

第 5 章

多元函数微分

专题 28 退化的多元



孝哥说明

二元函数本有两个变量,但当第二个变量也成了第一个变量的函数,则此时的二元函数退化成为一元函数,但又兼具二元函数的复合结构。命题人可就此命题制区分度极高的试题。

知识清单

1. 退化的多元: 含 $f(x, u(x)) = v(x)$ 的试题中出现导数, 对方程左右两边同时求 x 的导数。

2. 一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的通解是 $y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$ 。

注意:

(1) 难点在于将方程化为上述标准式, 提炼出 $P(x), Q(x)$ 。

(2) 有时将方程化为 $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$, 此时通解为 $x = e^{-\int P(y)dy} \left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy} dy + C \right)$ 。

经典例题

55 设函数 $f(x, y)$ 具有连续的偏导数。

(1) 若 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2, f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) = (\quad)$ 。

A. dx B. dy C. $dx - dy$ D. $dx + dy$

(2) 若 $f'_x(x, y) + f'_y(x, y) = xy$, 设 $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$, 求 $y(x)$ 所满足的一阶微分方程, 并求其通解。

解

(1) B。

将题意中两个方程左右两边分别对 x 求导得

【笔记】解法: 退化的多元, 左右两边对 x 求导

$$f'_1(x+1, e^x) \cdot 1 + f'_2(x+1, e^x) \cdot e^x = (x+1)^2 + 2x(x+1) \quad ①$$

$$f'_1(x, x^2) + 2xf'_2(x, x^2) = 2(2x \ln x + x) \quad ②$$

$$\text{令 } ① \text{ 中 } x=0, ② \text{ 中 } x=1 \text{ 得 } \begin{cases} f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1) = 1 \\ f'_1(1, 1) + 2f'_2(1, 1) = 2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} f'_1(1, 1) = 0 \\ f'_2(1, 1) = 1 \end{cases}, \text{ 所以 } df(1, 1) = f'_1(1, 1)dx + f'_2(1, 1)dy = dy。$$

(2) 由 $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$, 两边对 x 求导有

【笔记】解法: 退化的多元, 左右两边对 x 求导

$$y' = -2e^{-2x} f(x, x) + e^{-2x} f'_1(x, x) + e^{-2x} f'_2(x, x) \cdot 1$$

【笔记】别漏了 $f'_2(x, x) \cdot 1$

$$= -2e^{-2x} f(x, x) + e^{-2x} (f'_1(x, x) + f'_2(x, x)) = -2y + e^{-2x} (f'_1(x, x) + f'_2(x, x))$$

已知 $f'_x(x, y) + f'_y(x, y) = xy$, 则 $f'_1(x, x) + f'_2(x, x) = x^2$ 。

因此, $y(x)$ 满足下述一阶微分方程为 $y' + 2y = x^2 e^{-2x}$ 。

一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 通解公式:

$$f(x) = e^{-\int P(x)dx} \left(C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right)$$

这里 $P(x) = 2, Q(x) = x^2 e^{-2x}$, 代入上式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 2dx} \left(\int x^2 e^{-2x} e^{\int 2dx} dx + C \right) = e^{-2x} \left(\int x^2 e^{-2x} e^{2x} dx + C \right) \\ &= e^{-2x} \left(\int x^2 dx + C \right) = e^{-2x} \left(\frac{x^3}{3} + C \right) \quad (C \text{ 为任意常数}) \end{aligned}$$



解题心得

专题 29 连续、偏导、可微基本概念

“可微判别”是许多同学的软肋,做了很多题,依然迈不过这道坎。因为此考点不仅理解上难,计算上也难,可谓是难上加难。但也正因如此,本考点也是高分度的考点,高等数学不可多得的精妙处。小白不可恋战,可只做经典例题 56 第(1)问。

考哥说明



知识清单

1. 定义法求偏导数: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$; $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ 。
2. 可微判别式: $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = 0$, 其中, $dz = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$ 。

经典例题

56

设 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - 1}{\sin^k(x^2 + y^2)} = 1$ 。

(1) 当 $k = 1$ 时, 下列哪个选项正确? ()

- A. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可偏导
- B. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可偏导但不可微
- C. $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 1$ 且 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微分
- D. $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ 且 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微分

(2) 若函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微分, 求 k 的取值范围。

解 (1) D。

【方法 1】 $k=1$ 时, 由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)-1}{\sin(x^2+y^2)}=1$, 得 $f(0,0)=1$ 。

【笔记】 分母趋近 0, 则分子也趋近 0, 加上 $f(x,y)$ 连续, 则有 $f(0,0)-1=0$

因为 $\sin(x^2+y^2) \sim (x^2+y^2)$, 所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=1$ 。

从而 $\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=1+o(1)$, 其中, $o(1)$ 为当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时 1 的高阶无穷小。

于是 $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = 0 \times x + 0 \times y + o(\sqrt{x^2+y^2})$ 。

由可微定义可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 且 $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, 选 D。

【笔记】 函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微的充要条件: $\Delta f = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$ 或

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f - (A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

【方法 2】 当 $k=1$ 时, 取 $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ 。

$$df(x,y) = 2x dx + 2y dy \Rightarrow f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$$

易知 $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ 偏导数连续, 所以在 $(0,0)$ 处可微。

与选项对比, 可快速得出正确答案为 D。

(2) $k > \frac{1}{2}$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)-1}{\sin^k(x^2+y^2)} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)-1}{(\sqrt{x^2+y^2})^{2k}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\rho^{2k-1}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \rho^{1-2k} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\rho} \cdot \rho^{1-2k} = 1 \end{aligned}$$

当 $\rho \rightarrow 0$ 时, ρ^{1-2k} 为无穷大, 必有 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = 0$,

【笔记】 $\infty \cdot \Delta = 1$, 则 Δ 必为无穷小

此时 $1-2k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{2}$ 。



解题心得

专题 30

多元函数求偏导



考哥说明

多元函数求偏导, 这本是一类“老掉牙”的考题。但命题人对考生的爱就像蓝天白云, 晴空万里, 突然暴风雨, 无处躲避, 总是让人始料不及。本专题总结了偏导试题的高光时刻, 并加入了一类“始料不及”的考法。请考生体会。

知识清单

- 变限积分求导公式: $\left(\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt\right)'_x = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\phi(x)] \cdot \phi'(x)$ 。
- 变限函数化为纯 t 公式。
 - $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x f(u) du$ 。
 - $\int_0^x (x-t)f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt$ 。
 - $\int_0^1 f(xt) dt = \frac{\int_0^x f(u) du}{x} \quad (x \neq 0)$ 。
- 伽马函数计算积分 $\int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = s!$ (其中, s 为正整数)。例如: $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2! = 2 \times 1 = 2$ 。
- 偏导与次序无关: 若函数 $z = f(x, y)$ 的两个混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在点 (x_0, y_0) 都连续, 则在点 (x_0, y_0) 处有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 。
- 隐函数求导法。
 - 方程左右两边同取全微分。
 - 利用隐函数存在定理: $F(x, y, z) = 0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$ 。
 - 两边对某变量求导, 同级变量为常数。
- 链式法则: 设 $z = f(u, v), u = \varphi(x, y), v = \phi(x, y)$, 则 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$ 。

经典例题

57 设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$ 。

(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 求极限 $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(-1, y)$ 。

解 (1) $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x(xy)^2} \cdot x = x e^{x^3 y^2}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial x} = e^{x^3 y} + 3x^3 y^2 e^{x^3 y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = e + 3e = 4e。$$

【笔记】基本初等函数混合偏导与次序无关: $f''_{xy} = f''_{yx}$

【笔记】 $\int_0^{xy} e^{xt^2} dt \neq e^x \cdot \int_0^{xy} e^{t^2} dt$; 本题无法先对 x 求偏导, 所以考虑交换求导次序

(2) $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(-1, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^{-y} e^{-t^2} dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt。$

$$\text{令 } I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-t^2} dt.$$

【方法 1】 利用二重积分求解。

$$I^2 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\substack{0 \leq x \leq R \\ 0 \leq y \leq R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

利用极坐标可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr \leq \iint_{\substack{0 \leq x \leq R \\ 0 \leq y \leq R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}R} e^{-r^2} r dr$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}R} e^{-r^2} r dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}$$

由夹逼准则可知 $I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。

所以, $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(-1, y) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。

【方法 2】 利用伽马函数求解。

$$-\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = -\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

58 设函数 $u = f(x, y, z), g[\sin x, \ln(1+y), z] = 0, x = e^y$, 其中, f, g 都具有一阶连续偏导

数, 且 $\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dy}$ 。

解

$$\text{【方法 1】 } \frac{du}{dy} = f'_2 + f'_1 \frac{dx}{dy} + f'_3 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dy} + f'_3 \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{g'_1 \cos x}{g'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{g'_2}{(1+y)g'_z}$$

$$\frac{du}{dy} = f'_2 + f'_1 e^y + f'_3 \frac{-g'_1 \cos x \cdot e^y}{g'_z} + f'_3 \frac{-g'_2}{(1+y)g'_z}$$

【方法 2】 全微分法。

由 $u = f(x, y, z), g[\sin x, \ln(1+y), z] = 0, x = e^y$ 分别可得

$$du = f'_1 dx + f'_2 dy + f'_3 dz \quad (1)$$

$$\cos x \cdot g'_1 dx + \frac{1}{1+y} \cdot g'_2 dy + g'_z dz = 0 \quad (2)$$

$$dx = e^y dy \quad (3)$$

联合(1)(2)(3)可得 $\frac{du}{dy} = f'_2 + f'_1 e^y + f'_3 \frac{-g'_1 \cos x \cdot e^y}{g'_z} + f'_3 \frac{-g'_2}{(1+y)g'_z}$ 。

【笔记】将 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 代入 $\frac{du}{dy}$

【笔记】对所有的函数关系取全微分



解题心得

专题 31 多元极值

多元函数极值理解上无深渊,但计算上有波澜,处于计算量极大之列。

普通极值与条件极值花开两朵,各领风骚数百天。从多元隐函数极值,到条件极值应用,再到多元极值与极限结合,本专题汇总核心考法,且计算量巨大。择日不如撞日,既然做到这里了,不如现在就开始狂练计算!

考哥说明



知识清单

1. 普通极值求解。

(1) 先求驻点: $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$ 。

(2) 再判断是否为极值点。

令 $f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C$, 则

(1) $AC - B^2 > 0$ 时, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值, 且 $\begin{cases} \text{当 } A > 0 \text{ 时取极小值} \\ \text{当 } A < 0 \text{ 时取极大值} \end{cases}$ 。

(2) $AC - B^2 < 0$ 时, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 无极值。

(3) $AC - B^2 = 0$ 时, 不能确定 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是否有极值, 还需进一步讨论(一般用极值定义)。

2. 条件极值求解。

先构造拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, 然后解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

所有满足此方程组的解 (x, y, λ) 中 (x, y) 是函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下可能的极值点。

3. 闭区域上的最值: 边界上用条件极值, 区域内用普通极值。

4. 点 (x, y, z) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式: $d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 。

5. 三角函数降幂公式: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ 。

6. 极值定义。

(1) 一元极值定义: 在 x_0 的去心邻域内 $f(x) > f(x_0)$ (或 $f(x) < f(x_0)$) 恒成立。

(2) 二元极值定义: 在 (x_0, y_0) 的去心邻域内 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ (或 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$) 恒成立。

7. 极限局部保号性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 又 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在一个 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 且 $x \neq x_0$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)。

8. 局部函数法: 若存在极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = A$, 则 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $f(x) = Ax^n + o(x^n)$ 。

经典例题

59 已知函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定, 求 $z=z(x, y)$ 的极值。

解

(1) 先求驻点。

方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 两边对 x 求导, 得

$$2xz + (x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z} + 2 = 0 \quad ①$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, 则 $xz + 1 = 0$ 。

方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 两边对 y 求导, 得

$$2yz + (x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z} + 2 = 0 \quad ②$$

令 $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 则 $yz + 1 = 0$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} xz + 1 = 0 \\ yz + 1 = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = y \\ z = -\frac{1}{x} \end{cases},$$

【笔记】联立 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$, 得驻点的坐标

代入原方程知 $\begin{cases} x = y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$, 令 $P_0(-1, -1)$ 。 【笔记】别漏掉题干中的方程, 需解出所有驻点的坐标

(2) 再判断驻点是否为极值点。

方程①两边再对 x 求导, 得 $2z + 2x \frac{\partial z}{\partial x} + 2x \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{z}\right)' \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ 。

把 $\begin{cases} x = y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ 代入, 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{P_0} = -\frac{2}{3} = A$ 。

方程①两边再对 y 求导, 得 $2z \frac{\partial z}{\partial y} + 2y \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1}{z}\right)' \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ 。

把 $\begin{cases} x = y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ 代入, 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 = B$ 。

方程②两边再对 y 求导, 得 $2z + 2y \frac{\partial z}{\partial y} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{z}\right)' \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 。

把 $\begin{cases} x = y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ 代入, 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2}{3} = C$ 。

则 $AC - B^2 = \frac{4}{9} > 0$, 且 $A < 0$, 故 P_0 是极大值点, 且极大值 $z(P_0) = 1$ 。

60 求解下列极值问题。

(1) 求直线 $4x + 3y = 16$ 与椭圆 $18x^2 + 5y^2 = 45$ 之间的最短距离。

(2) 将长为 2 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 求三个图形面积之和的最小值。

解

(1) 设椭圆上的点为 (x, y) , 则点 (x, y) 到直线 $4x + 3y = 16$ 的距离为

$$d = \frac{|4x + 3y - 16|}{5}$$

用距离与椭圆(约束条件) $18x^2 + 5y^2 = 45$ 构造拉格朗日函数:

$$F(x, y) = \frac{(4x + 3y - 16)^2}{25} + \lambda(18x^2 + 5y^2 - 45)$$

【笔记】正值函数 d 与 d^2 具有相同的极值点, d^2 更方便求偏导, 故采用 d^2

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2(4x + 3y - 16)}{25} \times 4 + 36\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2(4x + 3y - 16)}{25} \times 3 + 10\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 18x^2 + 5y^2 - 45 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{10}{11} \\ y_1 = \frac{27}{11} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\frac{10}{11} \\ y_2 = -\frac{27}{11} \end{cases}$$

将上式代入 $d = \frac{|4x + 3y - 16|}{5}$, 可得 $d_1 = 1, d_2 = \frac{27}{5}$ 。即最短距离为 1, 最长距离为 $\frac{27}{5}$ 。(2) 设圆的半径为 x , 正方形的边长为 y , 正三角形的边长为 z 。由题可知: $2\pi x + 4y + 3z = 2$

【笔记】约束条件

其面积和 $S(x, y, z) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2$

【笔记】极值函数

即是求 $S(x, y, z) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2$ 在约束条件 $2\pi x + 4y + 3z = 2$ 下的最小值是否存在。设拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2 + \lambda(2\pi x + 4y + 3z - 2)$,

$$\text{求偏导得} \begin{cases} L'_x = 2\pi x + 2\pi\lambda = 0 \\ L'_y = 2y + 4\lambda = 0 \\ L'_z = \frac{\sqrt{3}}{2} z + 3\lambda = 0 \\ L'_\lambda = 2\pi x + 4y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases} \text{(唯一驻点)}$$

【笔记】只能解驻点, 无法判断

由实际问题可知, 最小值一定存在, 在 $\left(\frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \frac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}\right)$ 取得, 且最小值为 $\frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$ 。

61 若积分 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b \in \mathbf{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$ 。

(1) 则 $a_1 \cos x + b_1 \sin x = (\quad)$ 。

A. $2 \sin x$

B. $2 \cos x$

C. $2\pi \sin x$

D. $2\pi \cos x$

(2) 积分 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$ 在区域 $a^2 + b^2 \leq 1$ 上的最小值为 $(\quad)$ 。

A. $\frac{2}{3}\pi^3 - 5\pi$

B. $\frac{2}{3}\pi^3 - 4\pi$

C. $\frac{2}{3}\pi^3 - 3\pi$

D. $\frac{2}{3}\pi^3 + 5\pi$

解

(1) A。

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x - 2ax \cos x - 2bx \sin x + 2ab \cos x \sin x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x - 2bx \sin x) dx \quad \text{【笔记】奇偶性简化: } \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x dx = 0 \end{aligned}$$

$$\text{其中: } \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \quad \text{【笔记】} \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2\pi \quad \text{【笔记】} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin x dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = 2\pi$$

$$\text{所以 } \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3 + \pi(a^2 + b^2) - 4\pi b。$$

相当于求二元函数 $z = a^2 + b^2 - 4b$ 的最小值点, 显然 $a^2 + b^2 - 4b = a^2 + (b-2)^2 - 4$, 可知当 $a=0, b=2$ 时取得最小值, 得 $2 \sin x$, 故选 A。

(2) C。

$$\text{设函数 } f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx,$$

$$\text{由(1)可知 } f(a, b) = \frac{2}{3}\pi^3 + \pi(a^2 + b^2) - 4\pi b。$$

$$\text{若驻点在区域内, 由 } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = 2\pi a = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b} = 2\pi b - 4\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

容易验证, 点 $(0, 2)$ 不在区域 $a^2 + b^2 \leq 1$ 内部,

【笔记】别漏掉此处的验证!

故最小值一定在边界上取到。

【笔记】连续函数在闭区域内必有最值(包括最大和最小)

$$\frac{2}{3}\pi^3 + \pi(a^2 + b^2) - 4\pi b = \frac{2}{3}\pi^3 + \pi - 4\pi b, \text{ 其中, } b \in [-1, 1],$$

$$\text{所以 } \frac{2}{3}\pi^3 + \pi - 4\pi b \geq \frac{2}{3}\pi^3 - 3\pi, \text{ 故选 C。}$$

62 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值与最小值。

解

【方法 1】作拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4)$ 。

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}, \text{解方程组得 } (x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 2), (x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, 8), \text{故所}$$

求的最大值为 72, 最小值为 6。

【方法 2】问题等价于求 $u = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ 在 $x + y + x^2 + y^2 = 4$ 条件下的最值。设 $F(x, y, \lambda) = u = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + \lambda(x + y + x^2 + y^2 - 4)$,

$$\begin{cases} F'_x = 4x^3 + 4xy^2 + 2x + \lambda(1 + 2x) = 0 \\ F'_y = 4y^3 + 4x^2y + 2y + \lambda(1 + 2y) = 0 \\ F'_\lambda = x + y + x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}, \text{解得 } (x_1, y_1) = (1, 1), (x_2, y_2) = (-2, -2), \text{代入}$$

$z = x^2 + y^2$, 得 $z_1 = 2, z_2 = 8$ 。故所求的最大值为 72, 最小值为 6。

63 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ 。已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是()。

- A. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ B. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$
C. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ D. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

解 D。

作拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, 并记对应 x_0, y_0 的参数 λ 的值为 λ_0 , 则

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

消去 λ_0 , 得 $f'_x(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0) = 0$, 整理得 $f'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{\varphi'_y(x_0, y_0)}f'_y(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0)$ (因为 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$)。若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 故选 D。



解题心得

专题 32 偏导反求原函数

由偏导反求原函数属逆向操作。在过去, 这种考法是一座难以翻越的大山。到如今, 拉近镜头, 此考法只是命题人浩瀚群峰中的一角。难度不大, 小白可完成, 积分很友好, 印刷也很清晰, 只稍加注意常数即可。但这可能只是第一问。

考哥说明



知识清单

1. 由二阶偏导求一阶偏导: $f'_x(x, y) = \int f''_{xx} dx + c(y)$ 或 $f'_x(x, y) = \int f''_{xy} dy + c(x)$ 。
2. 由一阶偏导求多元原函数: $f(x, y) = \int f'_x dx + c(y)$ 。
3. 定积分求旋转体体积。体积微元: $dV = \pi r^2 \cdot dx$ (圆盘), $dV = 2\pi r \cdot y \cdot dx$ (柱壳)。

经典例题

64

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$, $f'_y(x, x) = 2x + 2$, $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$ 。

(1) 求 $f(x, y)$ 。

(2) 求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积。

解

(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$ 左右两边同时对 x 积分, 则

$$\frac{\partial f}{\partial y} = c_1(y)$$

【笔记】非常重要, 此处是对 x 积分, 故广义常数不含 x , 但需含 y

令 $y = x$, 则 $f'_y(x, x) = c_1(x)$

【笔记】利用题干中的初始值确定 $c_1(y)$

又因为 $f'_y(x, x) = 2x + 2$, 所以 $2x + 2 = c_1(x) \Rightarrow c_1(y) = 2y + 2$ 。

$$\text{故 } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2.$$

等式 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2$ 左右两边同时对 y 积分, 则

$$f(x, y) = (y+1)^2 + c_2(x)$$

【笔记】非常重要, 此处是对 y 积分, 故广义常数不含 y , 但需含 x

令 $x = y$, 则有 $f(y, y) = (y+1)^2 + c_2(y)$

【笔记】利用题干中的初始值确定 $c_2(x)$

又因为 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 所以 $c_2(y) = -(2-y)\ln y$,

即 $c_2(x) = -(2-x)\ln x$, 所以 $f(x, y) = (y+1)^2 - (2-x)\ln x$ 。

$$(2) f(x, y) = 0 \Rightarrow (y+1)^2 - (2-x)\ln x = 0$$

$$\text{即 } (y+1)^2 = (2-x)\ln x.$$

易知 $f(x, y) = 0$ 所确定函数的定义域为 $[1, 2]$,

【笔记】定义域由 $(2-x)\ln x \geq 0, x > 0$ 解出

且曲线 $f(x, y) = 0$ 关于 $y = -1$ 对称。

【笔记】给定一个 x , 可求解出两个 y 值(两个值关于 $y = -1$ 对称)

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \pi r^2 dx = \int_1^2 \pi (1+y)^2 dx && \text{【笔记】圆盘法的体积微元 } dV = \pi r^2 dx, \text{ 此处 } r = y - (-1) = y + 1 \\ &= \int_1^2 \pi (2-x) \ln x dx = \pi \left(2\ln 2 - \frac{5}{4} \right) \end{aligned}$$



解题心得

专题 33 偏导数方程

与天斗,其乐无穷,与偏导数方程斗,其乐无穷。求二阶偏导本身就具有很大的计算量,若再与变量替换、化为微分方程等综合。强大的计算量足以让同学们乐此不疲,打着喷嚏,发烧都不休息。本专题总结了偏导数方程的两类核心考法。

考哥说明



知识清单

1. 齐次通解。

(1) 当 λ_1, λ_2 为相异的特征根时,通解为 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 。

(2) 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时,通解为 $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$ 。

(3) 当 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ (复根) 时,通解为 $y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ 。

2. 非齐次特解。

非齐次方程 $y'' + Py' + Qy = f(x)$ 的特解 y^* 求解过程如下。

(1) 变形: 将 $f(x)$ 中的多项式广义化,指数项不变,三角项补全,得到式①。

(2) 同根: 若 $f(x)$ 中指数或三角函数对应的根为 $\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$ 的 k 重根,则 $y^* = x^k \cdot \text{①}$ 。

注意: $y'' + Py' + Qy = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解 $y^* = y_1^* + y_2^*$ 。

其中, y_1^* 为 $y'' + Py' + Qy = f_1(x)$ 的特解; y_2^* 为 $y'' + Py' + Qy = f_2(x)$ 的特解。

3. 非齐次通解的结构。

非齐次的通解 = 齐次通解 + 非齐次特解。

4. 若 $z = f[u(x, y), v(x, y)]$, 则 $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ 与 f 具有相同的复合关系。

5. 若 $z = f(g(x, y))$, 即 $z = f(u), u = g(x, y)$, 则关于 z 偏导数方程可化为常微分方程。

经典例题

65 设二元函数 $z = z(x, y)$ 有二阶连续的偏导数。

(1) 若变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a 。

(2) 若 $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$, 若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式。

解 (1) 由多元复合函数求导法则得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{aligned}$$

代入 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 并整理得

$$6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (10+5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

于是, 令 $6+a-a^2=0$ 得 $a=3$ 或 $a=-2$ 。

【笔记】此时方程已化简为 $(10+5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$

$a=-2$ 时, $10+5a=0$, 故舍去;

【笔记】此时 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \neq 0$ 也可使 $(10+5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$

$a=3$ 时, $10+5a \neq 0$, 此时必有 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$;

因此仅当 $a=3$ 时化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ 。

(2) 由 $z=f(e^x \cos y)$ 知

【笔记】 $f(u)$ 为一元函数, 偏微分方程必可化为常微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(e^x \cos y) \cdot (-e^x \sin y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y \cdot e^x \cos y + f'(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(e^x \cos y) \cdot (-e^x \sin y) \cdot (-e^x \sin y) + f'(e^x \cos y) \cdot (-e^x \cos y)$$

由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$, 代入得

$$f''(e^x \cos y) \cdot e^{2x} = [4f(e^x \cos y) + e^x \cos y] e^{2x}$$

即 $f''(e^x \cos y) - 4f(e^x \cos y) = e^x \cos y$ 。

令 $u = e^x \cos y$, 则 $f''(u) - 4f(u) = u$,

特征方程 $r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = -2$, 齐次方程通解为 $y = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u}$ 。

设特解 $f^* = au + b$, 代入方程 $f''(u) - 4f(u) = u$ 得 $a = -\frac{1}{4}, b = 0$, 所以特解为 $f^* = -\frac{1}{4}u$ 。

原方程的通解为 $f = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{1}{4}u$ 。

由 $f(0)=0, f'(0)=0$, 得 $C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16}$,

所以 $f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$ 。



解题心得

专题 34

偏导应用(仅数学一)

本专题属于最易遗忘的考点之一,但最近几年频繁出现,尤其是旋度这类练习较少的考点,具有很大的区分度,2016年、2018年均有其身影。考生们应加强防范。此外,本专题还融入了曲线旋转后的曲面,集旋度、散度、方向导数、旋转曲面方程、切平面方程、旋转体体积于一身。

考哥说明



知识清单

1. 梯度。

梯度为向量: $\text{grad}f(x, y, z) = (f'_x, f'_y, f'_z)$ 。

2. 方向导数。

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \cos \gamma$$

口诀: 方向导数=梯度乘以单位方向向量。

方向导数最大值为 $|\text{grad}f(x_0, y_0, z_0)|$, 最小值为 $-|\text{grad}f(x_0, y_0, z_0)|$ 。

3. 切向量与法向量。

曲线 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 的切向量为 $(x'(t), y'(t), z'(t))$ 。

曲面 $f(x, y, z)=0$ 的法向量为 (f'_x, f'_y, f'_z) 。

4. 散度与旋度。

设有矢量场 $\mathbf{A}=P(x, y, z)\mathbf{i}+Q(x, y, z)\mathbf{j}+R(x, y, z)\mathbf{k}$ 。

(1) 散度公式: $\text{div}\mathbf{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 。

(2) 旋度公式: $\text{rot}\mathbf{A}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ 。

5. 旋转曲面方程。

(1) 曲线 $f(x, z)=0$ 绕 z 轴所得曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$ 。

(2) 曲线 $f(y, z)=0$ 绕 z 轴所得曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$ 。

6. 定积分求旋转体体积。

体积微元: $dV=\pi r^2 \cdot dx$ (圆盘), $dV=2\pi r \cdot y \cdot dx$ (柱壳)。

经典例题

66 设向量场 $\mathbf{A}=xy^2\mathbf{i}+ye^z\mathbf{j}+x\ln(1+z^2)\mathbf{k}$ 。

(1) 求向量场 $\mathbf{A}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\operatorname{div}\mathbf{A}$ 与旋度 $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ 。

(2) 求函数 $f(x, y, z)=x^2+2y^2+z^2$ 在点 $P(1,1,0)$ 沿该点处 $\mathbf{A}$ 方向的方向导数。

解

$$\begin{aligned} (1) \text{ 直接用散度公式 } \operatorname{div}\mathbf{A}|_P &= \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(ye^z) + \frac{\partial}{\partial z}(x\ln(1+z^2)) \right] \Big|_P \\ &= \left(y^2 + e^z + x \cdot \frac{2z}{1+z^2} \right) \Big|_{(1,1,0)} = 1^2 + e^0 + 1 \cdot \frac{2 \times 0}{1+0^2} = 1+1=2 \end{aligned}$$

$$\text{直接用旋度公式 } \operatorname{rot}\mathbf{A}|_P = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Big|_P = (-ye^z, -\ln(1+z^2), -2xy) \Big|_P = (-1, 0, -2)。$$

(2) 点 $P(1,1,0)$ 沿该点处 $\mathbf{A}$ 方向的方向向量为 $(1,1,0)$ 。

对函数 $f(x, y, z)=x^2+2y^2+z^2$ 求偏导数有

$$f'_x(x, y, z)=2x, \quad f'_y(x, y, z)=4y, \quad f'_z(x, y, z)=2z$$

所以函数 $f(x, y, z)$ 在点 $(1,1,0)$ 处的梯度为 $(2, 4, 0)$ 。

【笔记】梯度公式: (f'_x, f'_y, f'_z)

所以方向导数为 $(2, 4, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = 3\sqrt{2}$ 。

67 由曲线 $\begin{cases} x^2-3y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周得到的旋转面为 Σ_1 , 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面为 Σ_2 。

(1) 求曲面 Σ_2 在点 $(4, 2, 0)$ 处的切平面方程。

(2) 求曲面 Σ_1 与平面 $x=3, x=4$ 围成立体的体积。

解

$$\Sigma_1: x^2-3(y^2+z^2)=4$$

【笔记】曲线 $f(x, y)=0$ 绕 x 轴旋转, 旋转曲面为 $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

$$\Sigma_2: (x^2+z^2)-3y^2=4$$

【笔记】曲线 $f(x, y)=0$ 绕 y 轴旋转, 旋转曲面为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$

$$(1) \Sigma_2: (x^2+z^2)-3y^2=4 \Rightarrow F(x, y, z)=(x^2+z^2)-3y^2-4=0$$

曲面 Σ_2 在点 (x, y, z) 处法向量为 $(F'_x, F'_y, F'_z)=(2x, -6y, 2z)$,

所以曲面 Σ_2 在点 $(4, 2, 0)$ 处的法向量为 $(2, -3, 0)$,

【笔记】 $(8, -12, 0)$ 与 $(2, -3, 0)$ 平行

切平面方程为 $2(x-4)-3(y-2)=0$,

【笔记】切平面: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0, \mathbf{n}=(a, b, c)$

化简后可得 $2x-3y-2=0$ 。

(2) 曲面 Σ_1 与平面 $x=3, x=4$ 围成立体的体积为

$$V = \int_3^4 \pi r^2 dx = \frac{\pi}{3} \int_3^4 (x^2 - 4) dx = \frac{25\pi}{9}$$

【笔记】圆盘法求旋转体体积, $dV = \pi r^2 dx$



解题心得
