# 第5章 图

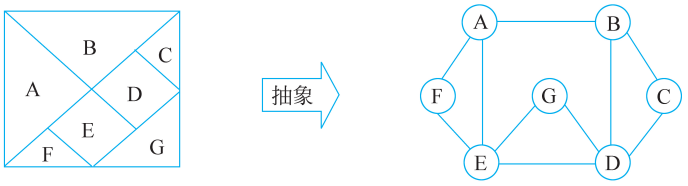
| | |
|---|---|
| 教学重点 | 图的基本术语；图的存储表示；图的遍历；图的经典应用 |
| 教学难点 | 图的遍历；最小生成树；最短路径；拓扑排序；关键路径 |
| 教学目标 | (1) 解释图的定义和基本术语，设计图的抽象数据类型定义；<br>(2) 辨析图的深度优先和广度优先遍历方法，针对图结构给出遍历结果；<br>(3) 辨析图的邻接矩阵和邻接表存储方法，分析查找邻接点等操作的执行过程和效率，画出存储示意图，描述存储结构定义；<br>(4) 基于图的邻接矩阵和邻接表存储，设计构造图、遍历等算法；<br>(5) 陈述 Prim 算法和 Kruskal 算法的基本思想，说明贪心选择策略，描述算法执行过程中存储单元的变化，解释算法的程序实现，评价时间性能；<br>(6) 陈述 Dijkstra 算法的基本思想，设计存储结构，描述求解过程中存储单元的变化，解释 Dijkstra 算法的程序实现，评价时间性能；<br>(7) 陈述 Floyd 算法的基本思想，建立递推关系式，描述求解过程中存储单元的变化，解释 Floyd 算法的程序实现，评价时间性能；<br>(8) 解释 AOV 网的定义，说明拓扑序列的含义，陈述拓扑排序算法的基本思想，描述算法执行过程中存储单元的变化，评价时间性能；<br>(9) 辨析 AOV 网和 AOE 网，论证关键路径和关键活动对工程进度的影响，分析关键路径的求解思想，给出算法执行过程中存储单元的变化 |
| 教学提示 | 对于本章的教学要抓住一条明线：图的逻辑结构→图的存储结构→图的遍历→图的经典应用。对于图的逻辑结构，要从图的定义出发，在与线性表和树的定义进行比较的基础上，深刻理解图结构的逻辑特征。对于图的存储结构，以如何表示图中顶点之间的逻辑关系为出发点，掌握图的不同存储结构以及它们之间的关系，并学会在实际问题中修改存储结构。<br>图的遍历是本章的重点和难点，注意讲授思路。首先从逻辑上(即不涉及存储结构)掌握图的遍历操作，理解伪代码算法；其次在与树的遍历进行比较的基础上，提出图遍历的关键问题和解决办法；最后基于邻接矩阵和邻接表存储结构实现图的遍历操作。<br>对于本章的经典算法(Prim 算法、Kruskal 算法、Dijkstra 算法、Floyd 算法和拓扑排序算法等)，首先要理解算法的基本思想，并将算法思想用顶层伪代码进行描述，然后在分析算法执行过程的基础上得出算法采用的存储结构，最后才能掌握具体的算法 |

课件 5-1

# 5.1 引 言

在线性结构中,数据元素之间仅具有线性关系,每个数据元素最多只有一个前驱和一个后继;在树结构中,结点之间具有层次关系,每个结点最多只有一个双亲,但可以有多个孩子;在图结构中,任意两个顶点之间都可能有关系,每个顶点都可以有多个邻接点。图结构具有极强的表达能力,很多问题抽象出的数据模型是图结构。下面请看两个例子。

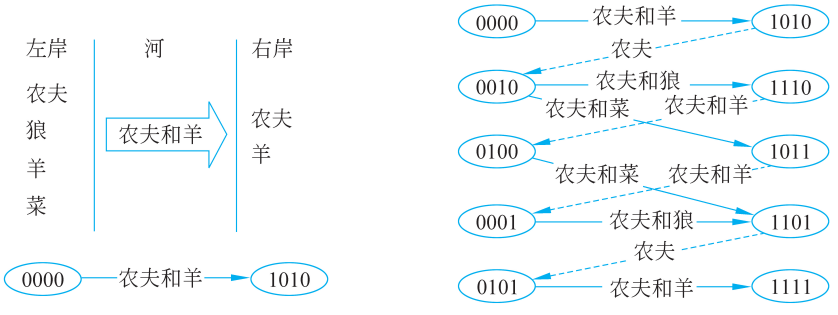
**例 5-1** 七巧板涂色问题。假设有如图 5-1(a)所示的七巧板,使用至多 4 种不同颜色对七巧板涂色,要求每个区域涂一种颜色,相邻区域的颜色互不相同。如何求得涂色方案呢?为了识别不同区域的相邻关系,可以将七巧板的每个区域看成一个顶点,如果两个区域相邻,则这两个顶点之间有边相连,从而将七巧板抽象为图结构,如图 5-1(b)所示。




(a) 七巧板　　(b) 图结构

图 5-1 七巧板及其数据模型

**例 5-2** 农夫过河问题。一个农夫带着一只狼、一只羊和一筐菜,想从河一边(左岸)乘船到另一边(右岸),由于船太小,农夫每次只能带一样东西过河,但是如果没有农夫看管,则狼会吃羊,羊会吃菜。农夫怎样过河才能把每样东西安全地送过河呢?在某一时刻,农夫、狼、羊和菜或者在河的左岸,或者在河的右岸,可以用 0 表示在河的左岸,用 1 表示在河的右岸,如图 5-2(a)所示,例如 1010 表示农夫和羊在河的右岸、狼和菜在河的左岸。将每一个可能的状态抽象为一个顶点,边表示状态转移发生的条件,从而将农夫过河问题抽象为一个图模型,如图 5-2(b)所示。




(a) 农夫过河过程中状态的变化　　(b) 图结构

图 5-2 农夫过河问题及其数据模型

# 5.2　图的逻辑结构


课件 5-2

## 5.2.1　图的定义和基本术语

在图中常常将数据元素称为**顶点**(vertex)。

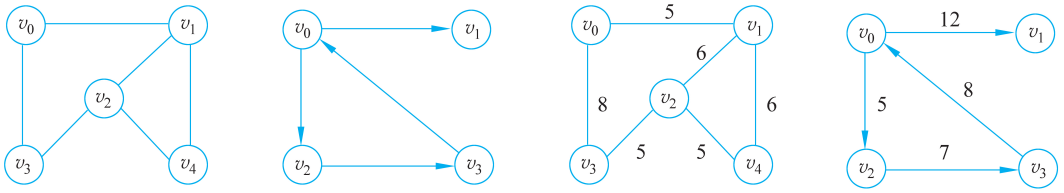
**1. 图的定义**

**图**(graph)是由顶点的**有穷非空**集合和顶点之间边的集合组成,通常表示为

$$G=(V,E)$$

其中,$G$ 表示一个图,$V$ 是 $G$ 中顶点的集合,$E$ 是 $G$ 中顶点之间边的集合。例如,在图 5-3(a)所示的 $G1$ 中,顶点集合 $V=\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$,边的集合 $E=\{(v_0, v_1), (v_0, v_3), (v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4)\}$。

在图中,若顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 之间的边没有方向,则称这条边为**无向边**,用无序偶对$(v_i, v_j)$表示;若从顶点 $v_i$ 到 $v_j$ 的边有方向,则称这条边为**有向边**(也称为弧,以区别于无向边),用有序偶对$<v_i, v_j>$表示,$v_i$ 称为弧尾,$v_j$ 称为弧头。如果图的任意两个顶点之间的边都是无向边,则称该图为**无向图**(undirected graph),否则称该图为**有向图**(directed graph)。例如,图 5-3(a)所示是一个无向图,图 5-3(b)所示是一个有向图。




(a) 无向图 $G1$　(b) 有向图 $G2$　(c) 无向网图 $G3$　(d) 有向网图 $G4$

图 5-3　图的示例

在图中,**权**(weight)通常是指对边赋予的有意义的数值量[①]。在实际应用中,权可以有具体的含义。例如,对于城市交通线路图,边上的权表示该条线路的长度或者等级;对于工程进度图,边上的权表示活动所需要的时间等。边上带权的图称为带权图或**网图**(network graph)。例如,图 5-3(c)所示是一个无向网图,图 5-3(d)所示是一个有向网图。

**2. 图的基本术语**

(1) 邻接、依附。

在无向图中,对于任意两个顶点 $v_i$ 和 $v_j$,若存在边$(v_i, v_j)$,则称顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 互为**邻接点**[②](adjacent),**同时称边**$(v_i, v_j)$**依附**(adhere)于顶点 $v_i$ 和 $v_j$。

在有向图中,对于任意两个顶点 $v_i$ 和 $v_j$,若存在弧$<v_i, v_j>$,则称顶点 $v_i$ 邻接到 $v_j$,顶点 $v_j$ 邻接自 $v_i$,同时称弧$<v_i, v_j>$依附于顶点 $v_i$ 和 $v_j$。在不致混淆的情况下,通

① 本书只讨论边上带权的图,且权值是非负整数的情况。

② 在线性结构中,数据元素之间的逻辑关系表现为前驱——后继;在树结构中,结点之间的逻辑关系表现为双亲——孩子;在图结构中,顶点之间的逻辑关系表现为邻接。

常称 $v_j$ 是 $v_i$ 的邻接点。

(2) 顶点的度、入度、出度。

在无向图中,顶点 $v$ 的**度**(degree)是指依附于该顶点的边的个数,记为 TD($v$)。在具有 $n$ 个顶点 $e$ 条边的无向图中,有下式成立:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{TD}(v_i) = 2e \tag{5-1}$$

在有向图中,顶点 $v$ 的**入度**(in-degree)是指以该顶点为弧头的弧的个数,记为 ID($v$);顶点 $v$ 的**出度**(out-degree)是指以该顶点为弧尾的弧的个数,记为 OD($v$)。在具有 $n$ 个顶点 $e$ 条边的有向图中,有下式成立:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{ID}(v_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{OD}(v_i) = e \tag{5-2}$$

(3) 无向完全图、有向完全图。

在无向图中,如果任意两个顶点之间都存在边,则称该图为**无向完全图**(undirected complete graph)。含有 $n$ 个顶点的无向完全图有 $n(n-1)/2$ 条边。

在有向图中,如果任意两顶点之间都存在方向互为相反的两条弧,则称该图为**有向完全图**(directed complete graph)。含有 $n$ 个顶点的有向完全图有 $n(n-1)$ 条边。

(4) 稀疏图、稠密图。

称边数很少的图为**稀疏图**(sparse graph),反之,称为**稠密图**[①](dense graph)。

(5) 路径、路径长度、回路。

在无向图 $G=(V,E)$ 中,顶点 $v_p$ 到 $v_q$ 之间的**路径**(path)是一个顶点序列 $v_p = v_{i0}v_{i1}\cdots v_{im} = v_q$,其中,$(v_{ij-1}, v_{ij}) \in E(1 \leqslant j \leqslant m)$;如果 $G$ 是有向图,则 $<v_{ij-1}, v_{ij}> \in E(1 \leqslant j \leqslant m)$。路径上边的数目称为**路径长度**(path length)。第一个顶点和最后一个顶点相同的路径称为**回路**(circuit)。显然,在图中路径可能不唯一,回路也可能不唯一。

(6) 简单路径、简单回路。

在路径序列中,顶点不重复出现的路径称为**简单路径**(simple path)。除了第一个顶点和最后一个顶点之外,其余顶点不重复出现的回路称为**简单回路**(simple circuit)。通常情况下,路径指的都是简单路径,回路指的都是简单回路。

(7) 子图。

对于图 $G=(V,E)$ 和 $G'=(V',E')$,如果 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$,则称图 $G'$ 是 $G$ 的**子图**[②](subgraph)。图 5-4 给出了子图的示例,显然,一个图可以有多个子图。

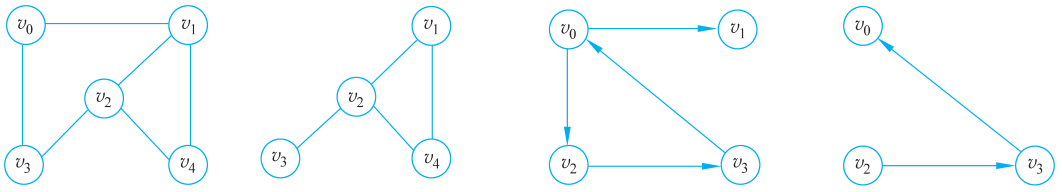
(8) 连通图、连通分量。

在无向图中,若顶点 $v_i$ 和 $v_j(i \neq j)$ 之间有路径,则称 $v_i$ 和 $v_j$ 是连通的。若任意顶点 $v_i$ 和 $v_j(i \neq j)$ 之间均有路径,则称该图是**连通图**(connected graph)。例如,图 5-4(a)是连通图,图 5-5(a)是非连通图。非连通图的极大连通子图称为**连通分量**(connected component),极大的含义是指在满足连通的条件下,包括所有连通的顶点以及和这些顶

① 稀疏和稠密本身就是模糊的概念,稀疏图和稠密图常常是相对而言的。显然,最稀疏图的边数是0,最稠密图是完全图,边数达到最多。

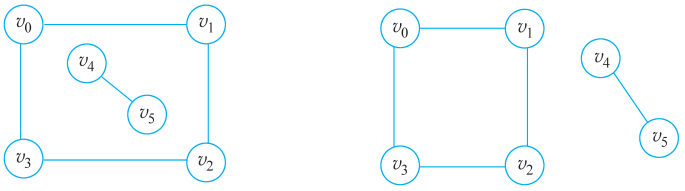
② 通俗地说,子图是原图的一部分,是由原图中一部分顶点和这些顶点之间的一部分边构成的图。

点相关联的所有边。图 5-5(a)所示非连通图有两个连通分量，如图 5-5(b)所示。




(a) 无向图 $G1$　(b) $G1$ 的一个子图　(c) 有向图 $G2$　(d) $G2$ 的一个子图

图 5-4　子图的例子

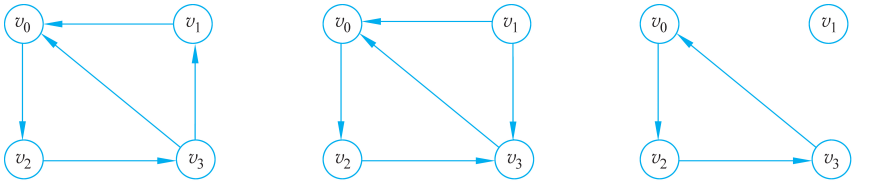



(a) 非连通图 $G5$　(b) $G5$ 有两个连通分量

图 5-5　非连通图及连通分量

(9) 强连通图、强连通分量。

在有向图中，对任意顶点 $v_i$ 和 $v_j$ ($i \neq j$)，若从顶点 $v_i$ 到 $v_j$ 均有路径，则称该有向图是**强连通图**[①](strongly connected graph)。图 5-6(a)是强连通图，图 5-6(b)是非强连通图。非强连通图的极大强连通子图[②]称为**强连通分量**(strongly connected component)。图 5-6(b)所示非强连通图有两个强连通分量，如图 5-6(c)所示。




(a) 强连通图 $G6$　(b) 非强连通图 $G7$　(c) $G7$ 有两个强连通分量

图 5-6　强连通图、非强连通图及强连通分量

## 5.2.2　图的抽象数据类型定义

图是一种与具体应用密切相关的数据结构，它的基本操作往往随应用不同而有很大差别。下面给出一个图的抽象数据类型定义的例子，简单起见，基本操作仅包含图的遍历，针对具体应用，需要重新定义其基本操作。

---

① 在有向图中，若顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 是连通的，则顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 必在同一条回路上。

② 此处极大的含义同连通分量，是指在满足连通的条件下，包括所有连通的顶点以及和这些顶点相关联的所有边。

```
ADT Graph
DataModel
    顶点的有穷非空集合和顶点之间边的集合
Operation
    CreatGraph
        输入：n个顶点e条边
        功能：图的建立
        输出：构造一个含有n个顶点e条边的图
    DestroyGraph
        输入：无
        功能：图的销毁
        输出：释放图占用的存储空间
    DFTraverse
        输入：遍历的起始顶点v
        功能：从顶点v出发深度优先遍历图
        输出：图的深度优先遍历序列
    BFTraverse
        输入：遍历的起始顶点v
        功能：从顶点v出发广度优先遍历图
        输出：图的广度优先遍历序列
endADT
```

### 5.2.3 图的遍历操作

图的遍历是指从图中某顶点出发，对图中所有顶点访问[①]一次且仅访问一次。图的遍历操作和树的遍历操作类似，但由于图结构本身的复杂性，所以图的遍历操作也比较复杂。在图的遍历中要解决的关键问题如下。

(1) 在图中，没有一个确定的开始顶点，任意一个顶点都可作为遍历的起始顶点，那么，如何选取遍历的起始顶点？

(2) 从某个顶点出发可能到达不了所有其他顶点，例如非连通图，从一个顶点出发，只能访问它所在连通分量上的所有顶点，那么，如何才能遍历图的所有顶点？

(3) 由于图中可能存在回路，某些顶点可能会被重复访问，那么，如何避免遍历不会因回路而陷入死循环？

(4) 在图中，一个顶点可以和其他多个顶点相邻接，当这样的顶点访问过后，如何选取下一个要访问的顶点？

问题(1)的解决：既然图中没有确定的开始顶点，那么可从图中任一顶点出发，不妨将顶点进行编号，先从编号小的顶点开始。在图中，由于任何两个顶点之间都可能存在边，顶点没有确定的先后次序，所以，顶点的编号不唯一。在图的存储实现上，一般采用一维数组存储图的顶点信息，因此，可以用顶点的存储位置(即下标)表示该顶点的编号。为

① 此处访问的含义同树的遍历中访问的含义。不失一般性，在此将访问定义为输出顶点的数据信息。

了和 C 语言中的数组保持一致，图的编号从 0 开始。

问题(2) 的解决：要遍历图中所有顶点，只需多次重复从某一顶点出发进行图的遍历。以下仅讨论从某一顶点出发遍历图的问题。

问题(3) 的解决：为了在遍历过程中便于区分顶点是否已被访问，设置一个访问标志数组 visited[n](*n* 为图中顶点的个数)，其初值为未被访问标志 0，如果某顶点 *i* 已被访问，则将该顶点的访问标志 visited[i]置为 1。

问题(4)的解决：这就是遍历次序的问题。图的遍历通常有深度优先遍历和广度优先遍历两种方式，这两种遍历次序对无向图和有向图都适用。

**深度优先遍历**[①](depth-first traverse)类似于树的前序遍历。从图中某顶点 $v$ 出发进行深度优先遍历的基本思想如下。

(1) 访问顶点 $v$；

(2) 从 $v$ 的未被访问的邻接点中选取一个顶点 $w$，然后从 $w$ 出发进行深度优先遍历；

(3) 重复上述两步，直至图中所有和 $v$ 有路径相通的顶点都被访问到。

显然，深度优先遍历图是一个递归过程，算法思想用伪代码描述如下[②]：

```
算法：DFTraverse
输入：顶点的编号 v
输出：无
    1. 访问顶点 v；修改标志 visited[v] = 1；
    2. w =顶点 v 的第一个邻接点；
    3. while (w 存在)
        3.1  if (w 未被访问) 从顶点 w 出发递归执行该算法；
        3.2  w =顶点 v 的下一个邻接点；
```

图 5-7 给出了对无向图进行深度优先遍历的过程示例，在访问 $v_0$ 后选择未曾访问的邻接点 $v_1$，访问 $v_1$ 后选择未曾访问的邻接点 $v_4$，由于 $v_4$ 没有未曾访问的邻接点，递归返回到顶点 $v_1$，选择未曾访问的邻接点 $v_2$，从 $v_2$ 出发进行深度优先遍历，以此类推，得到深度优先遍历序列为 $v_0v_1v_4v_2v_3v_5$。

**广度优先遍历**(breadth-first traverse)类似于树的层序遍历。从图中某顶点 $v$ 出发进行广度优先遍历的基本思想如下。

(1) 访问顶点 $v$；

(2) 依次访问 $v$ 的各个未被访问的邻接点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$；

(3) 分别从 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 出发依次访问它们未被访问的邻接点，直至图中所有与顶

① 深度优先遍历算法由约翰·霍普克洛夫特和罗伯特·陶尔扬发明。当他们的研究成果在 ACM 上发表以后，引起学术界很大的轰动，深度优先遍历算法在信息检索、人工智能等领域得到成功应用。

② 该算法不依赖于图的存储结构，不涉及具体的实现细节，仅描述算法的基本思路。读者要学习并掌握这种用伪代码描述顶层算法的方法。

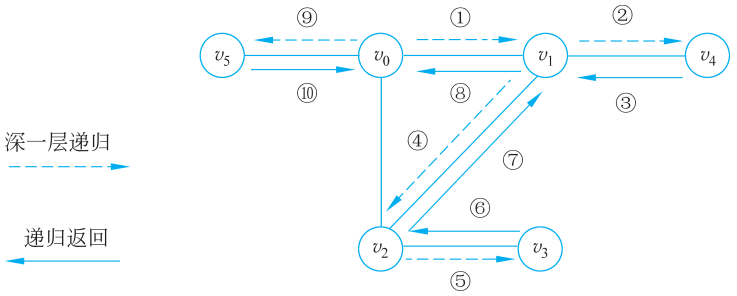



图 5-7 无向图的深度优先遍历示例

点 $v$ 有路径相通的顶点都被访问到。

广度优先遍历图是以顶点 $v$ 为起始点,由近至远,依次访问和 $v$ 有路径相通且路径长度为 1,2,…的顶点。为了使“先被访问顶点的邻接点”先于“后被访问顶点的邻接点”被访问,设置队列存储已被访问的顶点。例如,对图 5-8 所示有向图进行广度优先遍历,访问 $v_0$ 后将 $v_0$ 入队;将 $v_0$ 出队并依次访问 $v_0$ 的未曾访问的邻接点 $v_1$ 和 $v_2$,将 $v_1$ 和 $v_2$ 入队;将 $v_1$ 出队并访问 $v_1$ 的未曾访问的邻接点 $v_4$,将 $v_4$ 入队;重复上述过程,得到顶点访问序列 $v_0v_1v_2v_4v_3$,图 5-9 给出了广度优先遍历过程中队列的变化。

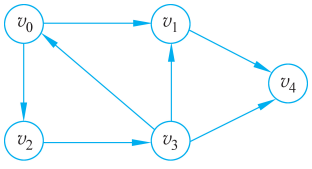



图 5-8 一个有向图

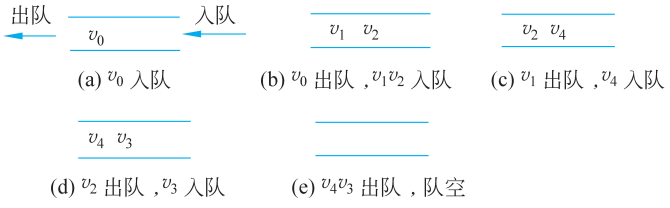



图 5-9 广度优先遍历过程中队列的变化

广度优先遍历的算法思想用伪代码描述如下:

```
算法:BFTraverse
输入:顶点的编号 v
输出:无
    1. 队列 Q 初始化;
    2. 访问顶点 v;修改标志 visited[v]=1;顶点 v 入队列 Q;
    3. while(队列 Q 非空)
       3.1  v=队列 Q 的队头元素出队;
       3.2  w=顶点 v 的第一个邻接点;
       3.3  while(w 存在)
            3.3.1  如果 w 未被访问,则
                   访问顶点 w;修改标志 visited[w]=1;顶点 w 入队列 Q;
            3.3.2  w=顶点 v 的下一个邻接点;
```

## 5.3　图的存储结构及实现


课件 5-3

图是一种复杂的数据结构，表现在顶点之间的逻辑关系（即邻接关系）错综复杂。从图的定义可知，一个图包括两部分：顶点的信息以及顶点之间边的信息。无论采用什么方法存储图，都要完整、准确地反映这两方面的信息。

在图中，任意两个顶点之间都可能存在边，所以无法通过顶点的存储位置反映顶点之间的邻接关系，因此图没有顺序存储结构。一般来说，图的存储结构应根据具体问题的要求来设计，下面介绍两种常用的存储结构——邻接矩阵和邻接表。

### 5.3.1　邻接矩阵

#### 1. 邻接矩阵的存储结构定义

图的邻接矩阵（adjacency matrix）存储也称为数组表示法，是用一个一维数组存储图中的顶点，用一个二维数组存储图中的边（即各顶点之间的邻接关系），存储顶点之间邻接关系的二维数组称为邻接矩阵。设图 $G=(V,E)$ 有 $n$ 个顶点，则邻接矩阵是一个 $n\times n$ 的方阵，定义为

$$\text{edge[i][j]}=\begin{cases}1 & (v_i,v_j)\in E \text{ 或 } <v_i,v_j>\in E\\ 0 & \text{否则}\end{cases} \tag{5-3}$$

若 $G$ 是网图，则邻接矩阵定义为

$$\text{edge[i][j]}=\begin{cases}w_{ij} & (v_i,v_j)\in E \text{ 或 } <v_i,v_j>\in E\\ 0 & i=j\\ \infty & \text{否则}\end{cases} \tag{5-4}$$

其中，$w_{ij}$ 表示边 $(v_i,v_j)$ 或弧 $<v_i,v_j>$ 上的权值；$\infty$ 表示一个计算机允许的、大于所有边上权值的数。图 5-10 所示为一个无向图及其邻接矩阵存储示意图，图 5-11 所示为一个有向网图及其邻接矩阵存储示意图。

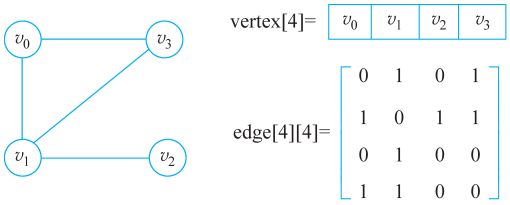



图 5-10　一个无向图及其邻接矩阵存储示意图

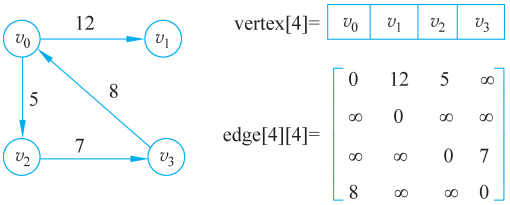



图 5-11　一个有向网图及其邻接矩阵存储示意图

显然，无向图的邻接矩阵一定是对称矩阵，而有向图的邻接矩阵则不一定对称。下面给出邻接矩阵的存储结构定义：

```
#define MaxSize 10                  /* 假设图中最多顶点个数 */
typedef char DataType;              /* 图中顶点的数据类型，假设为 char 型 */
typedef struct                      /* 定义邻接矩阵存储结构 */
```

```
{
    DataType vertex[MaxSize];          /* 存储顶点的一维数组 */
    int edge[MaxSize][MaxSize];        /* 存储边的二维数组 */
    int vertexNum, edgeNum;            /* 图的顶点数和边数 */
} MGraph;
```

### 2. 邻接矩阵的实现

在图的邻接矩阵存储中容易实现下述基本操作。

(1) 对于无向图,顶点 $i$ 的度等于邻接矩阵中第 $i$ 行(或第 $i$ 列)非零元素的个数。对于有向图,顶点 $i$ 的出度等于邻接矩阵中第 $i$ 行非零元素的个数;顶点 $i$ 的入度等于邻接矩阵中第 $i$ 列非零元素的个数。

(2) 判断顶点 $i$ 和 $j$ 之间是否存在边,只需测试邻接矩阵中相应位置的元素 edge[i][j],若其值为 1,则有边;否则,顶点 $i$ 和 $j$ 之间不存在边。

(3) 找顶点 $i$ 的所有邻接点,可依次判别顶点 $i$ 与其他顶点之间是否有边(无向图)或顶点 $i$ 到其他顶点是否有弧(有向图)。

下面讨论邻接矩阵存储的其他基本操作。

(1) 图的建立。建立一个含有 $n$ 个顶点 $e$ 条边的图,假设建立无向图,算法用伪代码描述如下:

算法:CreatGraph
输入:顶点的数据信息 a[n],顶点个数 n,边的个数 e
输出:图的邻接矩阵
1. 存储图的顶点个数和边的个数;
2. 将顶点信息存储在一维数组 vertex 中;
3. 初始化邻接矩阵 edge;
4. 依次输入每条边并存储在邻接矩阵 edge 中:
   4.1 输入边依附的两个顶点的编号 i 和 j;
   4.2 将 edge[i][j]和 edge[j][i]的值置为 1;

下面给出建立一个无向图的邻接矩阵算法的 C 语言实现。

```
void CreatGraph(MGraph *G,DataType a[ ],int n,int e)
{
    int i,j,k;
    G->vertexNum = n; G->edgeNum = e;
    for (i =0; i <G->vertexNum; i++)        /* 存储顶点信息 */
      G->vertex[i] = a[i];
    for (i =0; i <G->vertexNum; i++)        /* 初始化邻接矩阵 */
      for (j =0; j <G->vertexNum; j++)
```