int_{V'} \nabla \cdot \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J} \oint_{S'} \frac{\mathbf{e}_R \cdot d\mathbf{S}'}{R^2} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J} \oint_{S'} d\Omega = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J} 4\pi\end{aligned}$$

即

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (3-70)$$

这就是矢势 $\mathbf{A}$ 的泊松方程。式(3-62)、式(3-64)和式(3-65)是上式在相应电流分布下的特解。在直角坐标系中, 上式可表示成三个标量的微分方程, 即

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad (3-71)$$

式(3-63)是式(3-71)中对应分量的特解。

在无电流分布的区域, $\mathbf{J} = 0$, 矢势 $\mathbf{A}$ 满足拉普拉斯方程, 即

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (3-72)$$

此矢量微分方程在直角坐标系内同样可以分解为三个标量微分方程。求解矢势各分量的泊松方程或拉普拉斯方程可得到矢势的各个分量, 然后进行矢量合成便获得矢势 $\mathbf{A}$, 进而求其旋度即得到磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。因此, 与给定电荷分布求解电场的问题一样, 对于给定电流分布求解稳恒磁场的问题, 仍然可以归结为求解矢势的泊松方程或拉普拉斯方程的问题。

解题点拨: 用矢势法求磁场的方法可概括为

$$\begin{aligned}\text{方法 1: 由已知 } \mathbf{J} (J_S, I) &\xrightarrow{\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{R} dV'} \mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \mathbf{B}; \\ \text{方法 2: 由已知 } \mathbf{J} &\xrightarrow{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}} \mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \mathbf{B}.\end{aligned}$$

例 3.6 设均匀磁场的磁感应强度为 $\mathbf{B}_0$, 其方向沿坐标系内的 z 轴方向。试求它的矢量势。

解 利用磁矢势和磁感应强度的关系。由于 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z = \nabla \times \mathbf{A}$, 其中 B_0 为常数。若采用圆柱坐标系, 考虑到问题的轴对称性及在 z 方向无变化, 即有 $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varphi} = 0$ 与 $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = 0$, 于是有

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_r}{r} & \mathbf{e}_\varphi & \frac{\mathbf{e}_z}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{e}_z}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial A_z}{\partial r} = B_0 \mathbf{e}_z$$

得

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} = B_0 \quad \text{与} \quad \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0$$

可见 A_z 为一常数, 可令它为零, 即 $A_z = 0$ 。则有

$$rA_\varphi = B_0 \int r dr = \frac{1}{2} B_0 r^2 + C$$

当 $r=0$ 时, $\mathbf{A}$ 为有限值, 于是式中的常数 $C=0$ 。故

$$A_\varphi = \frac{1}{2} B_0 r$$

即

$$\mathbf{A} = A_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{2} B_0 r \mathbf{e}_\varphi$$

本题若采用直角坐标系, 据 $B_x = B_y = 0, B_z = B_0$, 及

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

得

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0, \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

观察上式, 可得出一组解为

$$A_y = A_z = 0, \quad A_x = -B_0 y$$

同理, 还可得出另一组解为

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = B_0 x$$

除此之外, 还存在其他形式的解。

不难验证, 虽然上述几种解均满足库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 但仍不能保证解的唯一性。事实上, 由于 $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \psi) = \mathbf{B}$, 所以在所求的 $\mathbf{A}$ 中增、减一项 $\nabla \psi$ 都会对应同一个 $\mathbf{B}$ 。经典电磁理论认为, $\mathbf{A}$ 的这种任意性表明其本身没有直接的物理意义, 只有 $\mathbf{A}$ 的环量才具有明确的物理意义。近代物理研究发现, 即使在 $\mathbf{B}=0$ 的地方, $\mathbf{A}$ 也可以单独产生可观察的物理效应, 这就是著名的 A-B 效应。

需要指出的是,在矢势为零的点上磁感应强度并不一定为零。

延伸思考: 试求一通有恒定电流 I 的线电流圆环轴线上任一点的矢势 $\mathbf{A}$, 能否根据其值计算出轴线上任一点的磁感应强度?

3.5.3 安培环路定律

磁感应线呈闭合回线,若沿这些闭合回线积分,则 $\mathbf{B}$ 的闭合回路线积分不会为零。这与静电场有着本质的不同。利用磁感应强度的旋度公式可导出其环路所服从的规律。

对 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 求旋度:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

利用矢势 $\mathbf{A}$ 的泊松方程 $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$, 并结合库仑规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3-73)$$

该式表明了磁场的另一个基本性质,即磁场是有旋场,其漩涡源是该点的电流密度,此式即为安培环路定律的微分形式。

式(3-73)对应的积分形式为

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \quad (3-74)$$

其中, S 为以 l 为边界的任意曲面,此式为安培环路定律的积分形式。它表明 $\mathbf{B}$ 沿任一闭合回路(安培环路)的环流等于该闭合回路所包围的总电流 I 乘以 μ_0 。

特别提醒: 闭合回路 l 所包围的总电流 I 是 l 包围的所有电流的代数和,且与闭合回路 l 符合右手螺旋定则的电流为正,反之为负。

积分形式的安培环路定律不仅表明了磁场的性质,而且在计算某些电流分布的磁场问题中非常有用。和静电场中应用高斯定理一样,在一般的电流分布情形下,由于矢量积分的困难,不能用安培环路定律的积分形式由电流分布求得 $\mathbf{B}$ 。但当电流分布具有简单的对称性时,可作一安培环路,在积分路径即安培环路上各点 $\mathbf{B}$ 的值相同,且其方向与路径平行或与一部分路径垂直,可由安培环路定律的积分形式求得 $\mathbf{B}$ 。

例 3.7 已知同轴线的内外导体中载有等值而异号的电流 I (见图 3-16),设导体内电流分布均匀。试计算同轴线内的磁感应强度。

解 在以同轴线的轴线为 z 轴的圆柱坐标系内,同轴线的磁场具有轴对称性。

当 $r \leq r_1$ (内导体内) 时,应用安培环路定律,有

$$\oint_l \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi r_1^2} \pi r^2 = \frac{\mu_0 I r^2}{r_1^2}$$

故

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} \mathbf{e}_\varphi$$

当 $r_1 \leq r \leq r_2$ (内外导体间) 时,同理有

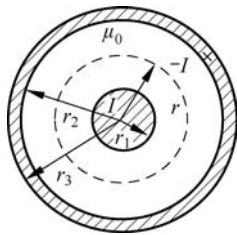


图 3-16 计算同轴线的磁场



动画视频

$$\oint_l \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_2 = \mu_0 I$$

即

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

当 $r_2 \leq r \leq r_3$ (外导体内) 时, 有

$$\oint_l \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_3 = \mu_0 \left[I - \frac{\pi(r^2 - r_2^2) I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} \right]$$

则

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} \mathbf{e}_\varphi$$

因在外导体外 ($r \geq r_3$) 的闭合回路包围的总电流为零, 故该区域没有场, 即

$$\mathbf{B}_4 = 0$$

例 3.8 载有均匀面电流密度为 $\mathbf{J}_S$ 的无限大薄导体平板, 试求空间任一点的磁感应强度。

解 用安培环路定律。以平板所在平面为 xOy 坐标面, z 轴为该平面的法线, 设电流密度的方向为 x 轴负方向, 则可以根据定性分析得出磁感应强度的方向沿 y 轴, 上正下负; 在 yOz 平面上取一横跨平板且关于平面对称的矩形闭合回路为安培环路, 绕行方向为顺时针, 如图 3-17 所示。

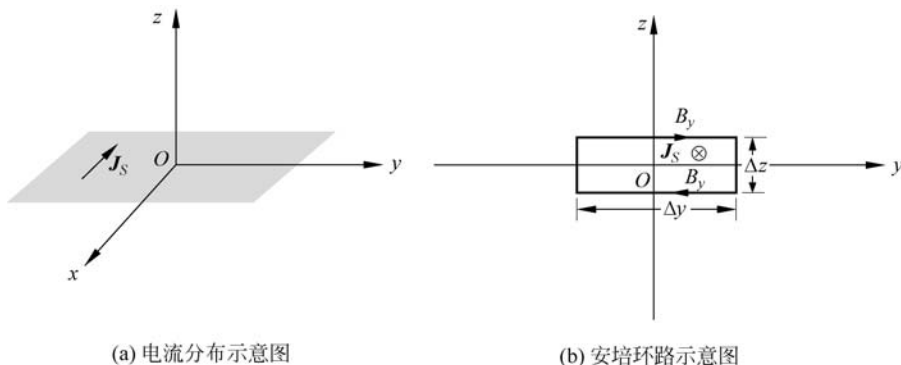


图 3-17 计算无限大载流平面周围的磁场

应用安培环路定律, 有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_y \Delta y + B_y \Delta y + B_y \Delta z \cos \frac{\pi}{2} + B_y \Delta z \cos \frac{\pi}{2} = \mu_0 J_S \Delta y$$

故

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_S}{2} \mathbf{e}_y, & z > 0 \\ -\frac{\mu_0 J_S}{2} \mathbf{e}_y, & z < 0 \end{cases}$$

3.5.4 真空中稳恒磁场的基本方程

稳恒磁场的两个基本性质由磁通连续性原理和安培环路定律来表征, 即

积分形式

微分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \end{array} \right. \quad (3-75)$$

这表明稳恒磁场是无散有旋场,电流是磁场的漩涡源。

稳恒磁场的基本方程也可以通过矢势 $\mathbf{A}$ 所满足的泊松方程 $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$ 来描述。前面已指出,对于由电流分布求解磁场的问题,可以归结为求解满足给定边界条件的矢势 $\mathbf{A}$ 的泊松方程或拉普拉斯方程(无电流分布的区域 $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$),然后取矢势的旋度便可求得磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。该方法在分析较复杂的磁场边值问题中较为常用,并且在电磁辐射问题中用来求解辐射场等。

3.6 磁偶极子及磁场对其的作用

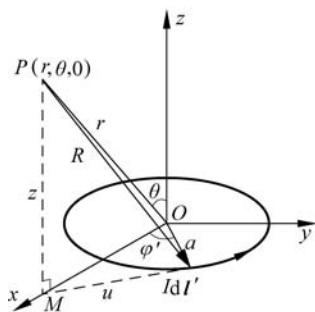
3.6.1 磁偶极子的磁场

磁偶极子也是一种理想模型。当一个小电流环的几何尺度远小于距所讨论的场点的长度时,该电流环就称为一个磁偶极子。下面具体计算磁偶极子产生的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

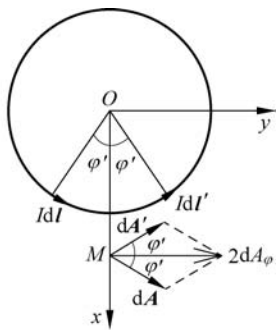
如图 3-18(a)所示, P 为场点。采用球坐标系,使电流圆环的轴线与 z 轴重合,并取圆环的中心为原点,设圆环的半径为 a 。由于对称,磁场与方位角 φ 无关,故取 P 的坐标为 $(r, \theta, 0)$ 。

图 3-18(b)为图 3-18(a)在 xOy 平面上的投影,因 P 点取在 xOz 坐标面内,对圆环上任一电流元 $I d\mathbf{l}'$,总有一个和它关于 xOz 面对称的电流元 $I d\mathbf{l}$,它们的 y 分量相加而 x 分量相互抵消,故只需计算场点 P 处 y 方向(亦即方位角方向)的矢势,对于绕 z 轴的其他半平面情况亦同,即

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a d\varphi') \cos\varphi'}{R}$$



(a) 计算电流元在场点的矢势元



(b) 矢势元的合成

图 3-18 计算电流圆环的磁场

由图 3-18(a)可得 $z = r \cos\theta$, $u^2 = (r \sin\theta)^2 + a^2 - 2ar \sin\theta \cos\varphi'$, $R^2 = z^2 + u^2 = r^2 + a^2 - 2ar \sin\theta \cos\varphi'$, 因为 $a \ll r$, 可应用牛顿二项式定理,并略去高阶小项,得

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \sin\theta \cos\varphi' \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a}{r} \sin\theta \cos\varphi' \right)$$

$$\begin{aligned}
 A_{\varphi} &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \cos\varphi' \left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a}{r} \sin\theta \cos\varphi' \right) d\varphi' \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\pi a^2}{r^2} \sin\theta = \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^2} \sin\theta
 \end{aligned} \quad (3-76)$$

故

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^2} \sin\theta \mathbf{e}_{\varphi} \quad (3-77)$$

其中, $S = \pi a^2$ 是圆环的面积。

在球坐标系中,由 $\mathbf{A}$ 可求得磁感应强度 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_{\theta} & r\sin\theta\mathbf{e}_{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r\sin\theta A_{\varphi} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^3} (2\cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_{\theta}) \quad (3-78)$$

将上式和表示电偶极子的电场强度的式(2-56)对比可知,两者形式相似。可见, IS 作为一个整体决定着空间的矢势。因此,可定义其磁矩为

$$\mathbf{m} = IS \quad (3-79)$$

式中, $\mathbf{S}$ 是电流回路所包围的面积矢量,其方向与电流为正的绕行方向符合右手螺旋定则。磁矩反映了其属性不仅与分布的电流有关,而且与形状、尺寸、电流的流动方向都有关。

对于形状一般的平面电流回路(见图 3-19),因其面积矢量为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_{l'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' \quad (3-80)$$

故电流环的磁矩的一般表示式(3-79)可写为

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint_{l'} \mathbf{r}' \times I d\mathbf{l}' \quad (3-81)$$

对于体电流和面分布,由于 $I d\mathbf{l}' = \mathbf{J} dV' = \mathbf{J}_s dS'$,故它们的磁矩分别为

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dV' \quad (3-82)$$

和

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{S'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}_s dS' \quad (3-83)$$

于是,表示磁偶极子的矢势即磁偶极势的式(3-77)可以写成更一般的形式,为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (3-84)$$

磁偶极子在远处所产生的磁感应强度则为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} \right) \quad (3-85)$$

利用矢量恒等式,可得上式和表示电偶极子的电场强度的公式相对应。若令 $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_z$,代入式(3-85),便可得到式(3-77),即与式(2-56)的对应形式为

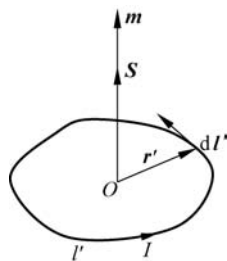


图 3-19 任意小电流回路的磁矩

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta) \quad (3-86)$$

磁偶极子的场图与图 3-15(b)类同。

答疑解惑：可以看到,上述计算中采用的近似计算方法与计算电偶极子的电场很相似。在这里,若用精确的表达式计算磁矢势,过程相当烦琐,其复杂的表达式甚至掩盖掉原本较为清晰的物理图像。所以有的时候,可以“抓大放小”,而不要“斤斤计较”,这样做完全可以满足工程问题的精度要求,这也是读者通过学习电磁场理论需要培养的一种应用能力!

3.6.2 稳恒磁场对磁偶极子的作用

由安培定律和毕奥-萨伐尔定律可知,磁场中的任一电流元将会受到磁场力的作用。图 3-20(a)所示的小矩形电流回路,其磁矩 $\mathbf{m}$ 的方向与 $\mathbf{B}$ 的夹角为 θ 。磁场中的电流元所受到的力为 $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ 。由于 bc 段与 da 段上的每一对电流元所受到的力等值而反向且位于同一直线上,因而互相抵消。 ab 段与 cd 段上的电流所受到的力的大小为 $F_1 = F'_1 = Il_1 B$,但由于 $\mathbf{F}_1$ 与 $\mathbf{F}'_1$ 的方向相反,且两力之间的垂直距离为 $l_2 \sin\theta$ (见图 3-20),故它们所受到的力矩为

$$T = F_1 \frac{l_2}{2} \sin\theta + F'_1 \frac{l_2}{2} \sin\theta = Il_1 l_2 B \sin\theta = ISB \sin\theta$$

其中, $S = l_1 l_2$ 。上式可以写成如下的矢量形式:

$$\mathbf{T} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3-87)$$

实际上,电流回路的磁矩与回路的形状无关,故上式也适用于一般的电流回路。由式(3-87)可知,处于稳恒磁场中的电流回路因受到力矩的作用而转动,使其磁矩 $\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{B}$ 同方向,这是磁介质在外加磁场中磁化的微观机理。

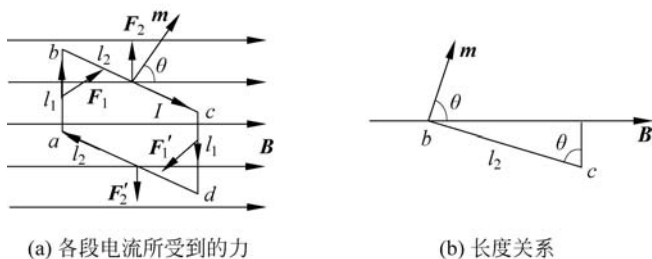


图 3-20 矩形电流回路在磁场中所受到的力矩

3.7 物质的磁化和磁场强度

3.7.1 物质的磁化与磁化强度

按照近代物理的理论,在物质的原子结构中,电子围绕原子核作轨道运动,同时还作自旋运动。原子中各电子的轨道运动磁矩与自旋磁矩的矢量和构成了原子磁矩。在外磁场

中,原子磁矩适当取向,于是在宏观上出现磁矩,该现象称为物质的磁化。磁化后的物质具有磁性。根据磁化的方式不同,物质的磁性可分为抗磁性、顺磁性和铁磁性等。

在抗磁性物质的原子中,具有相反方向的轨道运动和自旋运动的电子成对出现,其磁矩都被抵消,故原子净磁矩为零。这与电介质中的无极分子类似。在外磁场中,电子的轨道运动发生改变而产生与外磁场方向相反的附加磁矩,如图 3-21(a)所示,外磁场被削弱,故称为抗磁性,也称为感应磁化。所有物质都具有抗磁性,只是有些物质的抗磁性与它的其他磁性相比居于次要地位罢了。

物质的顺磁性和铁磁性来源于原子磁矩。在顺磁性物质中,由于原子内的电子磁矩未被完全抵消而存在固有原子磁矩。在无外磁场时,这些原子磁矩排列凌乱,故任意小的宏观体积内的净磁矩为零。在外磁场的作用下,各原子磁矩按外磁场方向顺向排列,但热骚动破坏了这种排列,结果在外磁场方向产生了一个取向的净磁矩,如图 3-21(b)所示,外磁场被加强,故称为顺磁性,这与电介质中有极分子的取向极化相似。物质的抗磁性和顺磁性都很微弱。

铁磁性物质的内部存在着所谓“磁畴”的自发磁化区域。在磁畴内,由于电子之间的某种交换作用,使得由电子自旋净磁矩引起的各原子磁矩排列一致。在无外磁场时,各磁畴的磁化方向不同,因而不表现出宏观磁矩,如图 3-21(c)所示,在外磁场的作用下,磁化方向与外磁场方向接近的磁畴增大(磁畴壁位移),然后随着外磁场的增大,各磁畴的磁化方向集体转向外磁场方向,故铁磁性物质表现出巨大的磁性。



动画视频

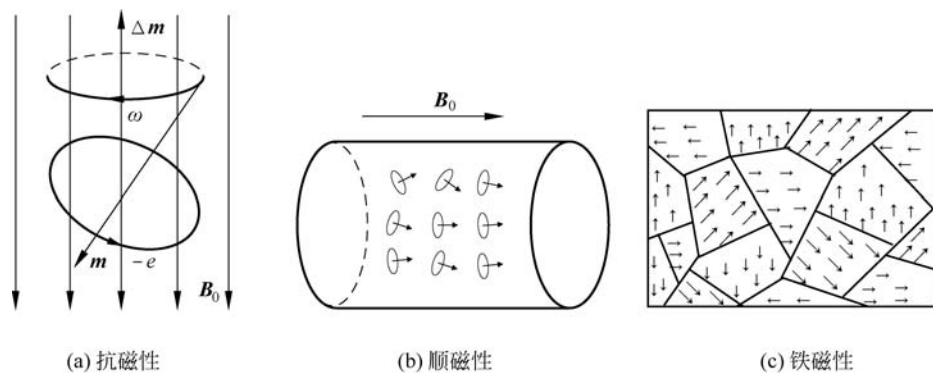


图 3-21 物质的磁性

在实际应用中广泛使用多种铁磁性材料。例如,电机、变压器中使用的硅钢片、坡莫合金以及通信设备中使用的软磁铁氧体(如磁性天线、高频磁芯)等软磁材料;扬声器、电铃中使用的磁钢、钕铁氧体及磁悬浮列车可使用的有巨大永磁性的钕铁硼等硬磁材料;有矩形磁滞回线的记忆磁芯的矩磁材料;具有磁滞伸缩效应的压磁材料;微波隔离器、环形器、法拉第旋转相移器等微波器件中的旋磁材料等。

从磁性的角度观察物质,称为磁介质。设磁介质中体积元 dV 内有 N 个原子,在外磁场方向上一个原子的平均净磁矩为 m ,单位体积内的原子数为 n ,则将单位体积的总磁矩称为磁化强度,用矢量 $\mathbf{M}$ 表示,即

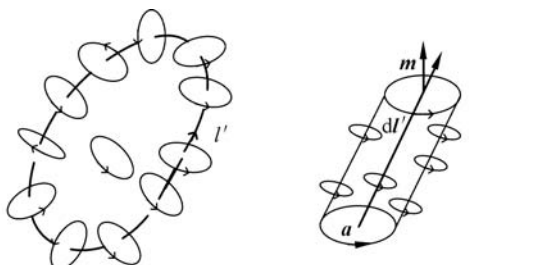
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{N\mathbf{m}}{\Delta V} = n\mathbf{m} \quad (3-88)$$

磁介质中的磁化强度 $\mathbf{M}$ 与电介质中的电极化强度 $\mathbf{P}$ 相对应,二者都是宏观量。

3.7.2 磁化电流

与极化后的电介质内及其表面上出现束缚电荷一样,磁化后的磁介质内及其表面上会出现磁化电流。下面推导它与磁化强度 $\mathbf{M}$ 的关系式。

设 S' 为介质内部的一个曲面,其边界线为 l' ,如图 3-22 所示。为了求出磁化电流密度 $\mathbf{J}_m$,首先须计算穿过面的总磁化电流 I_m 。由图 3-22 可知,分布在 S' 上的分子电流,一部分只穿出或穿入该曲面,另一部分同时穿入、穿出该曲面。对于穿过面的总电流有贡献的部分只有前者,这些分子电流被边界线链环着。因此,通过 l' 的总磁化电流应等于被边界线链环着的分子个数乘以每个分子电流 i 。



(a) 曲线 l' 包围的分子电流 (b) 与线元 dl' 交链着的分子电流

图 3-22 磁化电流的安培模型

设分子电流围的面积为 a ,在边界 l' 上取线元 dl' ,做一个以该线元为轴线、 a 为底面积的圆柱体元 $a \cdot dl'$ 。若分子电流位于该体元内,则该分子电流就被链着。设单位体积的分子数为 n ,则被边界 l' 链环着的分子电流数为 $\oint_{l'} na \cdot dl'$ 。因此,通过 S' 的总磁化电流为

$$I_m = \oint_{l'} ina \cdot dl' = \oint_{l'} nm \cdot dl' = \oint_{l'} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}' = \int_{S'} \nabla \times \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}'$$

根据电流与电流密度的关系 $I_m = \int_{S'} \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S}'$, 得

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (3-89)$$

上面考虑的是磁化体电流分布。在介质表面的磁化面电流,也可以用类似的方法进行分析。在介质内部非常靠近表面的地方(厚度在原子、分子尺度),选择线元 $\Delta l'_1 \mathbf{t}_1$,其中 $\mathbf{t}_1$ 是表面上的一个单位矢量(见图 3-23)。则根据上面的分析,与该线元相链的电流为

$$I_{m1} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{t}_1 \Delta l'_1$$

对应的电流密度为

$$J_{Sm1} = \frac{I_{m1}}{\Delta l'_1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{t}_1 = M_1$$

如果考虑方向,并注意图 3-23 中的坐标系,则

$$\mathbf{J}_{Sm1} = M_1 (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{n}) = (M_1 \mathbf{t}_1) \times \mathbf{n} = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{n}$$

同理,可以考虑与其正交方向上的面电流密度,为

$$\mathbf{J}_{Sm2} = M_2 (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{n}) = (M_2 \mathbf{t}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{M}_2 \times \mathbf{n}$$

于是,表面上的面电流密度矢量为

$$\mathbf{J}_{Sm} = \mathbf{J}_{Sm1} + \mathbf{J}_{Sm2} = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

即

$$\mathbf{J}_{Sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (3-90)$$

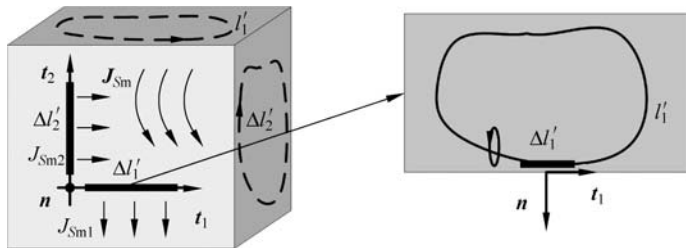


图 3-23 磁化面电流密度的示意

磁化电流密度也可以从磁偶极子的定义出发直接导出。这个过程涉及较多矢量分析的内容,初学者也可以跳过此推演过程,了解其思想及结论即可。

因为 $\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$, 则式(3-84)表示的磁偶极势变为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{R}$$

由于在磁介质中体积元 dV' 内的磁矩为 $\mathbf{M}dV'$, 故它在场点所产生的矢量势可写为

$$d\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \times \nabla \frac{1}{R} dV'$$

注意到 $\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$, 则体积 V' 内的磁化物质在场点所产生的矢势为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M} \times \nabla' \frac{1}{R} dV'$$

利用矢量微分恒等式

$$\nabla' \times \frac{1}{R} \mathbf{M} = \nabla' \frac{1}{R} \times \mathbf{M} + \frac{1}{R} \nabla' \times \mathbf{M} = -\mathbf{M} \times \nabla' \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \nabla' \times \mathbf{M}$$

则有

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{R} dV'$$

再应用矢量积分恒等式(旋度定理)

$$\int_{V'} \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{R} dV' = -\oint_{S'} \frac{\mathbf{M}}{R} \times d\mathbf{S}' = -\oint_{S'} \frac{\mathbf{M}}{R} \times \mathbf{n} dS'$$

其中, S' 是包围体积 V' 的闭合曲面, $\mathbf{n}$ 是该闭合面外法线方向上的单位矢量, 于是有

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{R} dS' \quad (3-91)$$

将上式中两个积分分别与体电流和面电流分布的矢势表示式(3-62)和式(3-64)对比, 可见上式中的两个被积函数的分子分别对应于一个等效的电流密度, 即

$$\begin{cases} \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \\ \mathbf{J}_{Sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \end{cases} \quad (3-92)$$

特别说明：一般地，在用直接积分式计算由电流源(电荷源)产生于某一场点的磁场(电场)时，源点的坐标用加撇的变量表示，场点的坐标不加撇。但在不引起概念混淆的情况下，源点的坐标一般用不带撇的变量。比如电流密度分布，一般用 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 表示，而不用 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 表示。式(3-92)中已把作用在 $\mathbf{M}$ 上的算符 ∇ 上的一撇略去，但仍理解为对源点坐标的导数。特别地，对于场点有源的问题，源点的坐标也是场点的坐标，一般不能用带撇的变量。例如求解磁矢势满足的泊松方程 $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$ 等。

3.7.3 磁场强度与磁介质中的安培环路定律

在磁介质中不但要考虑自由电流所产生的磁场，还要考虑磁化电流的附加作用，正如电介质中静电场的情形一样。因此，对于磁介质，式(3-73)应改写为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) \quad (3-93)$$

这表明自由电流密度 $\mathbf{J}$ 和磁化电流密度 $\mathbf{J}_m$ 都是磁介质中磁感应强度的漩涡源。

将 $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ 代入式(3-93)，得

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}$$

即

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} \quad (3-94)$$

可见，矢量 $\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right)$ 的漩涡源只与自由电流密度 $\mathbf{J}$ 有关。为避免直接计算磁化强度 $\mathbf{M}$ 的麻烦，与在电介质中引入电位移矢量 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 一样，在磁介质中也引入一个辅助矢量：

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (3-95)$$

称为磁场强度。于是

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (3-96)$$

这样，式(3-94)便简化为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3-97)$$

这就是磁介质中安培环路定律的微分形式。

对上式两端进行面积分，并应用斯托克斯定理，可以得到磁介质中安培环路定律的积分形式为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (3-98)$$

上式表明，磁场强度 $\mathbf{H}$ 沿任一闭合回路的线积分等于该闭合回路所包围的总自由电流 I 。

磁场可以用磁感应线($\mathbf{B}$ 线)来描写，同样也可以用磁力线($\mathbf{H}$ 线)来表示各点磁场的大小和方向。

实验指出，对于除铁磁物质以外的均匀、线性和各向同性的磁介质， $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{H}$ 成正比，即

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (3-99)$$

式中,比例常数 χ_m 称为磁化率。将上式代入式(3-96),得

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (3-100)$$

式中

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (3-101)$$

称为磁介质的磁导率。 μ_r 称为相对磁导率,即

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (3-102)$$

对于顺磁性物质, $\chi_m > 0$, 其值的数量级为 10^{-3} , 且与温度有关; 抗磁性物质的 $\chi_m < 0$, 其值的数量级为 10^{-5} , 与温度无关。真空中, $\chi_m = 0$ 。因此, 对于顺磁性和抗磁性物质以及空气, $\chi_m \approx 0$, $\mu_r \approx 1$ 。对于铁磁性材料, 通常用图 3-24 所示的磁滞回线即 $B \sim H$ 曲线来表示 B 与 H 间的非线性关系。因此, 铁磁性物质的磁导率 μ 不是常量, 其值很大, 可变化几个数量级。它是 H 的函数并与材料的磁化历程有关。在很小的磁场中, 大多数未经处理的铁磁材料(软磁材料), B 与 H 的关系仍是线性的。

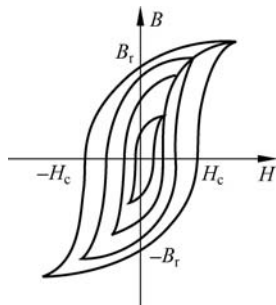


图 3-24 铁磁材料的磁滞回线

由式(3-99)~式(3-102)可得 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{H}$ 之间的关系为

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1) \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B} \quad (3-103)$$

式(3-92)和式(3-103)是磁介质的磁化规律。由式(3-93)、式(3-97)和式(3-100)可得

$$\mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) = \mu \mathbf{J}$$

即

$$\mathbf{J}_m = (\mu_r - 1) \mathbf{J} \quad (3-104)$$

式(3-104)说明在均匀、线性和各向同性的磁介质中, 磁化电流密度 $\mathbf{J}_m$ 与自由电流密度 $\mathbf{J}$ 成正比。上式和电介质中的束缚电荷密度 $\rho_b = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho$ 相对应。

3.7.4 磁介质中稳恒磁场的基本方程

在有磁介质中, 描述磁场性质的物理量除基本物理量——磁感应强度外, 还引入了辅助物理量——磁场强度。首先, 在磁介质中磁通的连续性仍然成立。其次, 用磁场强度来表述的安培环路定律反映了磁介质中磁场的环路特性。这样, 再加上辅助方程 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 便构成磁介质中稳恒磁场的基本方程, 即

积分形式	微分形式	
$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(3-105)
$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	
$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	

可见, 磁介质中的稳恒磁场是有旋无散场。

同电介质中应用电位移矢量 $\mathbf{D}$ 分析计算电场一样,用磁场强度 $\mathbf{H}$ 计算磁介质中的磁场是方便的,因为它只与自由电流有关。

在非磁性介质中,由 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 和 $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$, 可得

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \quad (3-106)$$

再由 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$, 并运用矢量微分恒等式

$$\nabla\times\mathbf{B}=\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

注意到 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$, 于是得到

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J} \quad (3-107)$$

这是用矢势 $\mathbf{A}$ 描写的磁介质中磁场的基本方程,即矢势的泊松方程。

当电流为体、面、线分布时,式(3-107)的特解分别为
体电流分布

$$\mathbf{A}(x,y,z)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}}{R}\mathrm{d}V' \quad (3-108)$$

面电流分布

$$\mathbf{A}(x,y,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\mathbf{J}_s+\mathbf{J}_{sm}}{R}\mathrm{d}S' \quad (3-109)$$

线电流分布

$$\mathbf{A}(x,y,z)=\frac{\mu I}{4\pi}\int_{l'}\frac{\mathrm{d}l'}{R} \quad (3-110)$$

式(3-109)中的面积分不能像体积分那样转换,因为 $\mathbf{J}_{sm}$ 和 $\mathbf{J}_s$ 是不相关的。例如把一块铁放进磁场里,即使 $\mathbf{J}_s$ 为零,也能获得磁化强度 $\mathbf{M}$,从而出现磁化面电流密度 $\mathbf{J}_{sm}=\mathbf{M}\times\mathbf{n}$ 。

在无电流的区域,矢势满足拉普拉斯方程,即

$$\nabla^2\mathbf{A}=0 \quad (3-111)$$

3.7.5 磁标势

用矢势 $\mathbf{A}$ 求解磁场问题虽然比直接用毕奥-萨伐尔定律方便许多,但因矢势的计算仍需考虑方向性,所以相对仍较为复杂。能否在一定范围内引入一个标量势函数以简化计算呢?

因为磁场是有旋场,故在整个场域不能引入标量势函数。然而,在无电流的区域, $\nabla\times\mathbf{H}=0$, 则 $\mathbf{H}$ 可用一个标量势函数来表示,仿照 $\mathbf{E}=-\nabla\phi$, 可令

$$\mathbf{H}=-\nabla\phi_m \quad (3-112)$$

式中, ϕ_m 称为磁标量势或磁标势。

类似于电势与电场强度的关系,有

$$\phi_m(P)-\phi_m(Q)=\int_P^Q\mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad (3-113)$$

对于均匀、线性、各向同性的非磁性介质,由 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 及 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, 则有

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\mu\nabla\cdot\mathbf{H}=0$$

即

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3-114)$$

将式(3-112)代入上式,得

$$\nabla^2 \phi_m = 0 \quad (3-115)$$

因此,在无电流的区域,可用和求解静电场完全相同的方法来求解磁场,以简化磁场的计算。

内容延伸: 对于铁磁材料,有 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, 由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 得

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (3-116)$$

如果将磁偶极子看成是一对等值异号的磁荷所产生的,令磁荷密度 $\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$, 与静电场问题相对应,则有

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (3-117)$$

将式(3-112)代入上式,得

$$\nabla^2 \phi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (3-118)$$

这便是磁标势所满足的一般形式的微分方程。若磁介质被均匀磁化,在其内部有 $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, 可得磁标势 ϕ_m 满足拉普拉斯方程。

例 3.9 已知空气中一无限长直导线中通有电流 I , 试求导线周围任意位置处的磁标势。

解 采用圆柱坐标系,因无限长直导线产生的磁场强度为 $\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$, 而磁场线与磁标势相垂直,故等磁标面(线)为一族绕电流线的半平面(射线族),即磁标势只与 φ 有关。若选取 $\varphi = 0$ 为参考零势面,由式(3-113),得

$$\phi_m = \int_{\varphi=\varphi}^{\varphi=0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\varphi=\varphi}^{\varphi=0} \frac{I}{2\pi r} r d\varphi = -\frac{I}{2\pi} \varphi$$

3.7.6 磁路

在磁场中,由于磁感应线总形成闭合回路,因此可以将磁感应线与电路中的电流线做类比。在电路中,由于导体媒质和外部介质的电导率大小相差很大,因而电流可以完全被限定在导体回路中。在磁场中,若磁导率悬殊极大的铁磁性材料周围是普通的非磁性介质,那么磁感应线将被限制在高磁导率媒质内。于是,可以将铁磁介质制成适当的形状,这种由磁感应线在磁性材料中形成的回路称为磁路。在磁路中,尽管磁性材料与周围磁介质的磁导率相差很大,以至于绝大多数磁通可以限定在磁性材料中,但仍存在一定的对外泄露,只不过在近似情况下可以忽略。磁路在分析计算变压器、电磁铁、继电器、电机等问题中有着广泛的应用。下面举例来说明如何用磁路的概念计算磁场问题。

例 3.10 一绕 N 匝线圈并通有电流 I 的环形铁芯螺线管,铁芯的磁导率为 μ , 设环的截面半径 a 远小于环的平均半径 R , 环上开有长为 L_0 的小气隙,如图 3-25 所示。试计算螺线管的铁芯及气隙中的 ϕ_m 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 。

解 由于 $a \ll R$, 故螺线管内的磁场可近似认为是均匀场。取一个部分环形的闭合面 S , 使其两底面分别与铁芯及气隙的横截面重合。由磁通连续性原理, 可求得其中的磁通为

$$\psi_m = B_i S_i = B_0 S_0$$

其中, 下标 i 与 0 分别表示铁芯与气隙。根据安培环路定律, 有

$$\int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_i L_i + H_0 L_0 = NI$$

即

$$\frac{B_i}{\mu} L_i + \frac{B_0}{\mu_0} L_0 = B_i S_i \left(\frac{L_i}{\mu S_i} + \frac{B_0 L_0}{\mu_0 B_i S_i} \right) = B_i S_i \left(\frac{L_i}{\mu S_i} + \frac{L_0}{\mu_0 S_0} \right) = NI$$

故

$$\psi_m = \frac{NI}{\frac{L_i}{\mu S_i} + \frac{L_0}{\mu_0 S_0}}$$

令 $R_{mi} = \frac{L_i}{\mu S_i}$ 与 $R_{m0} = \frac{L_0}{\mu_0 S_0}$ 分别称为铁芯和气隙的磁阻, 与电路中电阻相对应, 则

$$\psi_m = \frac{NI}{R_{mi} + R_{m0}}$$

对于主要由铁磁材料所组成的磁通的闭合路径的磁路, 其中的磁通由 NI 所产生, 称为磁通势或磁动势(简称磁势), 用 $\mathcal{E}_m$ 表示。则上式中的磁通势与磁通量、磁阻之间的关系可表示为

$$\psi_m R_m = \mathcal{E}_m$$

上式称为闭合磁路的欧姆定律。

铁芯和气隙中的磁感应强度与磁场强度分别为

$$B_i = \frac{\psi_m}{S_i} \quad \text{与} \quad B_0 = \frac{\psi_m}{S_0}$$

$$H_i = \frac{B_i}{\mu} = \frac{\psi_m}{\mu S_i} \quad \text{与} \quad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{\psi_m}{\mu_0 S_0}$$

当气隙很小时, $S_0 \approx S_i = \pi a^2$, 则有

$$\psi_m = \frac{NIS_i}{\frac{L_i}{\mu} + \frac{L_0}{\mu_0}} = \frac{\mu\mu_0 NI \pi a^2}{2\pi R\mu_0 + (\mu - \mu_0)L_0}$$

于是

$$B_i = B_0 = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi R\mu_0 + (\mu - \mu_0)L_0}$$

$$H_i = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R\mu_0 + (\mu - \mu_0)L_0}$$

$$H_0 = \frac{\mu NI}{2\pi R\mu_0 + (\mu - \mu_0)L_0}$$

由于 $\mu \gg \mu_0$, 可见 $H_0 \gg H_i$ 。当铁芯中没有气隙时, $L_0 = 0$, 则有

$$\psi_m = \frac{\mu NI a^2}{2R}, \quad B_i = \frac{\mu NI}{2\pi R}, \quad H_i = \frac{NI}{2\pi R}$$

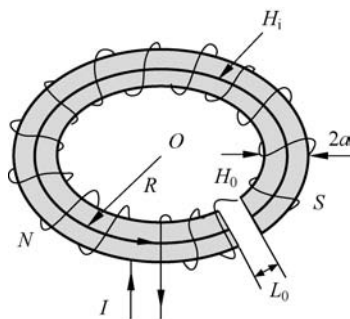


图 3-25 有气隙的环形铁芯螺线管

由此可见,有气隙的铁芯中的磁场比没有气隙时要小得多。在实践中可用调整气隙的长度来调节线圈的电感。

3.8 磁场的边界条件

与静电场类似,稳恒磁场基本方程的微分形式在两种不同磁介质的分界面上不再适用,必须应用场量的边界条件来代替。和推导静电场的边界条件一样,可由磁场的基本方程的积分形式导出磁场的边界条件。

本章已指出,对于给定电流分布求解磁场的问题,可以归结为求解矢势 $\mathbf{A}$ 的泊松方程的问题。在无电流的区域,还可以求解磁标势 ϕ_m 、矢势 $\mathbf{A}$ 的拉普拉斯方程。但这些解都必须满足磁场在分界面上的边界条件。因此,磁场的边界条件在分析磁场问题中有着重要意义。

3.8.1 两种磁介质间磁场的边界条件

1. 法向分量

图 3-26 示出了磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的分界面。设分界面的法线正方向由磁介质 2 指向磁介质 1。在分界面上取一个无限薄的扁平小圆柱闭合面,根据磁通连续性原理,则有

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_{1n}\Delta S - B_{2n}\Delta S = 0$$

即

$$\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \end{cases} \quad (3-119)$$

由此可见,在两种不同磁介质的分界面两侧,磁感应强度的法向分量总是连续的。

2. 切向分量

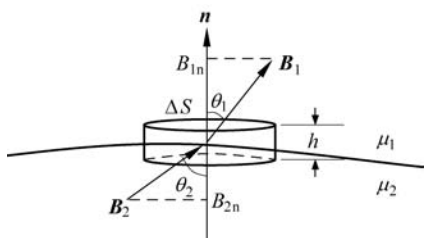
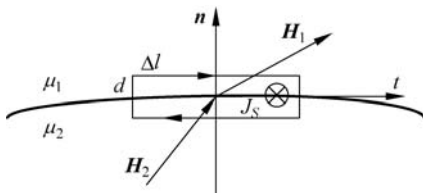
如果在两种不同磁介质的分界面上取一个无限窄的小矩形闭合回路,如图 3-27 所示,则位于分界面两侧且平行于分界面的两条边 Δl 无限靠近分界面,而另两条窄边的长 $d \rightarrow 0$,故闭合回路的面积 $\Delta S = d\Delta l \rightarrow 0$ 。因此,它所包围的体电流 $J\Delta S \rightarrow 0$ 。若线元 Δl 很小,可认为该边上的场量是均匀的。若分界面上存在面电流 $I = J_s\Delta l$,其中 $\mathbf{J}_s$ 的方向与 Δl 垂直,且闭合回路的绕行方向与 $\mathbf{J}_s$ 的方向符合右手螺旋定则,则根据磁介质中安培环路定律的积分形式可得

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{1t}\Delta l - H_{2t}\Delta l = J_s\Delta l$$

即

$$\begin{cases} H_{1t} - H_{2t} = J_s \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \end{cases} \quad (3-120)$$

这说明当分界面上存在面电流分布时,磁场强度的切向分量不是连续的,其突变量为 J_s 。

图 3-26 求 B_n 的边界条件图 3-27 求 H_t 的边界条件

3. 矢势 $\mathbf{A}$ 的关系

由于 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 因此表示磁场边界条件的式(3-119)与式(3-120)也可以改用矢势 $\mathbf{A}$ 来表示。事实上, 由式(3-68)可知, $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 代表通过闭合曲线 l 所包围面积的磁通量。在分界面上, 磁通量连续而没有突变, 即 $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 故将该积分路径取为如图 3-27 所示的无限窄的小矩形闭合回路, 于是可得

$$A_{1t} = A_{2t}$$

类似地, 由库仑规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 可得 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 它对图 3-26 所示的无限薄的扁平小圆柱闭合面 S 的积分为零, 故得

$$A_{1n} = A_{2n}$$

将上述两式合并即得

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad (3-121)$$

而关于磁场强度 $\mathbf{H}$ 切向分量的边界条件式(3-120)可改写为

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 \right) = \mathbf{J}_s \quad (3-122)$$

3.8.2 无自由面电流时两种磁介质间磁场的边界条件

如果分界面上没有自由面电流分布, 即 $\mathbf{J}_s = 0$, 则有

$$\begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \end{cases} \quad (3-123)$$

这表明此时磁场强度的切向分量在分界面两侧连续。但这时 $\mathbf{B}$ 的切向分量并不连续, 这是因为分界面上存在磁化面电流, 从而引起分界面上 $\mathbf{B}$ 的切向分量的突变, 即 $B_{1t} = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_{2t}$ 。

由于在无电流的区域可以引入磁标势 ϕ_m , 故由 $H_{1t} = H_{2t}$ 和 $B_{1n} = B_{2n}$ 可得磁标势应满足的边界条件, 即

$$\phi_{m1} = \phi_{m2} \quad (3-124)$$

和

$$\mu_1 \frac{\partial \phi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \phi_{m2}}{\partial n} \quad (3-125)$$

这和静电势 ϕ 所满足的边界条件类似。或用矢势表示的边界条件为

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 \right) = 0 \quad (3-126)$$

3.8.3 磁介质与理想导磁体间磁场的边界条件

磁导率为无穷大即 $\mu = \infty$ 的磁介质称为理想导磁体,其表面通常称为磁壁。如果磁介质 2 是理想导磁体,则 $\mu_2 = \mu = \infty$,有 $\mathbf{H}_2 = 0$,否则,其中的磁感应强度将为无限大。由 $H_{1t} = H_{2t}$ 可知,即 $\mathbf{B}$ 线或 $\mathbf{H}$ 线在紧邻理想导磁体表面无切向分量,故与该表面垂直。这和紧邻导体表面的 $\mathbf{E}$ 线或 $\mathbf{D}$ 线总是垂直于导体表面类似。对于铁磁性物质,则 $\mu_2 \gg \mu_1 \approx \mu_0$,上述结论近似成立。

例 3.11 空气中有一通有电流 I 的无限长直导线,其半径为 a ,磁导率为 μ 。试求导线内外的矢势和磁感应强度。

解 取载流导线的轴为圆柱坐标系的 z 轴,并设电流 I 沿 z 方向为正,于是矢势 $\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z$ 。

在导线内($r \leq a$)的区域,有 $\nabla^2 A_{zi} = -\mu J$,由于对称, A_z 与 φ, z 无关,而只与 r 有关,于是变为一维问题,即 $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{zi}}{dr} \right) = -\frac{\mu I}{\pi a^2}$,得

$$\frac{dA_{zi}}{dr} = -\frac{\mu I}{2\pi a^2} r + \frac{C_1}{r}$$

故

$$A_{zi} = -\frac{\mu I}{4\pi a^2} r^2 + C_1 \ln r + D_1$$

在导线外($r \geq a$),有 $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{ze}}{dr} \right) = 0$,得

$$A_{ze} = C_2 \ln r + D_2$$

式中,积分常数 C_1, D_1, C_2, D_2 可由边界条件确定,即

(1) 当 $r=0$ 时, A_{zi} 应为有限值;

(2) 当 $r=a$ 时, $A_{zi} = A_{ze}$;

(3) 当 $r=a$ 时,因为 $B = B_\varphi = (\nabla \times \mathbf{A})_\varphi = -\frac{dA_z}{dr}$,则 $H = -\frac{1}{\mu} \frac{dA_z}{dr}$,由 $H_{1t} = H_{2t}$,即

$$\frac{1}{\mu} \frac{dA_{zi}}{dr} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dA_{ze}}{dr}。$$

当 $r=0$ 时,由 A_{zi} 为有限值,得 $C_1 = 0$; $r=a$ 时,由 $\frac{1}{\mu} \frac{dA_{zi}}{dr} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dA_{ze}}{dr}$,得 $C_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$;

又由 $r=a$ 时 $A_{zi} = A_{ze}$ 得 $D_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a - \frac{\mu I}{4\pi} + D_1$ 。

因此,载流导线内外的矢势分别为

$$\mathbf{A}_i = A_{zi} \mathbf{e}_z = \left(-\frac{\mu I}{4\pi a^2} r^2 + D_1 \right) \mathbf{e}_z \quad \text{与} \quad \mathbf{A}_e = A_{ze} \mathbf{e}_z = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} - \frac{\mu I}{4\pi} + D_1 \right) \mathbf{e}_z$$

式中, D_1 是与矢势的参考点有关的常数。载流导线内外的磁感应强度则分别为

$$\mathbf{B}_i = \nabla \times \mathbf{A}_i = -\frac{dA_{zi}}{dr} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu I r}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi \quad \text{与} \quad \mathbf{B}_e = \nabla \times \mathbf{A}_e = -\frac{dA_{ze}}{dr} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

如果应用安培环路定律,可以很容易地得到磁感应强度的值。

例 3.12 试求例 3.11 中载流导线外的磁标势和磁感应强度。

解 在垂直于载流导线的任一平面上,载流导线的磁力线是以其轴心为圆心的一些同心圆,与磁力线垂直的则为等磁势线,可见等磁势线是起自圆心且在导线外的一些射线。因磁标势 ϕ_m 与圆柱坐标系内的 r, z 无关,故它满足简化的一维拉普拉斯方程,即 $\nabla^2 \phi_m = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \phi_m}{d\varphi^2} = 0$ 。解此方程,可得

$$\phi_m = C\varphi + D$$

其中,积分常数 C, D 由边界条件确定。如果选择 x 轴上的等磁势线作为磁标势的参考点,即 $\varphi=0$ 时, $\phi_m=0$, 则 $D=0$ 。于是有

$$\phi_m = C\varphi$$

取一个围绕载流导线的闭合回路 l , 如图 3-28 所示,在此回路与 x 轴的交点两侧,再取非常靠近的两点 A 与 B , 此两点的磁标势差为

$$\phi_{mA} - \phi_{mB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

由于 $\phi_{mA}=0$, 因此有 $\phi_{mB}=C \cdot 2\pi = -I$, 则 $C = -\frac{I}{2\pi}$ 。故载流导线外的磁标势和磁感应强度分别为

$$\phi_m = -\frac{I}{2\pi} \varphi$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = -\mu_0 \nabla \phi_m = -\frac{\mu_0}{r} \frac{d\phi_m}{d\varphi} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

可见,这与例 3.9 的结果一致。

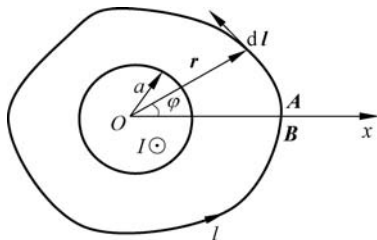


图 3-28 用磁标势求载流导线外的磁场

解题点拨: 由场源(电流)分布求解磁场主要有 5 种方法: 毕奥-萨伐尔定律, 安培环路定律, 矢势法, 磁标势法, 一维问题的泊松方程或拉普拉斯方程直接积分法。

3.9 电感

在稳恒磁场中,将通过导体回路中的磁通量(或磁链)与产生相应磁通量(或磁链)的电流的比值称为电感系数,简称电感。电感是用于储存磁场能量的元件。电感分为互感和自感。

3.9.1 互感

一个电流回路由 N 匝线圈构成,则穿过这 N 匝线圈的总磁通称为磁链,即

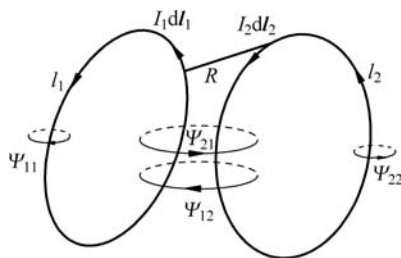


图 3-29 两电流回路间的磁链

$$\Psi = N\phi_m \quad (3-127)$$

在线性磁介质中,如图 3-29 所示,由回路 1 的电流 I_1 所产生并与回路 2 相交链的磁链 Ψ_{21} 和 I_1 成正比,则比值

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad (3-128)$$

称为回路 1 对回路 2 的互感。

同理,回路 2 对回路 1 的互感为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} \quad (3-129)$$

上面两式中的 Ψ_{21} 与 Ψ_{12} 都是互感磁链。

互感也可以通过磁矢势来计算。设两回路分别由 N_1 与 N_2 匝细导线密绕而成,导线及周围磁介质的磁导率均为 μ_0 ,则回路 1 中的电流 I_1 在任一场点处的矢势为

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{R}$$

于是 I_1 所产生并和回路 2 相交链的互感磁链为

$$\Psi_{21} = N_2 \phi_{m21} = N_2 \oint_{l_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0 N_1 I_1 N_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R}$$

因此

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (3-130)$$

这就是诺伊曼公式。

同样可得

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R}$$

故有

$$M_{12} = M_{21} \quad (3-131)$$

在一般情况下,亦有

$$M_{ij} = M_{ji} \quad (3-132)$$

应该指出,这里的电流回路都是由无限细的导线构成。在线性磁介质中,两电流回路间的互感只与回路的形状、尺寸、相互位置、周围磁介质及导线的磁导率有关,而与电流的大小无关。

例 3.13 无限长细直导线与半径为 a 的圆形导线回路处于同一平面内,圆心到直导线的距离为 d ,如图 3-30 所示。试求直导线与圆形导线回路之间的互感。

解 采用极坐标系,设圆内任一点的坐标为 (r, θ) ,导线上通有的电流为 I ,则导线周围的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d + r \cos \theta)} \mathbf{e}_\varphi$$

穿过线框的磁通量为

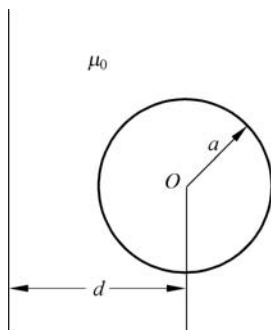


图 3-30 直导线与圆形导线回路

$$\begin{aligned}
\phi_m &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+r\cos\theta)} r dr d\theta \\
&= \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{4}{\sqrt{d^2-r^2}} \arctan \sqrt{\frac{d-r}{d+r}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \bigg|_0^\pi r dr \\
&= \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2} \frac{2}{\sqrt{d^2-r^2}} r dr = \mu_0 I (d - \sqrt{d^2-a^2})
\end{aligned}$$

由互感的定义,得

$$M = \frac{\phi_m}{I} = \frac{\mu_0 I (d - \sqrt{d^2-a^2})}{I} = \mu_0 (d - \sqrt{d^2-a^2})$$

3.9.2 自感

设回路中的电流 I , 它所产生的磁场与回路自身相交链的磁链 Ψ 称为自感磁链, 该磁链也与 I 成正比, 它们的比值

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (3-133)$$

称为该回路的自感。

自感可分为内自感和外自感两部分。内自感 L_i 是导线内的磁链(即内磁链) Ψ_i 和导线中全部电流 I 的比值, 即

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} \quad (3-134)$$

而外自感 L_e 则是导线外的磁链(即外磁链, 也称为全磁通) Ψ_e 和导线中全部电流 I 的比值, 即

$$L_e = \frac{\Psi_e}{I} \quad (3-135)$$

所以, 回路的总自感为

$$L = L_i + L_e \quad (3-136)$$

外自感还可以通过诺依曼公式来计算。如图 3-31 所示, 在计算外磁链时, 应以图中所示的导线的内侧边线 l_2 作为回路的边界, 但导线中的电流 I 应视为集中在导线的几何轴线 l_1 上。因此, 计算导线的外自感就等于计算 l_1 与 l_2 两回路间的互感了。设回路由 N 匝细导线密绕而成, 导线及周围磁介质的磁导率均为 μ_0 , 则回路 1 中的电流 I 在任一场点处的矢势为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 N I}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{R} \quad (3-137)$$

与回路 l_2 相交链的互感磁链为

$$\Psi = N\phi_m = N \oint_{l_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0 N^2 I}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (3-138)$$

因而

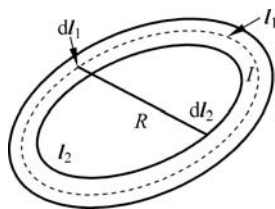


图 3-31 用诺伊曼公式
计算外自感

$$L_e = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (3-139)$$

内磁链是穿过 l_1 和 l_2 所围环域的磁链, 穿过导线内部。由于导线一般较细, 故内磁链很小。一般情况下, $L_i \ll L_e$, 因此有

$$L = \frac{\Psi_s}{I} = \frac{\Psi_i + \Psi_e}{I} = L_i + L_e \approx L_e \quad (3-140)$$

综上, 自感的一般计算步骤为

$$\text{设 } I \rightarrow \mathbf{B} (\text{或 } \mathbf{A}) \rightarrow \phi_m \rightarrow \Psi \rightarrow L$$

这种方法称为设电流法。

下面举例说明两种自感的计算方法。

例 3.14 空气中有两根半径为 a 的无限长平行直导线, 其轴线间的距离为 D , 载有等值而异号的电流 I 。试求此双根传输线的磁场及其单位长的自感。

解 先计算双根线的磁场和内自感 L_i 。根据安培环路定律可知, 单根导线内 ($r \leq a$) 的磁场强度在圆柱坐标系中可表示为

$$H_i = \frac{I_i}{2\pi r} = \frac{I(r/a)^2}{2\pi r} = \frac{Ir}{2\pi a^2}$$

如图 3-32(a) 所示, 在非铁磁性导线内, 在距导线的轴线为 r 处, 穿过轴向长为 l 、宽为 dr 的矩形面积元的内磁通元为

$$d\phi_{mi} = B_i dS = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} l dr$$

但是与 $d\phi_{mi}$ 这部分磁通元相交链的电流不是导线中的全部电流 I , 而是它的一部分, 即

$I_i = I \frac{r^2}{a^2}$, 这相当于 $N = \frac{I_i}{I} = \frac{r^2}{a^2}$ 匝, 则它所对应的内磁链元为

$$d\Psi_i = N d\phi_{mi} = \frac{\mu_0 Ir^3}{2\pi a^4} l dr$$

故导线的内磁链为

$$\Psi_i = \frac{\mu_0 Il}{2\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu_0 Il}{8\pi}$$

因此, 单根导线单位长的内自感为

$$L'_{i0} = \frac{\Psi_i}{Il} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

双根线单位长的内自感等于单根导线的 2 倍, 即

$$L_{i0} = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

现在求外自感 L_e 。如图 3-32(b) 所示的圆柱坐标系中, 双根线在线外任一点的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} - \frac{\mathbf{e}_{\varphi'}}{r'} \right)$$

考虑到磁感应线的连续性, 在求磁通量时不必要计算上式中空间任意位置的场, 只要计算双

根线所在平面上的磁感应强度所产生的磁通即可。故可得双根线在两线之间的 x 轴上所产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B}' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r} \right) \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r-D} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

由此可得长为 l 的双根线的外磁链为

$$\Psi_e = \int_a^{D-a} \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S} = \int_a^{D-a} B' l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{D-a} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r} \right) dr = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

因此,单位长双根线的外自感为

$$L_{e0} = \frac{\Psi_e}{Il} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

一般情况下, $D \gg a$, 故有 $L_{e0} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}$ 。故双根线单位长的自感为

$$L_0 = L_{i0} + L_{e0} = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{D}{a} \right)$$

考虑到双根传输线单位长的电容和自感分别为

$$C_0 = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{D}{a}} \quad \text{和} \quad L_0 \approx L_{e0} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}$$

故有

$$L_0 C_0 = \epsilon_0 \mu_0$$

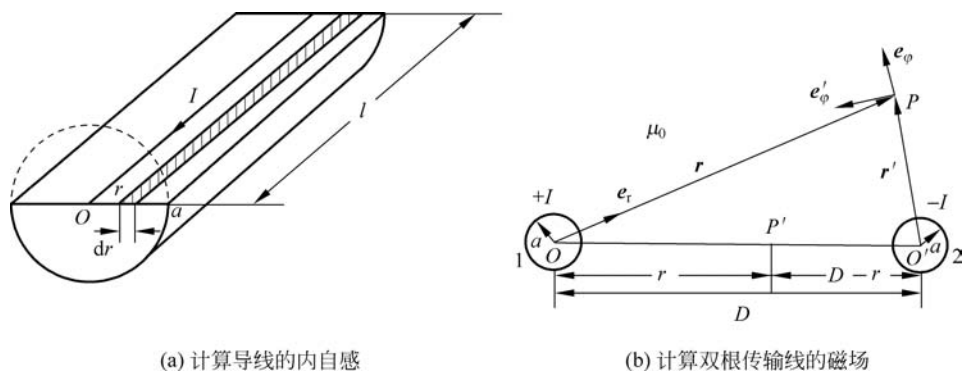


图 3-32 计算双根传输线单位长的自感

* 3.9.3 互感计算和无线输电

1. 互感计算

用定义式计算互感的思路为

$$I_1 \rightarrow \mathbf{B}_1 \rightarrow \phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 \rightarrow \Psi_{21} \rightarrow M = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

或

$$I_1 \rightarrow \mathbf{A}_1 \rightarrow \phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \rightarrow \Psi_{21} \rightarrow M = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

综上,互感的一般计算步骤为

$$\text{设 } I_1 \rightarrow \mathbf{B}_1 (\text{或 } \mathbf{A}_1) \rightarrow \psi_{m21} \rightarrow \Psi_{21} \rightarrow M_{21}$$

实际使用电感器时,不但要注意其电感量,还要注意减小导线的损耗(铜损)和铁芯或磁芯的损耗(铁损或磁损)。

例 3.15 两个相互平行且共轴的圆线圈,其半径分别为 R_1 、 R_2 ,中心间距为 h 。假设线圈的半径远小于中心距离,即 $R_1 \ll h$ (或 $R_2 \ll h$),如图 3-33 所示。试求两线圈之间的互感。

解 如图 3-33 所示, $d\mathbf{l}_1$ 与 $d\mathbf{l}_2$ 之间的夹角为 $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $d\mathbf{l}_1 = R_1 d\varphi_1$, $d\mathbf{l}_2 = R_2 d\varphi_2$, 以及

$$R = [R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1R_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{1/2}$$

由诺伊曼公式可得

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2 \cos\varphi}{R} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_1 R_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) d\varphi_1 d\varphi_2}{[R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{1/2}} \end{aligned}$$

一般情况下,上述积分只能用椭圆积分来表示。但是若 $h \gg R_1$, 则可得到如下的近似:

$$\begin{aligned} [R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{-1/2} &\approx (R_2^2 + h^2)^{-1/2} \left(1 - \frac{2R_1 R_2 \cos\varphi}{R_2^2 + h^2} \right)^{-1/2} \\ &\approx (R_2^2 + h^2)^{-1/2} \left(1 + \frac{R_1 R_2 \cos\varphi}{R_2^2 + h^2} \right) \end{aligned}$$

于是有

$$M \approx \frac{\mu_0 R_1 R_2}{4\pi \sqrt{R_2^2 + h^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{R_1 R_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{R_2^2 + h^2} \right) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) d\varphi_1 d\varphi_2 = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 + h^2)^{3/2}}$$

本题还可以考虑在上述条件下,用其他方法求得结果。由 3.6 节磁偶极子矢量势的结果,当半径为 R_1 的小线圈中通有电流 I_1 时,在远区的矢势为

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi R_1^2 I_1}{R^2} \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$$

其中, θ 为球坐标系中任意位置与 O' 连线与 z 轴的夹角。在半径为 R_2 的线圈上, $\mathbf{A}_1$ 的值近似等于常数,故

$$\psi_{21} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = A_1 \cdot 2\pi R_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi R_1^2 I_1}{R^2} \sin\theta' \cdot 2\pi R_2$$

式中 $\sin\theta' = \frac{R_2}{\sqrt{h^2 + R_2^2}}$, 故

$$M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 + h^2)^{3/2}}$$

在实际应用中,通过两线圈耦合可实现能量的传输,如无线输电中与输入端和输出端链

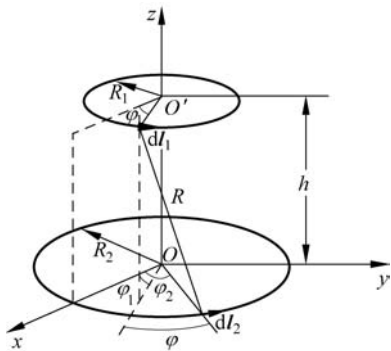


图 3-33 两平行且共轴的圆线圈

接的互感线圈即为如此。

2. 电感计算的 MATLAB 实现

电感器、互感器是电路理论中经常遇到的电子器件,很多情况下,需要通过手工绕制的方法自行制作电感或者互感器,如何在加工制作之前就对器件的自感或者互感进行估算,具有重要的意义。下面的 MATLAB 代码,分别利用例 3.15 给出的两种方法,计算两个圆形、共轴线圈之间的互感,并将它们做对比。为方便起见,将这两种方法分别称为方法 1 和方法 2。具体如下

```
R1 = 0.99; % 圆环 1 的半径(单位为 m)
R2 = 1; % 圆环 2 的半径(单位为 m)
h = 0.5; % 环心距离(单位为 m)
mu = 4 * pi * 1e-7;
M = @(phi1, phi2) mu / (4 * pi) * R1 * R2 * cos(phi2 - phi1) ./ (sqrt(R1^2 + R2^2 + h^2 - 2 * R1 * R2 * cos(phi2 - phi1))); % 定义诺依曼公式推演得到的互感函数
Mind = integral2(M, 0, 2 * pi, 0, 2 * pi); % 做数值积分得到互感值
Mind * 1e6 % 转化为单位为  $\mu\text{H}$  显示的结果
Mapp = mu * pi * R1^2 * R2^2 / 2 ./ (h^2 + R2^2)^(3/2); % 近似方法
Mapp * 1e6 % 转化为单位为  $\mu\text{H}$  显示的结果
```

表 3-2 给出了 R_1 取不同大小时,两种方法计算得到的互感值,从表中可以看出,当近似条件满足时,即 $R_1 \ll h$,方法一和方法二得到了相同的结果;随着 R_1 的增大,二者的差别越来越明显;从而验证了方法的正确性。

如果两个圆环的环心距离为零,即二者共面,且 $R_1 \approx R_2$ 。此时,利用诺依曼公式计算得到的互感,可以近似看作由线径为 $|R_1 - R_2|$ 的导线环绕而成的、圆环半径为 R_1 (或者 R_2) 的圆形线圈所对应的自感(外自感)。读者可以参考图 3-31 加以深入理解。表 3-2 也给出了利用诺依曼公式计算得到的圆形线圈的自感。

如果在编程计算时,将两个圆环离散成长度很小的 N 个小段,然后将诺依曼公式中的积分用求和进行近似,也可以得到互感或自感的计算代码如下

```
R1 = 0.99; % 圆环 1 的半径(单位为 m)
R2 = 1; % 圆环 2 的半径(单位为 m)
h = 0.5; % 环心距离(单位为 m)
N = 2000; % 将圆环分成 N 段
mu = 4 * pi * 1e-7; % 真空中的磁导率
theta = linspace(0, 2 * pi, N + 1); % 将圆心角分成 N + 1 份
x1 = R1 * cos(theta); % 计算圆环 1 上各节点的 x 坐标轴值
y1 = R1 * sin(theta); % 计算圆环 1 上各节点的 y 坐标轴值
dx1 = x1(:, 2:N + 1) - x1(:, 1:N); % 圆环 1 上的各个小段对应的 dx1
dy1 = y1(:, 2:N + 1) - y1(:, 1:N); % 圆环 1 上的各个小段对应的 dy1
x2 = R2 * cos(theta); % 计算圆环 2 上各节点的 x 坐标轴值
y2 = R2 * sin(theta); % 计算圆环 2 上各节点的 y 坐标轴值
dx2 = x2(:, 2:N + 1) - x2(:, 1:N); % 圆环 2 上的各个小段对应的 dx1
dy2 = y2(:, 2:N + 1) - y2(:, 1:N); % 圆环 2 上的各个小段对应的 dy1
theta = (theta(:, 1:N) + theta(:, 2:N + 1)) / 2; % 圆环上各个区间中点的角度
x1 = R1 * cos(theta); % 圆环 1 各小段区间中点的 x 坐标
y1 = R1 * sin(theta); % 圆环 1 各小段区间中点的 y 坐标
x2 = R2 * cos(theta); % 圆环 2 各小段区间中点的 x 坐标
y2 = R2 * sin(theta); % 圆环 2 各小段区间中点的 y 坐标
```

```
L = 0; % 初始化
for i = 1:N
    for j = 1:N
        dl1dl2 = dx1(i) * dx2(j) + dy1(i) * dy2(j); % dl1 和 dl2 内积计算
        R = sqrt((x1(i) - x2(j))^2 + (y1(i) - y2(j))^2 + h^2); % dl1 和 dl2 的距离
        L = L + dl1dl2/R; % 求和
    end
end
L = L/4/pi * mu * 1e6 % 乘以系数,得到电感的数值(单位为 μH)
```

可以将这种纯粹数值计算的方法称为方法 3。表 3-2 中也给出了该方法的计算结果。与前面的方法相比,方法 3 适用的范围更加广泛;经过修改,还可以应用到其他形状的线圈形式,如方形、三角形等;甚至可以工作在线圈不共面的情形。大家可以在理解程序之后,举一反三,加以尝试。

表 3-2 三种方式计算得到的互感/自感对照表

R_1, R_2, h	0.1m,1m,1m	0.5m,1m,1m	1m,1m,1m	0.99,1m,0m
互感/自感(μH)	互感	互感	互感	自感(外自感)
方法 1: 诺依曼公式	0.007μF	0.1618μF	0.4941μF	5.8512μF
方法 2: 近似方法	0.007μF	0.1745μF	0.6979μF	1.9346μF
方法 3: 纯粹数值方法	0.007μF	0.1618μF	0.4941μF	5.8512μF

3. 无线输电

无线输电是指不经过电缆将电能从发电装置传送到接收端的技术。作为一种特殊的输电方式,它是利用无线电传输电力能量。主要方式有以下几种:磁耦合技术、电磁感应技术、电磁辐射技术等。这些技术几乎都是针对时变电磁场的,限于本章主要讨论稳恒磁场问题,仅就针对直流输电过程中的基本原理做一简单介绍,详细的介绍见第 5 章相应部分。

如图 3-34 所示,这种输电系统需要输入端口和接收端口进行交-直流转换,无线输电的部件是通过线圈 1 和线圈 2 的互感来完成的。经过输入端口 DC/AC 转换器后的时变电流,通过原线圈 1 和副线圈 2 的耦合到达输出前端,再通过整流电路获取直流电,完成了电能的传输。其中,原副线圈间的互感系数可由例 3.15 的方法近似计算。从能量转化过程来看,由直流电能→交流电能→磁场能→交流电能→直流电能,两个线圈间形成一个无线能量通道。这种无线传输电能的范围比较有限,不适用于长距离。

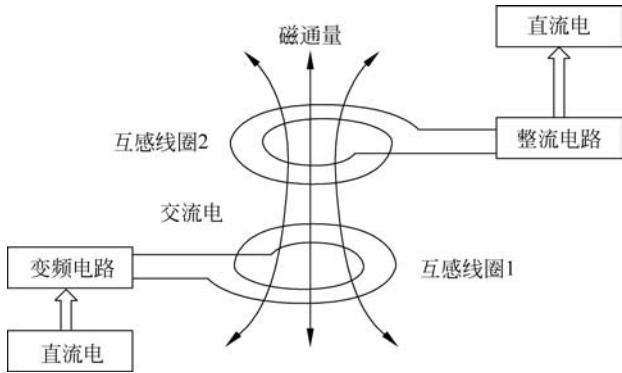


图 3-34 基于磁耦合的无线输电原理图

3.10 磁场能量

3.10.1 电流回路系统的磁场能量

稳恒磁场是由稳恒电流产生,处于磁场中的电流回路会受到磁场力的作用而发生运动,这表明稳恒磁场中储存着能量,磁场能量是在磁场建立的过程中由外电源做功转化而成的。在如图 3-35 所示的电流回路系统中,假设所有电路回路静止不动,即不存在机械能的转换,并忽略焦耳热。由 N 个电流回路所组成系统的磁场能量是由外电源做功转换而来的,只与各回路电流的最终值有关,而与回路中电流的建立过程无关。由于各电流回路的磁链与各回路电流的最终值呈线性关系,故第 i 个电流回路的终值磁链可以写为

$$\Psi_i = L_i I_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^N M_{ij} I_j \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (3-141)$$

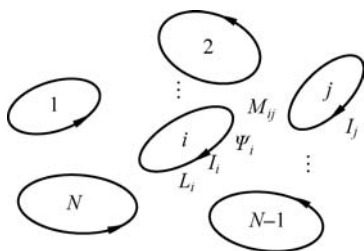


图 3-35 N 个电流回路系统的磁场能量

不妨假设各回路电流都按同一比例值 ξ 从无开始增长到其最终值。打个比方,如果要给 N 个固定不动的水缸里加满水,可以拿一根水管挨个注水,也可以从总管中分出 N 根细管,让 N 个水缸按同一比例注水。无论采用哪种方式,外力所做的功只与克服水的重力势能有关,而与中间过程无关。回到现在的问题, ξ 应满足 $0 \leq \xi \leq 1$ 。在建立磁场过程的某一中间时刻,第 i 个回路的电流和磁链分别为 ξI_i 和 $\xi \Psi_i$ 。若这时电流在 dt 时间内改变了 $d(\xi I_i)$,则在此回路中引起的感应电动势为 $\mathcal{E}_i = -d(\xi \Psi_i)/dt$ (感应电动势的定义为 $\mathcal{E} = -d\Psi/dt$,详见 5.1 节)。它阻碍着电流的变化。因此,要使电流在 dt 时间内改变 $d(\xi I_i)$,必须在此回路中施加一个等于 $-\mathcal{E}_i$ 的电压。于是在 dt 时间内外电源所做的功,即磁场能量的增加量为

$$dW_m = \sum_{i=1}^N (-\mathcal{E}_i \xi I_i dt) = \sum_{i=1}^N \xi I_i d(\xi \Psi_i) = \sum_{i=1}^N I_i \Psi_i \xi d\xi$$

磁场储存的总能量则为

$$W_m = \sum_{i=1}^N I_i \Psi_i \int_0^1 \xi d\xi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Psi_i \quad (3-142)$$

将式(3-141)代入上式,则为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1(j \neq i)}^N M_{ij} I_i I_j \quad (3-143)$$

可见, N 个电流回路系统所储存的磁场总能量包括两部分:上式中第一项是各个电流回路的自能或固有能,第二项则是各电流回路间的相互作用能(互能)。这与带电体系统的电场能量类似。

解题点拨: 因为电感器是储存磁场能量的元件,故电感还可以通过它所储存的磁场能量来计算。因此,对于电感的计算有三种方法,即可按定义设电流法、诺伊曼公式法以及利用电感的储能计算自感的场能法。

3.10.2 磁场的能量密度

式(3-143)也容易给人一种误解,即磁场的能量只取决于电流和电感。没有电流的地方,磁场能量不存在。这是错误的!事实上,电流回路系统的磁场总能量存在于整个磁场所处的全部空间中。上述公式仅仅是从宏观物理量电流强度和电感大小的角度反映了磁场的总能量,这是不完善的。为了更加精确地表示磁场的能量分布情况,需要引入磁场能量密度的概念,即空间场域单位体积内的磁场能量。

假设各电流回路都是单匝的,则第 i 个回路的磁链可表示为

$$\Psi_i = \phi_{mi} = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_i = \oint_{l_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i$$

将上式代入式(3-142),得

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \oint_{l_i} \mathbf{A} \cdot (I_i d\mathbf{l}_i)$$

为使磁场能量的表达式更加普遍,可以认为电流在导电媒质内。由于 $I d\mathbf{l} = \mathbf{J} dV$,故上式可以写为

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV \quad (3-144)$$

注意到 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 和 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$,并应用矢量微分恒等式:

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

经过与 2.8.2 节相类似的推导,得

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (3-145)$$

显然,上式中的被积函数是单位体积的磁场能量,即磁场的能量密度

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (3-146)$$

磁场的能量密度表明了磁场能量在空间的分布情形。在各向同性的线性磁介质中,上式可表示为

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \quad (3-147)$$

对于一个孤立的电流回路,由式(3-143)可知,其磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (3-148)$$

因此,该回路的自感可以通过它所储存的磁场能量来计算(场能法),即

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{1}{I^2} \int_V \mu H^2 dV = \frac{1}{I^2} \int_V \frac{B^2}{\mu} dV \quad (3-149)$$

式中, V 遍及有磁场的全部区域。

例 3.16 试求图 3-36 所示的长为 l 的同轴线的磁场能量与其单位长的自感。

解 忽略同轴线端部的边缘效应,由安培环路定律可以求得同轴线各部分区域内的磁场强度在圆柱坐标系中分别为

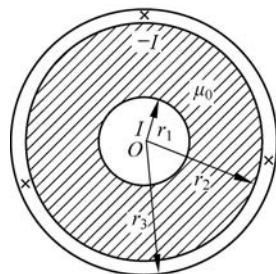


图 3-36 计算同轴线的磁场能量与自感

$$r \leq r_1 (\text{内导体内}): H_i = \frac{Ir}{2\pi r_1^2};$$

$$r_1 \leq r \leq r_2 (\text{电介质内}): H_d = \frac{I}{2\pi r};$$

$$r_2 \leq r \leq r_3 (\text{外导体内}):$$

$$H_e = \frac{I}{2\pi r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2};$$

$$r \geq r_3 (\text{外导体外}): H'_e = 0。$$

因此,长为 l 的同轴线的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{\mu_0}{2} \int_V H^2 dV = \frac{\mu_0}{2} \left(\int_0^{r_1} H_i^2 dV + \int_{r_1}^{r_2} H_d^2 dV + \int_{r_2}^{r_3} H_e^2 dV \right) \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \left[\int_0^{r_1} \frac{r^2}{r_1^4} 2\pi r l dr + \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} 2\pi r l dr + \int_{r_2}^{r_3} \frac{(r_3^2 - r^2)^2}{r^2 (r_3^2 - r_2^2)^2} 2\pi r l dr \right] \\ &= \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4(r_3^2 - r_2^2)} \right] \end{aligned}$$

同轴线单位长的自感则等于

$$L_0 = \frac{2W_m}{I^2 l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4(r_3^2 - r_2^2)} \right]$$

式中,第一项是内导体的内自感,最后两项是外导体的内自感,而第二项常常是最主要的,它是同轴线单位长的外自感,于是有

$$L_0 \approx L_{e0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

考虑到同轴线单位长的电容为 $C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$, 故有 $L_0 C_0 = \epsilon_0 \mu_0$ 。

* 3.11 科技前沿: 静磁隐身衣

Pendry 等人在 2008 年提出了静磁超材料,可以用来实现基于变换光学原理的静磁隐身衣。他们的做法是把超导体和铁氧体的层状结构看成是一种等效的超磁性材料,这种材料的磁导率具有各向异性的特点。2012 年,科学家们已经从实验上证实了静磁隐身衣的可行性。图 3-37 即为一种二维静磁隐身衣原理图,它是通过铁磁材料和超导材料实现静磁隐身效果的,理论基础是磁化相消的原理。

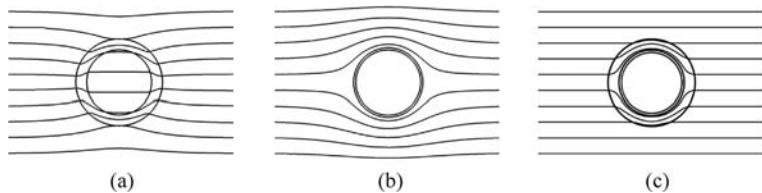
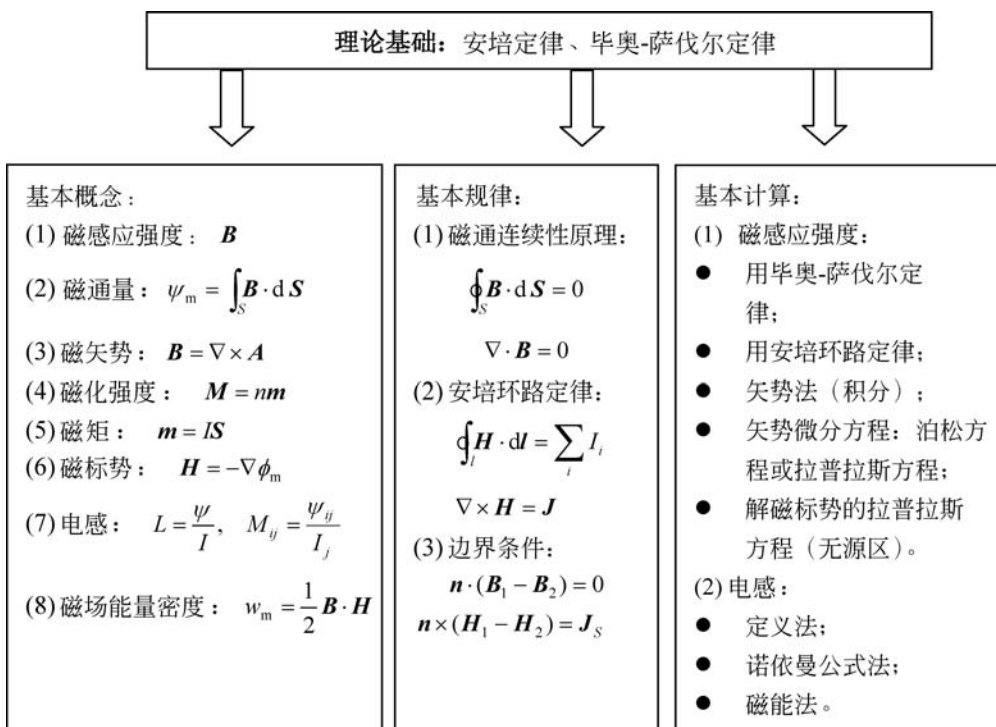


图 3-37 静磁隐身衣原理图

图 3-37 为该静磁隐身衣的大致工作原理。图 3-37(a)为只有铁磁圆柱套层置于稳恒外磁场 $\mathbf{H}_0$ 的情形,铁磁体的磁导率为 $\mu_r = 3.54$,周围环境为空气介质。可以看到,柱套内的磁场为均匀场,柱外附近磁场受到的影响最大,磁力线向铁磁柱套方向发生弯曲;图 3-37(b)为只有超导体圆柱套层置于稳恒外磁场 $\mathbf{H}_0$ 的情形,超导体的磁导率为 $\mu_r = 0$ 。可以看到,柱套内不存在磁场,这与超导材料具有完全抗磁特性相符合,因而磁场全部分布于柱外,附近的磁场线绕行而过;图 3-37(c)为超导体和铁磁材料双层柱套置于稳恒外磁场 $\mathbf{H}_0$ 的情形。其中,铁磁体的磁导率仍为 $\mu_r = 3.54$ 。可以看到,不仅柱内不存在磁场,柱外磁场也不受圆柱套层的影响,即对于柱内的目标实现了完美的隐身效果。理论分析(详见第 4 章例 4.8)可得实现隐身时对铁磁材料磁导率要求满足: $\mu_{r2} = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$ 。其中, R_0 、 R_1 、 R_2 分别表示由里到外超导体和铁磁体圆环的内外半径,实验中取 $R_0 = 0.96R_1$, $R_2 = 1.34R_1$, 测量结果与理论基本吻合。有兴趣的读者可以参阅文献,或参考本书第 4 章的内容自行推导上述公式。

本章小结

1. 本章知识结构框架



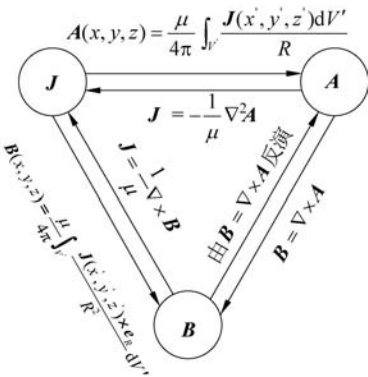
2. 几种静态场的比较

类别	静 电 场	稳 恒 电 场	稳 恒 磁 场
场力	$\mathbf{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_{12}^2} \mathbf{e}_{R_{12}}$ $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$	$\mathbf{F}_{\text{静}} = q\mathbf{E}_{\text{恒}}$ $\mathbf{F}_{\text{非静}} = q\mathbf{E}_{\text{局外}}$	$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{R_{12}})}{R^2}$ $\mathbf{F} = \oint_{l'} I d\mathbf{l}' \times \mathbf{B}$
	洛伦兹力公式: $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$		
场和势函数	$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dQ}{R}$ $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dQ}{R^2} \mathbf{e}_R$	$\phi = \frac{1}{\sigma} \int_P \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}$	$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{l'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2}$ $\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{l'} \frac{d\mathbf{l}'}{R}$ $I d\mathbf{l}' = \mathbf{J}_S dS' = \mathbf{J} dV'$
基本方程	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
微分方程	$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\mathbf{E} = -\nabla \phi)$	$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\mathbf{E} = -\nabla \phi)$	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A})$ $\nabla^2 \phi_m = 0 \quad (\mathbf{H} = -\nabla \phi_m)$
边界条件	$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$ $E_{1t} = E_{2t}$ $\phi_1 = \phi_2$ $\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad (\rho_s = 0)$	$J_{1n} = J_{2n}$ $E_{1t} = E_{2t}$ $\phi_1 = \phi_2$ $\sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$	$H_{1t} - H_{2t} = J_s$ $B_{1n} = B_{2n}$ $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 \right)_t = J_s$ $\phi_{m1} = \phi_{m2}; \mu_1 \frac{\partial \phi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \phi_{m2}}{\partial n} \quad (J_s = 0)$
对偶量	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$ $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r$ $Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$		$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_r \mu_0$ $\phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
电路参数	$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$	$G = \frac{I}{U} = \frac{\sigma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$	$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{\sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$
场的通量	$\psi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$		$\psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$
场源分布	$\rho = \frac{dQ}{dV'}$ $\rho_s = \frac{dQ}{dS'}$ $\rho_l = \frac{dQ}{dl'}$		$J = \frac{dI}{dS'}$ $J_s = \frac{dI}{dl'}$ $I = \frac{dQ}{dt}$
介质的极化和磁化规律	$\mathbf{p} = Q\mathbf{l}$ $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$ $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho$ $\rho_{sb} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$		$\mathbf{m} = I\mathbf{S}$ $\mathbf{M} = n\mathbf{m} = \chi_m \mathbf{H}$ $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = (\mu_r - 1) \mathbf{J}$ $\mathbf{J}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$

续表

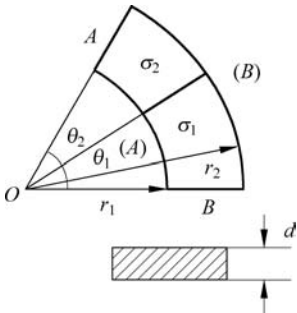
类别	静 电 场	稳 恒 电 场	稳 恒 磁 场
场能	$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \phi_i$ $W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$ $w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon}$		$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Psi_i$ $W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$ $w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu}$

3. 稳恒磁场的场量与场源之间的关系



习题

- 3.1 一半径为 a 的均匀带电球,已知该球所带电量为 Q ,球体以匀角速度 ω 绕极轴旋转,求:
- (1) 球内的电流密度;
 - (2) 若为电荷分布均匀的导体球壳,其他条件不变,求球表面的面电流分布。
- 3.2 同轴线中内外导体的半径分别为 r_1 和 r_2 ,其电导率为 σ ,内外导体中载有等值而异号的电流 I ,两导体间的电压为 U_0 ,并填满介电常数为 ϵ 的介质。试求内导体表面上的电场强度的切向分量和法向分量之比。
- 3.3 球形电容器中内外极板的半径分别为 r_1 和 r_2 ,其中的介质是有耗的,电导率为 σ ,介电常数为 ϵ 。若两极板间的电压为 U_0 ,试求介质中的电势、电场强度与漏电流。
- 3.4 在双层介质平行板电容器中,厚度分别为 d_1 与 d_2 的两层介质填满两极板间的空间,且其分界面与极板平行。如果介质都是有耗的,其电导率和介电常数分别为 σ_1 与 σ_2 及 ϵ_1 与 ϵ_2 。当两极板间的电压为 U_0 时,试求每层介质上的电场、漏电流密度及介质分界面上的束缚电荷面密度。
- 3.5 有两片厚度均为 d 、电导率分别为 σ_1 与 σ_2 的导体片组成弧形导电片,其内外半径分别为 r_1 和 r_2 (见图 3.5 图)。



题 3.5 图

若 A 、 B 两端面间加电压 U , 且以 B 端面为电势的参考点, 试求:

- (1) 弧片内的电势分布;
- (2) 弧片中的总电流和总电阻;
- (3) 分界面上的自由电荷面密度。

如果将电极改置于导电片的两弧边, 重求之。

3.6 一个半径为 a 的导体球, 作为接地电极深埋于地下, 设大地的电导率为 σ , 求接地电阻。

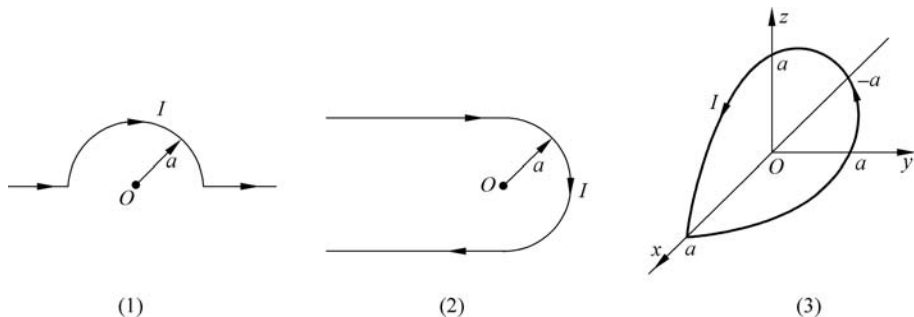
3.7 两无限长平行直线电流相距为 d , 分别载有等值而异号的电流 I 。试求两载流线间单位长度的相互作用力。

3.8 有一宽度为 b 、载有电流 I 的无限长薄导体带位于 $x=0$ 的平面上, 其中心线与 z 轴重合。试求 x 轴上任一点的磁感应强度。若 $b \rightarrow \infty$, 且面电流密度为 J_s , 重新计算前述问题。

3.9 有一半半径为 a 、长为 l 的圆柱形长螺线管, 单位长度上密绕 n 匝线圈, 其中通有电流 I 。试求螺线管轴线上的磁感应强度, 并讨论螺线管趋于无限长时的情况。

3.10 在下列情况下, 导线中的电流为 I , 所有圆的半径均为 a 。试求下列情况 (见题 3.10 图) 下圆心处的磁感应强度:

- (1) 长直导线突起一半圆, 圆心在导线所在的直线上;
- (2) 两平行长直导线及与之相切的半圆导线;
- (3) 将电流环沿某一直径折成相互垂直的半圆面。



题 3.10 图

3.11 下列的矢量函数中, 哪些可能是磁场? 若是, 求其漩涡源。

- (1) $\mathbf{B} = az \mathbf{e}_z$;
- (2) $\mathbf{B} = ay \mathbf{e}_x - ax \mathbf{e}_y$;
- (3) $\mathbf{B} = a \mathbf{e}_x + b \mathbf{e}_y$;
- (4) $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi$ (圆柱坐标系)。

3.12 设在赤道上地球的磁场 $\mathbf{B}_0$ 与地平面平行, 方向指向北方。若 $B_0 = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$, 已知铜导线的质量密度为 $\rho_m = 8.9 \text{ g/cm}^3$, 试求铜导线在地球的磁场中飘浮起来所需要s的最小电流密度。

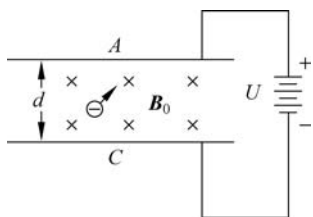
3.13 雷达或微波炉中磁控管的工作原理可用阳极与阴极为平行导体板的模型来说明。两极板的间距为 d , 电压为 U , 且在两极板间有稳恒磁场 $\mathbf{B}_0$ 平行于极板 (见题 3.13 图)。试证明, 如果

$$U < \frac{eB_0^2 d^2}{2m}$$

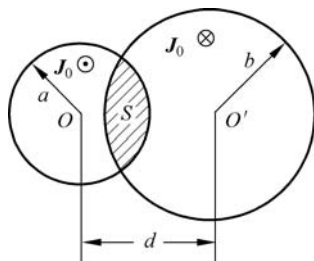
则以零初速自阴极发射的电子不能到达阳极。(式中 e 、 m 分别为电子电荷与质量。)

3.14 无限长导体圆管的内外半径分别为 r_1 和 r_2 , 其中通有均匀分布且沿轴向的电流 I 。试求导体圆管内外的磁感应强度。

3.15 两个半径分别为 a 和 b ($a < b$) 的平行长直圆柱体, 其轴线间距为 d , 且 $b - a < d < a + b$ 。除重叠区域 S 外, 两圆柱体中有沿轴向等值而反向的电流密度 J_0 。且均匀分布(见图 3.15 图)。试求重叠区域 S 中的磁感应强度($d < a + b$)。



题 3.13 图



题 3.15 图

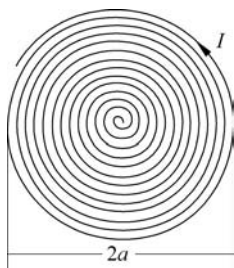
3.16 有一 N 匝、载电流 I 、边长为 a 的方环形线圈, 位于均匀磁场 B_0 中。若环面法线与 B_0 的夹角为 α , 试求磁场作用于方环形线圈的转矩。

3.17 有一细小磁铁棒, 沿其纵向的磁矩为 m , 位于无限长细直线电流 I 的磁场里, 且线电流 I 沿 m 的方向为正。若磁棒与线电流的距离为 d , 试求磁场作用于磁棒上的转矩。

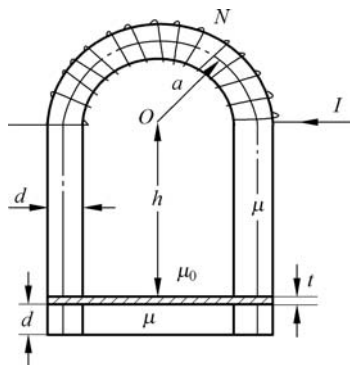
3.18 有一用细导线密绕成 N 匝的平面螺旋形线圈, 其半径为 a , 通有电流 I (见图 3.18 图)。试求其磁矩。

3.19 一半径为 a 的无限长螺线管, 单位长度上密绕 n 匝线圈, 其中通有电流 I 。螺线管中填满磁导率为 μ 的磁芯。试求螺线管内的磁场强度、磁感应强度和磁芯表面的磁化面电流密度。

3.20 有一电磁铁由磁导率为 μ 的 U 形铁轭和一个长方体铁块构成, 其厚度均为 b , 宽度均为 d (见图 3.20 图)。为避免铁块与铁轭直接接触, 两者之间有一厚度为 t 的薄铜片。如果铁轭半圆的平均半径为 a , 圆心至铜片的距离为 h , 且铁轭上绕有通电流 I 的 N 匝线圈。试求铜片隙中的磁通、磁阻与磁感应强度。



题 3.18 图



题 3.20 图

3.21 一半径为 a 、载均匀分布的电流为 I 的长直圆柱导体,其磁导率为 μ_0 。它外面套以同轴的磁导率为 μ 的磁介质圆管,其内外半径分别为 b 与 c ($a < b < c$)。试求空间各点的磁场强度和磁感应强度及磁介质圆管表面上的磁化面电流密度。如果移去磁介质圆管,磁场的分布有何变化?

3.22 一半径为 a 、长为 L 、磁导率为 μ 的均匀磁化圆柱形永久磁铁,其磁化强度 $\mathbf{M}_0$ 沿柱轴方向。试求圆柱体内与柱面上的磁化电流密度及柱轴上的磁感应强度。

3.23 半径为 a 的磁介质球,其磁导率为 μ ,球外为空气。已知球内外的磁场强度分别为

$$\mathbf{H}_1 = C(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta) \quad \text{和} \quad \mathbf{H}_2 = D\left(\frac{2}{r^3}\cos\theta\mathbf{e}_r + \frac{1}{r^3}\sin\theta\mathbf{e}_\theta\right)$$

试决定系数 C 、 D 的关系,并求出磁介质球表面上的自由面电流密度 $\mathbf{J}_s$ 和总的面电流密度 $\mathbf{J}_{s1}$ 。

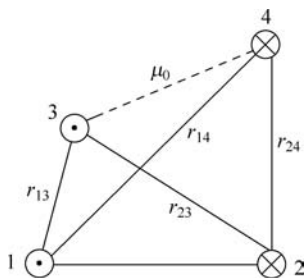
3.24 有一铁磁材料的球壳,其内外半径分别为 r_1 和 r_2 ,它被均匀磁化到 $\mathbf{M}_0$,其方向沿极轴。试求球壳内外极轴上的磁标势及磁感应强度。

3.25 在空气与磁导率为 μ 的铁磁物质的分界平面上,有一载电流 I 的无限长细直导线。试分别求空气和铁磁物质中的磁场强度和磁感应强度。

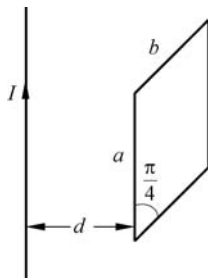
3.26 试求一平均半径为 a 、圆截面半径为 b ($b \ll a$),其上密绕 N 匝线圈的非磁性导体圆环的自感。

3.27 有两对相互平行的双根传输线 1、2 和 3、4,它们的相对位置如题 3.27 图所示。试求两对传输线之间单位长度的互感。

3.28 在空气中一载电流为 I 的长直导线的磁场中,有一与之共面的边长分别为 a 、 b 的平行四边形导线回路,如题 3.28 图所示。试求该直导线与导线回路的互感。



题 3.27 图



题 3.28 图

3.29 内外半径分别为 r_1 与 r_2 、磁导率为 μ 的无限长直导体圆筒,其中通有沿轴向的电流 I 且均匀分布。试求单位长导体内的磁场能量和内自感。

3.30 一平均半径为 a 、圆截面半径为 b ($b \ll a$)的环形铁芯螺线管,其中铁芯的磁导率为 μ ,环上密绕 N 匝线圈并通有电流 I 。试求此环形铁芯螺线管的磁场能量和自感。

3.31 试证明磁路中储存的磁场能量等于 $W_m = \frac{1}{2} \Psi_m^2 R_m$, 其中 R_m 是磁阻。

3.32 一环形铁芯螺线管,平均半径为 15cm,其圆形截面的半径为 2cm,铁芯的相对磁导率为 $\mu_r=1400$,环上密绕 1000 匝线圈,通过电流 0.7A。试计算:

- (1) 螺线管的电感;
- (2) 在铁芯上开一 0.1cm 的气隙,再计算电感(假设开口后铁芯的磁导率不变);
- (3) 空气隙和铁芯中磁场能量的比值。