

第3章

恒定磁场



扫码看讲课录像

3.1.1-3.1.2

3.1 恒定磁场的基本规律

本节简要地复习大学物理中已经学过的恒定磁场的基本规律。

3.1.1 磁感应强度 B

1. 毕奥-萨伐尔定律

毕奥-萨伐尔定律给出一个电流元产生的磁场

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (3.1)$$

其中 r 是电流元与场点之间的距离, $\mathbf{e}_r$ 是由电流元指向场点的单位矢量。一个线电流回路产生的磁场为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_l \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (3.2)$$

同理,可以写出体电流和面电流产生的磁场

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} dV' \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{J}_s dS' \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (3.4)$$

2. 磁感应线方程

可以仿照电力线方程写出磁感应线方程,在直角坐标系中为

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (3.5)$$

圆柱坐标系中的磁感应线方程为

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\varphi}{B_\varphi} = \frac{dz}{B_z} \quad (3.6)$$

球坐标系中的磁感应线方程为

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{B_\varphi} \quad (3.7)$$

3.1.2 恒定磁场的基本方程

恒定磁场的基本方程也是包括高斯定理和环路定理

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.8)$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i \quad (3.9)$$

其中 $\sum_i I_i$ 是闭合回路 l 内包围的所有电流(包括传导电流和磁化电流)。有磁介质时, 恒定磁场的基本方程可以写为

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.10)$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_{0i} \quad (3.11)$$

其中 $\sum_i I_0$ 是闭合回路 l 内包围的所有传导电流。

下面来证明式(3.10), 为了简化, 只讨论无界真空中的磁场。在直流回路 C 的磁场中任取一闭合曲面 S , 穿过 S 面的磁通量为

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_S \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R}{R^2} \right) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi} \cdot \oint_S \frac{\mathbf{e}_R \times d\mathbf{S}}{R^2} \\ &= \oint_C \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi} \cdot \oint_S \left(-\nabla \frac{1}{R} \times d\mathbf{S} \right) \end{aligned}$$

上式的推导中利用了式(1.101)。利用矢量恒等式 $\oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS = \iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV$ (见附录3)

可得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi} \cdot \iiint_V \nabla \times \nabla \frac{1}{R} dV$$

因为 $\nabla \times \nabla \frac{1}{R} = 0$, 所以

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.12)$$

由高斯定理可以写出式(3.12)的微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.13)$$

下面就来证明式(3.11)。在直流闭合回路 C 的磁场中任取一个闭合回路 L , 如图 3.1 所示, 由毕奥-萨伐尔定律可以写出

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \oint_C \frac{(d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} \\ &= -\frac{I}{4\pi} \oint_L \oint_C \frac{(-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

图 3.1 中的 P 点(场点)是积分路径 L 上的一个点, 电流回路 C 所包围的表面对场点 P 构成的立体角为 Ω 。 P 点沿回路 L 位移 $d\mathbf{l}$ 时, 立体角改变 $d\Omega$, 这同保持 P 点不动, 而回路 C 位移 $-d\mathbf{l}$ 时立体角的改变是完全一样的。从图 3.1 中可以看出, 如果回路 C

位移 $-d\mathbf{l}$, 则回路包围的表面由 S 变为 S' , 表面的增量为 $dS = S' - S = \oint_C (-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}')$, 即图中 S 与 S' 之间的环形表面 ($-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}'$ 是图中阴影部分平行四边形的面积), dS 对 P 点的立体角为

$$d\Omega = \frac{d\mathbf{S} \cdot (-\mathbf{e}_R)}{R^2}$$

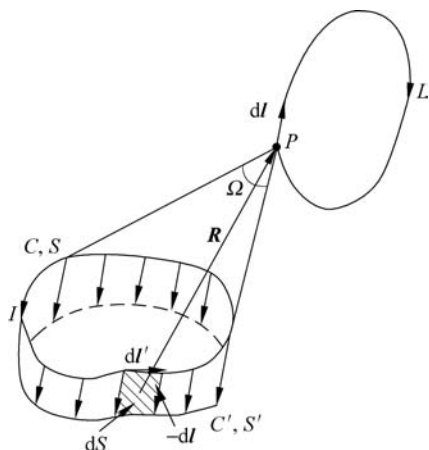


图 3.1 证明安培环路定理示意图

S, S', dS 构成的闭合曲面对 P 点的立体角为零, 即 $-\Omega_1 + \Omega_2 + d\Omega = 0$, 所以立体角的变化为

$$\Omega_2 - \Omega_1 = -d\Omega = \oint_C \frac{(-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}$$

这就是 P 点位移 $d\mathbf{l}$ 时立体角的改变量。 P 点沿着回路 L 移动一周时, 立体角的变化为

$$-\Delta\Omega = \oint_L \oint_C \frac{(-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (3.15)$$

比较式 (3.14) 和式 (3.15) 可得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} \Delta\Omega \quad (3.16)$$

环积分的结果取决于 $\Delta\Omega$, 一般分为两种情况。

(1) 积分回路 L 不与电流回路 C 套链, 如图 3.1 所示。可以看出, 当从某点开始沿闭合回路 L 绕行一周并回到起始点时, 立体角又回复到原来的值, 即 $\Delta\Omega = 0$, 由式 (3.16)

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.17)$$

(2) 若积分回路 L 与电流回路 C 相套链, 即 L 穿过 C 所包围的面 S , 如图 3.2 所示。如果取积分回路的起点为 S 面上侧的 A 点, 终点为在 S 面下侧的 B 点。由于面元对它上表面上的点所张的立体角为 (-2π) , 对下表面上的点所张的立体角为 $(+2\pi)$, 所以 S 对 A 点的立体角为 (-2π) , 对 B 点的立体角为 $(+2\pi)$, $\Delta\Omega = 2\pi - (-2\pi) = 4\pi$, 由

式(3.16)

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} \cdot 4\pi = I \quad (3.18)$$

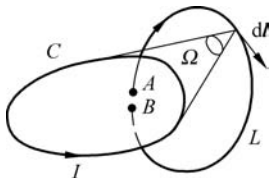


图 3.2 积分回路 L 与电流回路 C 相套链

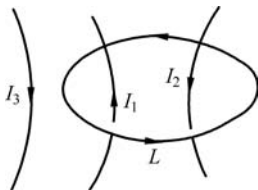


图 3.3 积分回路 L 包围的电流

因为 L 与 C 相套链, I 也就是穿过回路 L 所包围平面 S 的电流, 而且当电流与回路 L 成右手螺旋关系时 I 为正, 反之 I 为负。综合上述两种情况, 可以用一个方程表示为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_i \quad (3.19)$$

其中 $\sum_i I_i$ 是 L 所包围的电流的代数和。在图 3.3 中, $\sum_i I_i = I_1 - I_2$, 积分与 I_3 无关。必须说明的是: 环积分与 I_3 无关, 而被积函数 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 却是 3 个电流回路产生的总磁场强度。

由斯托克斯定理, 式(3.18)的微分形式可以写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.20)$$

式(3.13)和式(3.20)给定了恒定磁场的散度和旋度, 根据亥姆霍兹定理, 恒定磁场的性质是完全确定的。

3.1.3 磁介质的磁化



扫码看讲课
录像 3.1.3

常用公式

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_i \quad (3.21)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (3.22)$$

其中 $\mathbf{M}$ 是磁化强度矢量。

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (3.24)$$

以上两式适用于各向同性的线性介质, 其中 χ_m 是介质的磁化率。面磁化电流密度和体磁化电流密度分别为

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (3.26)$$

磁导率和磁化率的关系可以写为

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (3.27)$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (3.28)$$

其中, μ 是介质的磁导率; μ_0 是真空磁导率; μ_r 是介质的相对磁导率。根据 μ_r 和 χ_m 的取值可以把磁介质分为顺磁质、抗磁质(顺磁质和抗磁质统称为非铁磁质)和铁磁质, 顺磁质的 $\chi_m > 0$ (如铝、锰、氧等), 抗磁质的 $\chi_m < 0$ (如铜、银、氢等), 真空中的 $\chi_m = 0$ 。顺磁质和抗磁质的 χ_m 都非常接近于 0, 所以 μ_r 都非常接近于 1, 因此工程上对于非铁磁性物质 μ_r 都取为 1。铁磁质是非线性介质, 式(3.23)和式(3.24)都不成立, 铁磁质的 $\mu_r \gg 1$ (如铁、钴、镍等), 并且不是常数, 随磁场的强弱变化(从铁磁质的磁滞回线上可以看出)。

关于线性和非线性介质、各向同性和各向异性介质、均匀和非均匀介质的概念与 2.1.6 节中介绍的电介质中的相关概念类似。

例 3.1 证明式(3.26) $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ 。

证明 研究磁介质可以用分子电流模型, 任何物质的分子都是由原子组成的, 原子中原子核带正电, 电子带负电, 绕原子核运动。分子中所有电子的运动可以等效为一个电流 i , 称为分子电流。分子电流与其环绕的面积 S 的乘积称为分子磁矩 $\mathbf{p}_m$, 表达式为

$$\mathbf{p}_m = i\mathbf{S} \quad (3.29)$$

其中, i 和 $\mathbf{S}$ 、 $\mathbf{p}_m$ 的方向满足右手关系, 如图 3.4 所示。没有外磁场时, 由于介质内大量分子无规则的热运动, 各分子磁矩的排列是杂乱无章的, 这时介质没有被磁化。在外磁场中, 每个分子磁矩都受到一个力矩的作用, 使其在一定程度上转向外磁场方向, 介质被磁化, 如图 3.5 所示。外磁场越强, 分子磁矩的排列越整齐, 单位体积中分子磁矩的矢量和就越大, 定义磁化强度矢量等于单位体积中分子磁矩的矢量和

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V} \quad (3.30)$$

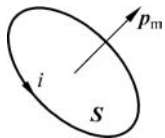


图 3.4 分子电流和分子磁矩

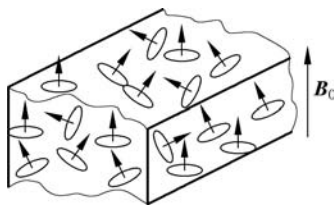


图 3.5 介质磁化

先计算穿过介质内任一曲面 S 的磁化电流 I_m , 曲面 S 的边界为 C , 如图 3.6 所示。可以看出, 在所有的分子电流中, 只有环绕边界 C 的分子电流对穿过 S 面的磁化电流有贡献。为了计算所有环绕边界 C 的分子电流, 采用微积分的方法, 先计算环绕边界 C 上任一线元 $d\mathbf{l}$ 的分子电流。以 $d\mathbf{l}$ 为轴线作一个斜的圆柱面, 底面 ΔS 等于分子电流的面积, 并与分子电流平行, 长度为 $d\mathbf{l}$, 如图 3.7 所示。可以看出, 只有中心在圆柱面内的分子电流环绕 $d\mathbf{l}$, 而中心在圆柱面内的分子电流的数目, 就是圆柱面内分子的数

目。设介质的分子密度为 N , 分子电流为 i , 则环绕线元 $d\mathbf{l}$ 的分子电流对磁化电流的贡献为

$$dI_m = N d\mathbf{l} \cos\theta Si = N d\mathbf{l} \cos\theta p_m$$

由式(3.30)可以写出

$$\mathbf{M} = N p_m \quad (3.31)$$

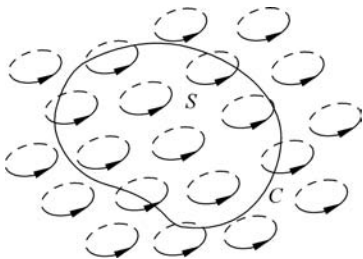


图 3.6 穿过介质内 S 面的磁化电流

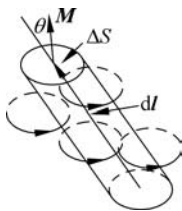


图 3.7 环绕线元 $d\mathbf{l}$ 的分子电流

所以

$$dI_m = M d\mathbf{l} \cos\theta = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

穿过 S 面的总的磁化电流为

$$I_m = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

上式左侧的磁化电流可以写成体磁化电流密度对 S 面的积分, 右侧的线积分可以利用斯托克斯定理变换为面积分, 可得

$$\iint_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S}$$

最后可得

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

均匀磁介质内部的分子电流相互抵消, 介质表面出现磁化电流, 如图 3.8 所示。

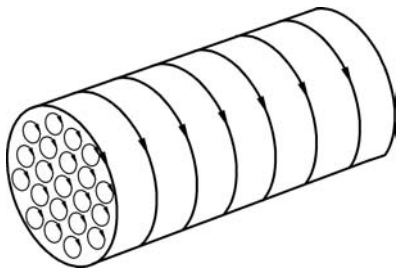


图 3.8 磁介质表面的磁化电流

3.1.4 磁场的计算方法



扫码看讲课

录像 3.1.4

下面复习一下大学物理中已经学过的磁场的几种计算方法。

1. 利用毕奥-萨伐尔定律计算磁场

根据毕奥-萨伐尔定律, 线电流产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (3.32)$$

体电流、面电流产生的磁感应强度, 可以写出类似的方程。利用毕奥-萨伐尔定律计算磁

场, 有下面两类问题。

1) 直接利用毕-萨定律积分

例 3.2 计算长度为 l 的直线电流 I 的磁场。

解 采用圆柱坐标系, 直线电流与 z 轴重合, 直线电流的中点位于坐标原点, 如图 3.9 所示。显然磁场的分布具有轴对称性, 可以只在 φ 等于某一常数的平面内计算磁场。从图 3.9 中可以看出, 直线电流上的任一电流元 $I dl' = e_z I dz'$, 场点 P 的位置矢量 $\mathbf{r} = e_r r + e_z z$, 源点的位置矢量 $\mathbf{r}' = e_z z'$, $I dl'$ 到场点 P 的距离矢量为 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = e_r r + e_z (z - z')$, 代入式(3.32)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{e_z I dz' \times [e_r r + e_z (z - z')]}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= e_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{r dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= e_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ &= e_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

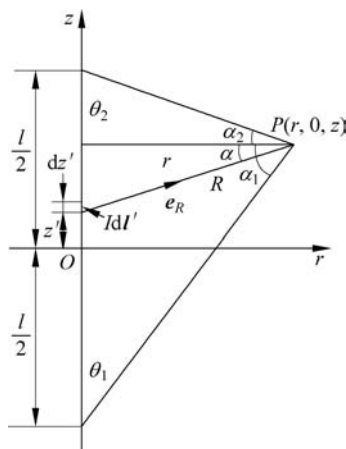


图 3.9 计算直线电流的磁场

式(3.33)中的 $\theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2$ 如图 3.9 所示。一段直线电流的两端无限延长即得到无限长直线电流, 即 $\alpha_1 \rightarrow \pi/2, \alpha_2 \rightarrow -\pi/2$, 利用式(3.33)可以求得无限长直线电流所产生的磁场为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = e_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3.34)$$

例 3.3 求半径为 a 的线电流圆环在其垂直轴线上的磁场。

解 采用圆柱坐标系, 圆环轴线与 z 轴重合, 圆环位于 $z = z'$ 平面内, 如图 3.10 所示。圆环上的任一电流元 $I dl' = e_\varphi I a d\varphi'$, 场点 P 的位置矢量 $\mathbf{r} = e_z z$, 源点的位置矢量 $\mathbf{r}' = e_r a + e_z z'$, $I dl'$ 到场点 P 的距离矢量为 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -e_r a + e_z (z - z')$, $\mathbf{R}$ 的

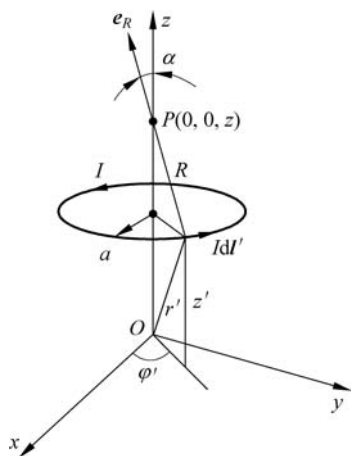


图 3.10 计算载流圆环轴线上的磁场

模为 $R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= e_R R = R \left[-e_r \frac{a}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} + e_z \frac{z - z'}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} \right] \\ &= R(-e_r \sin\alpha + e_z \cos\alpha) \end{aligned}$$

把 $I dl'$ 和 $\mathbf{R}$ 代入式(3.32)可得

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} e_\varphi \times (-e_r \sin\alpha + e_z \cos\alpha) d\varphi'$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi R^2} \left(\mathbf{e}_z \sin\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi' + \cos\alpha \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r d\varphi' \right)$$

上式中 $\sin\alpha = \frac{a}{R}$, $\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r d\varphi' = 0$, 因此

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2R^3} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2[a^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (3.35)$$

圆环中心处的磁场($z = z'$)为

$$\mathbf{B}(z') = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (3.36)$$

2) 利用 1) 中的结论叠加

利用毕奥-萨伐尔定律计算磁场的另一类问题需要利用式(3.34)或式(3.35), 再利用叠加原理计算。

例 3.4 一条扁平的直导体带, 宽为 $2a$, 中心线与轴 z 重合, 流过电流 I , 证明在第一象限内

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha, \quad B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

其中 α, r_1, r_2 如图 3.11 所示。

解 利用微积分的方法求解, 把导体带分割成许多条无限长载流直导线, 第一象限内 P 点的磁场等于所有这些无限长载流直导线在 P 点产生的磁场的叠加。设分割出的任意一条无限长载流直导线的宽度为 dx , 其上的电流为 $dI = \frac{I}{2a} dx$, 在 P 点产生的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi a r}$$

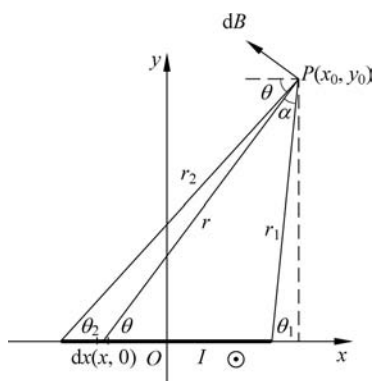


图 3.11 例 3.4 用图

x 分量为

$$dB_x = dB \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi a r} \sin\theta \quad (3.37)$$

式(3.37)中含有 3 个变量 x, r, θ , 作一个变量代换, 由

$$\sin\theta = \frac{y_0}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}}$$

所以

$$d\theta = \frac{y_0 dx}{r^2}, \quad dx = \frac{r^2 d\theta}{y_0}$$

代入式(3.37)可得

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} d\theta$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha$$

由图 3.11 中可以看出, $\theta_1 = \alpha + \theta_2$, B_x 沿 $-x$ 方向。 dB 的 y 分量为

$$dB_y = dB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi a r} \cos\theta \quad (3.38)$$

同样需要作一个变量代换, 由

$$r = \sqrt{y_0^2 + (x_0 - x)^2}, \quad dr = -\frac{(x_0 - x) dx}{r}$$

代入式(3.38)可得

$$dB_y = -\frac{\mu_0 I dr}{4\pi a r}$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

2. 利用安培环路定理计算

具有轴对称、面对称的问题, 计算磁场时可以利用安培环路定理, 没有磁介质时安培环路定理的表达式为

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

有磁介质时安培环路定理的表达式为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_{oi}$$

等式右侧是对环路所包围的所有传导电流求和。

例 3.5 长直导体圆柱中电流均匀分布, 电流密度为 J , 其中有一平行的圆柱形空腔, 如图 3.12 所示。计算空腔内的磁场, 并证明空腔内的磁场是均匀的。

解 设半径为 b 带有空腔的导体中的电流方向为 $\odot$, 可以看成是由半径为 b 的实心导体圆柱(电流方向为 $\odot$)与半径为 a 的实心导体圆柱(电流方向为 $\otimes$)的叠加。半径为 b 的实心导体圆柱单独存在时, 由安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i, \quad B_1 \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 J \pi r_1^2$$

可以解出

$$B_1 = \frac{\mu_0 J r_1}{2}$$

用矢量可以表示为

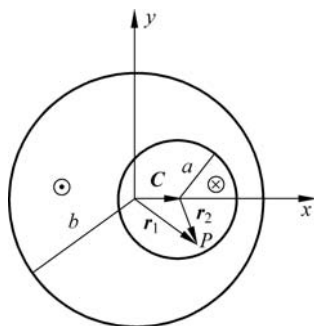


图 3.12 例 3.5 用图

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 J r_1}{2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{r1} = \frac{\mu_0 J}{2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_1$$

半径为 a 的实心导体圆柱单独存在时,由安培环路定理可以解出

$$B_2 = \frac{\mu_0 J r_2}{2}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 J}{2} \mathbf{e}_z \times (-\mathbf{r}_2)$$

空腔内的磁场为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 J}{2} \mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 J}{2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{C}$$

其中 $\mathbf{C}$ 是在如图 3.12 所示的横截面内,由半径为 b 的实心导体圆柱的轴线指向半径为 a 的实心导体圆柱轴线的的一个常矢量,所以空腔内的磁场是均匀的。

例 3.6 铁质的无限长圆管中通有电流 I ,管的内、外半径分别是 a 和 b 。已知铁的磁导率是 μ ,求管壁中、管内、外的磁感应强度 $\mathbf{B}$,并计算管壁中的体磁化电流密度 $\mathbf{J}_m$ 和面磁化电流密度 $\mathbf{J}_{mS}$ 。

解 设圆柱坐标系的 z 轴与圆管的轴线重合,场是轴对称的。电流沿 z 轴方向流动,磁场只有 φ 分量,管壁中,由安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = H_{2\varphi} \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \pi(r^2 - a^2)$$

所以

$$H_2 = e_\varphi \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \frac{I}{2\pi r}, \quad a \leq r \leq b$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H}_2 = e_\varphi \mu \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \frac{I}{2\pi r}, \quad a \leq r \leq b$$

圆管外,由安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = H_{1\varphi} \cdot 2\pi r = I$$

所以

$$\mathbf{H}_1 = e_\varphi \frac{I}{2\pi r}, \quad b < r < \infty$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 = e_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad b < r < \infty$$

圆管内,由安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H}_3 \cdot d\mathbf{l} = H_{3\varphi} \cdot 2\pi r = 0$$

所以

$$H_{3\varphi} = 0, \quad B_{3\varphi} = 0, \quad 0 \leq r < a$$

管壁中($a \leq r \leq b$)的磁化强度为

$$\mathbf{M}_2 = e_\varphi \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \mathbf{H}_2 \right) = e_\varphi \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \frac{I}{2\pi r}$$

管壁中的体磁化电流密度为

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}_2 = \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_{2\varphi}) = \mathbf{e}_z \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

在 $r=a$ 、 $r=b$ 处的面磁化电流密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{mS} \big|_{r=a} &= \mathbf{M}_2 \times (-\mathbf{e}_r) = 0 \\ \mathbf{J}_{mS} \big|_{r=b} &= \mathbf{M}_2 \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_z \left[- \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi b} \right] \end{aligned}$$

3.1.5 磁路

由于磁力线形成闭合回路,因而可以将磁通和闭合电路中的电流相比拟。磁通在磁性材料中流动的闭合通路称为磁路(magnetic circuit)。在电路中电流完全在导线内流动,在导线外部没有任何泄漏。磁性材料中的磁通不能完全被限定在给定的路径中,总有一些漏磁,但是如果磁性材料的磁导率比周围物质的磁导率大得多,绝大部分磁通将集中在磁性材料内,泄漏的磁通可以被忽略。磁路在分析、计算电机、变压器、电磁铁、继电器等器件的问题时有广泛的应用。



扫码看讲课
录像 3.1.5

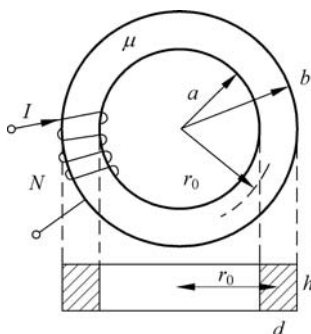


图 3.13 闭合磁路

1. 磁路的欧姆定律

如图 3.13 所示,一个铁心磁环上绕有 N 匝线圈,通以电流 I ,由于铁心的磁导率 $\mu \gg \mu_0$,磁感应线主要在磁环内流通,在忽略环外漏磁的条件下, $\mathbf{H}$ 沿磁环内的积分为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\varphi \cdot 2\pi r = NI$$

可以解出铁心内的 H 和 B 分别为

$$H_\varphi = \frac{NI}{2\pi r}, \quad B_\varphi = \frac{\mu NI}{2\pi r}$$

铁心内的磁通为

$$\Phi = \iint_S B_\varphi dS = \int_a^b \frac{\mu NI}{2\pi r} \cdot h dr = \frac{\mu NI}{2\pi} h \ln \frac{b}{a} = \frac{\mu NI}{2\pi} h \ln \frac{r_0 + \frac{d}{2}}{r_0 - \frac{d}{2}}$$

其中 r_0 是磁环的平均半径,当 $r_0 \gg d$ 时,利用泰勒级数展开,取一级近似值,可得

$$\ln \frac{1 + \frac{d}{2r_0}}{1 - \frac{d}{2r_0}} \approx \frac{d}{r_0}$$

所以

$$\Phi = \frac{\mu NI}{2\pi r_0} h d = \frac{\mu NI}{l} S$$

其中 $l=2\pi r_0$ 是磁环的周长, $S=hd$ 是磁环的横截面积。若令 $NI=e_m$ (安匝数) 为磁动

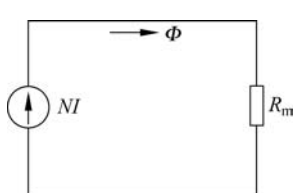


图 3.14 闭合磁路的等效回路

势, $\frac{l}{\mu S}=R_m$ 为磁阻, 则

$$\Phi = \frac{e_m}{R_m} \quad (3.39)$$

模仿电路的概念, 式(3.39)称为磁路的欧姆定律。可以画出如图 3.13 的等效回路, 如图 3.14 所示。由于铁磁材料是非线性介质, 磁导率是磁通密度的函数, 所以由铁磁材料构成的磁路是非线性磁路。

2. 有气隙的磁路

如果在磁环上开一个很小的切口, 即磁路上有一个很窄的空气隙时, 如图 3.15 所示。可以近似地认为 B 线穿过空气隙时仍然均匀地分布在 $S=hd$ 横截面上, 即铁心内的 B 和空气隙中的 B 相等。但是铁心内、外的 H 不同, 分别设为 H_i 和 H_g , 利用安培环路定理可以得到

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_i \cdot (2\pi r_0 - t) + H_g \cdot t = NI$$

上式中的 t 是空气隙宽度 ($t \ll 2\pi r_0$), 由 $H_i = \frac{B}{\mu}$, $H_g = \frac{B}{\mu_0}$, 代入上式可得

$$\frac{B}{\mu} \cdot (2\pi r_0 - t) + \frac{B}{\mu_0} \cdot t = NI$$

上式左边分子和分母同乘以 $S=hd$ 可得

$$\Phi \cdot \left(\frac{2\pi r_0 - t}{\mu S} + \frac{t}{\mu_0 S} \right) = NI$$

因为 $\frac{2\pi r_0 - t}{\mu S} = R_{mi}$, $\frac{t}{\mu_0 S} = R_{mt}$ 分别是铁心部分和空气隙部分的磁阻, 所以铁心和空气隙组成了两个磁阻串联的磁路, 等效回路如图 3.16 所示, 磁路中的磁通量为

$$\Phi = \frac{e_m}{R_{mi} + R_{mt}}$$

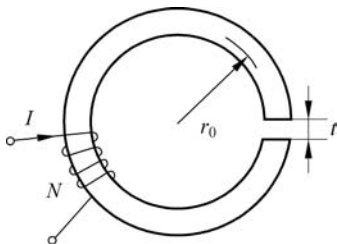


图 3.15 有气隙的磁路

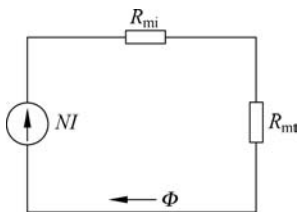


图 3.16 有气隙磁路的等效回路

铁心和空气隙中的磁感应强度为

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{e_m}{S(R_{mi} + R_{mt})} = \frac{NI}{\frac{2\pi r_0 - t}{\mu} + \frac{t}{\mu_0}}$$

铁心和空气隙中的磁场强度分别为

$$H_i = \frac{B}{\mu} = \frac{NI\mu_0}{2\pi r_0\mu_0 + t(\mu - \mu_0)}, \quad H_g = \frac{B}{\mu_0} = \frac{NI\mu}{2\pi r_0\mu_0 + t(\mu - \mu_0)}$$

因为 $\mu \gg \mu_0$, 所以 $H_g \gg H_i$ 。

3.2 恒定磁场的边界条件

3.2.1 两种磁介质界面上的边界条件



扫码看讲课录像

3.2.1-3.2.2

1. $\mathbf{H}$ 切向分量的边界条件

图 3.17 是两种磁介质的分界面,磁导率分别是 μ_1 、 μ_2 ,两种介质中的磁场强度分别是 $\mathbf{H}_1$ 、 $\mathbf{H}_2$,与分界面法线的夹角分别是 θ_1 、 θ_2 ,单位法线矢量 $\hat{n}$ 由介质 2 指向介质 1。在

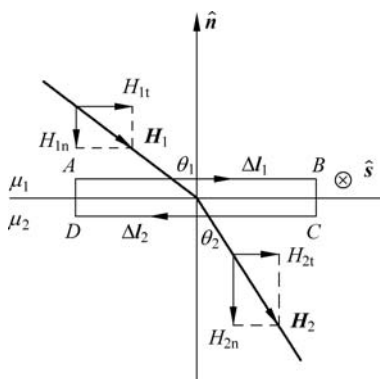


图 3.17 $\mathbf{H}$ 切向分量的边界条件

两种磁介质的分界面上作一个极窄的矩形回路 $ABCD$, $AB = CD = \Delta l$, $BC = DA \rightarrow 0$, 如图 3.17 所示。利用安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_{0i} \quad (3.40)$$

式(3.40)的左边可以写为

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{AB} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{BC} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} \\ &\quad + \int_{DA} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

由于矩形回路极窄, $BC = DA \rightarrow 0$, 上式中第二项和第四项积分为零, 所以

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \mathbf{l}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta \mathbf{l}_2 = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \Delta \mathbf{l}_1$$

由图 3.17 可以看出, $\Delta \mathbf{l}_1 = \hat{s} \times \hat{n} \Delta l$, $\hat{s}$ 是回路包围的曲面 ΔS 的单位法线矢量, 所以上式可以写为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot (\hat{s} \times \hat{n}) \Delta l = [\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] \cdot \hat{s} \Delta l \quad (3.41)$$

式(3.40)的右边可以写为

$$\sum_i I_{0i} = \mathbf{J}_s \cdot \hat{s} \Delta l \quad (3.42)$$

把式(3.41)和式(3.42)代入式(3.40)可得

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (3.43)$$

界面上无面电流时

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad (3.44)$$

所以

$$\mathbf{H}_1 \sin \theta_1 = \mathbf{H}_2 \sin \theta_2$$

从图 3.17 可以看出,上式可以写为

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (3.45)$$

所以在两种磁介质的分界面上, $\mathbf{H}$ 的切向分量是连续的。

2. $\mathbf{B}$ 法向分量的边界条件

由恒定磁场的高斯定理 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 在两种磁介质的分界面上作一个极扁的圆柱形高斯面, 仿照 2.2.1 节中 $\mathbf{D}$ 的法向分量边界条件的推导方法可以导出

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (3.46)$$

或者

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (3.47)$$

3. $\mathbf{B}$ 线和 $\mathbf{H}$ 线在分界面的折射

仿照 2.2.1 节中推导式(2.86)的方法, 可以导出 $\mathbf{B}$ 线和 $\mathbf{H}$ 线在分界面上发生折射的关系式

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (3.48)$$

例 3.7 试导出介质表面磁化电流密度 $\mathbf{J}_{ms}$ 的表达式。

解 设图 3.17 中介质 1 是真空, 介质 2 是磁介质, 介质 2 表面没有传导电流时, 安培环路定理可以写为

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_{mi}$$

上式右边是对环路包围的所有磁化电流求和。用与推导式(3.43)相同的方法可以导出

$$\hat{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu_0 \mathbf{J}_{ms} \quad (3.49)$$

由 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$, 真空中 $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1$, 介质中 $\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2 + \mu_0 \mathbf{M}$ 代入式(3.49)可得

$$\hat{n} \times \mu_0 \mathbf{H}_1 - \hat{n} \times (\mu_0 \mathbf{H}_2 + \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{J}_{ms}$$

由于介质 2 表面没有传导电流, 由式(3.44) $\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0$, 代入上式可得

$$-\hat{n} \times \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{J}_{ms}, \quad \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{n}$$

3.2.2 铁磁质表面的边界条件

约定铁磁质的下标为 2, 另一种介质的下标为 1。对于铁磁质, 边界条件式(3.45)、

式(3.46)和式(3.48)仍然成立。由式(3.46)

$$B_{1n} = B_{2n}$$

在与磁通垂直的界面上,磁感应强度 $\mathbf{B}$ 是连续的。由于 $\mu \gg \mu_0$, 给定 $\mathbf{B}$, 铁磁质内的磁场强度 $H \approx 0$, 由边界条件式(3.45)

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow 0$$

所以铁磁质表面处磁力线(磁感应线)与界面垂直。

3.3 矢量磁位

3.3.1 矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的引入



扫码看讲课录像

3.3.1-3.3.3

由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 和矢量恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, $\mathbf{B}$ 可以写为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.50)$$

$\mathbf{A}$ 称为矢量磁位,单位是特斯拉·米或韦伯/米($T \cdot m$ 或 Wb/m)。由式(3.50)定义的 $\mathbf{A}$ 不是唯一的。例如,设另一矢量 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$, ψ 为任一标量函数,则

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\psi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

所以对于给定的 $\mathbf{B}$, 可引入无数个 $\mathbf{A}$ 。原因是由亥姆霍兹定理,一个矢量场的性质由该矢量场的散度和旋度唯一地确定,式(3.50)只定义了矢量场 $\mathbf{A}$ 的旋度,没有定义散度,所以矢量场 $\mathbf{A}$ 是不确定的。为了使 $\mathbf{A}$ 是唯一的,令

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.51)$$

此时

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\psi) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\psi = \nabla^2\psi \neq 0$$

$\mathbf{A}'$ 不满足式(3.51),使得 $\mathbf{A}$ 是唯一的。所以矢量磁位 $\mathbf{A}$ 是由式(3.50)和式(3.51)引入的,式(3.51)是一个附加的条件,称为库仑规范。

3.3.2 矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的微分方程及其解

1. 矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的微分方程

由 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 和 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$, 可以写出

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$$

把式(3.50)代入可得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

利用式(3.51)可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (3.52)$$

所以矢量磁位 $\mathbf{A}$ 满足矢量的泊松方程,求解时一般先写出分量式。例如,在直角坐标中

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x \quad (3.53)$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu J_y \quad (3.54)$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu J_z \quad (3.55)$$

2. 泊松方程的解

求解矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的泊松方程,利用类比法。静电场中电位满足的泊松方程为

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.56)$$

其解为

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho dV}{r} \quad (3.57)$$

对比式(3.53)和式(3.56),对应的量为 $\Phi \rightarrow A_x, \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \mu, \rho \rightarrow J_x$,利用类比法可以写出

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_x dV}{r}, \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_y dV}{r}, \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_z dV}{r}$$

$\mathbf{A}$ 的矢量表达式为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} dV}{r} \quad (3.58)$$

体电流元产生的矢量磁位为

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{J} dV}{r} \quad (3.59)$$

面电流和面电流元产生的矢量磁位分别为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{J}_s dS}{r} \quad (3.60)$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{J}_s dS}{r} \quad (3.61)$$

线电流和线电流元产生的矢量磁位分别为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_l \frac{I d\mathbf{l}}{r} \quad (3.62)$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}}{r} \quad (3.63)$$

把式(3.62)与比奥-萨伐尔定律对比

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_l \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

可以看出,式(3.62)中 $\mathbf{A}$ 与电流元 $I d\mathbf{l}$ 同方向,计算简便,所以引入 $\mathbf{A}$ 可以简化磁场的计算。

3.3.3 矢量磁位 A 的边界条件

矢量磁位 A 的边界条件为

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad (3.64)$$

式(3.64)与 $B_{1n} = B_{2n}$ 等价。

$$\frac{1}{\mu_1}(\nabla \times \mathbf{A}_1)_t = \frac{1}{\mu_2}(\nabla \times \mathbf{A}_2)_t \quad (3.65)$$

式(3.65)与 $H_{1t} = H_{2t}$ 等价。

这两个边界条件不常用,一般是导出 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 后再利用边界条件。

3.3.4 利用矢量磁位 A 计算磁场

利用矢量磁位 A 计算磁场的基本方法是先由电流的分布($I, \mathbf{J}, \mathbf{J}_s$)求出矢量磁位 A ,再由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 求磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

例 3.8 求长直线电流的矢量磁位 A 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

解 设一直线电流的长度为 l ,如图 3.18 所示,直线电路上任一电流元 $I dz'$ 在 P 点产生的矢量磁位为

$$d\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}}$$

直线电流在 P 点产生的矢量磁位为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \\ &= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\left(\frac{l}{2} - z\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 + r^2}}{-\left(\frac{l}{2} + z\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} + z\right)^2 + r^2}} \end{aligned}$$

$l \rightarrow \infty$ 时

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\approx \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2}}{-\frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2}} \approx \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{l}{r}\right)^2 \\ &= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{l}{r} \end{aligned} \quad (3.66)$$

式(3.66)的近似计算中利用了泰勒级数。如果直线电流是无限长的,则 A 是无限大。这是因为直线电流延伸到无穷远处,不能选无穷远处作矢量磁位的参考点。可以把参考点选在 $r=r_0$ 处,即令



扫码看讲课
录像 3.3.4

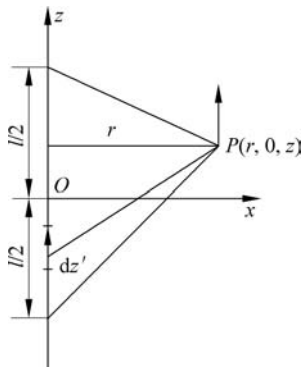


图 3.18 例 3.8 用图

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{l}{r_0} + \mathbf{C} = 0$$

其中 $\mathbf{C}$ 是一个常矢量, $\mathbf{C} = -\mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{l}{r_0}$, 在 $\mathbf{A}$ 的表达式中附加一个常矢量 $\mathbf{C}$, 不会影响 $\mathbf{B}$ 的计算。式(3.66)可以写为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{l}{r} - \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{l}{r_0} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r} \quad (3.67)$$

无限长直线电流产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial A_z}{\partial r} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

与利用毕奥-萨伐尔定律计算的结果式(3.34)相同。

例 3.9 半径为 a 的导线圆环载有电流 I , 如图 3.19 所示, 求空间 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的分布。

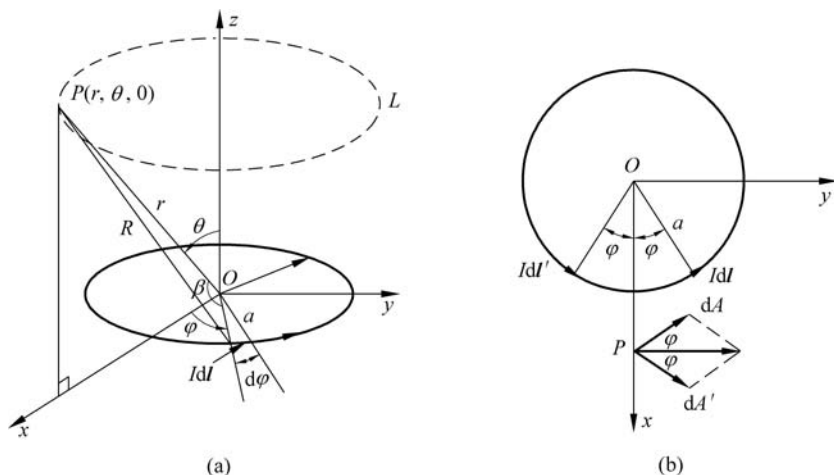


图 3.19 计算载流导线圆环的磁场

解 线电流产生的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I d\mathbf{l}}{R}$$

由电流分布的对称性可以看出: ① $\mathbf{A}$ 只有 φ 分量 $A = A_\varphi$, ② A_φ 与 φ 无关(图 3.19 中在虚线所示的环路上 A_φ 处处相等)。选 $\varphi = 0$ 平面上的一点 P 计算 A_φ , 在导线圆环上任取一电流元 $I d\mathbf{l}$, P 点距圆环中心的距离为 r , 距电流元 $I d\mathbf{l}$ 的距离为 R , 电流元 $I d\mathbf{l}$ 在 P 点产生的矢量磁位为 $d\mathbf{A}_1$ 。与电流元 $I d\mathbf{l}$ 相对于 x 轴对称的另一个电流元 $I d\mathbf{l}'$ 在 P 点产生的矢量磁位为 $d\mathbf{A}_1'$, 如图 3.19 所示。所以电流元 $I d\mathbf{l}$ 和 $I d\mathbf{l}'$ 在 P 点产生的矢量磁位为 $2dA \cos \varphi$, 其中

$$dA = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}}{R}$$

所以导线圆环在 P 点产生的矢量磁位为

$$A = A_{\varphi} = 2 \int_0^{\pi} dA \cos\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{dl \cos\varphi}{R} \quad (3.68)$$

其中

$$dl = a d\varphi \quad (3.69)$$

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos\beta} \quad (3.70)$$

式中

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{ra} \quad (3.71)$$

其中

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x r \sin\theta + \mathbf{e}_z r \cos\theta, \quad \mathbf{a} = \mathbf{e}_x a \cos\varphi + \mathbf{e}_y a \sin\varphi$$

所以

$$\cos\beta = \frac{ra \sin\theta \cos\varphi}{ra} = \sin\theta \cos\varphi \quad (3.72)$$

把式(3.69)和式(3.72)代入式(3.68)可得

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \sin\theta \cos\varphi}} \quad (3.73)$$

式(3.73)中的积分可以用以下几种方法求解：①变换成椭圆积分，②利用计算机作数值计算，③利用近似计算。下面利用近似计算求解。

(1) 若 $r \gg a$ (远场)，式(3.73)中的被积函数为

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \sin\theta \cos\varphi}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \sin\theta \cos\varphi}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin\theta \cos\varphi \right)$$

上式中利用了泰勒级数展开，代入式(3.73)可得

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi r} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{a}{r} \sin\theta \cos\varphi \right) \cos\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 \pi a^2 I \sin\theta}{4\pi r^2} \quad (3.74)$$

磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{2\pi r^3} \cos\theta + \mathbf{e}_{\theta} \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{4\pi r^3} \sin\theta \quad (3.75)$$

(2) 若 $r \ll a$ (近圆心) 或 $\sin\theta \ll 1$ (近轴)，可以证明 $r^2 + a^2 \gg 2ra \sin\theta$ ，式(3.73)中的被积函数为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \sin\theta \cos\varphi}} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2ra \sin\theta \cos\varphi}{r^2 + a^2}}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \left(1 + \frac{ra \sin\theta \cos\varphi}{r^2 + a^2} \right) \end{aligned}$$

代入式(3.73)可得

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{r \sin \theta}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

对于 $\sin \theta \ll 1$ 的情况

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \frac{\mu_0 I a^2 \cos \theta}{2(r^2 + a^2)^{3/2}} + \mathbf{e}_{\theta} \frac{\mu_0 I a^2 (r^2 - 2a^2) \sin \theta}{4(r^2 + a^2)^{5/2}} \\ &\approx \mathbf{e}_r \frac{\mu_0 I a^2 \cos \theta}{2(r^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

利用 $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_{\theta} \sin \theta \approx \mathbf{e}_r \cos \theta$ 和 $r \approx z$, 所以

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

对于 $r \ll a$ 的情况

$$\begin{aligned} A_{\varphi} &= \frac{\mu_0 I r \sin \theta}{4a} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I}{2a} (\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_{\theta} \sin \theta) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a} \end{aligned}$$

例 3.10 空间有一电流分布, $\mathbf{J} = J_0 r \mathbf{e}_z$ ($r \leq a$), 求空间任一点的矢量磁位 $\mathbf{A}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

解 可以利用直接积分法先求出矢量磁位 $\mathbf{A}$, 然后求磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。因为 $\mathbf{J}$ 只有 $\mathbf{e}_z$ 分量, 所以 $\mathbf{A}$ 也只有 $\mathbf{e}_z$ 分量。由于电流分布的轴对称性, $\mathbf{A}$ 只与坐标 r 有关。设 $r < a$ 的区域内矢量磁位为 A_1 , $r > a$ 的区域内矢量磁位为 A_2 , 则 A_1 、 A_2 分别满足一维的泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla^2 A_{1z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} \right) = -\mu_0 J_0 r, \quad r < a \quad (3.76)$$

$$\nabla^2 A_{2z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{2z}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > a \quad (3.77)$$

对式(3.76)、式(3.77)分别积分 2 次可得

$$A_{1z} = -\frac{\mu_0 J_0}{9} r^3 + C_1 \ln r + C_2 \quad (3.78)$$

$$A_{2z} = D_1 \ln r + D_2 \quad (3.79)$$

$r < a$ 区域内的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1 = -\mathbf{e}_{\varphi} \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} = \mathbf{e}_{\varphi} \left(\frac{1}{3} \mu_0 J_0 r^2 - \frac{C_1}{r} \right)$$

因为 $r=0$ 时, $\mathbf{B}_1$ 的数值是有限的, 所以 $C_1=0$, 即

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_{\varphi} \frac{1}{3} \mu_0 J_0 r^2, \quad r < a$$

$r > a$ 区域内的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2 = -\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial A_{2z}}{\partial r} = -\mathbf{e}_\varphi \frac{D_1}{r}$$

由边界条件 $r=a$ 时, $H_{1t} = H_{2t}$, 即 $\left. \frac{B_1}{\mu_0} \right|_{r=a} = \left. \frac{B_2}{\mu_0} \right|_{r=a}$, 所以 $D_1 = -\frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^3$, 代入上式可得

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 J_0 a^3}{3r}, \quad r > a$$

把 C_1 、 D_1 代入式(3.78)、式(3.79)可得

$$A_{1z} = -\frac{\mu_0 J_0}{9} r^3 + C_2, \quad A_{2z} = -\frac{\mu_0 J_0}{3} a^3 \ln r + D_2$$

其中 C_2 、 D_2 与参考点的选取有关。

3.3.5 磁偶极子及其磁场

如果场点到线圈的距离 $r \gg$ 线圈的线度, 任意形状的平面载流线圈可以称为磁偶极子, 如图 3.20 所示。磁偶极子的磁矩定义为

$$\mathbf{p}_m = I\mathbf{S} \quad (3.80)$$

其中, I 是线圈中的电流; $\mathbf{S}$ 是线圈的面积。 I 与 $\mathbf{S}$ 构成右手关系。下面计算磁偶极子的磁场, 由

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}'}{R} \quad (3.81)$$

利用矢量恒等式

$$\oint_l \psi d\mathbf{l} = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \psi dS$$

式(3.81)可以写为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{S'} \hat{\mathbf{n}} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dS'$$

利用矢量等式 $\nabla' \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{e}_R}{R^2}$, 由于 $r \gg$ 线圈的线度, 所以 $R \approx r$, $\mathbf{e}_R \approx \mathbf{e}_r$, 可得

$$\mathbf{A} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{S'} \hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \right) dS' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \iint_{S'} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_r dS'$$

由于 $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_r = \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$, 可提出积分号, 所以

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\theta \cdot S \quad (3.82)$$

磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \frac{\mu_0 IS}{2\pi r^3} \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3} \sin\theta \quad (3.83)$$



扫码看讲课录像

3.3.5-3.4

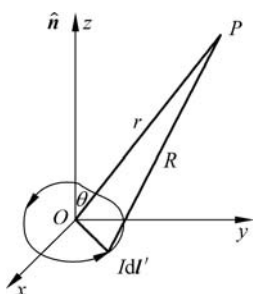


图 3.20 计算磁偶极子的磁场

把 $p_m = IS$ 代入式(3.82)和式(3.83)可得

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r 2\cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta) \quad (3.85)$$

可以看出,磁偶极子在远区产生的 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 仅与 $\mathbf{p}_m$ 、 r 有关,与回路的形状无关。把式(3.85)与第2章式(2.39)对比,可以发现电场和磁场有一定的对偶性。

3.4 标量磁位

在静电场中,引入了电位 Φ ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$), Φ 是标量,引入 Φ 使电场的分析计算简化,恒定磁场中能不能引入标量磁位呢? 一般情况下

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_{oi} \neq 0 \quad \text{或} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \neq 0$$

所以磁场是非保守的,不能引入标量磁位。但是在没有电流分布的区域内

$$\mathbf{J} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (3.86)$$

所以可以引入标量磁位。

1. 标量磁位的引入

由式(3.86)和矢量恒等式 $\nabla \times \nabla\Phi = 0$, $\mathbf{H}$ 可以写为

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi_m \quad (3.87)$$

Φ_m 称为标量磁位,负号表示 $\mathbf{H}$ 的方向, Φ_m 的单位是安培(A)。空间 Φ_m 相等的各点构成曲面称为等磁位面,方程为 $\Phi_m(x, y, z) = C$, 等磁位面与 $\mathbf{H}$ 线处处正交。

2. 标量磁位的微分方程

由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 和 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_m$, 所以

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (-\mu \nabla\Phi_m) = -\mu \nabla^2 \Phi_m = 0$$

可以得到

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \quad (3.88)$$

所以标量磁位满足拉普拉斯方程。

3. 标量磁位 Φ_m 的边界条件

用与讨论电位 Φ 边界条件类似的方法可以导出标量磁位的边界条件

$$\Phi_{m1} = \Phi_{m2} \quad (3.89)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial n} \quad (3.90)$$

式(3.89)与边界条件 $H_{1t} = H_{2t}$ 等价,式(3.90)与边界条件 $B_{1n} = B_{2n}$ 等价。

4. 标量磁位 Φ_m 的计算

计算标量磁位,一般是在给定的边界条件下求解 $\nabla^2 \Phi_m = 0$,在第4章中将详细介绍。

3.5 电感

3.5.1 自感系数和互感系数



扫码看讲课录像

3.5.1-3.5.2

一个线圈中通入电流 I ,它所产生的穿过线圈本身的磁链与线圈中的电流成正比,比例系数称为自感系数,可以表示为

$$\Psi_L = LI \quad (3.91)$$

L 称为自感系数,单位是亨(H)。对于单匝线圈,穿过线圈的磁链与磁通相等;对于密绕的多匝线圈,如果无漏磁,则

$$\Psi_L = \sum_i \Phi_i \quad (3.92)$$

线圈1中通入电流 I_1 ,它所产生的穿过线圈2的磁链与线圈1中的电流成正比,比例系数称为互感系数,可以表示为

$$\Psi_{12} = M_{12} I_1 \quad (3.93)$$

M_{12} 为互感系数,单位也是亨(H)。也可以用线圈2中通入电流 I_2 所产生的穿过线圈1的磁链定义互感系数

$$\Psi_{21} = M_{21} I_2 \quad (3.94)$$

后面将会证明 $M_{12} = M_{21} = M$ 。自感系数 L 只与线圈的大小、形状、匝数及周围的介质等因素有关,互感系数 M 只与两线圈的大小、形状、匝数、周围的介质及相对位置有关。

3.5.2 M 和 L 的计算

1. 利用定义式计算

利用定义式计算自感系数的思路为

$$I \rightarrow \Psi_L \rightarrow L = \frac{\Psi_L}{I}$$

即由线圈中通入的电流 I ,求出所产生的穿过线圈本身的磁链 Ψ_L ,进而求出自感系数。

利用定义式计算互感系数的思路为

$$I_1 \rightarrow \Psi_{12} \rightarrow M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} \quad \text{或} \quad I_2 \rightarrow \Psi_{21} \rightarrow M = \frac{\Psi_{21}}{I_2}$$

即由线圈1(或线圈2)中通入的电流 I_1 (或 I_2),计算所产生的穿过线圈2(或线圈1)的磁链 Ψ_{12} (Ψ_{21}),进而求出互感系数,可以根据问题中的条件选择简便的方法。

2. 利用矢量磁位 $\mathbf{A}$ 计算 L 和 M

1) 利用矢量磁位 $\mathbf{A}$ 计算磁通量

穿过曲面 S 的磁通量为

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.95)$$

把 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 代入式(3.95)

$$\Phi = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.96)$$

其中 l 是曲面 S 的边界,式(3.96)提供了一种利用矢量磁位计算磁通量的方法。

2) 利用矢量磁位 $\mathbf{A}$ 计算互感系数 M

如图 3.21 所示, l_1 、 l_2 是两个载有电流的回路,首先计算 l_1 中的电流 I_1 产生的穿过回路 l_2 的磁链。设 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 是回路 l_1 上的任一电流元, $d\mathbf{l}_2$ 是回路 l_2 上的任一线元,回路 l_1 中的电流 I_1 在 $d\mathbf{l}_2$ 处产生的矢量磁位为

$$\mathbf{A}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1}{r}$$

电流 I_1 产生的穿过回路 l_2 的互感磁链为

$$\Psi_{12} = \Phi_{12} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_{12} \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}$$

两回路间的互感系数为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \quad (3.97)$$

式(3.97)称为诺伊曼公式。当然也可以首先计算 l_2 中的电流 I_2 产生的穿过回路 l_1 的磁链,进而计算两回路间的互感系数,结果为

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} \quad (3.98)$$

比较式(3.97)和式(3.98)就可以证明 $M_{12} = M_{21} = M$ 。

若回路 l_1 、 l_2 的匝数分别为 N_1 、 N_2 ,很容易导出两回路间的互感系数为

$$M = N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \quad (3.99)$$

3) 利用矢量磁位 $\mathbf{A}$ 计算自感系数 L

图 3.22 是一个单匝线圈, l_1 是线圈的中心线, l_2 是线圈的内侧边线,可认为电流沿中心线流动, l_1 上的电流在 l_2 上某一点产生矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{I d\mathbf{l}_1}{r}$$

线圈中电流产生的穿过线圈本身的磁链(即 l_1 上的电流产生的穿

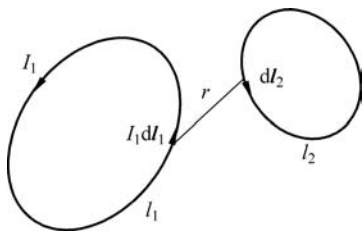


图 3.21 计算互感系数

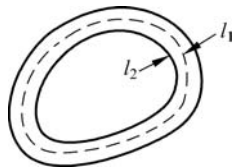


图 3.22 计算自感系数

过 l_2 的磁链)为

$$\Psi_L = \Phi_L = \oint_{l_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}$$

单匝线圈的自感系数为

$$L = \frac{\Psi_L}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \quad (3.100)$$

对于 N 匝密绕线圈, 自感系数为

$$L = N^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \quad (3.101)$$

例 3.11 设双线传输线间的距离为 D , 导线的半径为 a ($D \gg a$), 如图 3.23 所示, 求单位长度的自感。

解 设导线中的电流为 $\pm I$, 在两导线构成的平面上 x 处, 两导线产生的磁感应强度方向相同, 总的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right)$$

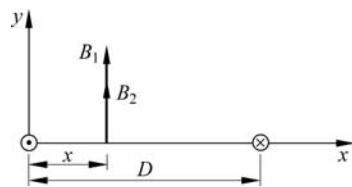


图 3.23 求双线传输线间的自感

两导线间单位长度的磁链为

$$\Psi = \int_a^{D-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{D-a}{a} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{D}{a}$$

双线传输线单位长度的自感为

$$L_0 = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a} \quad (3.102)$$

例 3.12 一个单匝线圈的圆形横截面的半径为 a , 线圈的平均半径为 R , 求单匝线圈的自感。

解 在线圈的中心轴线上取一个线元 $d\mathbf{l}_1 = R d\alpha$, 在线圈的内侧边线上取一个线元 $d\mathbf{l}_2 = (R-a) d\theta$, 两线元之间的距离 $r = \sqrt{R^2 + (R-a)^2 - 2R(R-a)\cos\alpha}$, 如图 3.24 所示, 代入式(3.100)可得

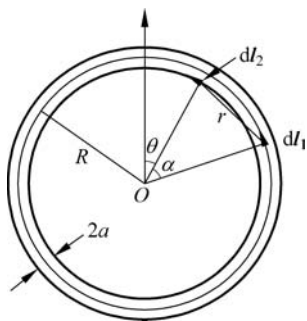


图 3.24 例 3.12 用图

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{\cos\alpha d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R(R-a)\cos\alpha d\theta d\alpha}{\sqrt{R^2 + (R-a)^2 - 2R(R-a)\cos\alpha}} \end{aligned} \quad (3.103)$$

给定导线的半径 a 和线圈的平均半径 R , 由式(3.103)利用近似计算或数值方法可以计算一个单匝圆线圈的自感系数。

例 3.13 两个平行且共轴的单匝圆线圈, 一个半径为

a , 另一个半径为 b , 求两个线圈间的互感。

解 由式(3.97), 两线圈间的互感为

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \quad (3.104)$$

在两线圈上分别取线元 $d\mathbf{l}_1$ 、 $d\mathbf{l}_2$, 相距 r , 从 $d\mathbf{l}_2$ 向大线圈平面作垂线 d , r 在大环平面上的投影为 r_1 , 如图 3.25 所示, 可以算出

$$r = \sqrt{d^2 + r_1^2}, \quad r_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$d\mathbf{l}_1 = b d\psi, \quad d\mathbf{l}_2 = a d\theta$$

$$d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = ab \cos\theta d\psi d\theta$$

代入式(3.104)可得

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ab d\psi d\theta \cos\theta}{(d^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 ab}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{(d^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.105)$$

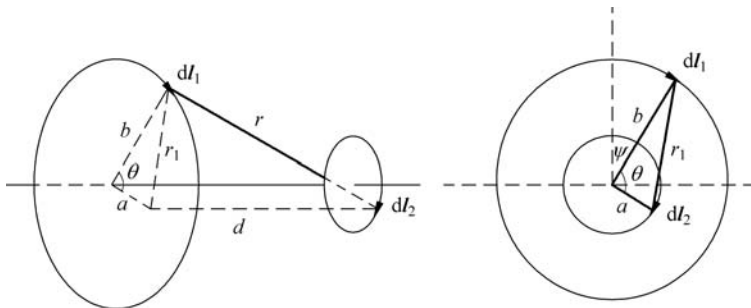


图 3.25 计算两个平行且共轴的圆线圈间的互感

与例 3.9 中的方法类似, 式(3.105)中的积分可以用以下几种方法求解: ① 变换成椭圆积分, ② 利用计算机作数值计算, ③ 利用近似计算。下面利用近似计算求解 $a \ll d$ 的情况, 式(3.105)中的被积函数为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}} &\approx \frac{1}{\sqrt{(d^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{d^2 + b^2}} \left(1 + \frac{ab\cos\theta}{d^2 + b^2} \right) \end{aligned}$$

上式中利用了泰勒级数展开, 代入式(3.105)可得

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + d^2)^{3/2}}$$

3. 内自感

在式(3.91)中由 $\phi_L = LI$ 定义了自感系数, 由导线外部的磁链定义的自感称为外自

感,由导线内部的磁链定义的自感称为内自感。前面讨论的都是外自感,下面通过一个例题介绍内自感。

例 3.14 半径为 a 、长度为 l 的长直圆导线,求内自感。

解 设导线载有电流 I , 电流在横截面上均匀分布, 电流 I 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的方向如图 3.26 所示, 利用安培环路定理可以计算导线内磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的分布

$$\oint_l \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i, \quad B_i \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2$$

$$B_i = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

在与 $\mathbf{B}$ 垂直的横截面上, 穿过图 3.26 中一个窄条的磁通量为

$$d\Phi_i = B_i dS = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} l dr$$

下面求穿过这个窄条的磁链 $d\Psi_i$, 从图 3.26 中可以看出, $d\Phi_i$ 只环绕一部分电流

$$I' = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2}$$

若 $d\Phi_i$ 环绕全部电流 I , 则 $d\Psi_i = d\Phi_i$; 若 $d\Phi_i$ 环绕部分电流 I' , 则 $d\Psi_i = \frac{d\Phi_i}{I} \cdot I'$, 所以穿过这个窄条的磁链 $d\Psi_i$ 为

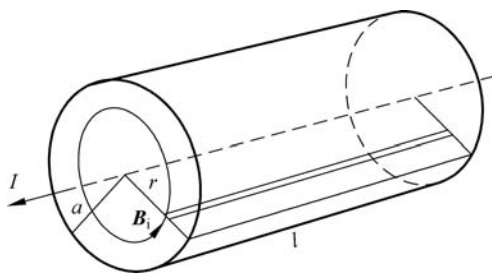


图 3.26 计算内自感

$$d\Psi_i = \frac{r^2}{a^2} d\Phi_i = \frac{\mu_0 I r^3}{2\pi a^4} l dr$$

这段导线的内磁链为

$$\Psi_i = \frac{\mu_0 I l}{2\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

内自感为

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \quad (3.106)$$

可以看出, 导线的内自感仅与导线的长度 l 有关, 与导线的半径 a 无关。

4. 电感的串联和并联

两个电感线圈可以串联或并联使用。如果两个串联线圈产生的磁通方向相同称为**串联相加**,如图 3.27(a)所示;如果两个串联线圈产生的磁通方向相反,称为**串联相反**,如图 3.27(b)所示;如果两个线圈产生的磁通互相垂直,两个线圈之间的互感为零。同理,可以定义两个并联电感线圈的**并联相加**和**并联相反**。

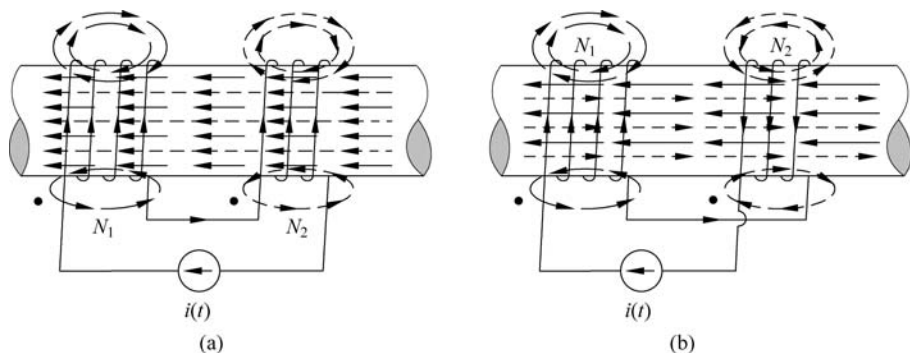


图 3.27 串联相加和串联相反

1) 电感的串联

图 3.28 是两个电感线圈串联的电路,设两个线圈的自感系数分别为 L_1 、 L_2 ,内阻分别为 R_1 、 R_2 ,互感系数为 M ,串联电路中的电流为 $i(t)$ 时,每个线圈两端的电压为

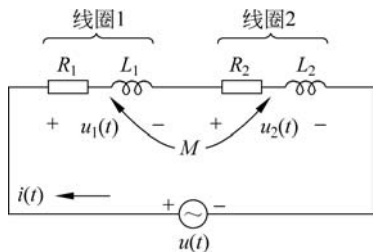


图 3.28 两个电感线圈串联

$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt} + iR_1 \pm M \frac{di}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di}{dt} + iR_2 \pm M \frac{di}{dt}$$

两个线圈串联相加时,以上两式中的互感电压降取正;两个线圈串联相反时,以上两式中的互感电压降取负。两个线圈两端的电压为

$$u = (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt} + i(R_1 + R_2)$$

设 L 为两线圈串联的等效电感, R 为两线圈串联的等效电阻,则

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (3.107)$$

$$R = R_1 + R_2 \quad (3.108)$$

为了判别电路中的电感线圈产生的磁通方向是相加还是相反,一般是通过在线圈的某一端标一个点(·)来识别,如图 3.27 所示。若两个线圈的电流都是从有标示点的一端流出(或流入),则磁通相加,反之则磁通相反。

2) 电感的并联

两个电感线圈并联,如图 3.29 所示,利用与导出式(3.107)类似的方法可以得到两

个电感线圈并联的等效电感为

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M} \quad (3.109)$$

两个电感线圈并联相加时,式(3.109)分母中取负;两个电感线圈并联相反时,式(3.109)分母中取正。

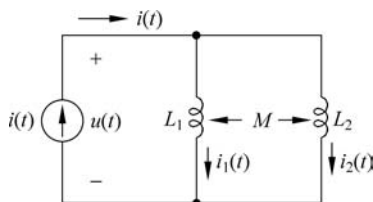


图 3.29 两个电感线圈并联

3.5.3 部分电感

利用 3.5.2 节介绍的方法,可以计算导体回路的电感。但是常常需要计算导体回路中某一部分电路的电感,例如,需要确定接地导体的电感以计算接地噪声电压,或者需要确定印刷电路板(PCB)上电源迹线的电感,从而确定当一块集成电路(IC)状态转换并且产生大的瞬态电流时所出现的电压降的大小。利用部分电感的理论可以确定回路中每一部分的电感。

1. 部分自电感

用式(3.91)计算部分电感时,要在线圈表面上对磁通密度求和并确定磁链的值,理解部分电感最重要的是要能确定这个表面积。

对于一个载流导体上的某一段,计算部分自电感的磁通面积,是以这段导体为一个边界,另一边是无穷远,另外两边是与导体段垂直的两条直线,如图 3.30 所示。

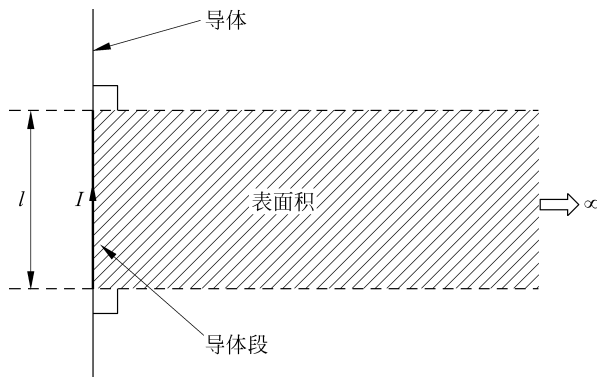


图 3.30 与导体的一段的部分电感相联系的表面积

穿过图 3.30 所示的表面积磁通量等于

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.110)$$

因此,一个长为 l 、半径为 r_1 的导体段的部分自电感可以写为

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{r} dr \quad (3.111)$$

由于是无穷上限的积分,式(3.111)不能直接算出。然而因为磁通密度 $\mathbf{B}$ 等于矢量磁位

$\mathbf{A}$ 的旋度 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 应用 Stokes 定理, 式(3.111)在表面积上的积分可以转换为矢量磁位 $\mathbf{A}$ 在这个表面的边界 C 上的线积分, 所以

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.112)$$

这个表面的边界有四条边: 一条边沿着导线, 两条边与导线垂直, 另一条平行于导体在无穷远处, 如图 3.30 所示。

由于矢量磁位 $\mathbf{A}$ 在无穷远处等于零, 所以沿无穷远处那条边的积分为零。与导线垂直的两条边与矢量磁位 $\mathbf{A}$ 垂直, 因此, 沿这两条边的线积分也等于零。所以, 沿这个表面边界的积分就简化为仅在与导线相邻的表面的那条边从 a 点到 b 点的线积分。因此, 式(3.112)简化为

$$\phi = \int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.113)$$

这个积分是有限的。对于一个长为 l 、半径为 r_1 的圆导体段, 部分自电感为

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{r_1} - 1 \right) \quad (3.114)$$

2. 部分互电感

两段任意导体之间的部分互电感可以用与前面计算导体的部分自电感相似的方法来确定。部分互感磁通量的面积: 一条边是导体段 2, 另一条边在无穷远处, 剩余的两条边是与导体段 1 垂直的两条直线, 如图 3.31 所示。

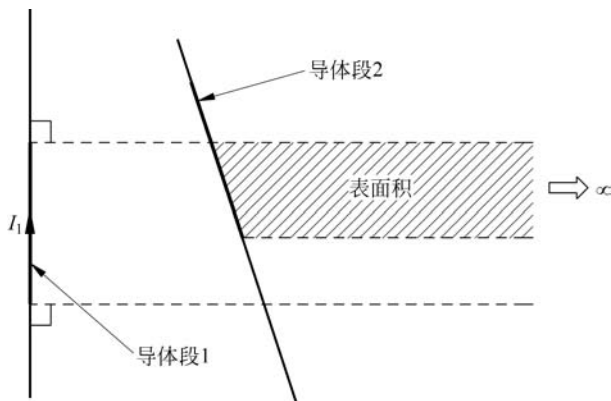


图 3.31 与两导体段的部分互感相关的表面积

图 3.31 表示与两个共面、不平行的导体段相关的部分互感的通量面积。两导体段共面不是必需的, 但是如果共面, 分析会简化。

考虑如图 3.32 所示两共面、平行的导体段的情况, 间距为 D 。计算电流 I_1 产生的穿过部分互感表面积(导体 2 和无穷远之间的平面)的通量, 除以电流 I_1 , 得出两导体段之间的部分互感为

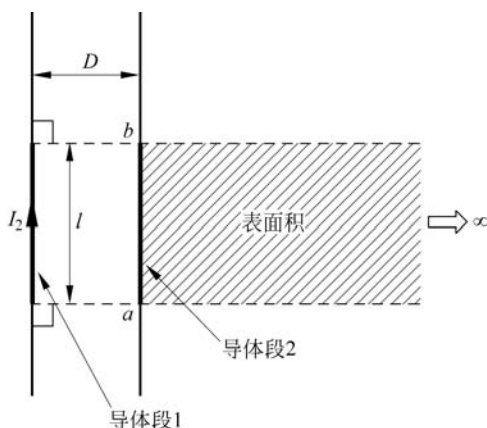


图 3.32 两个共面平行导体段的例子

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \int_D^{\infty} \frac{1}{r} dr \quad (3.115)$$

这里 l 是载流导体段的长度。

这个无穷积分又不能直接计算,与部分自电感的情况一样,可以利用 Stokes 定理转化为矢量磁位 $\mathbf{A}$ 在表面边界上的线积分。矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的积分只需要在与导体段 2 邻近的表面的那条边上计算从 a 点到 b 点的积分,因为在其他三条边上的积分为零。

对于两个相同的长为 l 、距离为 D 、平行放置的圆导体段,部分互感的无穷级数表达式为

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{D} - 1 + \frac{D}{l} + \frac{1}{4} \frac{D^2}{l^2} + \dots \right) \quad (3.116)$$

如果 $D \ll l$, 式(3.116)简化为

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{D} - 1 \right) \quad (3.117)$$

3. 净余部分电感

任何导体段的净余部分电感 L_{np} 等于该段的部分自电感加上或减去与附近所有载流导体的部分互电感。互感的符号取决于电流的方向,如果两导体段中电流的方向相同,则部分互感项的符号为正;如果两导体段中电流的方向相反,则符号为负。两正交的导体段之间的部分互感为零。

如果一个回路由许多段导体构成,对每个导体段的净余部分电感(包括自感和互感)求和,结果就是回路的电感。

例 3.15 一矩形回路如图 3.33 所示,导体的半径是 r_1 ,求回路的电感。

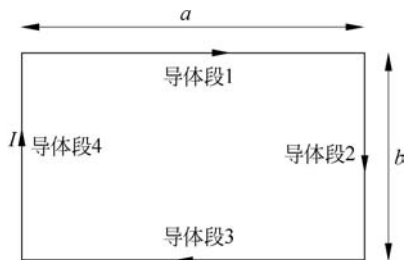


图 3.33 有四个导体段的矩形回路

解: 每条边都是一个导体段, 回路的净余部分电感为

$$L_{\text{loop}} = (L_{p11} - L_{p31}) + (L_{p22} - L_{p42}) + (L_{p33} - L_{p13}) + (L_{p44} - L_{p24}) \quad (3.118)$$

其中 L_{pii} 是每个导体段的部分自电感, L_{pji} 是每个导体段的部分互感。

将式(3.114)代入式(3.118)中的每个部分自电感, 式(3.117)代入每个部分互感, 可以得出矩形回路的电感为

$$L_{\text{loop}} = \frac{\mu}{\pi} \left(b \ln \frac{a}{r_1} + a \ln \frac{b}{r_1} \right) \quad (3.119)$$

这个等式忽略了出现在回路拐角处磁场的边缘效应。Grover(1946)给出了以下矩形回路电感的更精确的公式

$$L_{\text{loop}} = \frac{\mu}{\pi} \left[a \ln \frac{2a}{r_1} + b \ln \frac{2b}{r_1} + 2\sqrt{a^2 + b^2} - a \sinh^{-1} \frac{a}{b} - b \sinh^{-1} \frac{b}{a} - 2(a + b) + \frac{\mu}{4}(a + b) \right] \quad (3.120)$$

对于如图 3.33 所示的矩形回路, 令 $a = 1\text{m}$, $b = 0.5\text{m}$, $r_1 = 0.0001\text{m}$ 。由式(3.119)得出的回路电感是 $5.25\mu\text{H}$, 由式(3.120)得出的回路电感是 $4.97\mu\text{H}$, 二者的差别是由回路拐角处的边缘效应造成的。

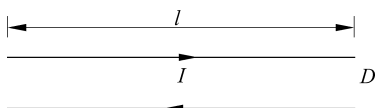


图 3.34 两个不同直径的平行导体

例 3.16 研究间隔很近的两个导体的部分电感, 如图 3.34 所示。假设每个导体的长度 l 都远远大于两导体的间距 D 。导体的半径都是 r , 两导体中的电流方向相反。

解: 两个导体的净余部分电感为

$$L = (L_{p11} - L_{p21}) + (L_{p22} - L_{p12}) \quad (3.121)$$

根据对称性, $L_{p11} = L_{p22}$, $L_{p21} = L_{p12}$, 因此

$$L = 2(L_{p11} - L_{p21}) \quad (3.122)$$

将式(3.114)代入 L_{p11} , 将式(3.117)代入 L_{p12} 可得

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\ln \frac{2l}{r} - 1 - \ln \frac{2l}{D} + 1 \right) \quad (3.123)$$

除以 l 并且把其中各项展开, 可以得到两个导体单位长度上的回路电感为

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{r} \quad (3.124)$$

导体 2 的净余部分电感等于

$$L_{np2} = L_{22} - L_{12} \quad (3.125)$$

把式(3.114)代入 L_{22} , 把式(3.117)代入 L_{12} , 得到导体 2 的净余部分电感为

$$L_{np2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{r} - \ln \frac{2l}{D} \right) \quad (3.126)$$

式(3.126)指出了一个重要事实: 如果载有大小相等方向相反电流的两导体相互靠近在一起时, 导体的净余部分电感将会减少, 这种方法是减小电感的一种实际方法。如果导体 2 是接地导体, 导体 1 是信号导体, 那么接地电感不仅是接地导体特性的函数, 而

且是接地导体和信号导体之间间距的函数——信号导体与接地导体越靠近,接地电感就越小。

3.6 磁场的能量和力

3.6.1 电流回路系统的能量



扫码看讲课录像

3.6.1-3.6.2

一个电流回路系统的能量等于在建立该系统的过程中电源做的功。如图 3.35 所示,设第 j 个回路中的电流 i_j 由 0 开始增大,穿过第 j 个回路的磁通量也增大,回路中出现感应电动势,根据楞次定律,感应电动势阻碍回路中电流的增大,电源必须克服感应电动势做功,这部分功就转变成系统的磁场能量。第 j 个回路中的电流 i_j 增大时,回路中出现的感应电动势为

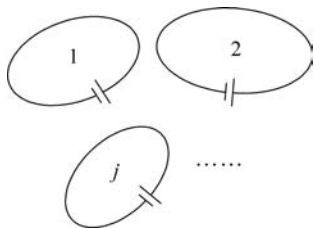


图 3.35 电流回路系统的能量

$$e_j = -\frac{d\Psi_j}{dt} \quad (3.127)$$

克服感应电动势 e_j 需要的外加电压为

$$u_j = -e_j = \frac{d\Psi_j}{dt}$$

dt 时间内电源对回路 j 做的功(即非静电力搬运电荷 dq_j 做的功)为

$$dW_j = u_j dq_j = \frac{d\Psi_j}{dt} i_j dt = i_j d\Psi_j$$

dt 时间内电源对整个系统(设有 N 个回路)做的功为

$$dW_m = \sum_{j=1}^N i_j d\Psi_j \quad (3.128)$$

下面计算 $d\Psi_j$, 穿过系统中第 j 个回路的磁链可以写为

$$\Psi_j = \sum_{k=1}^N M_{kj} i_k \quad (3.129)$$

$k \neq j$ 时, M_{kj} 是互感系数; $k = j$ 时, M_{kj} 是自感系数, 所以

$$d\Psi_j = \sum_{k=1}^N M_{kj} di_k$$

把上式代入式(3.128)可得

$$dW_m = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N i_j M_{kj} di_k \quad (3.130)$$

对于线性介质中的磁场,建立某一电流回路系统电源做的功是一定的,与建立该电流回路系统的过程无关。设每个回路中的电流都按比例均匀增大,则在任一时刻各回路中的电流可以写为

$$i_j(t) = \alpha(t) I_j, \quad i_k(t) = \alpha(t) I_k, \quad di_k = I_k d\alpha$$

上式中的 $\alpha(t)$ 由 0 均匀增大到 1。把上式代入式(3.130)可得

$$dW_m = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_{kj} I_j I_k \alpha d\alpha$$

电路回路系统的总能量为

$$W_m = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_{kj} I_j I_k \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_{kj} I_j I_k \quad (3.131)$$

把式(3.129)代入式(3.131)可得

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_{kj} I_k I_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \Psi_j \quad (3.132)$$

式(3.132)与导体系统的能量式(2.128)形式上相同。由式(3.96),式(3.132)可以写为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \oint_{l_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_j \quad (3.133)$$

对于体电流分布,电流系统的总能量可以写为

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (3.134)$$

例 3.17 计算两个线圈组成的电流回路系统的能量,两个线圈的电流分别为 I_1 、 I_2 。

解 穿过两个线圈的磁链分别为

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{21}$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{12}$$

其中, Ψ_{11} 是线圈 1 中的电流产生的穿过线圈 1 的磁链; Ψ_{21} 是线圈 2 中的电流产生的穿过线圈 1 的磁链; Ψ_{22} 是线圈 2 中的电流产生的穿过线圈 2 的磁链; Ψ_{12} 是线圈 1 中的电流产生的穿过线圈 2 的磁链,正号表示两磁链方向相同,负号表示两磁链方向相反。由式(3.132),该电流回路系统的能量为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \Psi_1 I_1 + \frac{1}{2} \Psi_2 I_2 \\ &= \frac{1}{2} \Psi_{11} I_1 \pm \frac{1}{2} \Psi_{21} I_1 + \frac{1}{2} \Psi_{22} I_2 \pm \frac{1}{2} \Psi_{12} I_2 \end{aligned} \quad (3.135)$$

由自感系数和互感系数的定义可得

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1}, \quad L_2 = \frac{\Psi_{22}}{I_2}, \quad M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1}, \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2}$$

其中, $M_{12} = M_{21} = M$, 代入式(3.135)可得

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm M I_1 I_2 \quad (3.136)$$

本题也可以用式(3.131)计算,对于两个电流回路的系统,式(3.131)中, $j=1$ 时, $k=1$, $k=2$, 可以写出 2 项

$$\frac{1}{2}M_{11}I_1^2 \pm \frac{1}{2}M_{21}I_1I_2$$

$j=2$ 时, $k=1, k=2$, 又可以写出 2 项

$$\pm \frac{1}{2}M_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}M_{22}I_2^2$$

因为 $M_{11}=L_1, M_{12}=M_{21}=M, M_{22}=L_2$, 所以

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \pm MI_1I_2$$

3.6.2 磁场的能量

把 $\mathbf{J}=\nabla\times\mathbf{H}$ 代入式(3.134)可得

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV - \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

V 是磁场 $\neq 0$ 的整个空间区域, S 是包围 V 的曲面, 可取为无限大, 在 ∞ 处, $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{H}$ 都趋近于 0, 所以磁场的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (3.137)$$

磁场的能量密度为

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (3.138)$$

对于各向同性的线性介质, 磁场的能量密度可以写为

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (3.139)$$

例 3.18 长同轴线的横截面如图 3.36 所示, 设内、外导体的横截面上电流均匀分布, 求单位长度内的磁场能量和电感。

解 先用安培环路定理求各区域内的磁场, 在 $r \leq a$ 的区域内

$$B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2, \quad \mathbf{B}_1 = e_\varphi \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

在 $a \leq r \leq b$ 的区域内

$$B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 I, \quad \mathbf{B}_2 = e_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在 $b \leq r \leq c$ 的区域内

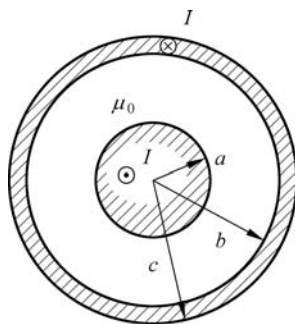


图 3.36 例 3.18 用图

$$B_3 \cdot 2\pi r = \mu_0 \left[I - I \left(\frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) \right], \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right)$$

在 $r > c$ 的区域内磁场为零。由磁场的能量密度 $w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$, 可以计算出各区域单位长度内的磁场能量分别为

$$W_{m1} = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^a B_1^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^a \left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \right)^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

$$W_{m2} = \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} W_{m3} &= \frac{1}{2\mu_0} \int_b^c \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right)^2 \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] \end{aligned}$$

同轴线单位长度内的总磁能 $W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} = \frac{1}{2} L_0 I^2$, 所以单位长度的电感为

$$L_0 = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right]$$

其中第一项是内导体单位长度的内自感, 与式(3.106)相同; 第二项是内、外导体间单位长度的电感, 称为主电感; 第三项是外导体单位长度的内自感。

3.6.3 磁场力

1. 利用安培力和洛伦兹力公式计算磁场力



扫码看讲课
录像 3.6.3

1) 载流导线在磁场中受的力——安培力

一个电流元在磁场中受的安培力为

$$d\mathbf{f} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (3.140)$$

一个载流回路在磁场中受的安培力为

$$\mathbf{f} = \int_l I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (3.141)$$

体电流和面电流在磁场中受的安培力分别为

$$\mathbf{f} = \int_v \mathbf{J} dV \times \mathbf{B} \quad (3.142)$$

$$\mathbf{f} = \int_s \mathbf{J}_s d\mathbf{S} \times \mathbf{B} \quad (3.143)$$

2) 载流回路之间的相互作用力

电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 对电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的作用力为

$$d\mathbf{f}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_r)}{r^2} \quad (3.144)$$

其中, r 是两电流元之间的距离; $\mathbf{e}_r$ 是由电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 指向电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的单位矢量。两载流回路之间的相互作用力可以写为

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_r)}{r^2} \quad (3.145)$$

式(3.145)是确定电磁单位制中的基本单位——电流单位的依据。设有两条载有恒定电流 I 的无限长平行直导线, 距离为 d , 如图 3.37 所示, 作用在单位长度一段导线上的力可由式(3.145)计算得到

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I^2}{d} \quad (3.146)$$

式(3.146)中, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, 当 $d = 1\text{m}$, 每米导线受的力为 $f = 2 \times 10^{-7} \text{ N}$ 时, 导线上的电流即为 1A, 这就是国际单位制(SI)中电磁基本单位安培的定义。

根据式(3.145)可以制成一种绝对电流计, 又称为安培秤, 如图 3.38 所示, 可以通过单纯力学量的测量确定电流的值。

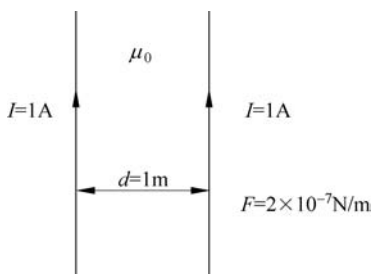


图 3.37 电磁基本单位安培的定义

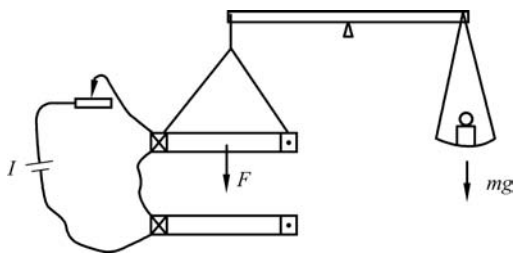


图 3.38 安培秤

3) 运动电荷在磁场中受的力——洛伦兹力

运动电荷在磁场中受的洛伦兹力为

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.147)$$

其中 $\mathbf{v}$ 是 q 在磁场 $\mathbf{B}$ 中运动的速度。

2. 利用虚位移原理计算磁场力

几个电流回路的系统, 设除第 i 个回路外, 其余都固定不动, 第 i 个回路也只有一个广义坐标 g 变化, 则所有电源给系统提供的能量 dW 等于系统磁场能量的增量 dW_m 再加上广义磁场力做的功 $f dg$, 可以表示为

$$dW = dW_m + f dg \quad (3.148)$$

式中, f 是广义磁场力; g 是广义坐标。 f 若是力, g 就是在力的方向上移动的距离; f 若是力矩, g 就是在力矩的作用下转动的角度。

若各回路的磁链不变, 各回路中没有感应电动势, 电源不需要克服感应电动势做功,

$dW=0$, 所以

$$f dg = -dW_m \quad f = -\frac{\partial W_m}{\partial g} \bigg|_{\Psi_j=C} \quad (3.149)$$

若各回路中的电流不变 $I_j=C$, 由式(3.128), dt 时间内电源对各回路做的功为

$$dW = \sum_j I_j d\Psi_j \quad (3.150)$$

由式(3.132), 电流回路系统的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_j I_j \Psi_j$$

所以

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum_j I_j d\Psi_j = \frac{1}{2} dW \quad (3.151)$$

把式(3.150)和式(3.151)代入式(3.148)可得

$$f dg = dW - dW_m = dW_m$$

所以磁场力为

$$f = \frac{\partial W_m}{\partial g} \bigg|_{I_j=C} \quad (3.152)$$

对于两个电流回路的系统, 系统的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \pm M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

若一个回路发生位移 dg 时, L_1, L_2 不变, 磁场力为

$$f = \frac{\partial W_m}{\partial g} \bigg|_{I_j=C} = \pm I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial g} \quad (3.153)$$

例 3.19 图 3.39 表示一块电磁铁, 线圈的匝数为 N , 电流为 I , 铁心中磁通为 Φ , 铁心的横截面为 S , 求对衔铁的举力。

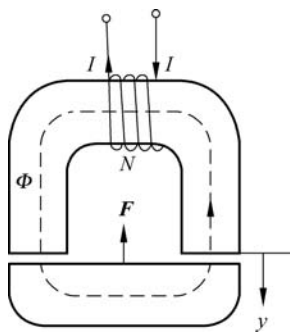


图 3.39 例 3.19 用图

解法一 令衔铁产生一虚位移 dy (向下), 调节电源的电压保持磁路中的 Φ 恒定, 衔铁位移将引起空气隙中磁能的变化(铁心与空气隙中的 B 相等, 由 $w_m = \frac{B^2}{2\mu}$ 可知铁心中磁能密度远小于空气隙中的磁能密度, 所以铁心中的磁能可以忽略), 因此磁能的变化为

$$dW_m = 2 \left(\frac{B^2}{2\mu_0} S dy \right) = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} dy$$

所以保持磁路中的 Φ 恒定, 对衔铁的举力为

$$F = -e_y \frac{\partial W_m}{\partial y} = -e_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}$$

负号表示这个力的方向与 e_y 方向相反, 即为吸引力。

解法二 令线圈中的电流不变, 用 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 表示线圈总的磁能, 衔铁产生一个虚位移 dy (向下), 将引起 Φ 和 L 的改变。由磁路的欧姆定律可以写出

$$\Phi = \frac{NI}{R_{\text{mi}} + \frac{2y}{\mu_0 S}}, \quad L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2}{R_{\text{mi}} + \frac{2y}{\mu_0 S}}$$

其中 R_{mi} 是铁心的磁阻, $\frac{2y}{\mu_0 S}$ 是两个空气隙的磁阻。

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_y \left. \frac{\partial W_{\text{m}}}{\partial y} \right|_{I_j=C} = \mathbf{e}_y \frac{I^2}{2} \frac{dL}{dy} = -\mathbf{e}_y \frac{1}{\mu_0 S} \left(\frac{NI}{R_{\text{mi}} + \frac{2y}{\mu_0 S}} \right)^2 = -\mathbf{e}_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}$$

与解法一中的结果相同。

例 3.20 一平面载流线圈中的电流为 I_1 , 面积为 S , 置于均匀外磁场 $\mathbf{B}$ 中, 线圈的法线矢量与 $\mathbf{B}$ 的夹角为 α , 如图 3.40 所示, 求线圈受的力矩。

解法一 设均匀外磁场是由电流 I_2 产生的, 线圈与磁场的互感磁能为

$$W_{\text{m}} = MI_1 I_2 = I_1 \psi_{21} = I_1 \cdot BS \cos \alpha$$

线圈受的力矩为

$$T = \frac{\partial W_{\text{m}}}{\partial \alpha} \bigg|_{I_j=C} = -BSI_1 \sin \alpha = -Bp_{\text{m}} \sin \alpha$$

用矢量可以表示为 $\mathbf{T} = \mathbf{p}_{\text{m}} \times \mathbf{B}$ 。其中载流线圈的磁偶极矩为

$$\mathbf{p}_{\text{m}} = SI_1 \quad (3.154)$$

解法二 线圈与外磁场的互感系数为

$$M = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{BS \cos \alpha}{I_2}$$

线圈受的力矩为

$$T = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \alpha} = -I_1 BS \sin \alpha$$

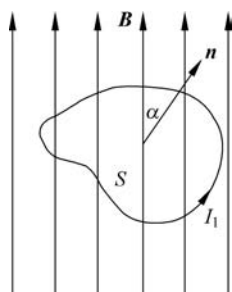


图 3.40 例 3.20 用图

3.7 恒定磁场的应用(电子资源)

3.7.1 磁屏蔽

3.7.2 磁记录

3.7.3 回旋加速器

3.7.4 磁聚焦

3.7.5 等离子体的磁约束

3.7.6 电磁传感器

3.7.7 霍尔效应及应用



扫码看讲课录像

3.7 恒定磁场的应用



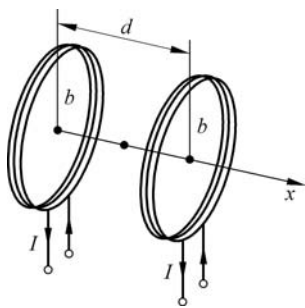
扫码阅读

3.7 恒定磁场的应用

第3章习题

3-1 一个半径为 a 的导体球带电荷量为 Q , 以匀角速度 ω 绕一个直径旋转, 求球心处的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

3-2 两个相同的半径为 b , 各有 N 匝的同轴线圈, 相距 d , 如图题 3-2 所示。电流 I 以相同方向流过两个线圈。



图题 3-2

(1) 求两个线圈中点处的 $\mathbf{B} = e_x B_x$;

(2) 证明: 在中点处 dB/dx 等于零;

(3) 使中点处 $d^2 B_x / dx^2$ 也等于零, 则 b 和 d 之间应有何种关系。

(这样一对线圈可用于在中点附近获得近似的均匀磁场, 称为亥姆霍兹线圈)

3-3 若无限长半径为 a 的圆柱体中电流密度 $\mathbf{J} = e_z (r^2 + 4r)$, $r \leq a$, 试求圆柱体内、外的磁感应强度。

3-4 下面的矢量函数中哪些可能是磁场? 如果是, 求其源变量 $\mathbf{J}$ 。

(1) $\mathbf{H} = e_r ar$ (圆柱坐标);

(2) $\mathbf{H} = e_x (-ay) + e_y ax$;

(3) $\mathbf{H} = e_x ax - e_y ay$;

(4) $\mathbf{H} = e_\varphi ar$ (圆柱坐标)。

3-5 半径为 a 的磁介质球, 其磁化强度为 $\mathbf{M} = (Az^2 + B)e_z$, A, B 均为常数。若采用分子电流模型, 求磁化电流 $\mathbf{J}_m$ 和 $\mathbf{J}_{ms}$ 。

3-6 一圆形截面的无限长直铜线, 半径为 1cm, 通过电流 25A, 在铜线外套上一个磁性材料制成的圆筒, 与之同轴, 圆筒的内、外半径为 2cm 及 3cm, 相对磁导率为 2000。

(1) 求圆筒内每米长的磁通量;

(2) 求圆筒内的磁化强度 $\mathbf{M}$;

(3) 求圆筒内的磁化电流 $\mathbf{J}_m$ 和 $\mathbf{J}_{ms}$ 。

3-7 一环形螺线管, 平均半径为 15cm, 其圆形截面的半径为 2cm, 铁心的相对磁导率是 $\mu_r = 1400$, 环上绕有 1000 匝线圈, 通过电流 0.7A。

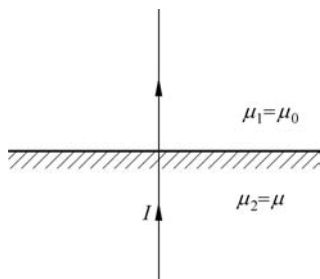
(1) 计算螺线管的电感;

(2) 若铁心上开个 0.1cm 的空气隙, 假定开口后铁心的 μ_r 没有变化, 再计算电感;

(3) 求空气隙和铁心内的磁场能量的比值。

3-8 证明: 单匝线圈励磁下磁路的自感量为 $L_0 = 1/R_m$, R_m 为磁路的磁阻, 故 NI 激励下, 电感量为 $L = N^2/R_m$ 。磁路中单匝激励下的磁场储能 $W_{m0} = \frac{1}{2} \Phi_0^2 R_m$, 则 NI 激励下的 $W_m = N^2 W_{m0}$ 。

3-9 如图题 3-9 所示,无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的分界面,试求两种媒质中的磁感应强度 B_1 的 B_2 。



图题 3-9

3-10 一根极细的圆铁杆和很薄的圆铁盘放在磁场 B_0 中并使它们的轴与 B_0 平行。求两样品内的 B 和 H 。如已知 $B_0 = 1\text{T}$, $\mu = 5000\mu_0$, 求两样品内的 M 。

3-11 已知 $y < 0$ 区域为磁性媒质,其相对磁导率 $\mu_r = 5000$, $y > 0$ 的区域为空气。试求:

- (1) 当空气中的磁感应强度 $B_0 = e_x 0.5 - e_y 10\text{mT}$ 时,磁性媒质中的磁感应强度 B ;
- (2) 当磁性媒质中的磁感应强度 $B_0 = e_x 10 + e_y 0.5\text{mT}$ 时,空气中的磁感应强度 B_0 。

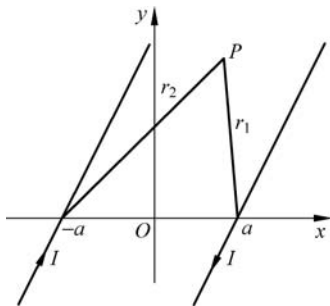
3-12 证明矢量磁位 A 满足的泊松方程 $\nabla^2 A = -\mu_0 J$ 的解为 $A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V' \frac{J(r')}{|r-r'|} dV'$ 。

(提示: 利用函数 $\nabla^2 \frac{1}{|r-r'|}$ 在 r' 处的奇点特性)

3-13 根据 $A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V' \frac{J(r')}{|r-r'|} dV'$, 证明 $\nabla \cdot A = 0$ 。

3-14 已知在半径为 a 、磁导率为 μ_1 的长直圆柱导体中,有电流 I 沿轴向流动。柱外充满磁导率为 μ_2 的均匀介质,求导体内、外的矢量磁位和磁场。

3-15 一对无限长平行导线,相距 $2a$,线上载有大小相等、方向相反的电流 I ,如图题 3-15 所示,求矢量磁位 A ,并求 B 。



图题 3-15

3-16 一个半径为 a 的均匀带电球体,总电荷量为 q ,它以角速度 ω 绕其自身某一直径转动,试求它的磁矩。

3-17 两个长的平行矩形线圈放置在同一平面上,长度分别为 l_1 和 l_2 ,宽度分别为 w_1 及 w_2 ,两线圈最靠近边的距离为 s 。

证明: 两个线圈的互感是

$$M = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \ln \frac{w_2 + s}{s \left(1 + \frac{w_2}{w_1 + s} \right)}$$

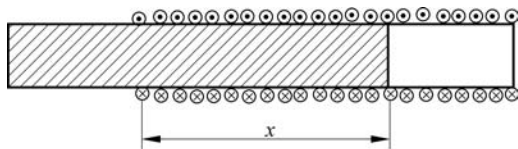
设 $l_1 \geq l_2$, 两个线圈都只有一匝,且已略去端部效应。

3-18 两平行无限长直线电流 I_1 和 I_2 ,相距为 d ,求每根导线单位长度受到的安培力 F_m 。

3-19 一个通有电流 I_1 的长直导线和一个通有电流 I_2 的圆环在同一平面上,圆心与导线的距离为 d 。证明: 两电流间相互作用的安培力为 $F_m = \mu_0 I_1 I_2 (\sec \alpha - 1)$, α 是圆环对直线最接近圆环的点所张的角。

3-20 如图题 3-20 所示的长螺线管中,单位长度内有 N 匝线圈,通过电流 I ,铁心磁

导率为 μ , 截面积为 S , 求作用在它上面的磁力。

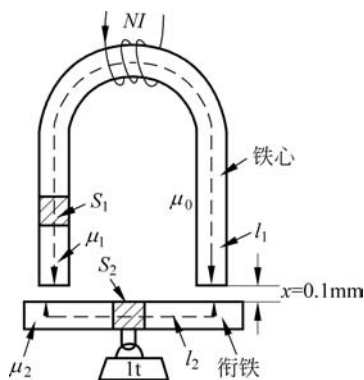


图题 3-20

3-21 已知半径分别为 a 和 b 的两个同轴圆线圈, 分别载有电流 I_1 和 I_2 , 两线圈平面间的距离为 d , 并设 $a \ll d$, 试证明两线圈的相互作用力为

$$F_z = -\frac{3}{2}\mu_0\pi I_1 I_2 a^2 b^2 d (d^2 + b^2)^{-5/2}$$

3-22 现有一个能提升 1t 重物的电磁铁, 如图题 3-22 所示。其铁心的横截面积为 20cm^2 , 铁心与衔铁间的缝隙为 0.1mm , 铁心的平均长度 $l_1 = 30\text{cm}$, 相对磁导率 $\mu_1 = 4000$, 忽略衔铁的磁阻, 即设衔铁的磁导率 $\mu_r = \infty$, 试求此电磁铁所需的安匝数。



图题 3-22



拉普拉斯

(Pierre Simon Laplace, 1749—1827, 法国)

“认识一种天才的研究方法,对于科学的进步,并不比发现本身次要。”