

离散系统和数字滤波器

本章首先集中讨论离散系统的表示。研究离散系统的基本分析和设计,给出离散系统实现的基本结构;讨论离散系统实现的几个基本问题,如可实现性、唯一性、逆系统的可实现性等;为此也讨论了几种基本系统,如无失真系统、全通系统和最小相位系统。为了后续数字滤波器的设计,重点研究了一类 FIR(有限抽样响应)系统——线性相位系统。讨论了 FIR 和 IIR(无限抽样响应)滤波器的等价格型实现结构。本章最后还直观性地构造了一些实用系统的例子。

5.1 线性时不变系统的表示方法

对于线性时不变离散系统,已经有一些系统的分析和设计方法。首先,对于一个给定的或待设计的线性时不变系统,要有一种表示方法,用一组数据或一个函数来指定一个系统。有几种典型的方法表示一个线性时不变系统,这些方法之间相互是有联系的。第 2 章讨论过一些系统的表示方法,本节集中地进一步讨论系统的表示问题。

为了表示一个离散 LTI(Linear time-invariant,线性时不变)系统,可以有几种不同的方法,它们之间有紧密的关联性。

1. 单位抽样响应表示

对于一个离散 LTI 系统,单位抽样响应是其一种表示方式。给出了单位抽样响应 $h[n]$,就指定了一个具体的系统,系统的输入和输出之间的关系由卷积和表示,即

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \quad (5.1)$$

在系统分析的问题中,当给定了 $h[n]$,对于任意给出的输入信号 $x[n]$,可以求出相应的输出信号 $y[n]$ 。在系统设计问题中,给出一个特定的任务要求,若能求出一个能完成该任务的 LTI 系统的单位抽样响应 $h[n]$,就相当于完成了系统设计,这类问题也被称为系统综合。

依据 $h[n]$ 的长度,可将 LTI 系统分成两大类:有限冲激响应(FIR)和无限冲激响应(IIR)系统。

FIR 系统 系统的单位抽样响应仅有有限个不为零的值,其他取值都为零。不失一般性,假设 $h[n]$ 不为零的范围为 $0 \leq n \leq M$ 。这里, M 是一个有限大小的非负整数。

IIR 系统 系统的单位抽样响应有无限多个不为零的值。若系统是因果的, $h[n]$ 取值的非零范围是 $[0, +\infty)$;若系统是非因果的, $h[n]$ 取值的非零范围可能是 $(-\infty, +\infty)$ 。

对于因果 FIR 系统,可列出全部不为零的单位抽样响应值, $\{h[n], 0 \leq n \leq M\}$ 。由这组系数值可完整地表示该系统,对于给定的输入信号,可由卷积和有效地计算输出信号,即

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] \quad (5.2)$$

对于 FIR 系统, $\{h[n], 0 \leq n \leq M\}$ 是最有效的表示方法。一般地,当需要设计一个具有指定功能的 FIR 系统时,只要求出这组不为零的单位抽样响应值,设计任务即告完成。

对于 IIR 系统,由于单位抽样响应非零值个数为无穷,直接用 $h[n]$ 表示并不方便。对 IIR 系统的更有效的表示是系统函数或差分方程。

2. 系统函数表示

离散 LTI 系统的系统函数定义为其单位抽样响应 $h[n]$ 的 z 变换

$$H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \quad (5.3)$$

尽管不是所有可能的离散 LTI 系统的系统函数都可以写成有限阶有理分式形式,但大多数或通过系统设计方法设计出的全部离散 LTI 系统的系统函数都可以写成有理分式形式,即

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (5.4)$$

这里分子和分母多项式分别定义为

$$B(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}$$

可以看到,任何一个分子多项式阶数为 M 、分母多项式阶数为 N 的有理分式均可写成式(5.4)的形式。尽管 $A(z)$ 中的系数 $a_0=1$ 不是必需的,但为了与差分方程表示式对应,采用式(5.4)的分母形式,这并不失一般性。

在 2.5 节关于 z 变换和系统函数的讨论中已知,若式(5.4)中分子多项式和分母多项式没有可约因式且分母多项式阶数 $N>1$ 时,系统的单位抽样响应有无穷多非零项,是 IIR 系统。若再指定系统是因果的(若今后不特加说明,系统函数总是隐含着指定一个因果系统),则式(5.4)唯一地确定了一个系统。

对于 IIR 系统来讲,式(5.4)的系数确定一个系统,因此这组系数 $\{b_r, 0 \leq r \leq M; a_k, 1 \leq k \leq N\}$ 与一个系统是对应的。若需要设计一个具有指定功能的 IIR 系统,只要确定了阶数 M 和 N 以及这组系数,即完成了一个 IIR 系统的设计。

式(5.4)也可以表示 FIR 系统。若分母多项式取 $A(z)=1$,则系统函数为 $H(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$,表示的是一个 FIR 系统。利用系统函数的定义,即可得到系数和单位抽样响应的对应关系为

$$h[r] = b_r, \quad 0 \leq r \leq M \quad (5.5)$$

3. 频率响应表示

离散 LTI 系统的频率响应定义为其单位抽样响应 $h[n]$ 的离散时间傅里叶变换(DTFT)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n} = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (5.6)$$

若单位抽样响应是绝对可和的,其频率响应是系统函数 $H(z)$ 在复平面单位圆上的取值。在研究系统设计问题时,一般希望设计的系统是因果稳定系统,因此频率响应作为系统函数在单位圆上取值的条件总是满足的。

系统的频率响应具有明确的物理意义,其可分解为幅度部分和相位部分,即

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (5.7)$$

其幅度部分 $|H(e^{j\omega})|$ 表示输入信号各频率成分通过系统后幅度的放大或衰减程度,其相位部分 $\varphi(\omega)$ 表示输入信号各频率成分通过系统后的相位偏移。

由于频率响应明确的物理意义,在一大类系统设计问题中往往指定频率响应的部分特性,然后设计一个系统以达到这个要求。例如,数字滤波器的设计中,往往指定频率响应的幅度函数 $|H(e^{j\omega})|$,设计一个系统满足这个要求。若要求设计的系统是 FIR 的,一般需要计算出 $\{h[n], 0 \leq n \leq M\}$ 以达到或逼近指定的要求;若要求设计的系统是 IIR 的,一般需要计算出式(5.4)中的阶数和系数。

若仅指定频率响应的部分特性,例如幅度函数 $|H(e^{j\omega})|$,即使在理想情况下也有无穷多的系统函数 $H(z)$ 存在以满足这个要求。理论上的可实现性和唯一性是一个有必要研究的课题,关于这些问题在 5.3 节和 5.4 节中做详细讨论。

4. 差分方程表示

一个 LTI 系统,其输入和输出关系可由差分方程表示为

$$y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r] \quad (5.8)$$

也可将式(5.8)的差分方程写成递推关系式

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{r=0}^M b_r x[n-r] \quad (5.9)$$

当将式(5.8)的差分方程写成式(5.9)时已经隐含系统是因果的,即当前时刻输出值仅由当前时刻输入以及以前时刻的输入和输出所决定。式(5.9)右侧的第一项称为递归项(离散反馈项),第二项称为滑动平均项。

对式(5.8)两侧做 z 变换即得到式(5.4)的系统函数,因此差分方程和系统函数表示是直接对应的。通过差分方程表示,很容易构造出系统的实现结构。对于一般的 IIR 系统,通过式(5.9)的递推关系可以方便地计算系统输出,也可以方便地构造出系统的递归实现结构。若是 FIR 系统,式(5.2)是式(5.9)的特例,相当于式(5.9)右侧第一项不存在的特殊情况。关于离散系统实现结构的更详细讨论,将在 5.5 节进行。

这里讨论了系统的几种表示方法。对于不同的系统,一种或几种表示方法是最有效的。例如若系统是 FIR 的,直接列出非零的单位抽样响应值可能是最简单的表示方法;但若系统是 IIR 的,单位抽样响应表示就不太方便。各种方法设计出的 IIR 系统的单位抽样响应的数学表达式往往是可以写出的,但却不方便用几个数据来简单表达。所以对 IIR 系统,最简单的表示方法是系统函数表示,通过几个数据列写出系统函数分子分母多项式的阶数和系数值即可清晰地表达该系统。而系统函数和差分方程系数又是一一对应的,若系统函数是有理分式表示的,可认为系统函数和差分方程是同一种表示。

几种系统表示之间是紧密相关的。若有单位抽样响应表示 $h[n]$, 对其做 z 变换就得到系统函数表示; 若系统函数是有理分式, 则立刻得到差分方程表示。若系统是稳定的, 对 $h[n]$ 做 DTFT 可得到频率响应表示, 也可对系统函数在单位圆上取值得到频率响应。若已知系统的差分方程表示, 可直接得到其有理分式形式的系统函数, 用部分分式展开或留数定理作 z 反变换即可得到单位抽样响应, 也可直接对差分方程通过时域求解技术或直接递推得到单位抽样响应。如上讨论了几种表示之间的相互关系。只讨论了部分转换关系, 其他互相转换关系和限制性条件请读者自行分析。这些转换关系, 示于图 5.1 中。

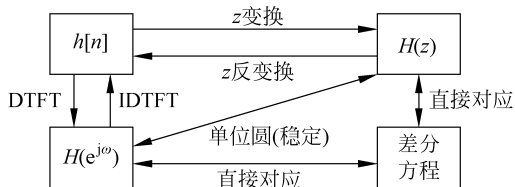


图 5.1 系统表示的相互关系

其他互相转换关系和限制性条件请读者自行分析。这些转换关系, 示于图 5.1 中。

5.2 系统设计

在很多工程问题中, 需要设计具有特定功能的系统。一般来讲, 根据要求得到所设计的系统称为系统设计问题。所谓设计了一个系统, 就是根据设计要求计算得到了系统的一种表达方式, 例如 5.1 节中的某种表示方式。系统设计的要求源自各类不同的应用, 本节以两个典型要求为例初步讨论系统设计问题。

5.2.1 逆系统设计

对于一个给出的 LTI 系统, 用系统函数 $H(z)$ 表示该系统, 对于任意的输入信号 $x[n]$, 通过 $H(z)$ 系统的输出表示为 $y[n]$ 。若可以找到另一个 LTI 系统, 其系统函数为 $H_1(z)$, 以 $y[n]$ 作为系统 $H_1(z)$ 的输入, 若产生的输出是 $x[n]$, 这时称系统 $H(z)$ 是可逆的, 系统 $H_1(z)$ 是系统 $H(z)$ 的逆系统。图 5.2 是一个系统和它的逆系统的示意图。

显然, 用 z 变换表示的图 5.2 所示级联系统的最右侧输出为

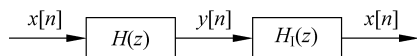


图 5.2 一个 LTI 系统及其逆系统

$$X(z) = H_1(z)Y(z) = H_1(z)H(z)X(z)$$

因此, 一个系统和它的逆系统的复频域关系为

$$H_1(z)H(z) = 1 \quad (5.10)$$

注意, 由于系统函数存在收敛域, 式(5.10)隐含着 $H(z)$ 和 $H_1(z)$ 必须有公共的收敛域, 否则该式没有意义。

也可以在时域表示一个系统与其逆系统的关系, 与式(5.10)对应的时域关系为

$$h_1[n] * h[n] = \delta[n] \quad (5.11)$$

式(5.11)隐含着, 若 $h[n]$ 表示的系统可逆, 由式(5.11)可解出 $h_1[n]$ 。

逆系统设计问题来自许多不同的应用需求。例如, 一个简化的基带通信系统, 把信号的传输通道看成为一个 LTI 系统 $H(z)$, 传输的信号 $x[n]$ 通过信道后得到了信号 $y[n]$ 。为了在接收端恢复传送的原信号, 设计一个补偿系统, 将接收到的 $y[n]$ 转换成 $x[n]$ 。显然这个补偿系统是 $H(z)$ 的逆系统 $H_1(z)$ 。在通信系统中, 在接收端用于补偿信道传输对信号影响的系统称为“均衡器”。这种逆系统作为均衡器是通信领域均衡器设计的一种方法。

从式(5.10)看,似乎逆系统的设计是非常简单的事情,从式(5.10)得到逆系统的系统函数为

$$H_1(z) = \frac{1}{H(z)} \quad (5.12)$$

初看式(5.12)的解是很简单的,但要考虑系统和逆系统的收敛域必须有公共区间这一要求,可以发现,“性能良好”的系统不一定具有“性能良好”的逆系统。这里,“性能良好”指的是系统是稳定因果的。通过两个例子说明这一点。

例 5.2.1 一个 LTI 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - 0.65z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}, \quad |z| > 0.9$$

求其可能的逆系统。

逆系统的系统函数为

$$H_1(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{1 - 0.65z^{-1}}$$

它有两种可能的收敛域,一是 $|z| > 0.65$;二是 $|z| < 0.65$ 。显然,第二种情况与原系统函数的收敛域没有公共区间,因此只有第一种情况是有意义的解,逆系统为

$$H_1(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{1 - 0.65z^{-1}}, \quad |z| > 0.65$$

利用部分分式展开,可求出其单位抽样响应,系统函数重新写为

$$H_1(z) = \frac{9}{6.5} - \frac{5}{13} \cdot \frac{1}{1 - 0.65z^{-1}}, \quad |z| > 0.65$$

单位抽样响应为

$$h_1[n] = \frac{9}{6.5}\delta[n] - \frac{5}{13} \cdot 0.65^n u[n]$$

例 5.2.1 的解是一种很理想的情况,即一个稳定因果的系统有一个稳定且因果的逆系统。但不是所有稳定因果系统都有这样的逆系统,例 5.2.2 说明了这种情况。

例 5.2.2 一个稳定因果系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - 1.3z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}, \quad |z| > 0.9$$

逆系统的系统函数和收敛域有两种情况

$$\text{情况 1} \quad H_1(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{1 - 1.3z^{-1}}, |z| > 1.3$$

$$\text{情况 2} \quad H_1(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{1 - 1.3z^{-1}}, |z| < 1.3$$

两种情况下,逆系统收敛域和原系统收敛域均有公共区域,因此有两种可能的逆系统均满足可逆条件,但这两种系统都不是“性能良好”的系统。第一种情况,收敛域不包括单位圆,是一种因果的不稳定系统;第二种情况,收敛域包括单位圆,系统稳定,但单位抽样响应是左序列,是非因果的。两种逆系统都不是稳定因果系统。

例 5.2.2 说明稳定因果系统不一定具有稳定因果的逆系统。例 5.2.3 说明一个特别简单的 FIR 系统,其逆系统却是 IIR 的,并且可能是不稳定的。

例 5.2.3 一个 FIR 系统,其单位抽样响应仅有两个不为零的值,记为

$$h[n] = 0.5\delta[n] + 0.5\delta[n-1]$$

显然,其系统函数为

$$H(z) = 0.5(1 + z^{-1})$$

其逆系统有两种可能解:

$$\text{情况 1 } H_1(z) = \frac{2}{1+z^{-1}}, |z| > 1; \text{ 其单位抽样响应为 } h_1[n] = 2(-1)^n u[n].$$

$$\text{情况 2 } H_1(z) = \frac{2}{1+z^{-1}}, |z| < 1; \text{ 其单位抽样响应为 } h_1[n] = -2(-1)^n u[-n-1].$$

两种情况下,逆系统均为 IIR 系统。情况 1 是因果系统,情况 2 是非因果系统,且两种逆系统均不满足 BIBO 稳定性,仅满足临界稳定性。

这几个例子说明逆系统的表现是复杂的,远比解的形式式(5.12)令人感到困惑。实际上,很多问题可转化为系统求逆的问题,但系统求逆的问题却是一个复杂的问题。是不是有一种简单结论呢?若对系统施加一些约束,就一定有稳定因果的逆系统呢?答案是最小相位系统,最小相位系统具有稳定因果的逆系统(至少是临界稳定的),5.3 节将讨论最小相位系统。

图 5.2 和式(5.10)所定义的逆系统要求过于严格。实际上,信号经过一个系统,尤其是因果系统后,允许产生一定的延迟和幅度变化,广义逆系统更符合实际情况。系统与广义逆系统级联构成无失真传输系统,即图 5.3 所示的系统结构。

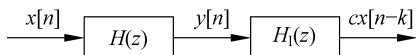


图 5.3 一个 LTI 系统与其广义逆系统

定义 $H_T(z) = H_1(z)H(z) = cz^{-k}$, 这里 k 是一个给定的正整数, c 是任意给定的不为零的实数。满足条件

$$H_T(z) = cz^{-k} \quad (5.13)$$

的系统称为无失真传输系统。广义逆系统满足

$$H_1(z)H(z) = cz^{-k} \quad (5.14)$$

与式(5.10)相同,要求式(5.14)中的两个系统函数的收敛域有公共区域。广义逆系统的时域条件对应修改为

$$h_1[n] * h[n] = c\delta[n-k] \quad (5.15)$$

如果令 $c=1$,对于给定的 k ,重解例 5.2.1 至例 5.2.3,问题并没有根本性改善。在实际中,对于系统求逆问题,经常放弃精确解,只寻求近似解。例 5.2.4 中,讨论用最小二乘法设计一个近似逆系统的问题。有关最小二乘法的介绍参考附录 A.3。

例 5.2.4 设一个 FIR 系统,其单位抽样响应为

$$h[n] = 0.5\delta[n] + \delta[n-1] + 0.5\delta[n-2]$$

它的精确逆系统是 IIR 的且是不稳定的,它的精确逆系统的系统函数和单位抽样响应留作习题。本例中,求一个近似逆系统 $h_1[n]$ 。我们选择 $h_1[n]$ 是 FIR 的,并设其仅有 9 个非零值,即仅对 $0 \leq n \leq 8, h_1[n] \neq 0$ 。取 $k=5, c=1$,利用式(5.15)求该近似逆系统。

利用卷积的定义有

$$\sum_{k=0}^2 h[k] * h_1[n-k] = \delta[n-5] \quad (5.16)$$

因为 $h[n]$ 有 3 个非零值, $h_1[n]$ 有 9 个非零值, 卷积的有效长度为 $9+3-1=11$, 故如上卷积仅对 $0 \leq n \leq 10$ 有效, 分别取 $n=0, 1, \dots, 10$, 展开式(5.16)如下

$$h[0]h_1[n] + h[1]h_1[n-1] + h[2]h_1[n-2] = \delta[n-5], \quad n=0, 1, \dots, 10 \quad (5.17)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h[2] & h[1] & h[0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h[2] & h[1] & h[0] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h[2] & h[1] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h[2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1[0] \\ h_1[1] \\ h_1[2] \\ h_1[3] \\ h_1[4] \\ h_1[5] \\ h_1[6] \\ h_1[7] \\ h_1[8] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

由已知条件知系数矩阵中, $h[0]=0.5, h[1]=1, h[2]=0.5$, 该方程可写成矩阵形式为

$$\mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \mathbf{b}$$

显然, 这是过确定性方程, 一般是无解的, 但可以通过最小二乘(LS)技术得到近似解(LS解的说明见附录 A.3)。近似逆系统的 LS 解为

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{1,LS} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ &= [0.1818 \quad -0.5455 \quad 1.0909 \quad -1.8182 \quad 2.7273 \\ &\quad -1.8182 \quad 1.0909 \quad -0.5455 \quad 0.1818]^T \end{aligned}$$

将求出的 $h_{1,LS}[n]$ 代入式(5.16)左侧, 可计算卷积结果, 并与式(5.16)右侧比较以分析解的精确性。参考式(5.18), 卷积用如下矩阵运算完成。

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{LS} &= \mathbf{A}\mathbf{h}_{1,LS} \\ &= [0.0909 \quad -0.0909 \quad 0.0909 \quad -0.0909 \quad 0.0909 \quad 0.9091 \quad 0.0909 \\ &\quad -0.0909 \quad 0.0909 \quad -0.0909 \quad 0.0909]^T \end{aligned}$$

显然如下矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{b} - \mathbf{b}_{LS} \\ &= [-0.0909 \quad 0.0909 \quad -0.0909 \quad 0.0909 \quad -0.0909 \quad 0.0909 \\ &\quad -0.0909 \quad 0.0909 \quad -0.0909 \quad 0.0909]^T \end{aligned}$$

表示了近似逆系统带来的输出误差矢量, 更一般地, 用误差矢量的范数

$$d = \|\mathbf{e}\|_2 = \sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{e}} = 0.0909$$

表示误差的大小。

可见求出的近似逆系统系数 $\mathbf{h}_{1,LS}$ 是对称的。稍后会看到, 这种对称性带来线性相位性, 并且近似逆系统与原系统的卷积结果 $\mathbf{b}_{LS}$ 与 $\mathbf{b}$ 误差是较小的。如果不加入延迟 $k=5$, 而是取 $k=0, c=1$, 式(5.18)右侧第一行为 1, 其他为零, 重解该问题, 相应的解为

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{1,LS} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\
&= \begin{bmatrix} 1.3636 & -2.1818 & 2.5455 & -2.5455 & 2.2727 \\ -1.8182 & 1.2727 & -0.7273 & 0.7273 & 0.2727 \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{b}_{LS} &= \mathbf{A} \mathbf{h}_{1,LS} \\
&= \begin{bmatrix} 0.6818 & 0.2727 & -0.2273 & 0.1818 & -0.1364 \\ 0.0909 & -0.0455 & 0 & 0.0455 & -0.0909 & 0.1364 \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{e} &= \mathbf{b} - \mathbf{b}_{LS} \\
&= \begin{bmatrix} 0.3182 & -0.2727 & 0.2273 & -0.1818 & 0.1364 \\ -0.0909 & 0.0455 & 0 & -0.0455 & 0.0909 & -0.1364 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

可见,求出的逆系统单位抽样响应不再对称,误差也更大。

系统求逆是一个复杂的问题,有各种近似处理方法,本节只做简要介绍。第9章的自适应滤波,也可用于系统近似求逆问题。

5.2.2 数字滤波器设计

数字滤波器是数字信号处理中研究最多的一种离散系统。人们从不同的角度出发,对滤波器给出不同的定义,典型的分类方法是將滤波器分类为经典滤波器和现代滤波器。本书前8章讨论的是所谓的“经典”滤波器的概念,把滤波器视为一种具有频率选择能力的装置。若信号中包含了宽范围的频率成分,通过滤波器可保留一些范围的频率成分,而滤除另一些范围的频率成分。经典滤波器可分为模拟滤波器和数字滤波器,其功能描述是一致的。数字滤波器是一个离散时间系统,输入和输出均为离散信号,本书主要讨论数字滤波器。

由于经典滤波器主要关心频率选择特性,因此,一般通过频域特性来定义。表示一个LTI系统的频域特性的主要量是频率响应 $H(e^{j\omega})$,频率响应的幅度即幅频响应,表示了一个系统的频率选择特性,故常用对 $|H(e^{j\omega})|$ 的取值要求来定义一个数字滤波器。

图5.4给出了几种理想数字滤波器的定义,是通过指定 $|H(e^{j\omega})|$ 来定义的。图5.4中从上向下分别定义了理想低通滤波器、理想高通滤波器、理想带通滤波器和理想带阻滤波器。

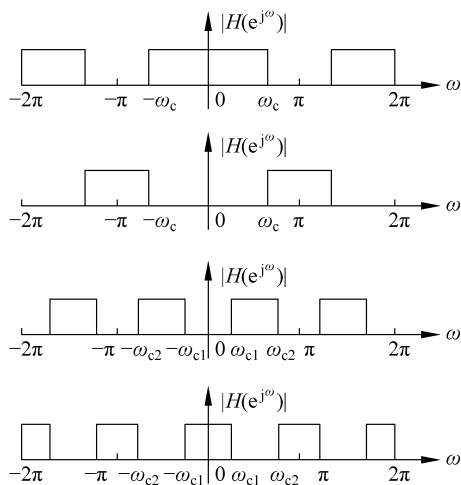


图 5.4 典型的理想数字滤波器

以理想低通数字滤波器为例,分析理想滤波器的定义。只需要在 $|\omega| \leq \pi$ 范围内定义一个滤波器的幅频特性,在该范围之外周期重复。在该范围内,理想低通滤波器的定义为

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} C, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (5.19)$$

一般给出滤波器幅频响应的定义后,根据设计方法的不同,对于相位部分可有不同处理方式。例如若设计 FIR 滤波器,可要求线性相位,若同时要求系统是因果的,则相位项可以被确定下来(详见 5.6 节);若设计 IIR 系统,一些设计方法默认地设计出最小相位系统,幅频响应确定了,相位函数也就确定了,设计中不必再给出相位要求。式(5.19)的定义中, $|\omega| \leq \omega_c$ 称为滤波器的通频带, $\omega_c < |\omega| \leq \pi$ 称为阻带。

设相位函数 $\varphi(\omega) = 0$,那么理想低通滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} = \begin{cases} C, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (5.20)$$

可计算出单位抽样响应为

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} C e^{j\omega n} d\omega = C \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = C \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c n) \quad (5.21)$$

该理想低通滤波器的单位抽样响应在 $-\infty < n < +\infty$ 内均不为零。由卷积和公式,系统当前时刻的输出需要从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的系统输入值,这样的系统是不可实现的。

类似地可定义其他理想数字滤波器,同样地它们是不可实现的。5.4 节将进一步讨论系统可实现性的一般条件。

接下来分析几个通过直观构造的简单滤波器,它们具有某些滤波能力。首先看几个低通滤波器。对于低通滤波器,可得到几个简单条件,幅频响应在角频率原点取值为一个常数,即

$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \left| \sum_{n=0}^{M-1} h[n] \right| = C \quad (5.22)$$

在归一化时,取 $C=1$ 。在 $\omega=\pi$ 处,幅频响应为零或很小的值,即

$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \left| \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n h[n] \right| = \delta \quad (5.23)$$

这里 δ 是一个很小的值或为零。

例 5.2.5 第一个简单滤波器的系统函数是

$$H(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1}) \quad (5.24)$$

这是 FIR 滤波器,非零的单位抽样响应值仅有 $h[0]=1/2, h[1]=1/2$,其幅频响应为

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) \right| = \frac{1}{2}(2 + 2\cos\omega)^{1/2} \quad (5.25)$$

幅频响应和相位函数示于图 5.5 中。

由图 5.5 和式(5.25)均可得到, $|H(e^{j0})|=1, |H(e^{j\pi})|=0$ 。对于频率从低向高变化, $|H(e^{j\omega})|$ 逐渐减小直到变为零,这是一个不理想的低通滤波器。

由式(5.24)知道,该滤波器输入和输出之间的时域关系为

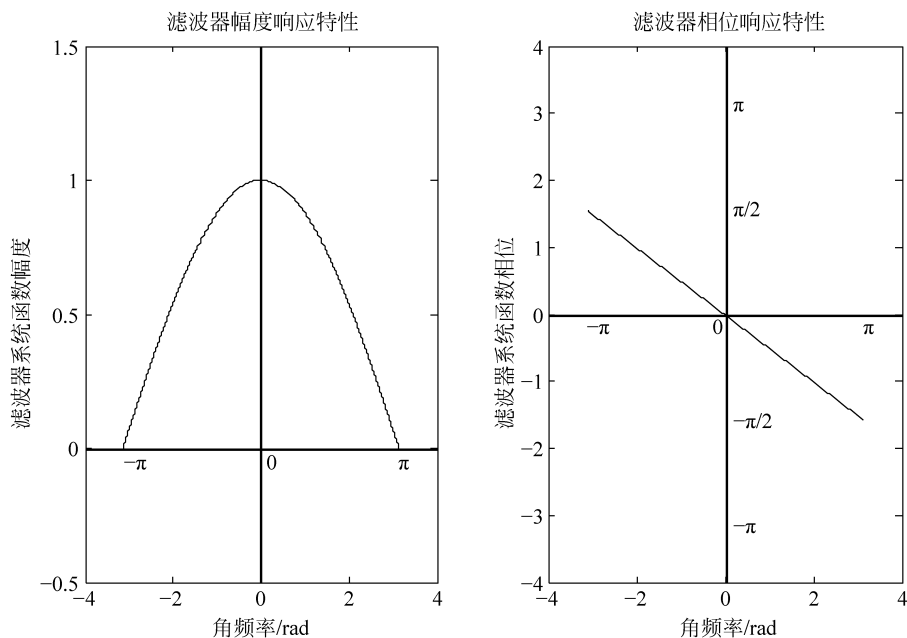


图 5.5 简单滤波器的频率响应

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1])$$

即输出为两个相邻输入的平均值。这种平均运算保留了信号中的平缓变化而抑制了快速的正负起伏。从直观角度讲,这是低通滤波的能力。

由这个简单滤波器的级联,可构成对高频衰减更快一些的低通滤波器。如下是两个和三个式(5.24)滤波器级联构成的新低通滤波器。

两级联滤波器的系统函数

$$H(z) = \frac{1}{4}(1+z^{-1})^2 = \frac{1}{4}(1+2z^{-1}+z^{-2})$$

非零单位抽样响应值

$$h[0] = 1/4 \quad h[1] = 1/2 \quad h[2] = 1/4$$

三级联滤波器的系统函数

$$H(z) = \frac{1}{8}(1+z^{-1})^3 = \frac{1}{8}(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})$$

非零单位抽样响应值

$$h[0] = 1/8 \quad h[1] = 3/8 \quad h[2] = 3/8 \quad h[3] = 1/8$$

三级联滤波器的幅频响应和相位函数如图 5.6, 可以看到, 幅频响应在高频段衰减得更快。

尽管例 5.2.5 的几个滤波器具有低通的能力, 但却没有明显的通频带和阻带。例 5.2.6 进一步说明了通频带和阻带的划分。

例 5.2.6 有限求和滤波器的单位抽样响应为

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

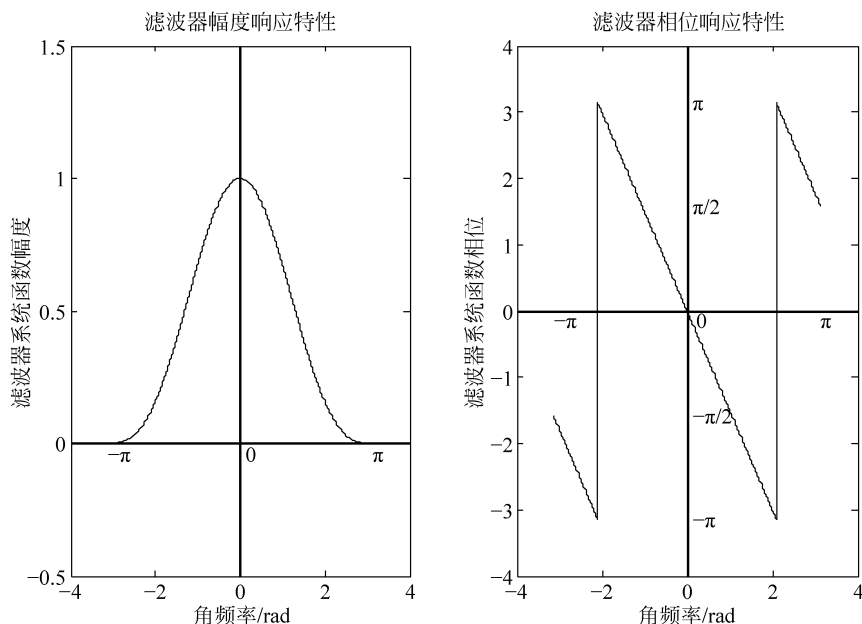


图 5.6 三级联低通滤波器的频率响应

该序列的 DTFT 在第 2 章作为例题曾讨论过,故滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$$

其幅频响应为

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} \right|$$

幅频响应示于图 5.7 中。

显然这是一个低通滤波器,其正频率端的第一个过零点值对应的角频率用来表示该低通滤波器的通带截止角频率,其值为

$$\omega_p = \frac{2\pi}{M+1}$$

该幅频响应的主瓣对应通带,但通带外的旁瓣也有较大的取值,最高旁瓣值约是主瓣最大值的 22%,这些构成了通带外的能量泄漏。另外,通带内幅频特性是单调下降的,缺乏平坦性,因此该滤波器虽然具有了明确的通频带的概念,但仍不是一个好的低通滤波器。

若要求幅频响应归一化,有限求和滤波器就变成滑动平均滤波器,即单位抽样响应修改为

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M+1}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

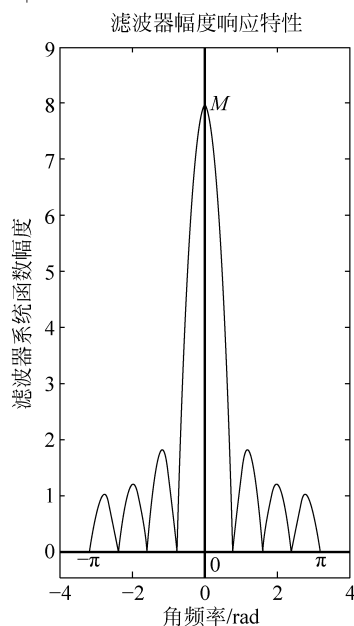


图 5.7 求和滤波器的幅频响应

对于高通滤波器,也有类似式(5.22)、式(5.23)的简单条件,只是对应的角频率值正好是相反的

$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \left| \sum_{n=0}^{M-1} h[n] \right| = \delta \quad (5.26)$$

$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \left| \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n h[n] \right| = C \quad (5.27)$$

这里, δ 是零或很小的值; 归一化时, $C=1$ 。例 5.2.7 给出了与例 5.2.5 对应的几个高通滤波器。

例 5.2.7 几个高通滤波器的系统函数和对应的非零单位抽样值, 列于下表中。

(1) $H(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-1})$	
$h[0] = 1/2 \quad h[1] = -1/2$	
(2) $H(z) = \frac{1}{4}(1 - z^{-1})^2 = \frac{1}{4}(1 - 2z^{-1} + z^{-2})$	
$h[0] = 1/4 \quad h[1] = -1/2 \quad h[2] = 1/4$	
(3) $H(z) = \frac{1}{8}(1 - z^{-1})^3 = \frac{1}{8}(1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3})$	
$h[0] = 1/8 \quad h[1] = -3/8 \quad h[2] = 3/8 \quad h[3] = -1/8$	

图 5.8(a)和图 5.8(b)分别画出了滤波器(1)和滤波器(3)的幅频响应, 滤波器(3)是由滤波器(1)级联形成的, 将抑制掉更多的低频分量。

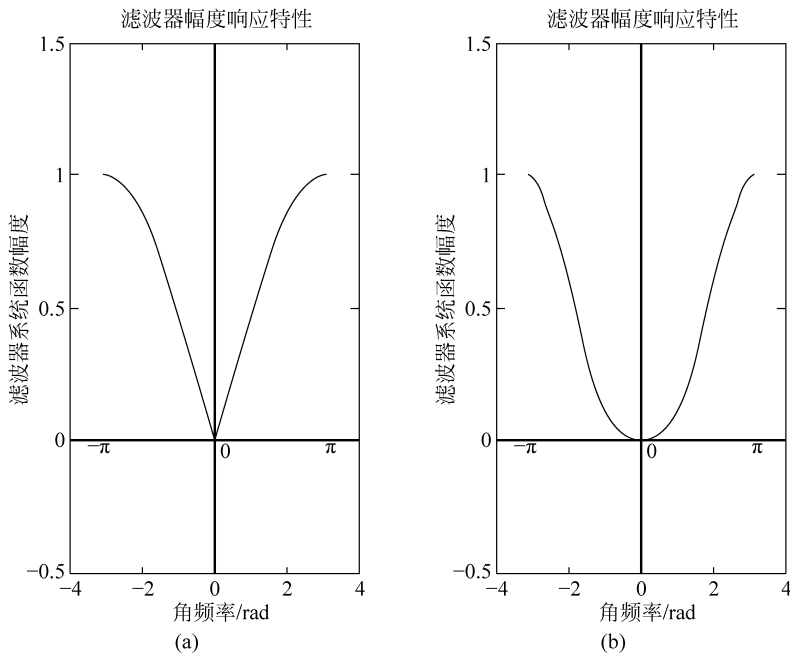


图 5.8 高通滤波器的幅频响应

理想滤波器不可实现,以上介绍的一些简单滤波器性能不够理想。第6章将讨论,给出一个合理要求的、可实现的 $|H(e^{j\omega})|$,怎样程序化地设计一个实际系统以达到给定的要求。

5.3 全通系统和最小相位系统

如前所述,不是所有的稳定因果 LTI 系统都有性能良好的逆系统,只有最小相位系统才能保证逆系统也是稳定因果的。全通系统与最小相位系统是紧密联系的,且全通系统在滤波器设计时也起到关键作用,本节专用于讨论这两类特殊系统。

5.3.1 全通系统

全通系统是指一个稳定因果系统,对于所有 ω ,系统的幅频响应恒为常数,即

$$|H(e^{j\omega})| = C \quad (5.28)$$

为讨论方便,取 $C=1$ 。

一个平凡的系统 $H_{ap}(z) = z^{-k}$ 是全通系统。除此之外,一类满足特殊零极点约束的有理分式系统函数满足全通性。若一个极点

$$z_p = re^{j\varphi}$$

对应一个零点

$$z_0 = \frac{1}{z_p^*} = \frac{1}{r}e^{j\varphi}$$

由于这对零极点是以单位圆为镜像对称的,为了构成稳定因果系统,令极点在单位圆内,对应零点在单位圆外。这对零极点构成的有理分式为

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - z_p^*}{1 - z_p z^{-1}} \quad (5.29)$$

为了验证式(5.29)的系统是全通系统,其频率响应为

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - z_p^*}{1 - z_p e^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - re^{j(\omega-\varphi)}}{1 - re^{-j(\omega-\varphi)}} = |H_{ap}(e^{j\omega})| e^{j\varphi_{ap}(\omega)}$$

故

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1 \quad (5.30)$$

$$\varphi_{ap}(\omega) = -\omega - 2\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\varphi)}{1-r\cos(\omega-\varphi)}\right] \quad (5.31)$$

式(5.30)说明了式(5.29)表示的系统是全通的,式(5.31)给出了一个一阶有理分式全通系统的相位表达式。

若假设全通系统的系统函数是实系数的有理分式,极点要么是位于单位圆内实轴上,要么是以复共轭成对的,假设有一对极点是复共轭的

$$z_p = re^{j\varphi}, \quad z_p^* = re^{-j\varphi}$$

对应的零点也是共轭成对的

$$z_0 = \frac{1}{z_p^*} = \frac{1}{r}e^{j\varphi}, \quad z_0^* = \frac{1}{z_p} = \frac{1}{r}e^{-j\varphi}$$

构成二阶有理分式系统为

$$\begin{aligned} H_{\text{ap}}(z) &= \frac{z^{-1} - z_p^*}{1 - z_p^* z^{-1}} \frac{z^{-1} - z_p}{1 - z_p z^{-1}} = \frac{z^{-2} - 2rz^{-1}\cos\varphi + r^2}{1 - 2rz^{-1}\cos\varphi + r^2 z^{-2}} \\ &= \frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (5.32)$$

考虑可能有实极点和复极点的一般全通系统的系统函数为

$$\begin{aligned} H_{\text{ap}}(z) &= K \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - r_k}{1 - r_k z^{-1}} \prod_{p=1}^{M_c} \frac{z^{-1} - c_p^*}{1 - c_p z^{-1}} \frac{z^{-1} - c_p}{1 - c_p^* z^{-1}} \\ &= K \frac{z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + \cdots + a_{N-1} z^{-1} + a_N}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} \\ &= K z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)} \end{aligned} \quad (5.33)$$

这里 K 是常数,一般取 $K=1$ 。

全通系统有一个基本性质,全通系统的群延迟为正,即

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \varphi_{\text{ap}}(\omega) > 0 \quad (5.34)$$

利用式(5.33)的因式分解形式,任意全通系统可由多个一阶全通系统级联而成,其相位函数等于各一阶全通系统的相位函数之和。故若任意一阶系统的群延迟为正,则全通系统的群延迟即为正,利用式(5.31),得到一阶系统群延迟为

$$-\frac{d}{d\omega} \left\{ -\omega - 2\arctan \left[\frac{r \sin(\omega - \varphi)}{1 - r \cos(\omega - \varphi)} \right] \right\} = \frac{(1 - r^2)}{|1 - r e^{j(\varphi - \omega)}|^2} > 0$$

故该性质得到证实。

全通系统的另一个性质为

$$|H_{\text{ap}}(z)| = \begin{cases} > 1, & |z^{-1}| > 1 \\ = 1, & |z^{-1}| = 1 \\ < 1, & |z^{-1}| < 1 \end{cases} \quad (5.35)$$

该性质的证明留作习题。

5.3.2 最小相位系统

定义一个稳定因果系统,若其系统函数的极点和零点均位于单位圆内,称该系统是最小相位系统。若全部零点位于单位圆外,称为最大相位系统,这里主要讨论最小相位系统。注意,也有文献和著作将零点位于单位圆内和单位圆上的系统称为最小相位系统,即将零点位于单位圆上也包括在最小相位系统中。这是因为若有零点位于单位圆上,也满足后续讨论的关于最小相位的性质。但若零点位于单位圆上,其逆系统不再满足 BIBO 稳定性。故为了系统实现问题讨论的方便性,本书仅将最小相位系统定义为零点在单位圆内。

性质 1 最小相位系统有最小的相位变化。

性质 1 实际是对“最小相位”名称的一种校正。在幅频响应相同的所有稳定、因果系统中,对角频率 ω 的任意变化范围,最小相位系统的相位函数变化最小。“最小相位”实际是一个不准确的名称,其实际是“最小相位变化系统”。

性质 1 的结论可通过性质 3 直接得到。

性质 2 任何稳定、因果的非最小相位系统,可以表示为一个最小相位系统和全通系统的级联,它们具有相同的幅频响应。

设 $H(z)$ 是稳定因果的非最小相位系统,其极点均位于单位圆内,部分零点位于单位圆内,部分零点位于单位圆外。为简单起见,假设位于单位圆外的零点只有一个,记为 $z_0 = c_r$ 且 $|c_r| > 1$, 其系统函数可分解为两部分,即

$$H(z) = H_1(z)(1 - c_r z^{-1})$$

通过下列的重新组合,得到

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z)(1 - c_r z^{-1}) \frac{z^{-1} - c_r^*}{z^{-1} - c_r^*} \\ &= H_1(z)(z^{-1} - c_r^*) \frac{1 - c_r z^{-1}}{z^{-1} - c_r^*} \\ &= H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z) \end{aligned}$$

这里

$$H_{\min}(z) = H_1(z)(z^{-1} - c_r^*), \quad H_{\text{ap}}(z) = \frac{1 - c_r z^{-1}}{z^{-1} - c_r^*}$$

由此可见,一个稳定因果的非最小相位系统可分解为一个最小相位系统和一个全通系统的级联。上述通过只有一个零点在单位圆外的情况给出了证明,稍加推广即可得到一般结论。

性质 3 在具有相同幅频响应的稳定因果系统中,最小相位系统具有最小群延迟,即若

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

则有

$$-\frac{d}{d\omega}\varphi(\omega) > -\frac{d}{d\omega}\varphi_{\min}(\omega) \quad (5.36)$$

证明 由

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z)$$

得到

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{ap}}(\omega) + \varphi_{\min}(\omega)$$

或

$$\varphi_{\text{ap}}(\omega) = \varphi(\omega) - \varphi_{\min}(\omega)$$

由于全通系统的群延迟为正,故上式两侧求导,得

$$\frac{d}{d\omega}\varphi_{\text{ap}}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\varphi(\omega) - \frac{d}{d\omega}\varphi_{\min}(\omega) < 0$$

由上式直接得到式(5.36)。

性质 4 在具有相同幅频响应的稳定因果系统中,最小相位系统具有最小能量延迟特性,若

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

则有

$$\sum_{n=0}^m h_{\min}^2[n] \geq \sum_{n=0}^m h^2[n] \quad (5.37)$$

这里, m 是任意正整数。

证明 为了直观地证明该性质,构造如图 5.9 所示的三个系统。由系统 2 的右侧模块,因为 $|H_{\text{ap}}(e^{j\omega})|^2=1$,利用帕塞瓦尔定理,有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} h_{\min}^2[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{\min}(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{\min}(e^{j\omega}) H_{\text{ap}}(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} h^2[n]\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h_{\min}^2[n] = \sum_{n=0}^{+\infty} h^2[n] \quad (5.38)$$

由系统 3 的右侧模块,同理

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (h_{\min}[n]w[n])^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} g^2[n]$$

故

$$\sum_{n=0}^m h_{\min}^2[n] = \sum_{n=0}^{+\infty} g^2[n] \quad (5.39)$$

对于系统 2 和系统 3,根据因果性,有 $h[n]=g[n], n \leq m$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^m h_{\min}^2[n] &= \sum_{n=0}^{+\infty} g^2[n] = \sum_{n=0}^m g^2[n] + \sum_{n=m+1}^{+\infty} g^2[n] \\ &= \sum_{n=0}^m h^2[n] + \sum_{n=m+1}^{+\infty} g^2[n] \geq \sum_{n=0}^m h^2[n]\end{aligned}$$

性质 5 最小相位系统一定存在一个稳定且因果的也是最小相位的逆系统。

根据逆系统的定义和最小相位系统的定义,性质 5 的成立是显然的。

性质 6 如果系统 $H(z)$ 是最小相位的,可定义 $\hat{H}(z) = \ln(H(z))$, $\hat{H}(z)$ 的 z 反变换 $\hat{h}[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{\hat{H}(z)\}$ 是稳定且因果的序列;反之,若 $\hat{h}[n]$ 是稳定且因果的序列,系统 $H(z)$ 是最小相位的。

由于 $H(z)$ 是最小相位的,假设其所有零点中模最大的零点 $|z_{\max}| = \rho_1 < 1$,所有极点中模最大的极点为 $|p_{\max}| = \rho_2 < 1$ 。 $H(z)$ 是有理分式,故 $\hat{H}(z) = \ln(H(z))$ 可分解为 $H(z)$ 各分式的自然对数之和, $H(z)$ 的极点和零点全部变成 $\hat{H}(z)$ 的极点。这样, $\hat{H}(z)$ 模最大的极点是 $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\} < 1$,因此 $\hat{H}(z)$ 的收敛域为 $|z| < \rho < 1$,由此得到结论: $\hat{H}(z)$ 反变换得到的序列 $\hat{h}[n]$ 是稳定且因果的;反之,若 $\hat{h}[n]$ 是稳定且因果的序列,同样可推出系统 $H(z)$ 是最小相位的结论。

5.4 系统的可实现性

在 5.2 节曾讨论,若给定一个如式(5.19)这样的要求,即要求设计一个理想低通滤波器,这样的系统是不可实现的。那么什么样的要求一定可以设计出一个因果系统来实现

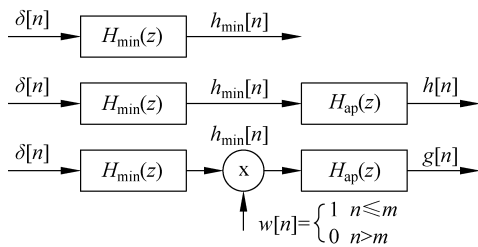


图 5.9 三个系统的结构图

呢? 如下的因式分解定理给出了回答。

因式分解问题有三种等效的提法^[5]：

(1) 给定一个非负的实函数 $A(e^{j\omega})$, 求一个因果序列 $h[n]$, 使得它的 z 变换 $H(z)$ 在单位圆上的幅度值等于 $A(e^{j\omega})$, 即 $|H(e^{j\omega})| = A(e^{j\omega})$;

(2) 给定一个非负的实函数 $A(e^{j\omega})$, 求一个对 $|z| > 1$ 解析并满足 $|H(e^{j\omega})| = A(e^{j\omega})$ 的函数 $H(z)$;

(3) 给定一个序列 $r[n]$, 它的 z 变换 $R(z)$ 在单位圆上的取值是一个非负的函数, 即

$$R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r[n]e^{-j\omega n} = A^2(e^{j\omega}) \geq 0$$

求一个因果序列 $h[n]$, 使它的 z 变换 $H(z)$ 满足

$$R(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2, \quad R(z) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

若是实系统, 上述第二式简化为

$$R(z) = H(z)H\left(\frac{1}{z}\right)$$

对于上述三个等价的提法, 因式分解定理为:

因式分解定理 若 $A(e^{j\omega})$ 满足如下的离散佩里-维纳条件

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln A(e^{j\omega})| d\omega < +\infty \quad (5.40)$$

则上述等价问题就有解; 又若 $H(z)$ 是最小相位系统, 则这个解是唯一的。

定理的含义是, 不管给出一个非负实函数 $A(e^{j\omega})$ 或一个平方函数 $A^2(e^{j\omega})$, 只要满足式(5.40), 就可以找到一个因果系统满足 $|H(e^{j\omega})| = A(e^{j\omega})$ 或 $|H(e^{j\omega})|^2 = A^2(e^{j\omega})$ 。从离散情况下的佩里-维纳条件式(5.40)容易看出, 如果 $A(e^{j\omega})$ 在一个区间内为零那么一定不满足式(5.40)的佩里-维纳条件, 这样的系统是不可实现的。一个推论是, 若 $A(e^{j\omega})$ 非常数但在一个子区间内恒为一常数也是不可实现的。

以低通滤波器为例。如果给出的低通滤波器的要求不是图 5.4 或式(5.19)表示的理想低通滤波器, 而是如图 5.10 所示的幅频特性要求(相当于给定 $A(e^{j\omega})$)。可以看到, 这个幅频特性可能在有限几个点上取零, 但不会在一个区间上恒为零。由定理知, 一定可以找到一个因果系统 $H(z)$ 满足 $|H(e^{j\omega})| = A(e^{j\omega})$, 即这样的要求是可实现的。

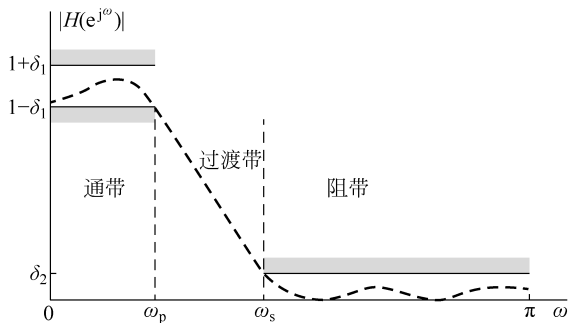


图 5.10 一个可实现的幅频特性

因式分解定理的证明 由等价性只给出第三种提法的证明。由 Paley-Wiener 条件, 知道 $\ln R(z)$ 的收敛域包含单位圆。假设 $\ln R(z)$ 的收敛域为 $r < |z| < 1/r$, $0 < r < 1$, 在收敛域内 $\ln R(z)$ 是解析函数, 它的各阶导数是连续的, 可以展开成 Laurent 级数为

$$\ln R(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c[k] z^{-k}$$

在单位圆上为

$$\ln R(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c[k] e^{-j\omega k}$$

因此

$$c[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln R(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega$$

由于 $\ln R(e^{j\omega})$ 是实的, $c[k]$ 是共轭对称的, 即 $c[-k] = c^*[k]$, 并且注意到

$$c[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln R(e^{j\omega}) d\omega$$

由 $\ln R(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c[k] z^{-k}$ 两边取指数运算得

$$R(z) = \exp \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c[k] z^{-k} \right\} = \exp \{c[0]\} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} c[k] z^{-k} \right\} \exp \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-1} c[k] z^{-k} \right\}$$

令

$$\sigma^2 = \exp \{c[0]\} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln R(e^{j\omega}) d\omega \right\}$$

定义

$$H(z) = \sqrt{\sigma^2} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} c[k] z^{-k} \right\}, \quad |z| > r$$

由 $H(z)$ 的收敛域, 它对应的序列 $h[n]$ 是因果和稳定的; 且对于 $|z| > r$, $H(z)$ 和 $\ln H(z)$ 都是解析的。因此 $H(z)$ 是最小相位的 (见最小相位系统性质 6), 故 $H(z)$ 可以写成

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots$$

由 $r(k)$ 的共轭对称性, 进一步有

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma^2} \exp \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-1} c[k] z^{-k} \right\} &= \sqrt{\sigma^2} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} c^*[k] z^k \right\} = \sqrt{\sigma^2} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} c^*[k] (1/z^*)^{-k} \right\}^* \\ &= H^*(1/z^*) \end{aligned}$$

因此

$$R(z) = \sigma^2 H(z) H^*(1/z^*)$$

结论得证。

5.5 IIR 系统的实现结构

离散时间系统的实现方式有很多种, 可以将采样后的信号直接处理, 例如应用声表面波器件、开关电容网络等; 也可以将离散信号先经过 A/D 转换器, 通过数字系统实现。数字

系统实现自身就有很多种形式：利用 FPGA 构成的数字系统，利用通用微处理器编程实现等。讨论这些具体化的实现问题超出了本书的范围。本节讨论的基本结构指的是：用基本运算单元实现一个离散时间系统所要求的运算单元的连接结构。

实现一个离散 LTI 系统需要三种基本运算单元，分别示于图 5.11 中，三种基本运算单元分别是加法器、乘法器和单位延迟单元。由这三种基本运算单元可构成任何离散 LTI 系统。注意到，这样三种基本运算单元是一种“抽象”出的运算模块，在用一种实际工具实现时可能对应该工具中的具体部件。例如，若使用 FPGA 构成一个离散 LTI 系统，一般采用同步时序逻辑来实现，加法器和乘法器都是可由 FPGA 实现的基本运算模块，单位延迟单元 z^{-1} 可由同步寄存器来实现。若系统中用 B 位二进制数字表示离散信号和计算结果，则寄存器是 B 位宽的。

本节讨论 IIR 系统，并假设由有理系统函数或差分方程描述该 IIR 系统。

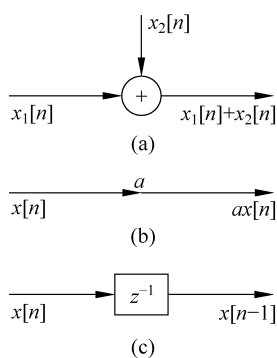


图 5.11 构成离散 LTI 系统的基本运算单元

5.5.1 IIR 系统的基本结构

首先通过一个简单例子，说明一个 IIR 系统的基本实现结构。一个 IIR 系统的差分方程写为

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$

显然，该差分方程可由图 5.12 所示的一个递归计算结构来实现。

图 5.12 的例子可推广到一般情况，设一个系统的系统函数为有理分式

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

相应的差分方程写为

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{r=0}^M b_r x[n-r]$$

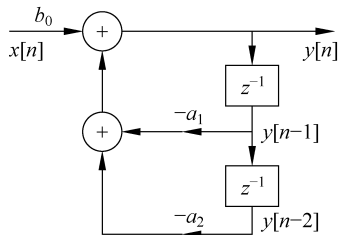


图 5.12 一个递归实现结构的例子

推广图 5.12 的结构到一般情况，得到图 5.13 的一般实现结构，称这个结构为 IIR 系统的直接 I 型实现。

直接 I 型实现可以看作两个子系统的级联，第一个子系统的输入/输出关系为

$$v[n] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r] \quad (5.41)$$

第二个子系统的输入/输出关系为

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n] \quad (5.42)$$

由于所讨论的是 LTI 系统,显然上述两个子系统也是 LTI 系统。两个 LTI 子系统的级联与次序交换后的系统是等价的,故将图 5.13 中前后两个子系统交换,得到图 5.14 所示的结构。

图 5.14 的第一个子系统的输入/输出关系为

$$w[n] = -\sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n] \quad (5.43)$$

第二个子系统的输入/输出关系为

$$y[n] = \sum_{r=0}^M b_r w[n-r] \quad (5.44)$$

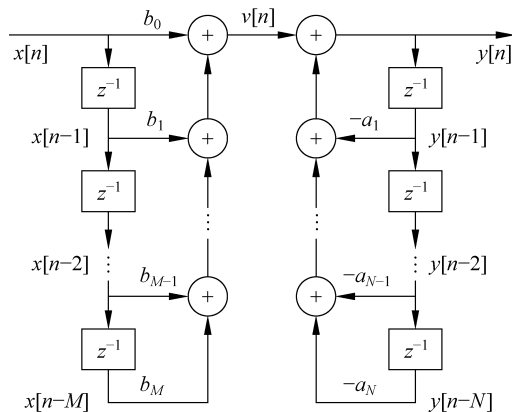


图 5.13 IIR 系统的直接 I 型实现

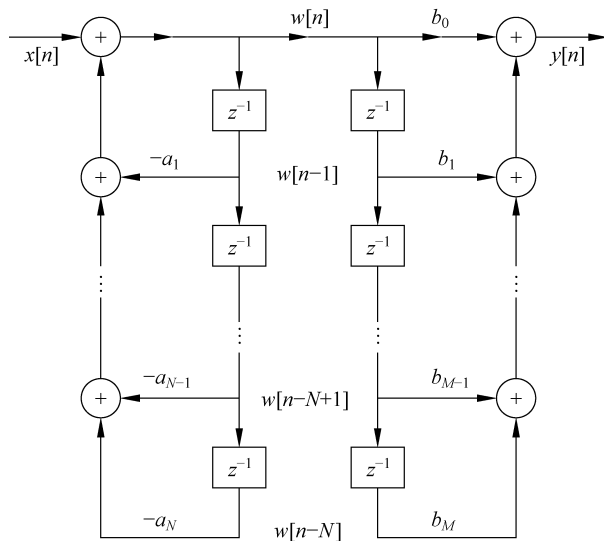


图 5.14 直接 I 型实现的次序交换

将图 5.14 中中间两列的单位延迟单元合并并不影响系统输出结果。合并后的结构示于图 5.15 中,该结构称为 IIR 系统的直接 II 型实现。图 5.15 画出了 $M=N$ 的情况。

为了简单,如上的实现结构图可用信号流图来表示。例如图 5.15 所示直接 II 型实现的信号流图示于图 5.16。

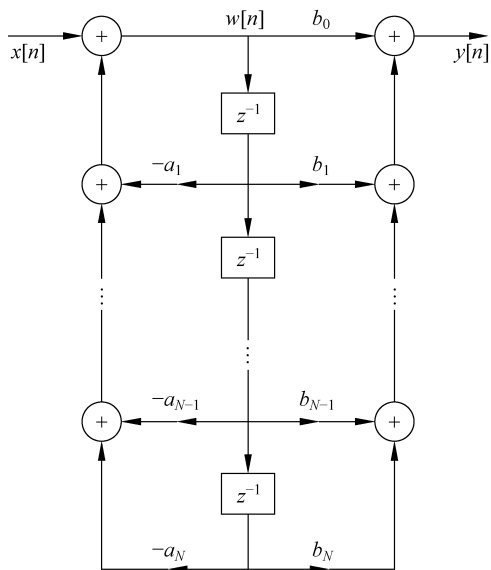


图 5.15 IIR 系统的直接 II 型实现

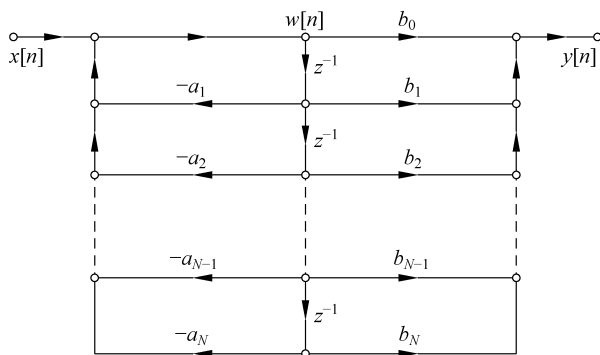


图 5.16 直接 II 型实现的信号流程图

5.5.2 IIR 系统级联和并联结构

若一个 IIR 系统的有理分式系统函数的阶数较高时,也可以得到一些等价的级联和并联实现方式。

设有理系统函数的分子多项式和分母多项式均为实系数,分别分解因式得到零点和极点。假设有部分实的零点和极点,也有部分以共轭形式成对出现的复零点和极点。分解因式后一个有理分式系统函数的一般形式为(此处假设 $M_1 = N_1, M_2 = N_2$)

$$\begin{aligned}
 H(z) &= A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - g_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - h_k z^{-1})(1 - h_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \\
 &= A \prod_{k=1}^{N_1} H_{1,k}(z) \prod_{k=1}^{N_2} H_{2,k}(z)
 \end{aligned} \quad (5.45)$$

这里

$$H_{1,k}(z) = \frac{1 - g_k z^{-1}}{1 - c_k z^{-1}} \quad (5.46)$$

$$H_{2,k}(z) = \frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \quad (5.47)$$

式(5.45)中将 $H(z)$ 分解为多个低阶有理分式 $H_{1,k}(z)$ 和 $H_{2,k}(z)$ 的相乘,从系统实现角度讲是将一个高阶系统分解成多个低阶系统(系统函数为 $H_{1,k}(z)$ 或 $H_{2,k}(z)$)的级联。例如一个 IIR 系统,分子分母多项式均是六阶的,各有三对复数根。每对复零点和每对复极点可任意组合构成三个子系统,每个子系统的系统函数是式(5.47)的形式,则原系统分成 3 个子系统的级联,其级联结构如图 5.17。

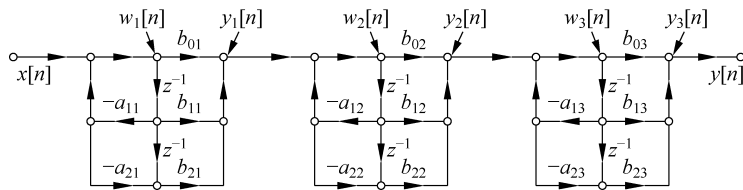


图 5.17 一个 IIR 系统的级联形式

另一种分解方式如下

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \frac{\sum_{r=0}^{N-1} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \frac{\sum_{r=0}^{N-1} b_r z^{-r}}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \\ &= \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{(1 - c_k z^{-1})} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \\ &= \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} H_{1,k}(z) + \sum_{k=1}^{N_2} H_{2,k}(z) \end{aligned}$$

这个分解过程中,若 $M < N$ 则系统函数是真分式,从第二行起第一项都不存在;否则,第一项存在,由不同延迟项组成。各求和项的意义是将原系统分解为多个子系统的并联。例如,一个系统函数的分子分母多项式均是四阶的,有两对复极点,其并联实现的系统结构图如图 5.18 所示。

原理上,级联和并联方式与直接 I 型和直接 II 型实现方式是等同的。但在实际数字系统实现时,用有限位的二进制数字表示滤波器系数和进行数字运算会带来表示误差和运算误差,这称为有限字长效应。由于不同实现方式带来的误差效应不同,当存在有限字长效应时,分级实现和直接实现方式不再等同。一般地,通过合理的组合极零点构成的级联和并联系统,在用有限位数数字系统实现时表现出更好的性能。本书集中在第 10 章讨论有限字长效应。

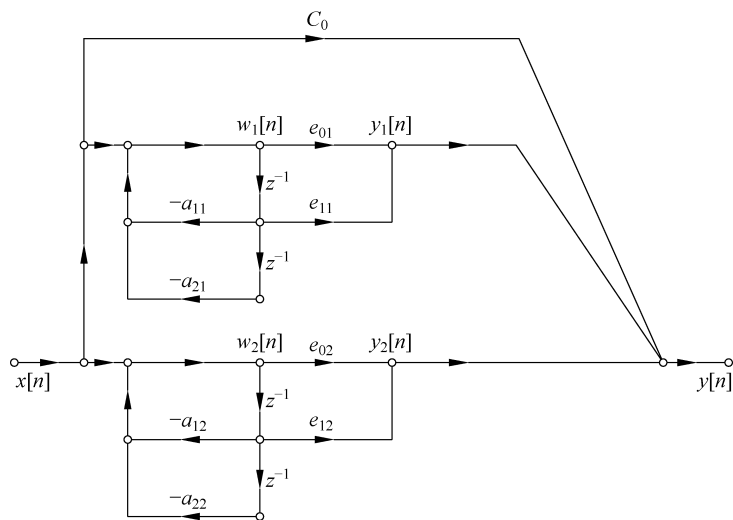


图 5.18 一个 IIR 系统的并联实现

5.6 FIR 系统实现的基本结构

本节讨论 FIR 的实现问题。首先讨论 FIR 的基本结构,然后研究 FIR 系统的一个特殊性质即线性相位,并讨论线性相位系统的实现结构。FIR 系统还可以利用 FFT 构成“块实现”结构,有关 FFT 实现 FIR 系统,将在 5.7 节讨论。

5.6.1 FIR 系统的基本结构

FIR 系统的直接实现方法更加简单,可以看成 IIR 实现的前向部分。从系统函数的角度看,FIR 系统的系统函数只相当于分子多项式部分,即

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^M h[k] z^{-k} \quad (5.48)$$

从卷积实现的角度看,有限和只相当于差分方程的滑动平均部分,即

$$y[n] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r] = \sum_{k=0}^M h[k] x[n-k] \quad (5.49)$$

由此可以直接得到 FIR 系统直接实现的结构流图如图 5.19 所示。

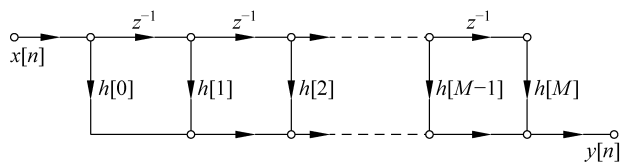


图 5.19 FIR 系统的直接实现

图 5.19 所示的 FIR 直接实现结构,也称为“横向抽头延迟线结构”。对 FIR 的系统函数进行分解因式,可得到其级联实现。一个 FIR 系统可分解为

$$\begin{aligned}
 H(z) &= A \prod_{k=1}^{M_1} (1 - g_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - h_k z^{-1})(1 - h_k^* z^{-1}) \\
 &= \prod_{k=1}^{M_1} (g_{0k} - g_{1k} z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2})
 \end{aligned}$$

将一个 FIR 系统分解为多级二阶系统级联的示意图如图 5.20 所示。

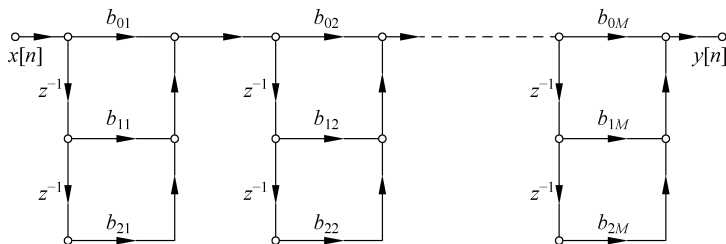


图 5.20 FIR 系统的级联实现

5.6.2 线性相位系统及其实现结构

FIR 系统在一定的约束下可实现一些具有特殊性质的系统,线性相位系统就是一类常用的特殊系统。一个 LTI 系统被称为线性相位系统,是指其频率响应可写为

$$H(e^{j\omega}) = \hat{H}(e^{j\omega}) e^{-j(\alpha\omega - \beta)} \quad (5.50)$$

这里 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 是实函数, $-(\alpha\omega - \beta)$ 表示了线性相位部分。

注意线性相位系统与第 2 章讨论的严格线性相位系统的区别和关联。若 $\beta = 0$ 且 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 是非负的,则线性相位系统就是严格线性相位系统。在滤波器设计时,实际可实现的数字滤波器很难做到严格线性相位,用线性相位系统替代严格线性相位系统具有设计上的简单性。若希望设计的滤波器的幅频特性是类似图 5.10 所示的具有通带和阻带的滤波器,一般在通带内满足 $\hat{H}(e^{j\omega}) > 0$,而在阻带内 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 可能在很小的取值范围 $[-\delta, \delta]$ 内振荡,即线性相位在通带内是严格线性相位的,所有通带内频率分量都不存在相位失真;而阻带内的频率成分,通过滤波器后的残留值是由滤波器特性的不理想造成的,是系统所允许的,而这些残留成分的相位失真是无关紧要的。所以滤波器设计文献中,所谓的线性相位是式(5.50)定义的“广义”线性相位系统,是严格线性相位系统的一种近似。

为了导出线性相位系统需要满足的一般条件,将式(5.50)改写为

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \hat{H}(e^{j\omega}) e^{-j(\alpha\omega - \beta)} \\
 &= \hat{H}(e^{j\omega}) \cos(\beta - \alpha\omega) + j \hat{H}(e^{j\omega}) \sin(\beta - \alpha\omega)
 \end{aligned} \quad (5.51)$$

另一方面,由频率响应的定义

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \cos(\omega n) - j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \sin(\omega n) \quad (5.52)$$

由于式(5.51)和式(5.52)是相等的,故由两式得到相位的正切函数是相等的,即

$$\frac{\hat{H}(e^{j\omega})\sin(\beta - \omega\alpha)}{\hat{H}(e^{j\omega})\cos(\beta - \omega\alpha)} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\sin(\omega n)}{-\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\cos(\omega n)}$$

由三角函数积化和差公式得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\sin[\omega(n - \alpha) + \beta] = 0 \quad (5.53)$$

式(5.53)给出了一个线性相位 LTI 系统的单位抽样响应需满足的条件。

可以给出式(5.53)的典型解。注意到,若取 $\beta=0$,则只需要 $h[n]$ 以 $n-\alpha=0$ 对称,式(5.53)左侧和式为零即可得到满足。 $h[n]$ 以 $n-\alpha=0$ 对称可表示为 $h[n]=h[2\alpha-n]$,这里 2α 必须为整数,即 $2\alpha=M$, M 是任给的正整数。若取 $\beta=\pi$,也有相同的解。若再加上限制条件系统是因果的,条件 $h[n]=h[2\alpha-n]$ 将限制 $h[n]$ 仅在 $0 \leq n \leq M$ 范围内非零,故式(5.53)的一类解为

$$\beta=0, \pi$$

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & n \text{ 为其他} \end{cases} \quad (5.54)$$

类似地,可得到式(5.53)的另一类解为

$$\beta = \pm \pi/2$$

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & n \text{ 为其他} \end{cases} \quad (5.55)$$

实际上式(5.54)和式(5.55)表示的都是 FIR 系统,其单位抽样响应分别是关于 $n = \frac{M}{2}$ 偶对称和奇对称的。这就得到一个结论,单位抽样响应具有这种偶对称或奇对称的因果 FIR 系统是线性相位系统。

这里,定义

$$N = M + 1$$

为 FIR 系统非零系数的数目, M 表示 $h[n]$ 非零值的最大序号。

由于 $h[n]$ 的对称性质,通过组合相同的系数可将运算量减少大约一半。为了推导简单,设 $h[n]$ 满足式(5.54)的偶对称特性且长度 N 为奇数(M 为偶数),卷积计算为

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k]x[n-k] + h\left[\frac{M}{2}\right]x\left[n-\frac{M}{2}\right] + \sum_{k=\frac{M}{2}+1}^M h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[M-k]x[n-M+k] + h\left[\frac{M}{2}\right]x\left[n-\frac{M}{2}\right] \end{aligned}$$

用式(5.54),即

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h\left[\frac{M}{2}\right]x\left[n-\frac{M}{2}\right] \quad (5.56)$$

式(5.56)的实现框图如图 5.21 所示,与同等长度非线性相位 FIR 的实现相比,可节省大约一半运算量。

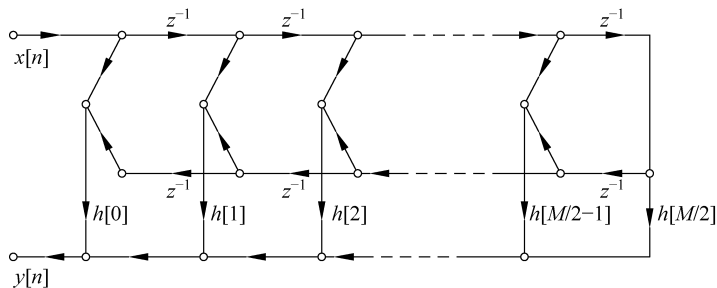


图 5.21 奇数长对称 FIR 滤波器的实现结构

经过类似推导,若偶对称型 FIR 滤波器的长度 N 为偶数(M 为奇数),则计算公式为

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) \quad (5.57)$$

注意式(5.57)与式(5.56)的区别,缺少一个单独项,且求和上标有所不同,其实现结构如图 5.22 所示。

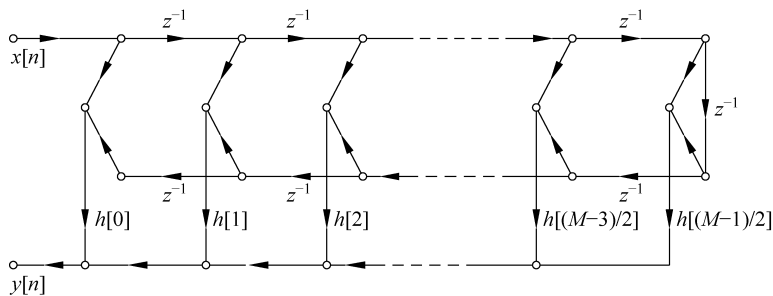


图 5.22 偶数长对称 FIR 滤波器的实现结构

对于满足奇对称式(5.55)的 FIR 系统,同样可得其计算公式,当 N 为奇数

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]) \quad (5.58)$$

注意到,式(5.58)中,并没有单独项 $h\left[\frac{M}{2}\right]x\left[n-\frac{M}{2}\right]$,原因是,当 N 为奇数时,由式(5.55)

代入 $n=\frac{M}{2}$ 有 $h\left[\frac{M}{2}\right] = -h\left[\frac{M}{2}\right] = 0$,故单独项消失了。

当满足奇对称且 N 为偶数时,计算公式为

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]) \quad (5.59)$$

式(5.58)和式(5.59)的实现结构,可由图 5.21 和图 5.22 的结构稍加修改,这里不再画出。

5.6.3 线性相位系统的零点分布和级联实现

线性相位系统函数的零点分布有其特殊性。一个线性相位系统的单位抽样响应和其系统函数是一对 z 变换对, 记为

$$h[n] \leftrightarrow H(z)$$

容易证明, 如下是一对 z 变换对(证明留作习题)

$$h[M-n] \leftrightarrow H(z^{-1})z^{-M}$$

既然线性相位系统的单位抽样响应满足

$$h[n] = \pm h[M-n]$$

其系统函数则满足

$$H(z) = \pm H(z^{-1})z^{-M} \quad (5.60)$$

式(5.60)指出, 若 $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ 是系统函数的一个复零点, 则 $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1 e^{j\theta_1}} = \frac{1}{r_1} e^{-j\theta_1}$ 也是一个复零点。 $h[n]$ 是实序列, $H(z)$ 是实系数多项式, 则零点必然以共轭形式出现, 故 $z_1^* = r_1 e^{-j\theta_1}$ 也是一个复零点, 因此 $\frac{1}{z_1^*} = \frac{1}{r_1 e^{-j\theta_1}} = \frac{1}{r_1} e^{j\theta_1}$ 也是一个复零点。这样, 一个线性相位系统, 若有 1 个复零点, 必有 3 个复零点与其相伴, 即 4 个复零点组成一个零点组, 零点组写为

$$\left\{ r_1 e^{j\theta_1} \quad r_1 e^{-j\theta_1} \quad \frac{1}{r_1} e^{-j\theta_1} \quad \frac{1}{r_1} e^{j\theta_1} \right\} \quad (5.61)$$

这个复零点组画于图 5.23 中(以 z_1 和 z_1^* 的各变换形式标出)。其中 z_1 和 $\frac{1}{z_1^*}$ 是一对以单位圆为镜像的零点。

这里也有几种退化的特殊情况, 当零点 z_2 是绝对值不为 1 的实数时, 对应的只有一个镜像零点 $\frac{1}{z_2}$, 这是两个一组的实零点情况, 即零点组为 $\left\{ z_2 \quad \frac{1}{z_2} \right\}$ 。当零点 z_3 是位于单位圆上的复零点时, 其倒数和其共轭是相等的, 故单位圆上的复零点是两个为一对的, 即 $\{ e^{j\theta_3} \quad e^{-j\theta_3} \}$ 。还有一种退化情况, 就是 $z_4 = \pm 1$ 的情况, 此时, 单一零点既满足互为倒数, 又满足互为共轭, 可单独成组。

在这些情况下, 一个零点组所对应的子系统函数可分别求得。

1. 4 个零点构成的复零点组

$$\begin{aligned} H_1(z) &= (1 - r_1 e^{j\theta_1} z^{-1}) (1 - r_1 e^{-j\theta_1} z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{r_1} e^{j\theta_1} z^{-1} \right) \left(1 - \frac{1}{r_1} e^{-j\theta_1} z^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{r_1^2} (1 - 2r_1 \cos\theta_1 z^{-1} + r_1^2 z^{-2}) (r_1^2 - 2r_1 \cos\theta_1 z^{-1} + z^{-2}) \end{aligned}$$

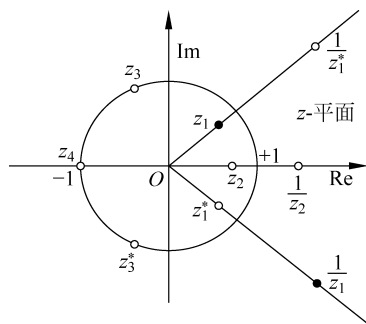


图 5.23 线性相位系统的复零点组

$$= 1 - 2 \frac{r_1^2 + 1}{r_1} \cos \theta_1 z^{-1} + \left(r_1^2 + \frac{1}{r_1^2} + 4 \cos^2 \theta_1 \right) z^{-2} - 2 \frac{r_1^2 + 1}{r_1} \cos \theta_1 z^{-3} + z^{-4}$$

简写为

$$H_1(z) = 1 + bz^{-1} + cz^{-2} + bz^{-3} + z^{-4} \quad (5.62)$$

这里

$$b = -2 \frac{r_1^2 + 1}{r_1} \cos \theta_1, \quad c = r_1^2 + \frac{1}{r_1^2} + 4 \cos^2 \theta_1$$

2. 镜像实零点

$$H_2(z) = (1 - r_2 z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{r_2} z^{-1} \right) = 1 - \left(r_2 + \frac{1}{r_2} \right) z^{-1} + z^{-2} \quad (5.63)$$

3. 单位圆上的复零点

$$H_3(z) = (1 - e^{j\theta_3} z^{-1}) (1 - e^{-j\theta_3} z^{-1}) = 1 - 2 \cos \theta_3 z^{-1} + z^{-2} \quad (5.64)$$

4. 单位圆上的实零点

$$H_4(z) = 1 - z^{-1} \quad (5.65)$$

或

$$H_4(z) = 1 + z^{-1} \quad (5.66)$$

以上讨论的是每个零点都是单零点时,也有零点是重根的情况,这种情况留给读者自行讨论。

既然线性相位系统的实现具有更低的运算量,若需要将一个有很多非零系数的线性相位系统分解为更小的子系统的级联,则希望每个子系统仍保持线性相位特性以使得总运算量更低。这一点很容易做到,只要每个子系统仍具有以上几种零点分组特性,这些子系统就仍具有线性相位特性。一个简单做法就是:按上述的零点组方式进行划分,由每个零点组组成一个子系统。根据零点类型的不同,可按式(5.62)~式(5.66)构成子系统。例如,对于一个不在单位圆上的复零点,由4个零点构成的零点组如式(5.61)所示,其对应的子系统函数如式(5.62)所示,它的结构是图5.21的特例,画在图5.24中。

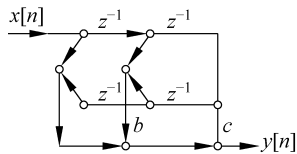


图 5.24 一个复零点组构成的子系统

式(5.63)~式(5.66)构成的子系统的结构流程图留作习题,由读者自行画出。将这些子系统级联起来,可构成一个高阶的线性相位 FIR 系统。

5.7 FIR 滤波器的 FFT 实现结构

对于 FIR 滤波器,给出滤波器单位抽样响应 $h[n]$,其非零值的序号范围为 $0 \leq n \leq M$ 。当给出输入信号 $x[n]$,也可以利用 DFT 方法求出输出信号 $y[n]$ 。在这个实现过程中,总是用 FFT 计算 DFT 和 IDFT,故称这种实现方式为 FIR 滤波器的 FFT 实现。

5.7.1 FIR 滤波器的基本 FFT 实现结构

先考虑简单情况。若输入信号也是较短的有限长序列,可通过 FFT 方法一次计算出所有输出。假设输入信号 $x[n]$ 非零长度为 L ,其非零值的序号范围为 $0 \leq n < L$,输出序列的非零长度为 $N=L+M$ 。实际中为了符合 FFT 的长度要求,可取 $N \geq L+M$ 。根据第 3 章讨论的用 DFT 计算有限长线性卷积的要求,分别对 $h[n]$ 和 $x[n]$ 做 N 点 FFT,得到 $H[k]$ 和 $X[k]$,通过计算

$$Y[k] = X[k]H[k], \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (5.67)$$

对 $Y[k]$ 做 N 点 IFFT,则得到输出序列 $y[n]$ 。图 5.25 给出了 FIR 滤波器的 FFT 实现结构。

比较 FIR 滤波器的两种实现方式,即图 5.19 的基本结构和图 5.25 的 FFT 实现结构:图 5.19 所示结构是一种实时的实现方式,每获得一个新的输入采样值 $x[n]$,即刻得到一个输出值 $y[n]$;但是 FFT 结构是一种块处理方式,只有当所有输入采样值准备好了,通过 FFT 和 IFFT 同时计算出所有输出信号值。从这个意义上讲,FIR 滤波器的 FFT 实现的输出信号延迟更大。

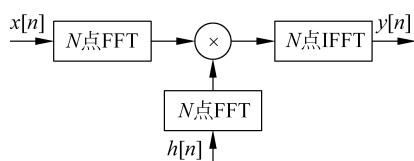


图 5.25 用 FFT 实现 FIR 滤波器

不难看出,用图 5.19 的实现方式,通过式(5.49)计算输出信号,总乘法运算量为

$$C_1 = L(M+1) \quad (5.68)$$

用 FFT 方式, $h[n]$ 是预先设计好的系统,它的 DFT 系数可预先计算和存储。故实际实现时,只需对 $x[n]$ 做 FFT,然后计算式(5.67)再做 IFFT,故总实数乘法运算量为

$$C_2 = 4N(\log_2 N + 1) \quad (5.69)$$

例 5.7.1 表 5.1 列出几种 L 、 M 组合和两种方法的实数乘法运算量。

表 5.1 L 、 M 组合和两种方法的实数乘法运算量

L 、 M 取值	直接实现	FFT 实现
$L=80, M=32$	$C_1=2640$	$N=128$ $C_2=4096$
$L=180, M=48$	$C_1=8820$	$N=256$ $C_2=9216$
$L=450, M=60$	$C_1=27\ 450$	$N=512$ $C_2=20\ 480$
$L=850, M=148$	$C_1=126\ 650$	$N=1024$ $C_2=45\ 056$

由这个表可以看到,当 L 、 M 较大时,FFT 方法效率有明显优势。若 L 确定,当

$$M \geq \frac{4N(\log_2 N + 1)}{L}$$

时,FFT 方法才更有效。以上只讨论了乘法次数的比较,加法次数比较留给读者练习。

5.7.2 FIR 滤波器的 FFT 实现结构: 重叠相加法

在许多应用中,输入信号 $x[n]$ 是很长的序列。这时,从系统实现角度讲,可把输入序列看作无限长序列, $x[n]$ 的非零取值范围 $0 \leq n < +\infty$ 。需要研究 FFT 方法用于 FIR 滤波器对无限长输入信号的卷积问题。

为了使用 FFT 计算卷积,需将输入信号分段处理。第一种处理方法是将输入信号分成互不重叠的段,每段的长度为 L , 这样每段信号定义为

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n], & rL \leq n \leq rL + L - 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.70)$$

图 5.26 的第二行显示出两段信号及其起始和终止序号,显然

$$x[n] = \sum_{r=0}^{+\infty} x_r[n] \quad (5.71)$$

$h[n]$ 是非零值序号范围为 $0 \leq n \leq M$ 的单位抽样响应,并记

$$y_r[n] = h[n] * x_r[n] \quad (5.72)$$

可用图 5.25 所示的系统结构产生 $y_r[n]$ 。首先将 $x_r[n]$ 的非零取值移到以 $n=0$ 为起点,利用图 5.25 的结构产生输出 $\bar{y}_r[n]$,再将 $\bar{y}_r[n]$ 的非零值起始时间移到 $n=rL$ 处,显然 $y_r[n]$ 取非零值的区间为

$$rL \leq n \leq rL + L + M - 1 \quad (5.73)$$

系统对于输入信号的响应为

$$y[n] = x[n] * h[n] = \left(\sum_{r=0}^{+\infty} x_r[n] \right) * h[n] = \sum_{r=0}^{+\infty} x_r[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{+\infty} y_r[n] \quad (5.74)$$

系统的输出 $y[n]$ 由各段输出 $y_r[n]$ 的相加构成。由式(5.73)可见,各相邻段 $y_r[n]$ 之间有 M 个重叠值,需要对这些重叠值进行相加。故这种计算无限长输入信号通过 FIR 滤波器的输出响应的方法称为重叠相加法。其中,前两段输出 $y_0[n]$ 和 $y_1[n]$ 的非零范围和重叠区域示于图 5.26 的最后两行。

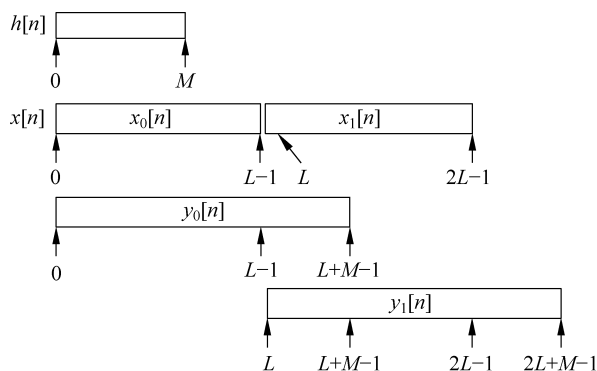


图 5.26 重叠相加法的示意图

5.7.3 FIR 滤波器的 FFT 实现结构: 重叠保留法

重叠相加法的思路很简单,但 IFFT 之后需要一个专门的加法器进行重叠部分的相加运算,若用硬件实现该结构需要额外的加法器。这里讨论另外一种方法:重叠保留法,可避免 IFFT 之后的加法运算。

由第 3 章讨论的循环卷积和线性卷积的关系,若 $h[n]$ 非零值的序号范围为 $0 \leq n \leq M$,一段输入信号 $x[n]$ 非零值长度为 L ,其非零值的序号范围为 $0 \leq n < L$,且 $L > (M+1)$,对 $h[n]$ 和 $x[n]$ 均做 L 点 DFT,则

$$\begin{aligned} X[k] &= \text{DFT}\{x[n]\}_{(L)}, \quad H[k] = \text{DFT}\{h[n]\}_{(L)} \\ y^o[n] &= \text{IDFT}\{X[k]H[k]\}_{(L)} \end{aligned} \quad (5.75)$$

上式中的 (L) 符号表示 L 点 DFT 或 IDFT 变换,循环卷积结果 $y^o[n]$ 的前 M 点是线性卷积的混叠信号,需要丢弃,但后 $L-M$ 点是与线性卷积 $y[n]$ 相等的,即

$$y^o[n] = y[n], \quad M \leq n \leq L-1 \quad (5.76)$$

也就是说,利用长点数 L 的 DFT 方法可得到部分正确的系统输出值。利用这一点,若在输入信号分段时,使前一段数据和后一段数据有 M 点的重叠,然后通过 L 点 DFT 或 IDFT 变换,将每段循环卷积结果 $y^o[n]$ 的前 M 点丢弃,后 $L-M$ 点拼接起来就构成了系统输出信号,该方法称为重叠保留法。

第 r 段数据 $x_r[n]$ 表示为

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n], & rL - (r+1)M \leq n \leq (r+1)(L-M) - 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.77)$$

比较特殊的情况是起始的第一段 $x_0[n]$,为了同样丢弃 $y^o[n]$ 中的前 M 点,需要在 $x_0[n]$ 前面补上 M 个数据,一般将这 M 个数据取为零,故

$$x_0[n] = \begin{cases} 0, & -M \leq n \leq -1 \\ x[n], & 0 \leq n \leq (L-M) - 1 \\ 0, & n \geq (L-M) \end{cases} \quad (5.78)$$

为了完成每一段的循环卷积运算,设 $H[k] = \text{DFT}\{h[n]\}_{(L)}$ 已经预先算好,在每一段分别计算

$$x_r^o[n] = x_r[n - rL + (r+1)M] \quad (5.79)$$

$$X_r^o[k] = \text{DFT}\{x_r^o[n]\}_{(L)} \quad (5.80)$$

$$y_r^o[n] = \text{IDFT}\{X_r^o[k]H[k]\}_{(L)} \quad (5.81)$$

注意,式(5.79)是把 $x_r[n]$ 搬移到序号范围为 $0 \leq n < L$ 之间,搬移后的序列 $x_r^o[n]$ 直接做 DFT。注意到, $y_r^o[n]$ 的前 M 点需要丢弃,而 $y_r^o[M]$ 恰好是第一个正确的输出值 $y[0]$,故

$$y[n] = y_0^o[n+M], \quad 0 \leq n \leq L-M-1 \quad (5.82)$$

对于任意一段 $y_r^o[n]$,可通过下式拼接接到系统输出中

$$y[n + r(L-M)] = y_r^o[n+M], \quad 0 \leq n \leq L-M-1 \quad (5.83)$$

在以上处理过程中,一般地取 $L=2^m$ 通过 FFT 来完成 DFT 和 IDFT 运算。重叠保留法的示意图如图 5.27 所示。



5.8 FIR 系统的频率取样结构

FIR 系统的单位抽样响应 $h[n]$ 是 $N=M+1$ 点的有限长序列, 对其做 N 点 DFT 得到 DFT 系数 $H[k], k=0, 1, \dots, M$, 用 $H[k]$ 也可以完全表示一个 FIR 滤波器。因此, 由 $H[k]$ 可得到该 FIR 滤波器的系统函数 $H(z)$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k]W_N^{-kn}z^{-n}$$

上式交换求和次序得到

$$H(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (5.84)$$

若定义

$$\begin{aligned} H_N(z) &= \frac{1}{N}(1 - z^{-N}) \\ H_k(z) &= \frac{H[k]}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned} \quad (5.85)$$

则式(5.84)写为

$$H(z) = H_N(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \quad (5.86)$$

可见一个 FIR 系统可由式(5.85)表示的子系统的级联和并联构成,图 5.28 表示了一个 FIR 系统的实现结构。

图 5.28 的结构称为 FIR 系统的频率取样结构, 名称源于 DFT 系数是 $h[n]$ 的 DTFT 在频域的取样值。可见, FIR 系统也可采用递归结构实现。

当要求 $h[n]$ 是实数序列时, 其 DFT 系数满足如下共轭对称关系

$$H[k] = H^*[N - k]$$

同时,每个子系统的系数也满足如下共轭对称性

$$(W_N^{-k})^* = W_N^{-(N-k)}$$

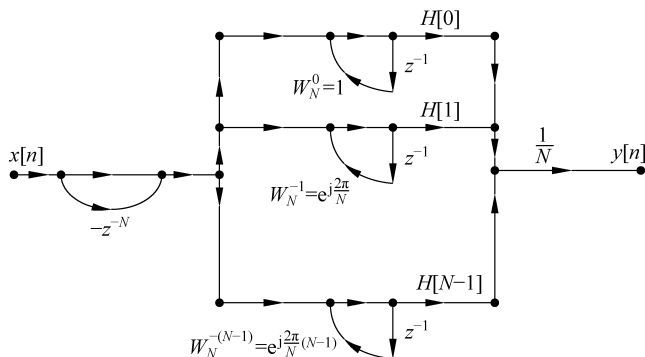


图 5.28 FIR 系统的频率取样实现结构

因此,可将子系统 $H_k(z)$ 和 $H_{N-k}(z)$ 合并为如下的实系数二阶子系统

$$\begin{aligned}
 H_k(z) + H_{N-k}(z) &= \frac{H[k]}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} + \frac{H[N-k]}{1 - W_N^{-(N-k)} z^{-1}} \\
 &= 2 |H[k]| \frac{\cos \theta(k) - \cos \left(\theta(k) - \frac{2\pi}{N} k \right) z^{-1}}{1 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{N} k \right) z^{-1} + z^{-2}} \quad (5.87)
 \end{aligned}$$

其中 $\theta(k)$ 是 $H[k]$ 的相位值,若 N 是偶数,有如下两个子系统是不成对的,但其只有实系数

$$H_0(z) = \frac{H[0]}{1 - W_N^0 z^{-1}} = \frac{H[0]}{1 - z^{-1}} \quad (5.88)$$

$$H_{N/2}(z) = \frac{H[N/2]}{1 - W_N^{N/2} z^{-1}} = \frac{H[N/2]}{1 + z^{-1}} \quad (5.89)$$

当 N 是奇数时,只有式(5.88)的一个一阶子系统。式(5.87)所示的二阶子系统可由图 5.29 的结构实现,用图 5.29 的子系统替代图 5.28 中两个成对的子系统。

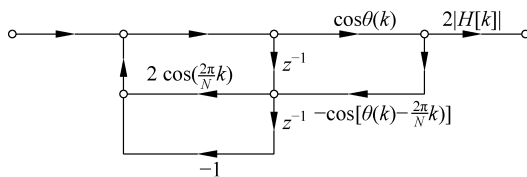


图 5.29 二阶子系统的结构实现

频率取样结构不是一种广泛应用的滤波器结构,但其有一些独特性质,在一些场合得到应用。几个性质总结如下:

(1) 频率取样结构的特点是它的系数 $H[k]$ 就是滤波器的频率响应在 $\frac{2\pi}{N}k$ 处的取值,因此控制滤波器的频率响应很方便。

(2) 尽管结构复杂,但是高度模块化,适用于时分复用的实现结构。

(3) 适用于窄带滤波器的情况。在窄带滤波器情况下,只有很少几个系数 $H[k]$ 非零,但 $h[n]$ 的非零值可能很多,这时频率取样结构的运算复杂度有明显优势。

(4) 频率取样结构可进一步扩展后,应用于滤波器组的实现。关于滤波器组的讨论在第8章进行,此处不再赘述。

对频率取样结构再做两点讨论。其一,式(5.84)求和号内的每个子系统,其极点在单位圆上,造成不稳定性。为此,取略小于1的系数 r ,对式(5.84)修正如下

$$H(z) = \frac{1}{N} (1 - r^N z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - r W_N^k z^{-1}} \quad (5.90)$$

同时 $H[k]$ 也修正为

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] r^n W_N^{kn}$$

只要 r 很接近1, $H(z)$ 的误差很小且是稳定系统,但这种结构敏感于有限字长效应。

其二, $H[k]$ 也可以不是标准的DFT系数,可以是在

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}(k + \alpha)$$

处对DTFT进行采样,这里 $0 \leq \alpha < 1$,可定义

$$H_a[k] = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}(k+\alpha)}$$

可以证明(留作习题)

$$H(z) = \frac{1}{N} (1 - e^{j2\pi\alpha} z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_a[k]}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\alpha)} z^{-1}} \quad (5.91)$$

当然,也可以将式(5.90)和式(5.91)结合起来,构成更一般的实现结构。

* 5.9 格型滤波器结构

以上几节可以看到,对于给定的一个滤波器,可以选择多种不同结构实现其功能。从理论上这些结构是等效的,但当系统采用有限精度数字运算的实际数字系统实现时,各种结构的数值稳定性是不同的。其中,格型结构具有良好的数值稳定性,本节讨论数字滤波器的格型实现结构,分别讨论FIR和IIR滤波器的格型实现。

5.9.1 FIR滤波器的格型结构

若已得到一个FIR滤波器设计,本节讨论另一种实现结构。假设FIR滤波器的单位抽样响应记为 $\{h[n], n=0, 1, \dots, M\}$ 且 $h[0] \neq 0$,其系统函数写为

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots + h[M]z^{-M} \\ &= h[0] \left(1 + \frac{h[1]}{h[0]}z^{-1} + \frac{h[2]}{h[0]}z^{-2} + \dots + \frac{h[M]}{h[0]}z^{-M} \right) \\ &= h[0] (1 + a_M[1]z^{-1} + a_M[2]z^{-2} + \dots + a_M[M]z^{-M}) \\ &= h[0] A_M(z) \end{aligned} \quad (5.92)$$

这里有

$$A_M(z) = 1 + a_M[1]z^{-1} + a_M[2]z^{-2} + \dots + a_M[M]z^{-M} \quad (5.93)$$

为符号表示一致,上式令 $a_M[0]=1$,注意到,除了一个常数因子外, $H(z)$ 和 $A_M(z)$ 是相同的。为了方便,本节研究

$$H(z) = A_M(z) = 1 + a_M[1]z^{-1} + a_M[2]z^{-2} + \cdots + a_M[M]z^{-M} \quad (5.94)$$

的格型实现结构。所谓格型实现结构,是指由如图 5.30 所示的格型单元级联构成的系统,为了概念清楚,首先讨论两个低阶系统。

设 $M=1$, 系统函数

$$H(z) = A_1(z) = 1 + a_1[1]z^{-1} \quad (5.95)$$

只用一个如图 5.30 的格子,通过将输入接到 $x[n]$,格子上边的支路输出为 $y[n]$,且令 $k_1 = a_1[1]$,即可实现该系统;格子的下边支路没有用到。 $M=1$ 的 FIR 系统的格型实现如图 5.31 所示。

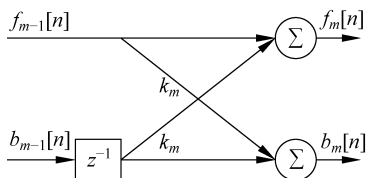


图 5.30 单格型结构

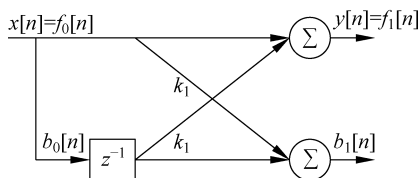


图 5.31 $M=1$ 的 FIR 滤波器格型实现

由图 5.31 可见

$$y[n] = f_0[n] + k_1 b_0[n-1] = x[n] + a_1[1]x[n-1] \quad (5.96)$$

式(5.96)的差分方程和式(5.95)的系统函数表示相同的系统。

当 $M=2$, 系统函数

$$H(z) = A_2(z) = 1 + a_2[1]z^{-1} + a_2[2]z^{-2} \quad (5.97)$$

用图 5.32 的两个格型级联,得到

$$\begin{cases} f_1[n] = f_0[n] + k_1 b_0[n-1] = x[n] + k_1 x[n-1] \\ b_1[n] = k_1 f_0[n] + b_0[n-1] = k_1 x[n] + x[n-1] \\ f_2[n] = f_1[n] + k_2 b_1[n-1] = y[n] \\ b_2[n] = k_2 f_1[n] + b_1[n-1] \end{cases} \quad (5.98)$$

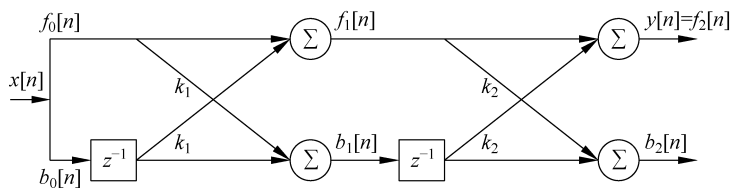


图 5.32 $M=2$ 的 FIR 滤波器格型实现

上式整理得

$$y[n] = f_2[n] = x[n] + k_1(1 + k_2)x[n-1] + k_2x[n-2] \quad (5.99)$$

式(5.99)和式(5.97)比较系数,得

$$\begin{cases} a_2[2] = k_2 \\ a_2[1] = k_1(1 + k_2) \end{cases} \quad (5.100)$$

解得

$$\begin{cases} k_2 = a_2[2] \\ k_1 = \frac{a_2[1]}{1 + a_2[2]} \end{cases} \quad (5.101)$$

在图 5.32 中,代入式(5.101)求得的系数 k_1, k_2 ,从输入到第二级格型的上边支路输出得到式(5.97)给出的 $M=2$ 的 FIR 滤波器的格型实现结构。

尽管在 FIR 滤波器格型实现时,输出级的下边支路没有使用,但前级的格型模块的上下支路都是有用的。作为说明,观察图 5.32 中从输入 $x[n]$ 到 $b_2[n]$ 的差分方程,由式(5.98)整理得

$$\begin{aligned} b_2[n] &= k_2 x[n] + k_1(1 + k_2)x[n-1] + x[n-2] \\ &= a_2[2]x[n] + a_2[1]x[n-1] + a_2[0]x[n-2] \end{aligned} \quad (5.102)$$

其滤波器系数集为 $\{a_2[2], a_2[1], a_2[0]\}$,与式(5.97)所示系统的系数集 $\{a_2[0], a_2[1], a_2[2]\}$ 反顺序,也就是说,格型结构中,上边支路和下边支路所表示的系统的系数集是相反顺序的。尽管这是通过一个例子的观察,但可证明这个结论是一般性的。

对于更大的 M ,FIR 滤波器的格型结构如图 5.33 所示。由 M 个格型单元级联而成,每一个格型单元如图 5.30 所示。格型结构中的参数集是反射系数集 $\{k_1, k_2, \dots, k_M\}$,而式(5.94)表示的 FIR 滤波器的系数集是单位抽样响应集合 $\{a_M[0], a_M[1], \dots, a_M[M]\}$,这两组系数集之间的转换,即由单位抽样响应系数集怎样得到反射系数集,从而用格型结构实现 FIR 滤波器;或由反射系数集得到单位抽样响应系数集,也就是通过一个存在的格型实现得到 FIR 滤波器相应的单位抽样响应或系统函数。下面研究这两组参数的一般转换关系。

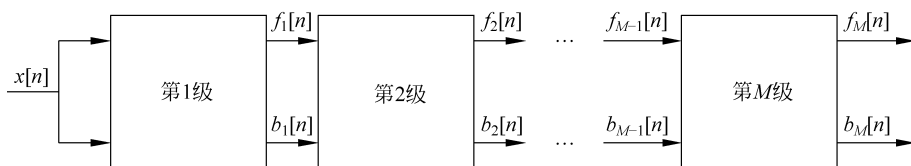


图 5.33 FIR 滤波器的一般格型结构

定义格型实现中,从 $x[n]$ 到第 m 级格型输出 $f_m[n]$ 和 $b_m[n]$ 的系统函数分别为 $A_m(z)$ 和 $C_m(z)$,则

$$\begin{aligned} A_m(z) &= \frac{F_m(z)}{X(z)} = \frac{F_m(z)}{F_0(z)} \\ C_m(z) &= \frac{B_m(z)}{X(z)} = \frac{B_m(z)}{B_0(z)} \end{aligned} \quad (5.103)$$

根据图 5.30,得到一般的递推公式为

$$\begin{cases} f_m[n] = f_{m-1}[n] + k_m b_{m-1}[n-1] \\ b_m[n] = k_m f_{m-1}[n] + b_{m-1}[n-1] \end{cases}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (5.104)$$

初始条件为

$$f_0[n] = b_0[n] = x[n] \quad (5.105)$$

输出方程为

$$y[n] = f_M[n] \quad (5.106)$$

式(5.104)至式(5.106)构成了格型结构 FIR 滤波器实现时的计算过程。

对式(5.105)和式(5.104)两侧求 z 变换并除以 $X(z)$ 得

$$A_0(z) = C_0(z) = 1 \quad (5.107)$$

$$\begin{cases} A_m(z) = A_{m-1}(z) + k_m z^{-1} C_{m-1}(z) \\ C_m(z) = k_m A_{m-1}(z) + z^{-1} C_{m-1}(z) \end{cases}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (5.108)$$

最后的系统函数为

$$H(z) = A_M(z) \quad (5.109)$$

式(5.107)和式(5.108)已经构成了由格型结构通过简单递推计算获得系统函数的公式。为了进一步简化,讨论一下 $A_m(z)$ 和 $C_m(z)$ 的关系,如前所述, $C_m(z)$ 的系数与 $A_m(z)$ 是反向的,若用 $\{a_m[0], a_m[1], \dots, a_m[m]\}$ 表示 $A_m(z)$ 的系数,则 $C_m(z)$ 可写为

$$\begin{aligned} C_m(z) &= a_m[m] + a_m[m-1]z^{-1} + \dots + a_m[0]z^{-m} \\ &= \sum_{k=0}^m a_m[m-k]z^{-k} = z^{-m} \sum_{k=0}^m a_m[k]z^k = z^{-m} A_m(z^{-1}) \end{aligned} \quad (5.110)$$

根据式(5.110),将式(5.108)改写为

$$\begin{cases} A_m(z) = A_{m-1}(z) + k_m z^{-1} C_{m-1}(z) \\ C_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) \end{cases}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (5.111)$$

式(5.111)比式(5.108)节省约一半运算量。将式(5.111)的第一式两侧用求和项展开得到

$$\sum_{k=0}^m a_m[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1}[k]z^{-k} + k_m z^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1}[m-1-k]z^{-k} \quad (5.112)$$

令式(5.112)两侧同幂次系数相等得到

$$a_m[m] = k_m \quad (5.113)$$

$$a_m[0] = 1, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (5.114)$$

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + k_m a_{m-1}[m-k] \quad (5.115)$$

注意,由式(5.113)~式(5.115)可直接递推得到单位抽样响应 $\{a_M[0], a_M[1], \dots, a_M[M]\}$ 。

至此,解决了第一个问题,即给出格型结构得到 FIR 滤波器的系统函数或单位抽样响应。现在,解决一个相反的问题,给出 $\{a_M[0], a_M[1], \dots, a_M[M]\}$ 或 $H(z) = A_M(z)$, 求出反射系数集 $\{k_1, k_2, \dots, k_M\}$ 。由于 FIR 滤波器的设计工具一般是求出 $\{a_M[0], a_M[1], \dots, a_M[M]\}$, 故只有确定反射系数集,才能给出 FIR 滤波器的格型实现。由式(5.113)取 $m = M$, 得

$$k_M = a_M[M] \quad (5.116)$$

可见,只要反递推得到 $A_m(z)$, $m = M-1, M-2, \dots, 1$, 利用式(5.113)可得到各 k_m , $m = M-1, M-2, \dots, 1$ 。从式(5.108)解得

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - k_m C_m(z)}{1 - k_m^2}$$

$$= \frac{A_m(z) - k_m z^{-m} A_m(z^{-1})}{1 - k_m^2}, \quad m = M, M-1, \dots, 2 \quad (5.117)$$

解得 $A_{m-1}(z)$ 后, 得到反射系数为

$$k_{m-1} = a_{m-1}[m-1], \quad m = M, M-1, \dots, 2 \quad (5.118)$$

求反射系数的第二种方法可从式(5.115)出发, 在式(5.115)中取 k 和 $m-k$ 两项列联立方程为

$$\begin{cases} a_m[k] = a_{m-1}[k] + k_m a_{m-1}[m-k] \\ a_m[m-k] = a_{m-1}[m-k] + k_m a_{m-1}[k] \end{cases}$$

解得 $a_{m-1}[k]$ 为

$$\begin{aligned} a_{m-1}[k] &= \frac{a_m[k] - k_m a_m[m-k]}{1 - k_m^2} \\ &= \frac{a_m[k] - a_m[m] a_m[m-k]}{1 - a_m^2[m]}, \quad 1 \leq k \leq m-1 \end{aligned} \quad (5.119)$$

式(5.119)对 $m = M, M-1, \dots, 2$ 进行递推, 可得到各阶格型滤波器的系数, 同样由式(5.118)得到各反射系数。

例 5.9.1 已知一个 FIR 滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) = A_3(z) &= (1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.8e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/3}z^{-1}) \\ &= 1 - 1.3z^{-1} + 1.04z^{-2} - 0.32z^{-3} \end{aligned}$$

求格型结构实现。

首先得到 $k_3 = -0.32$ 。利用式(5.117), 有

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - k_3 z^{-3} A_3(z^{-1})}{1 - k_3^2} = 1 - 1.0775z^{-1} + 0.6952z^{-2}$$

得到 $k_2 = 0.6952$ 。再次利用式(5.117), 有

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - k_2 z^{-2} A_2(z^{-1})}{1 - k_2^2} = 1 - 0.6356z^{-1}$$

得到 $k_1 = -0.6356$ 。图 5.34 给出了格型实现的框图, 每个框中是图 5.30 的格型单元。

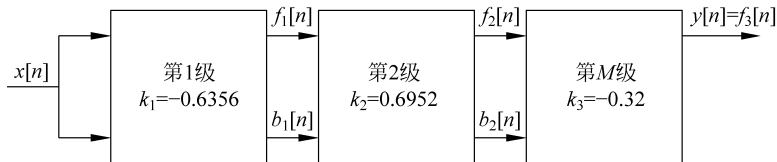


图 5.34 3 级格型结构的 FIR 滤波器实现

5.9.2 IIR 滤波器的格型结构

对于 IIR 结构的滤波器, 也可以导出格型结构。为了与 FIR 系统对比, 首先假设 IIR 系统是全极点系统, 即系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{A_N(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_N[k]z^{-k}} \quad (5.120)$$

对应的差分方程为

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_N[k]y[n-k] + x[n] \quad (5.121)$$

令 $a'_N[k] = -a_N[k]$, 有

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^N a'_N[k]y[n-k] \quad (5.122)$$

比较式(5.122)和 FIR 系统的差分方程实现, 可见除 $x[n]$ 作为输入相同外, 其他项以 $y[n-k]$ 替代了 $x[n-k]$, 这种替代是一种回归结构。只要进行了这种回归替代, 并且改变系数的符号, FIR 的差分方程与全极点 IIR 系统是一样的。为了更清楚地说明问题, 首先观察低阶系统。设系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{A_1(z)} = \frac{1}{1 + a_1[1]z^{-1}} \quad (5.123)$$

带回归的格型实现如图 5.35 所示。

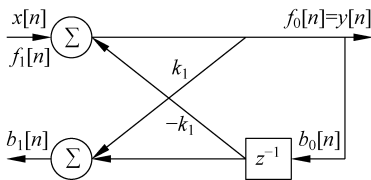


图 5.35 一阶回归格型结构

从图 5.35 观察到, 将 $f_0[n] = b_0[n] = y[n]$ 作为回归格型的输入, 可以看到回归格型的运算为

$$\begin{cases} x[n] = f_1[n] \\ f_0[n] = f_1[n] - k_1 b_0[n-1] \\ b_1[n] = k_1 f_0[n] + b_0[n-1] \\ f_0[n] = b_0[n] = y[n] \end{cases} \quad (5.124)$$

整理式(5.124)得到两个方程

$$y[n] = x[n] - k_1 y[n-1] \quad (5.125)$$

$$b_1[n] = k_1 y[n] + y[n-1] \quad (5.126)$$

其中, 只要取

$$k_1 = a_1[1] \quad (5.127)$$

式(5.125)的差分方程与式(5.123)的系统函数等价。在一阶系统时, 式(5.126)的输出没有使用。

进一步, 给出二阶全极点系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{A_2(z)} = \frac{1}{1 + a_2[1]z^{-1} + a_2[2]z^{-2}} \quad (5.128)$$

对于式(5.128)的系统函数, 给出图 5.36 的两个回归格型级联的实现形式。

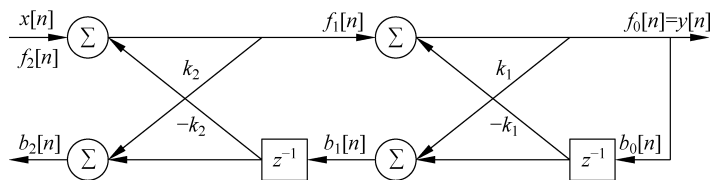


图 5.36 二阶回归格型结构

列出关系方程为

$$\begin{cases} x[n] = f_2[n] \\ f_1[n] = f_2[n] - k_2 b_1[n-1] \\ b_2[n] = k_2 f_1[n] + b_1[n-1] \\ f_0[n] = f_1[n] - k_1 b_0[n-1] \\ b_1[n] = k_1 f_0[n] + b_0[n-1] \\ f_0[n] = b_0[n] = y[n] \end{cases} \quad (5.129)$$

整理式(5.129)得到

$$y[n] = x[n] - k_1(1 + k_2)y[n-1] - k_2 y[n-2] \quad (5.130)$$

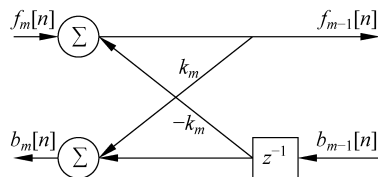
与式(5.128)比较,得到的方程与式(5.100)相同,故反馈系数的解与式(5.101)相同,重写如下

$$\begin{cases} k_2 = a_2[2] \\ k_1 = \frac{a_2[1]}{1 + a_2[2]} \end{cases} \quad (5.131)$$

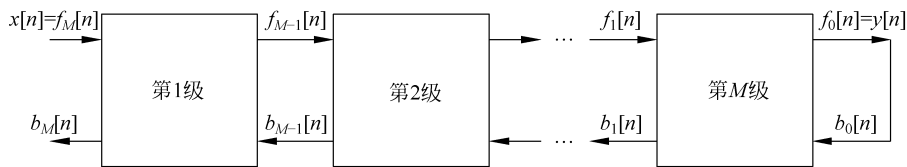
最后,通过式(5.129),得到 $b_2[n]$ 的输出为

$$b_2[n] = k_2 y[n] + k_1(1 + k_2)y[n-1] + y[n-2] \quad (5.132)$$

比较一阶和二阶全极点 IIR 系统和 FIR 系统,可见若用回归格型替代图 5.30 所示的前向格型,可实现全极点 IIR 滤波器,且对于给出的 $A_N(z)$,求全极点格型实现中反馈系数 k_i 的公式与 FIR 系统的相同,这个观察是一般性的,可推广到任意阶系统,对于任意阶系统,回归格型单元的一般结构如图 5.37(a)所示。由回归格型单元按图 5.37(b)进行级联,得到任意阶全极点 IIR 系统。对于给出的系统函数式(5.120),由 $A_N(z)$ 求反射系数的公式采用式(5.116)、式(5.117)或式(5.119),与 FIR 系统用同一组公式。



(a) 回归格型单元



(b) 全极点 IIR 系统的一般格型实现

图 5.37 全极点格型结构

对图 5.37(b) 的结构进行进一步讨论, 系统中有两条通道, 一条从 $x[n] = f_N[n]$ 到 $y[n] = f_0[n]$, 其系统函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_N(z)} = \frac{1}{A_N(z)} \quad (5.133)$$

另一条通道, 从 $b_0[n] = y[n] = f_0[n]$ 到 $b_N[n]$, 这是把 $y[n]$ 当作输入的一个全零点系统, 其系统函数

$$C_N(z) = \frac{B_N(z)}{Y(z)} = \frac{B_N(z)}{B_0(z)} = z^{-N} A_N(z^{-1}) \quad (5.134)$$

对于二阶系统, 通过式(5.130)和式(5.132)证实了式(5.133)和式(5.134)的关系, 对于更高阶系统式(5.134)的证明留作习题。

图 5.37 的结构, 如果上支路 $x[n] = f_N[n]$ 作为输入, 下支路 $b_N[n]$ 作为输出, 则有系统函数

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{B_N(z)}{X(z)} = \frac{B_N(z)}{F_N(z)} \frac{Y(z)}{Y(z)} \\ &= \frac{Y(z)}{F_N(z)} \frac{B_N(z)}{Y(z)} \\ &= \frac{z^{-N} A_N(z^{-1})}{A_N(z)} \end{aligned}$$

这是一个全通系统的系统函数, 可见图 5.37 的结构, 选择 $b_N[n]$ 作为输出时, 实现全通系统。

以图 5.37 的结构为基础, 可以进一步导出一般极零点情况的 IIR 格型结构。对于更一般的系统函数

$$H(z) = \frac{D_M(z)}{A_N(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M d_M[k] z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_N[k] z^{-k}} \quad (5.135)$$

不失一般性, 假设 $M \leq N$ 。为实现式(5.135)所表示的 IIR 系统, 构造图 5.38 所示的“格型-梯形”结构。其中的格型结构与图 5.37 相同, 反射系数也相同, 由 $A_N(z)$ 计算得到反射系数 $\{k_i, i=1, 2, \dots, N\}$, 下层的梯形结构用于实现 $D_M(z)$, 图中所示的是 $M=N$ 的情况, 若 $M < N$, 相应的系数 $g_i = 0, i > M$ 。

为了求出系数 g_m , 由图 5.38 得到

$$y[n] = \sum_{m=0}^M g_m b_m[n] \quad (5.136)$$

对式(5.136)两侧做 z 变换, 并除以 $X(z)$, 然后利用 $x[n] = f_N[n]$ 和 $b_0[n] = y[n] = f_0[n]$, 得到

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M g_m B_m(z)}{X(z)} \\ &= \sum_{m=0}^M g_m \frac{B_m(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M g_m \frac{B_m(z)}{B_0(z)} \frac{F_0(z)}{F_N(z)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^M g_m C_m(z) \frac{1}{A_N(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M g_m C_m(z)}{A_N(z)} \quad (5.137)$$

比较式(5.135)和式(5.137)得

$$D_M(z) = \sum_{m=0}^M g_m C_m(z) \quad (5.138)$$

式(5.138)可进一步写为

$$\begin{aligned} D_M(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} g_m C_m(z) + g_M C_M(z) \\ &= D_{M-1}(z) + g_M z^{-M} A_M(z^{-1}) \end{aligned} \quad (5.139)$$

式(5.139)的最后一行用了式(5.134),对比式(5.139)两侧,右侧 z^{-M} 项只有一个系数 g_M ,由此得到

$$g_M = d_M[M] \quad (5.140)$$

在式(5.139)中,用 m 替代 M ,得到

$$D_{m-1}(z) = D_m(z) - g_m z^{-m} A_m(z^{-1}) \quad (5.141)$$

令 $m = M, M-1, \dots, 1$ 递推执行式(5.141),并令

$$g_{m-1} = d_{m-1}[m-1], \quad m = M, M-1, \dots, 1 \quad (5.142)$$

得到梯形加权系数 $\{g_m, m = M, M-1, \dots, 1, 0\}$,完成图 5.38 中各参数的计算。

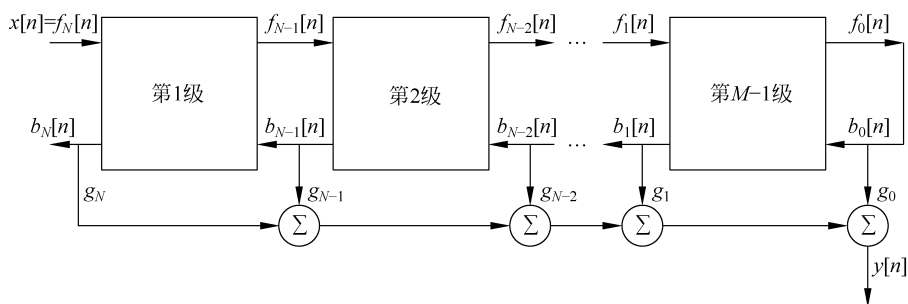


图 5.38 IIR 滤波器的“格型-梯形”结构

注意到,在递推式(5.141)时,各阶 $A_m(z)$ 在通过式(5.117)递推反射系数时已经算出,不需要重新计算。

在不考虑滤波器实现时的计算误差时,所有实现结构都是等同的。但当使用有限位数进行计算的(有限字长)数字系统实现时,计算误差必然存在。当存在计算误差时,不同实现结构的表现是不同的,这称为系统实现的数值稳定性问题。就目前所知,格型结构是数值稳定性最好的实现方式之一。

5.10 数字系统实例

第 6 章将讨论数字系统的一般设计方法,即给出一个要求,根据设计方法的程序化过程总可以设计出一个系统满足设计要求。在实际中,有一些常用系统可以通过一些直接的构

造方法获得。也有一些系统,因其特殊要求,例如不满足标准的 BIBO 稳定性,因而不便利用标准设计程序进行设计,反而通过对问题的特殊处理而容易构造。本节讨论几种这类系统。

5.10.1 数字正弦振荡器

在数字系统处理和仿真的应用中,常需要产生一些特殊信号,例如离散正弦和余弦信号,作为数字调制和解调系统等所需要的信号源。可以通过特殊的递归结构产生这类信号。将这类系统称为数字正弦振荡器。

首先考虑一个具有共轭极点的系统,其两个极点分别为

$$p_{1,2} = r e^{\pm j\omega_0}$$

其构成的一个递归系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

在第 2 章讨论过,该系统函数的单位抽样响应为

$$h[n] = \frac{b_0 r^n}{\sin \omega_0} \sin(\omega_0(n+1)) u[n]$$

对该系统,取 $r=1$,即系统的两个极点位于单位圆上,此时系统不是 BIBO 稳定的,称该类系统为临界稳定系统,若再取

$$b_0 = A \sin \omega_0$$

得到系统的单位抽样响应为

$$h[n] = A \sin(\omega_0(n+1)) u[n] \quad (5.143)$$

由以上分析,可以构造图 5.39(a)所示的系统,只在 $n=0$ 时输入幅度为 $A \sin \omega_0$ 的值,其后输入信号为零,并且保证零初始条件,即 $y[-1]=y[-2]=0$,则系统输出即为式(5.143)所示的正弦信号,这正是数字正弦振荡器。稍做变化,图 5.39(b)的系统同时产生正交的两路信号源。

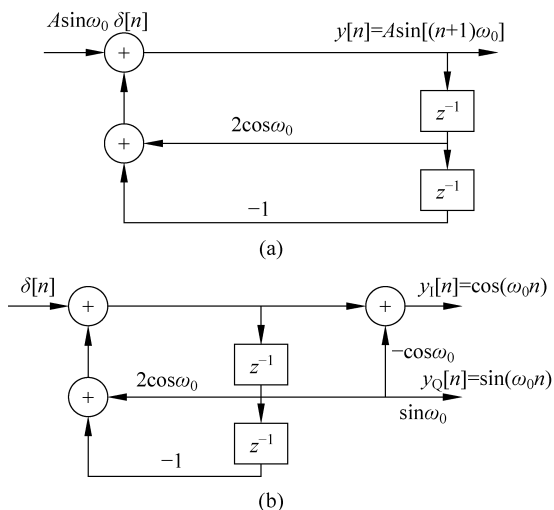


图 5.39 数字振荡器

另一种更有效的方法,是利用三角函数的性质,构造一个特殊递归系统。考查三角函数关系式

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \end{cases} \quad (5.144)$$

结合上式,令

$$\begin{cases} \alpha = (n-1)\omega_0 \\ \beta = \omega_0 \\ y_c[n] = \cos(\omega_0 n) u[n] \\ y_s[n] = \sin(\omega_0 n) u[n] \end{cases} \quad (5.145)$$

将式(5.145)代入式(5.144),得到

$$\begin{cases} y_c[n] = \cos(\omega_0 n) y_c[n-1] - \sin(\omega_0 n) y_s[n-1] \\ y_s[n] = \sin(\omega_0 n) y_c[n-1] + \cos(\omega_0 n) y_s[n-1] \end{cases} \quad (5.146)$$

由式(5.146)可以构成如图 5.40 的系统,若取起始条件为

$$y_c[-1] = \cos\omega_0$$

$$y_s[-1] = -\sin\omega_0$$

则图 5.40 所示系统同时产生两路正交的正余弦信号。

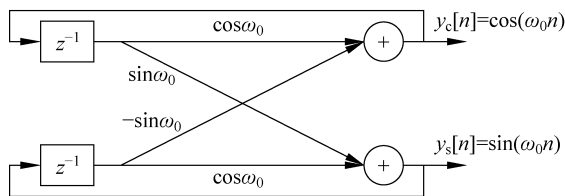


图 5.40 数字正弦/余弦振荡器

5.10.2 数字陷波器

所谓数字陷波器是指这样一个系统,对于一个给定的角频率 ω_0 ,系统将完全滤除输入信号中的 $\pm\omega_0$ 分量,而尽可能不损失其他分量。

若以实信号输入,设信号由两部分组成,

$$x[n] = x_1[n] + a \cos(\omega_0 n + \varphi) \quad (5.147)$$

这里用 $x_1[n]$ 表示信号中不包括 $\pm\omega_0$ 分量的部分。理想的陷波器要求,以式(5.147)表示的输入信号通过陷波器后, $x_1[n]$ 部分没有损失,而 $a \cos(\omega_0 n + \varphi)$ 部分将被完全消除。在很多应用中,陷波器常用于消除电源干扰或其他固定频率干扰。

由于

$$a \cos(\omega_0 n + \varphi) = \frac{1}{2} a e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} a e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$$

若一个系统的系统函数在

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$$

处有一对零点,则信号经过该系统后, $\pm\omega_0$ 分量被完全消除。故最简单的陷波器的系统函数为

$$\begin{aligned}
 H(z) &= (1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}) \\
 &= 1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}
 \end{aligned} \quad (5.148)$$

这是一个仅有 3 个非零系数的 FIR 滤波器,并且是一个线性相位系统。

图 5.41 给出了式(5.148)表示的简单陷波器的频率响应。由图 5.41 发现,这个简单陷波器可以完全消除 $\cos(\omega_0 n + \varphi)$ 的分量,但是由于凹口太宽,它也使得 $\pm\omega_0$ 附近的其他分量被明显衰减,是一个很不理想的陷波器。

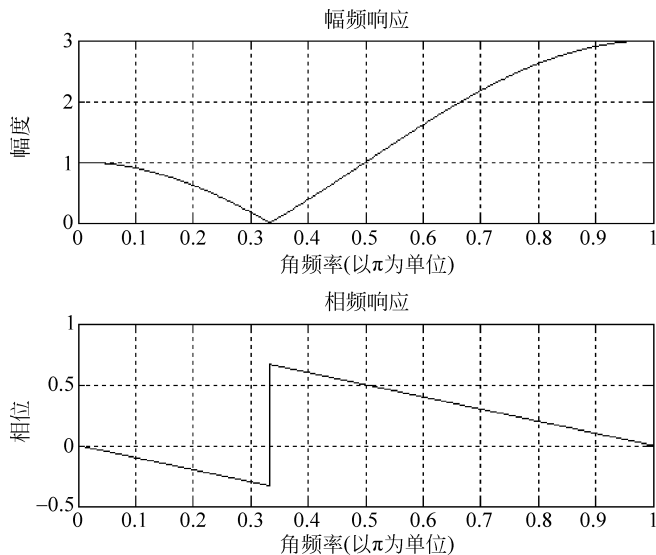


图 5.41 一个简单陷波器的幅频特性

一个直观构造的更好的陷波器是在零点对 $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$ 附近放置一对极点, $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$, 这对极点要与零点非常近,但又不重叠,使得对偏离 $\pm\omega_0$ 的频率分量由于极点和零点的“近似抵消”作用而使得系统幅频响应近似为 1; 而在 $\pm\omega_0$ 频点上,由于零点的作用,仍保证完全陷波。这就要求极点取值满足 $|r| < 1, r \approx 1$, 这里 $|r| < 1$ 保证系统是稳定的。这样构成的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (5.149)$$

选择不同 r , 可得到不同幅频特性的系统。图 5.42 给出两个不同 r 取值时的频率特性。

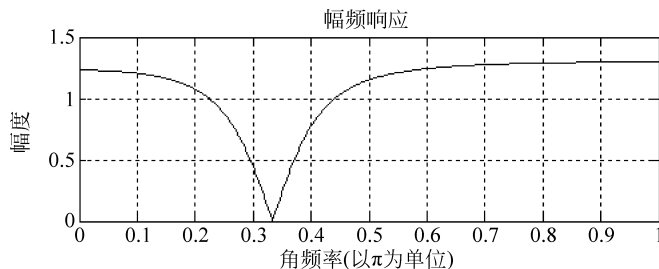


图 5.42 附加极点的陷波器频率特性

(上图 $r=0.75$, 下图 $r=0.95$)

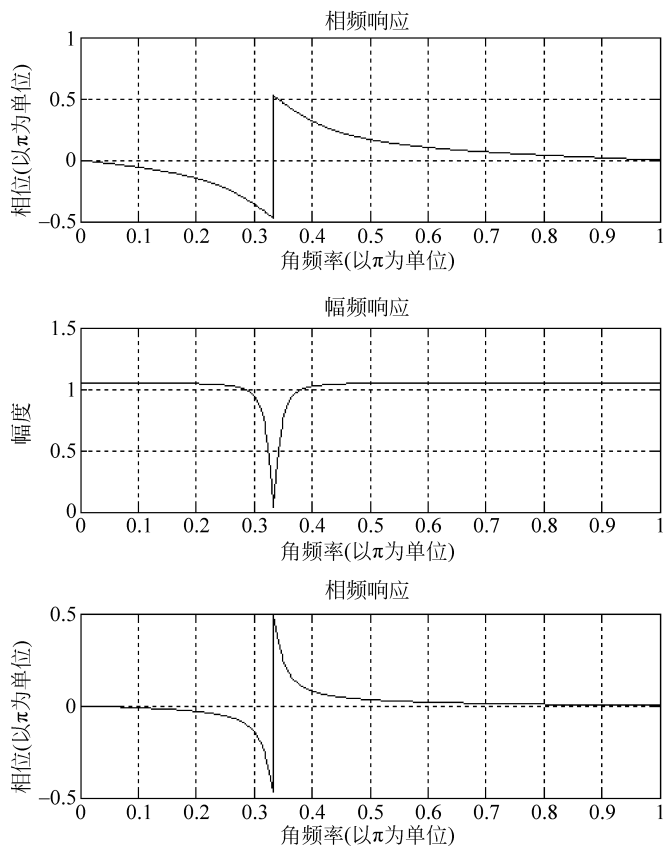


图 5.42 (续)

5.10.3 梳状滤波器

梳状滤波器是一个形象化的名称,即滤波器的幅频响应犹如梳子的形状。梳状滤波器是一种导出的滤波器。一般首先得到一个“原型”滤波器,再经过对其频率响应或单位抽样响应的变化得到梳状滤波器。

设一个原型滤波器的单位抽样响应为 $h[n]$,其频率响应为 $H(e^{j\omega})$,构造一个新的滤波器,其单位抽样响应为 $h_L[n]$,其频率响应为 $H_L(e^{j\omega})$,这里 L 是一个给定的正整数, $h_L[n]$ 由下式给出

$$h_L[n] = \begin{cases} h[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.150)$$

$h_L[n]$ 是由 $h[n]$ 的两个非零值之间插入 $L-1$ 个零而构成的。图 5.43 给出了 $L=5$ 时, $h_L[n]$ 的例子。

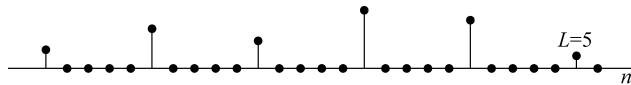


图 5.43 一个梳状滤波器的单位抽样响应

由 DTFT 的定义和式(5.150),得到

$$H_L(e^{j\omega}) = H(e^{jL\omega}) \quad (5.151)$$

显然, $H_L(e^{j\omega})$ 是由 $H(e^{j\omega})$ 在频率轴上压缩了 L 倍的结果,即把 $H(e^{j\omega})$ 在区间 $[-L\pi, L\pi]$ 的图形压缩到了 $[-\pi, \pi]$ 之间就得到了 $H_L(e^{j\omega})$,故 $H_L(e^{j\omega})$ 的幅频特性具有梳子的形状,故得名梳状滤波器。

为了给出更直接和更形象的理解,以如下熟悉的平均滤波器为原型滤波器,即

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M+1}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$$

因此得到梳状滤波器的频率响应为

$$H_L(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin(\omega L(M+1)/2)}{\sin(\omega L/2)} e^{-j\omega LM/2} \quad (5.152)$$

梳状滤波器的幅频响应为

$$|H_L(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M+1} \frac{\sin(\omega L(M+1)/2)}{\sin(\omega L/2)} \right| \quad (5.153)$$

图 5.44 给出了一个例子, $M=7$, L 分别取 5 和 6, 可以看到, 由于原型滤波器的主瓣峰

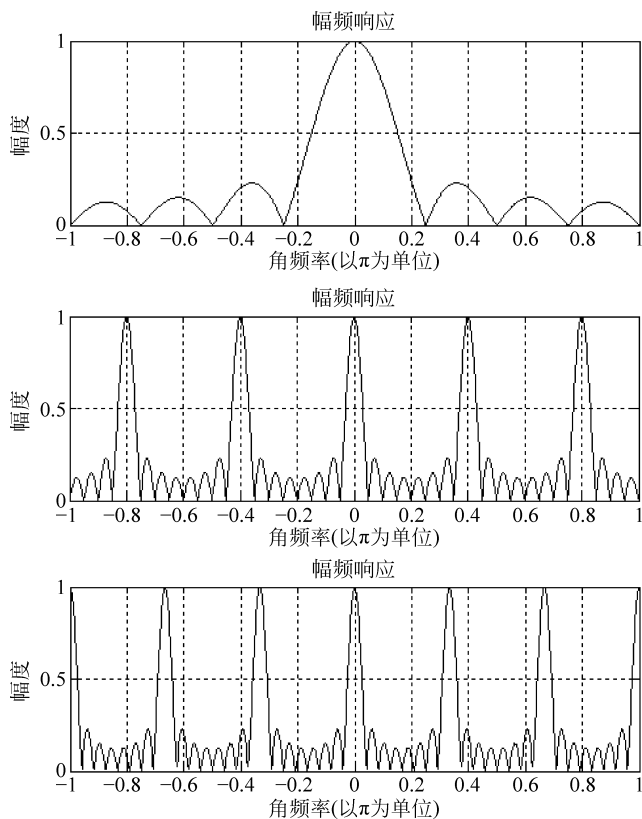


图 5.44 梳状滤波器的幅频响应

(上: 原型滤波器, 中: $L=5$ 的梳状滤波器, 下: $L=6$ 的梳状滤波器)

处于 $\omega = 2\pi k$ 的位置,故梳状滤波器的各通带频率中心为 $\omega = 2\pi k/L$ 处。因此,当 L 为奇数时, $\pm\pi$ 处于阻带状态;当 L 为偶数时, $\pm\pi$ 处于通带状态。

若原型滤波器的通带中心频率为 $\omega = \omega_0$,则由 DTFT 的周期性, $\omega = \omega_0 + 2\pi k$ 也是通带中心频率,梳状滤波器的各通带频率中心为 $\omega = \frac{\omega_0 + 2\pi k}{L}$,梳状滤波器各通带带宽是原型滤波器通带带宽的 $1/L$ 。可以通过梳状滤波器的要求,导出原型滤波器参数。首先设计原型滤波器,然后通过式(5.150)得到梳状滤波器的单位抽样响应。第6章将讨论一般滤波器的设计方法,利用这些设计方法,可设计出更一般的原型滤波器,从而构成类型更丰富的梳状滤波器。

5.11 与本章相关的 MATLAB 函数与样例

5.11.1 相关的 MATLAB 函数简介

首先介绍几个与离散系统和数字滤波器相关的 MATLAB 函数。

1. impz

功能介绍 离散系统单位抽样响应的函数。本函数集成在 Signal Processing 工具箱中,用于计算数字滤波器单位抽样响应。

语法

```
[h,t] = impz(b,a)
[h,t] = impz(b,a,n)
[h,t] = impz(b,a,n,fs)
impz(b,a)
```

输入变量 $[h,t] = \text{impz}(b,a)$ 用于计算数字滤波器的单位抽样响应,其中 a 和 b 分别是数字系统差分方程表示形式下左右两侧的系数。 n 是整数时,表示返回的冲击响应点的个数; n 是矢量时,表示的是时间点,只有矢量 n 指定的那些整数时间序号上的单位抽样响应值被计算和输出。 fs 表示采样率,相邻采样点之间时间间隔 $1/fs$,默认值为 1。

输出内容 返回值 h 表示单位抽样相应,默认的时间序号为 $t=[0,1,2,3,\dots]$; t 表示 h 对应的抽样时间。如果调用时没有指定返回值, impz 函数自动绘制出单位抽样响应的波形。

2. freqz

功能介绍 数字滤波器频率响应函数。本函数集成在 Signal Processing 工具箱中,用于计算数字滤波器频率响应。这是一个功能很强的常用函数。

语法

```
[h,w] = freqz(b,a,1)
h = freqz(b,a,w)
[h,w] = freqz(b,a,1,'whole')
```



```
[h,f] = freqz(b,a,l,fs)
h = freqz(b,a,f,fs)
[h,f] = freqz(b,a,l,'whole',fs)
freqz(b,a,...)
```

输入变量 $[h,w] = \text{freqz}(b,a,l)$ 用于计算数字滤波器的频率响应,其中 a 和 b 分别是数字系统差分方程表示形式下左右两侧的系数,或系统函数有理分式分母和分子多项式的系数矢量, l 表示返回 h,w 的长度,缺省时,在 $[0,\pi]$ 范围内均匀地计算 512 个点。

$h = \text{freqz}(b,a,w)$ 计算在给定频率点的响应,其中输入向量 w 表示给定的频率点。

$[h,w] = \text{freqz}(b,a,l,'whole')$, 'whole' 表示计算角频率范围为 $[0,2\pi]$ 的频率响应,未指定情况下默认计算角频率范围为 $[0,\pi]$ 。

$[h,f] = \text{freqz}(b,a,l,fs)$, fs 是采样频率,单位是赫兹。

$h = \text{freqz}(b,a,f,fs)$ 计算在响应频率点的响应,其中向量 f 指定频率点, fs 是采样频率,单位是赫兹(Hz)。

输出内容 向量 h 是数字滤波器的频率响应。向量 w 是 h 对应的数字角频率,其单位是弧度(rad); 向量 f 则是跟 h 相对应的模拟频率,其单位是赫兹(Hz)。如果调用时没有指定返回值, freqz 函数自动绘制出频率响应的波形。

3. filter

功能介绍 计算一个数字滤波器的输出。

语法

```
y = filter(b,a,x)
```

输入变量 输入 a 和 b 分别是数字系统差分方程表示形式下左右两侧的系数,或系统函数有理分式分母和分子多项式的系数矢量。 x 是输入信号矢量。

输出内容 滤波器输出矢量。

4. tf2latc

功能介绍 系统函数形式滤波器转级联格型结构函数。本函数集成在 Signal Processing 工具箱中,用于将滤波器从传输函数形式转为格型。

语法

```
[k,v] = tf2latc(b,a)
k = tf2latc(1,a)
[k,v] = tf2latc(1,a)
k = tf2latc(b)
k = tf2latc(b, 'phase')
```

输入变量 输入 a 和 b 分别是数字系统差分方程表示形式下左右两侧的系数,或系统函数有理分式分母和分子多项式的系数矢量。'phase' 参数有 'max', 'min' 两种取值,前者表示返回的格型是最大相位滤波器,后者表示返回最小相位格型滤波器。

输出内容 返回值 k 是格型反射系数, v 是梯形加权系数(当滤波器是 IIR 时)。

5. latc2tf

这是与 tf2latc 相反功能的函数,将格型结构转换成系统函数或差分方程形式,变量的说明与 tf2latc 相同,只是交换位置。

```
[b,a] = LATC2TF(K,V)
b = LATC2TF(K)
b = LATC2TF(K,'fir')
b = LATC2TF(K,'phase')
[b,a] = LATC2TF(K,'allpole')
[b,a] = LATC2TF(K,'allpass')
```

6. tf2zp

功能介绍 根据输入的滤波器系统函数求滤波器系统函数的零极点分布。

语法

```
[z, p, k] = tf2zp(b, a)
```

输入变量 b 是表示滤波器系统函数分子多项式系数矢量; a 是表示滤波器系统函数分母多项式系数矢量。

输出内容 z 是滤波器零点矢量, p 是滤波器极点矢量, k 是滤波器系统增益系数。

7. zplane

功能介绍 绘制滤波器的零极点分布图。

语法

```
zplane(z, p)
zplane(b, a)
```

输入变量 z 是滤波器零点向量, p 是滤波器极点向量。b 是表示滤波器系统函数分子多项式系数矢量; a 是表示滤波器系统函数分母多项式系数矢量。

输出内容 画出滤波器的零极点分布图。

5.11.2 MATLAB 例程

通过几个例程及其运行结果,说明 MATLAB 函数在离散系统和数字滤波器上的应用。

例 5.11.1 已知系统的差分方程表示

$$y[n] - 0.3y[n-1] + 0.8y[n-2] = x[n] - 0.5x[n-2]$$

利用 impz 函数求该离散系统的单位抽样响应,例程如下,运行结果如图 5.45 所示。

```
a = [1 -0.3 0.8];
b = [1 0 -0.5];
n = 50;
impz(b,a,n); % 用 impz 函数计算单位抽样响应
```

例 5.11.2 尽管第 2 章已有卷积和的例子,由于其常用性并与系统分析紧密相关,这里再次给出一个卷积和的例子。一系统单位抽样响应是 $h[n] = a^n u[n]$, 其中 $a =$

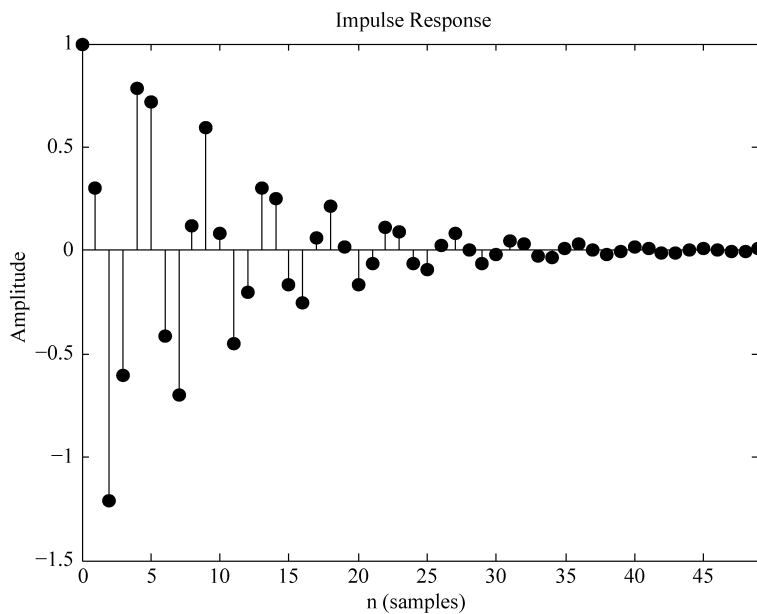


图 5.45 例 5.11.1 的例程结果

0.6, 激励信号为 $x[n] = u[n] - u[n-5]$, 利用 conv 函数求响应 $y[n]$, 例程如下, 运行结果如图 5.46 所示。

```

a = 0.6;                                % 定义系数 a = 0.6
N = 5;                                  % 定义激励的长度 N
n = [0:20];                             % 定义时间
h = ((0.6).^n).*(n >= 0);               % 定义单位抽样响应

```

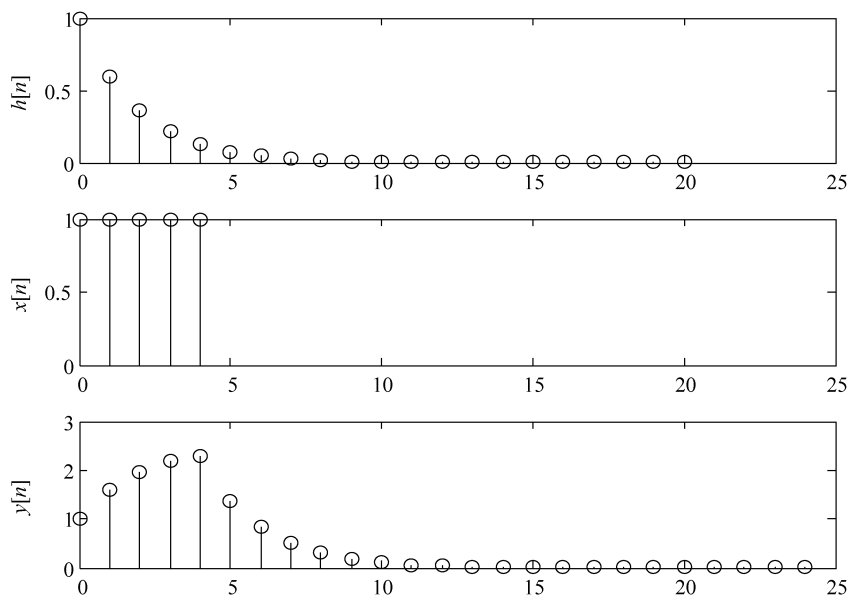


图 5.46 例 5.11.2 的例程结果

```

x = ones(1, 5);           % 定义激励信号 x(n)
y = conv(h, x)             % 用 conv 计算卷积
ex_5_11_2_plot();         % 画图, 此处调用一个自编的函数

```

例 5.11.3 已知系统的差分方程表示

$$y[n] - 0.3y[n-1] + 0.8y[n-2] = x[n] - 0.5x[n-2]$$

利用 freqz 函数求该离散系统的频率响应, 例程如下, 运行结果如图 5.47 所示。

```

a = [1 -0.3 0.8];         % 定义左侧系数
b = [1 0 -0.5];           % 定义右侧系数
freqz(b,a);               % 绘制频率特性曲线
zplane(b,a);

```

图 5.47 所示分别为零极点分布与频率响应。

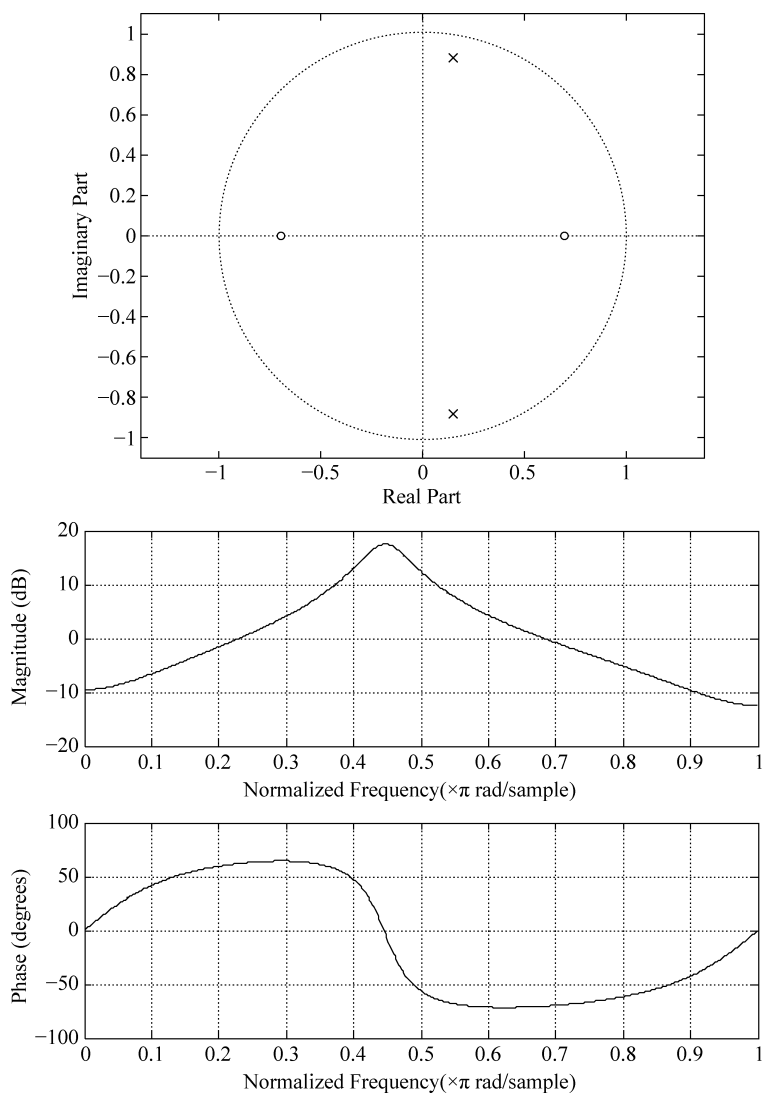


图 5.47 例 5.11.3 的例程运行结果

例 5.11.4 四阶 FIR 传输函数

$$H(z) = 1 + 1.2z^{-1} + 1.12z^{-2} + 0.12z^{-3} - 0.08z^{-4}$$

实现其级联格型结构,例程和运行结果如下。

```
b = [1 1.2 1.12 0.12 -0.08];           % FIR 滤波器传输函数
k = tf2latc(b)                          % 用 tf2latc 函数求格型反射系数
b1 = latc2tf(k)                         % 用 latc2tf 函数实现逆过程进行验证
```

运行结果: $k = [0.5 \quad 1.0 \quad 0.2174 \quad -0.08]$, 且 $b = b1$ 。用函数 latc2tf 验证了格型实现的正确性。

5.12 本章小结

本章全面介绍了 LTI 系统的表示方法,讨论了表示一个 LTI 系统的几种等效的方式。研究了 LTI 系统设计问题,并回答了系统的可实现性条件。本章详细讨论了 IIR 系统和 FIR 系统的各种实现结构以及这些结构之间必要的转换关系。对于 FIR 系统,重点关注了线性相位系统的特性。利用直观的理解,本章也给出了几个实际系统的例子。

习题

5.1 设一个 FIR 系统,其单位抽样响应为

$$h[n] = 0.5\delta[n] + \delta[n-1] + 0.5\delta[n-2]$$

求它所有可能的逆系统,求出逆系统的系统函数和收敛域,以及系统的单位抽样响应。

5.2 已知一个线性时不变系统对输入序列 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n-1]$ 的响应为

$$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

- (1) 求系统函数 $H(z)$, 并画出它的极、零点分布及收敛域;
- (2) 求系统的单位抽样响应 $h[n]$;
- (3) 写出系统的差分方程表示;
- (4) 分析系统是否是因果的和 BIBO 稳定的。

5.3 已知两个 FIR 滤波器的单位抽样响应分别为 $h_1[n] = \left\{\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, 1, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right\}$ 和 $h_2[n] = \left\{\frac{1}{8}, -\frac{5}{8}, 1, -\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right\}$ 。两个单位抽样响应中第 1 个取值对应的时间序号均为零,两个系统的系统函数分别为 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 。

- (1) $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 所表示的两个滤波器是否是线性相位 FIR 滤波器?
- (2) 用 $h_1[n]$ 表示 $h_2[n]$, 用 $H_1(z)$ 表示 $H_2(z)$ 。
- (3) 计算 $H_1(e^{j0})$ 和 $H_1(e^{j\pi})$ 。
- (4) 不用计算,由第(2)和(3)题的结果直接得到 $H_2(e^{j0})$ 和 $H_2(e^{j\pi})$ 。
- (5) 由第(3)和(4)题的结果,判断 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 分别是低通还是高通滤波器?

5.4 已知 $H_i(z) = \frac{z^{-1} - a_i}{1 - a_i^* z^{-1}}$ 为全通系统的系统函数, 判断如下各系统函数是否保持全通性质:

$$(1) \sum_{i=1}^N H_i(z) \quad (2) \prod_{i=1}^N H_i(z) \quad (3) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{H_i(z)}{H_{i+1}(z)}$$

5.5 已知一个全通 IIR 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + (\alpha + \beta)z^{-2} + 2z^{-3}}{2 + (\alpha - \beta)z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}$$

请确定 α 和 β 的取值。

5.6 证明全通系统的系统函数 $H_{ap}(z)$ 具有如下性质:

$$|H_{ap}(z)| = \begin{cases} > 1, & |z^{-1}| > 1 \\ = 1, & |z^{-1}| = 1 \\ < 1, & |z^{-1}| < 1 \end{cases}$$

5.7 设 $h_{\min}[n]$ 为一最小相位系统的单位抽样响应, 而 $h[n]$ 为与其具有相同幅频响应的因果非最小相位系统的单位抽样响应。请利用 z 变换初值定理证明: $|h[0]| < |h_{\min}[0]|$ 。

5.8 给定一个 FIR 系统的单位抽样响应为 $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{3}{8}\delta[n-3]$ 。

(1) 请判断该系统是否为最小相位系统; 如果不是, 请找出与其具有相同幅频响应的最小相位系统的单位抽样响应。

(2) 请找出与该系统具有相同幅频响应的最大相位系统的单位抽样响应。

5.9 已知具有相同幅频响应的最小相位系统和最大相位系统的单位抽样响应分别为 $h_{\min}[n]$ 和 $h_{\max}[n]$, 这两个系统的系统函数分别为 $H_{\min}(z)$ 和 $H_{\max}(z)$ 。请证明:

$$H_{\max}(z) = z^{-N} H_{\min}(z^{-1})$$

并利用此结果用 $h_{\min}[n]$ 来表示 $h_{\max}[n]$ 。

5.10 已知一个稳定 LTI 系统的单位抽样响应 $h[n]$ 是偶对称的, 即满足 $h[n] = h[-n]$ 。

(1) 请确定该系统的系统函数的极点分布具有什么特点?

(2) 如果该系统的系统函数为 $H(z) = \frac{2 - 4.25z^{-1}}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - 4z^{-1})}$, 请确定其收敛域并写出 $h[n]$ 的表达式。

5.11 已知一个系统的系统函数是 $H(z) = \frac{z^{-1}(1 + 5z^{-1})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$, 求一个系统函数形式为

$G(z) = \frac{d + cz^{-1}}{1 + bz^{-1}}$ 且与 $H(z)$ 有相同幅频响应的最小相位系统, 请写出其系统函数并画出系统实现的流图。

5.12 一个 LTI 系统的系统函数为 $H(z) = \frac{(1 + 1.3z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.93z^{-1})}$, 写出与该系统具有相同幅频响应的最小相位系统的系统函数。

5.13 已知一个 LTI 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

请画出该系统如下实现形式的结构流图：(1) 直接形式 I；(2) 直接形式 II；(3) 级联形式；(4) 并联形式。

5.14 已知一个实系数全通系统的系统函数为 $H(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$ 。

(1) 请画出该系统直接形式 II 实现的结构流图。

(2) 请画出一种只需一次乘法而延迟单元数不受限的实现结构流图(其中乘 ± 1 不计作乘法次数)。

(3) 请对比分析第(1)和(2)题实现结构各自的优缺点。

5.15 已知一数字系统用差分方程 $y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{4\sqrt{2}}{5}y[n-1] - \frac{16}{25}y[n-2]$

描述。

(1) 画出系统的零极点分布,粗略画出系统的幅频特性;说明它具有什么滤波特性?

(2) 画出系统实现的直接 II 型结构流图。

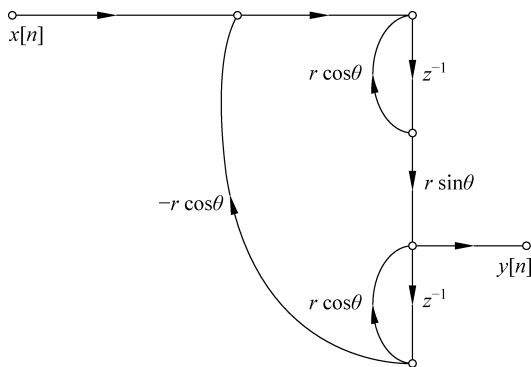
(3) 如果系统输入信号为 $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$,求系统输出信号。

5.16 一个 IIR 系统的实现流图如题 5.16 图所示。

(1) 请写出其系统的系统函数。

(2) 请画出该系统直接形式 II 实现的结构流图。

(3) 请对比分析两种实现结构的优缺点。



题 5.16 图

5.17 有一个输入信号为 $x[n] = \cos\left(\frac{1}{4}\pi n\right) + 0.12\cos\left(\frac{3}{4}\pi n\right)$,其中第一个余弦分量是有用信号,第 2 个余弦分量是干扰噪声,该信号经过一个 IIR 滤波器,滤波器传输函数的两个极点分别是 $z_{1,2} = 0.8e^{\pm j\pi/4}$,一阶零点位于 $z_0 = -1$,且其频率响应在零频率点的取值 $H(e^{j0}) = 1/4$ 。

(1) 求出系统的传输函数,用直接 II 型实现,画出其实现流图。

(2) 求两个频率分量经过系统后,各自的幅度值,并讨论该系统有提高信噪比的作用吗?

5.18 已知 FIR 滤波器的单位抽样响应为

$$h[n] = \delta[n-1] - 1.5\delta[n-2] + 2.75\delta[n-3] + 2.75\delta[n-4] - 1.5\delta[n-5] + \delta[n-6]$$

求该滤波器的零点分布,并画出其级联形式结构流程图。

5.19 一个实系数滤波器可用线性常系数差分方程 $y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2]$ 表示。已知其可完全抑制 $\omega_0 = 2\pi/3$ 处的频率成分,且其频率响应满足 $H(e^{j0}) = 1$, 请写出该滤波器的单位抽样响应,并计算出其群延迟。

5.20 设 $h[n] \leftrightarrow H(z)$ 是 z 变换对,证明 $h[M-n] \leftrightarrow H(z^{-1})z^{-M}$ 是 z 变换对。

5.21 一个有五个非零系数的线性相位因果 LTI 数字 FIR 滤波器,已知其中一个零点是 $0.8e^{j\frac{3}{4}\pi}$,且 $H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1$,求其单位抽样响应。

5.22 已知一个第Ⅲ类实系数因果线性相位 FIR 滤波器的单位抽样响应的长度为 9 且具有零点 $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$ 和 $z_2 = -\frac{1}{4}j$ 。

(1) 写出该滤波器的其他零极点,并注明零极点的阶数。

(2) 写出该滤波器的群延迟。

5.23 一个类型Ⅱ型的实系数线性相位 FIR 滤波器,已知其单位脉冲响应的长度为 8 且具有零点 $z_1 = 2$ 和 $z_2 = 1+j$,

(1) 写出该滤波器其他的零点。

(2) 写出该滤波器的群延迟。

5.24 已知两个 FIR 系统的单位抽样响应分别为

$$h_1[n] = \{1, 4, 2, 3, 3, 2, 4, 1\}$$

↑

$$h_2[n] = \{1, -4, 2, -1, 3, -1, 2, -4, 1\}$$

↑

其中箭头代表 $n=0$ 的位置。请写出这两个系统的群延迟响应。

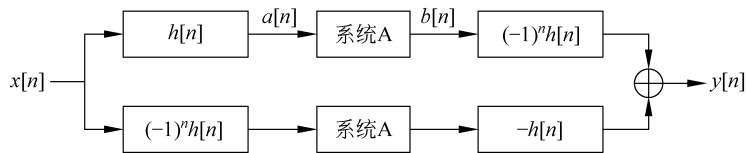
5.25 已有滤波器的系统函数为 $H(z)$,单位抽样响应为 $h[n]$,对其进行 $z = -Z^2$ 变换,得到新的滤波器 $H_1(z)$ 和单位抽样响应为 $h_1[n]$ 。用 $h[n]$ 表示 $h_1[n]$;若 $H(z)$ 是对应截止频率为 $\pi/3$ 的理想低通滤波器,画出新滤波器的幅频响应的图形(画出 $[-\pi, \pi]$ 之间的图形),标出关键频率点的值(即截止频率的位置)。

5.26 已知离散序列 $x[n]$,将其送入如题 5.26 图结构的系统,其中 $h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-5])$,系统 A 的输入输出关系为 $b[n] = \begin{cases} a[n], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$,若输出序列为 $y[n]$,请给出 $y[n]$ 用 $x[n]$ 表示的表达式,要求化到最简形式。

5.27 用基 2 的 FFT 处理器做线性卷积和运算,参与运算的两个信号第一个长度为 97,第二个长度为 132,均为实信号。

(1) 选择多长的 FFT 点数是合适的?

(2) 统计实数乘法运算次数并与直接卷积求和比较运算量(假设第一个信号的 DFT 预



题 5.26 图

先做好,不需要实际统计其运算次数)。

5.28 我们希望利用长度为 50 的 $h[n]$ 对一长串信号数据进行滤波,要求利用重叠保留法通过 DFT 实现。为了做到这一点:输入各段必须重叠 V 个数据点;每一段产生的输出中取出 M 个数据点,使这些从每一段得到的数据点连接在一起时得到的序列就是要求的滤波结果。假设输入的各段数据长度为 100,而 DFT 的点数为 128。又假设每段循环卷积输出结果的序号为 $0 \sim 127$ 。

(1) 请确定满足要求的 V 和 M 。

(2) 求从循环卷积输出的 128 点中要取出 M 点的起点和终点的序号。

5.29 有一个 FIR 滤波器,冲激响应长度为 56,均为实数值,该滤波器过滤一个实值长信号,用 256 点按基 2 分解的 FFT 程序做处理(W_N^0 等旋转因子都计入乘法次数),采用重叠保留法。给出长信号的分段方法和结果的拼接方法。假设用 DSP 处理器处理该任务,处理器完成一次乘法需要一个时钟周期,假设编程技巧足够好,数据存取和加法均不需要额外指令,只需考虑乘法次数。若信号是按 1MHz 采样获得的,为完成实时处理,需要处理器 MIPS 值至少多大? 并与直接卷积方法需要的 MIPS 数进行比较(注: MIPS 指处理器每秒执行的兆时钟周期数)。

5.30 设原型滤波器的单位抽样响应为

$$h[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{M+1}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 写出其梳状滤波器的频率响应 $H_L(e^{j\omega})$ 。

(2) 求出其梳状滤波器的通带中心频率的一般表达式。

(3) 若取 $M=7$,画出 L 分别取 5 和 6 时,梳状滤波器的幅频响应,并与图 5.44 进行对比分析。

5.31 如果一个滤波器的冲激响应是 $h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 15 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(1) 它的频率响应 $H(e^{j\omega})$,大致画出频率响应的草图,如果定义频率响应的峰值到第一个零值点的距离为带宽,该滤波器的带宽为多大?

(2) 要求以 $H(e^{j\omega})$ 为基础,设计多通带滤波器,在 $[0, 2\pi]$ 范围内,各通带中心为 $\omega_i = \frac{\pi}{3}k, k=0, 1, \dots, 6$,每个通带形状与 $H(e^{j\omega})$ 一致,但带宽约是 $H(e^{j\omega})$ 的 $1/6$,求该滤波器的冲激响应 $h_1[n]$ 。

(3) 在 2 中滤波器的基础上,求一个新的滤波器,频率中心比 2 中滤波器向右平移 $\pi/12$,求该滤波器的冲激响应 $h_2[n]$ 。

5.32 已知实系数 FIR 滤波器的单位抽样响应 $h[n]$ 长度 N 为 16, $0 \leq n \leq 15$ 。 $H[k]$ 为 $h[n]$ 的 16 点 DFT, 且已知 $H[0]=12, H[1]=-3-j\sqrt{3}, H[2]=1+j, H[3] \sim H[8]$ 都为零。

(1) 请求出 $h[n]$ 。

(2) 请画出该 FIR 滤波器频率取样结构的实现流程图。

5.33 FIR 系统的单位抽样响应 $h[n]$ 是 $N=M+1$ 点的有限长序列, 若按下式对 $h[n]$ 的 DTFT 进行采样, 并取 $0 \leq \alpha < 1$

$$H_a[k] = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}(k+\alpha)}$$

证明系统函数可由 $H_a[k]$ 按下式求得

$$H(z) = \frac{1}{N} (1 - e^{j2\pi\alpha} z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_a[k]}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\alpha)} z^{-1}}$$

5.34 一个线性相位 FIR 系统, 其系统函数可写为

$$H(z) = (1 - 0.8e^{j3\pi/4} z^{-1})(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})(1 - cz^{-1})$$

求 (1) a, b, c 的值;

(2) 写出系统函数的多项式表达式;

(3) 若用格型实现, 求各反射系数, 并画出格型结构的信号流程图。

5.35 一个 IIR 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 + 1.2z^{-1}}{(1 - 0.75e^{j\pi/3} z^{-1})(1 - 0.75e^{-j\pi/3} z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}$$

(1) 给出系统的一种并联实现结构, 画出信号流程图。

(2) 若采用格型-梯形实现, 求出各参数, 画出信号流程图。

MATLAB 习题

5.1 请利用 MATLAB 自带函数画出习题 5.8 中数字系统的单位抽样响应、零极点分布图、幅频响应、相频响应和群延迟响应。

5.2 请分别编写 MATLAB 函数实现采用重叠相加法和重叠保留法的 FIR 滤波器 FFT 实现结构, 函数应根据输入 FIR 滤波器单位抽样响应的长度自行选择最优的 FFT 变换长度。请通过与 MATLAB 自带滤波函数的对比验证所编写函数的正确性。

5.3 请针对习题 5.12 给出的系统函数, 利用 MATLAB 验证关于最小相位系统的如下性质。

(1) 在具有相同幅频响应的稳定因果系统中, 最小相位系统具有最小群延迟。

(2) 在具有相同幅频响应的稳定因果系统中, 最小相位系统具有最小能量延迟。

5.4 请针对习题 5.18 中给出的 FIR 滤波器, 利用 MATLAB 验证关于线性相位系统的相关性质, 包括: ①单位抽样响应的对称性; ②零点分布的对称性; ③相频响应的广义线性; ④固定的群延迟响应。

5.5 请利用 MATLAB 确定如下 IIR 滤波器系统函数因式分解后的表示形式

$$H(z) = \frac{0.1103 - 0.4413z^{-1} + 0.6619z^{-2} - 0.4413z^{-3} + 0.1103z^{-4}}{1 - 0.1510z^{-1} + 0.8042z^{-2} + 0.1618z^{-3} + 0.1872z^{-4}}$$

在此基础上请给出 $H(z)$ 两种不同的级联实现和并联实现形式。