

本章提要

电容和电感元件是电路中常见的两种基本元件,也称为动态元件,含有这两种元件的电路称为动态电路。本章主要内容有:奇异函数;电容、电感元件的定义及其伏安特性;电容、电感元件的串、并联电路分析。

5.1 奇异函数

电路中的各种电物理量(简称为电量)如电压、电流、电荷、磁链、功率、能量等都是随时间变化的量。对这些电量的描述可以采用两种形式,一种是函数表达式,另一种是波形表示。前者便于进行各种数学运算,后者观察起来更为直观。

时间函数分为普通函数和奇异函数两类。常量、正弦量和指数函数等是大家所熟悉的普通函数。奇异函数是一类特殊的函数,又称为广义函数。那些波形有间断点,或者导数具有间断点,或者某些点处的幅值趋于无穷大的函数,都可归属于奇异函数。近代电路理论和信号分析都引入了奇异函数,例如在电路的动态分析中用奇异函数表示激励和响应。下面介绍几种典型且重要的奇异函数。

5.1.1 阶跃函数

1. 单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$

单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 的定义式为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (5-1)$$

其波形如图 5-1 所示。

$\varepsilon(t)$ 为不连续函数,其波形由两段构成,当 $t < 0$ 时,其值为零; $t > 0$ 时,其值为 1。 $t = 0$ 为间断点 [$\varepsilon(0_-) = 0$ 、 $\varepsilon(0_+) = 1$], 函数 $\varepsilon(t)$ 在该点数值不定,导数奇异,故单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 为奇异函数,“单位”的含义是指其不为零的值为 1。单位阶跃函数也可用符号 $1(t)$ 表示。

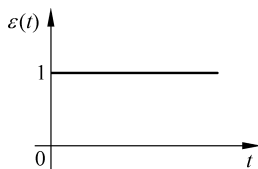


图 5-1 单位阶跃函数的波形

2. 延迟单位阶跃函数 $\varepsilon(t-t_0)$

延迟单位阶跃函数的定义为

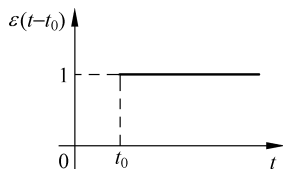


图 5-2 延迟单位阶跃函数的波形

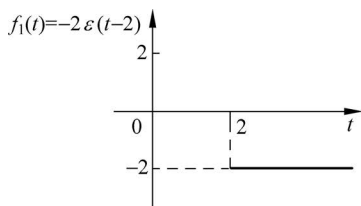
$$\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (5-2)$$

其波形如图 5-2 所示。

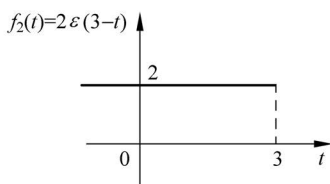
$\varepsilon(t-t_0)$ 和 $\varepsilon(t)$ 的区别在于前者的跳变点在 $t=t_0$ 处, 而后的跳变点在 $t=0$ 处, 即前者的跳变点比后者延时 t_0 。单位阶跃函数可视为延迟单位阶跃函数的特例($t_0=0$)。

3. 一般阶跃函数 $A\varepsilon(t+t_0)$

凡波形可分为两段, 且一段位于横轴(t 轴)上, 另一段为平行于 t 轴的直线的函数, 均称为一般阶跃函数, 简称为阶跃函数。图 5-3 所示波形 f_1 、 f_2 就是两个阶跃函数的例子。



(a)



(b)

图 5-3 两例阶跃函数的波形

欲画出给定的阶跃函数的波形, 关键在于确定跳变点和波形走向(非零值波形的延伸方向)。设阶跃函数的一般表达式为

$$f(t) = A\varepsilon(kt+t_0) = A\varepsilon(\xi)$$

式中, A 为任意常数, $\xi=kt+t_0$ 称为函数的宗量。 $\varepsilon(\xi)$ 是单位阶跃函数, 当 $\xi>0$ 时, $f(t)=A$; 当 $\xi<0$ 时, $f(t)=0$ 。因此, 通过解不等式 $\xi>0$ 或 $\xi<0$ 便不难确定阶跃函数 $f(t)$ 的跳变点及波形走向, 从而画出 $f(t)$ 的波形。

例 5-1 试画出阶跃函数 $f(t)=-2\varepsilon(-t+1)$ 的波形。

解 函数的宗量为 $\xi=-t+1$, 当 $\xi>0$ 即 $t<1$ 时, $f(t)=-2$; 当 $\xi<0$ 即 $t>1$ 时, $f(t)=0$ 。于是作出 $f(t)$ 的波形如图 5-4 所示。

4. 阶跃函数在电路分析中的作用

(1) 可描述开关的作用

图 5-5(a)所示电路表示 $t=t_0$ 时, 一个电压源与外电路相接。引入阶跃函数后, 该电路可表示为图 5-5(b), 因此阶跃函数在电路图中可代替开关的作用并表示开关的开闭时间。

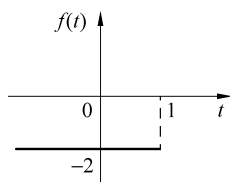
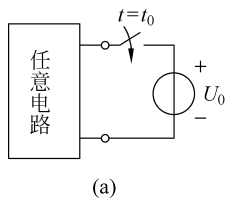
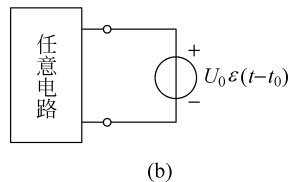


图 5-4 例 5-1 图



(a)



(b)

图 5-5 阶跃函数的开关作用

(2) 表示时间定义域

设一函数为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

则该函数可表示为

$$f(t) = e^{-t} \varepsilon(t - t_0)$$

这里阶跃函数 $\varepsilon(t - t_0)$ 起到了表示时间定义域的作用。应注意此例中 $t < t_0$ 时 $f(t) = 0$, 是将 $f(t)$ 对应于定义域 $t > t_0$ 中的表达式 e^{-t} 与 $\varepsilon(t - t_0)$ 相乘的充分条件。

5.1.2 单位脉冲函数

单位脉冲函数 $P_\Delta(t)$ 的定义式为

$$P_\Delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & t > \Delta \end{cases} \quad (5-3)$$

其波形如图 5-6 所示, 它由三段构成。矩形波的宽度为 Δ , 高度为 $\frac{1}{\Delta}$, 其面积 $S_P = \Delta \cdot \frac{1}{\Delta} = 1$ 。

“单位”是指波形的面积为 1。

$AP_\Delta(t - t_0)$ 称为脉冲函数。

例 5-2 试作出函数 $2P_{\frac{1}{2}}(t - 1)$ 的波形。

解 要画出脉冲函数的波形, 必须确定脉冲波的宽度、高度及跳变点。此例中, 脉冲宽度为 $\Delta = \frac{1}{2}$, 高度为 $A \cdot \frac{1}{\Delta} = 2 \times 2 = 4$, 两个跳变点分别为 $t_1 = 1$ 和 $t_2 = t_1 + \Delta = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。作出波形如图 5-7 所示。应注意脉冲波的高度并非为 A 。

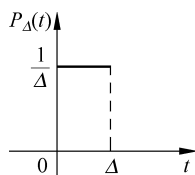


图 5-6 单位脉冲函数的波形

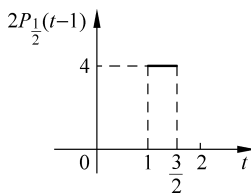


图 5-7 例 5-2 图

5.1.3 冲激函数

1. 单位冲激函数 $\delta(t)$

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{奇异}, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (5-4)$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (5-5)$$

其波形如图 5-8 所示。应注意单位冲激函数的定义式由式(5-4)和式(5-5)两式组成,缺一不可。式中的“奇异”表示在 $t=0$ 时,波形的幅度趋于无穷大,但其奇异性又需满足式(5-5)。式(5-5)表明 $\delta(t)$ 波形下所围的面积为 1,这便是“单位”的含义。

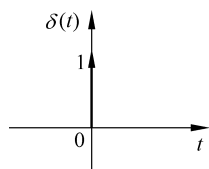


图 5-8 单位冲激函数的波形

$\delta(t)$ 的面积又称为脉冲“强度”。单位冲激函数是用强度而不是用幅度来表征的。在其波形的箭头旁应标明其强度。

式(5-5)又可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 1 \quad (5-6)$$

单位冲激函数显然不是普通函数,它也称作狄拉克函数。 $\delta(t)$ 可看作某些函数在一定条件下的极限情况,例如可把它视为单位脉冲函数 $P_{\Delta}(t)$ 在脉宽 $\Delta \rightarrow 0$ 时的极限:

$$\text{单位脉冲函数的幅度} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} = \infty$$

$$\text{单位脉冲函数的面积} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\Delta}(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta = 1$$

2. 冲激函数 $A\delta(t-t_0)$

$f(t) = A\delta(t-t_0)$ 称为冲激函数,其定义为

$$f(t) = \begin{cases} \text{奇异}, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad (5-7)$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t-t_0) dt = \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} A\delta(t-t_0) dt = A \quad (5-8)$$

式中, A 为任意常数,称为冲激函数的强度; t_0 亦为常数,且 A 和 t_0 均可正可负。图 5-9 给出了 $A>0, t>0$ 时 $A\delta(t-t_0)$ 和 $A\delta(t+t_0)$ 的波形。

单位冲激函数 $\delta(t)$ 是冲激函数 $A=1$ 和 $t_0=0$ 的特例。

冲激函数在近代电路分析和信号理论中有着重要的地位和应用。极短时间内产生的极大电流和电压可近似看作冲激函数。

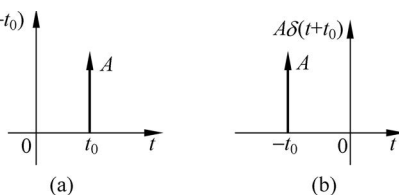


图 5-9 冲激函数的波形

3. 冲激函数的一些性质

下面给出冲激函数的一些重要性质,证明从略。

性质 1 冲激函数是阶跃函数的导数,阶跃函数是冲激函数的积分,即

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (5-9)$$

或

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' \quad (5-10)$$

事实上,脉冲函数 $P_{\Delta}(t)$ 可用阶跃函数表示为

$$P_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\Delta)]$$

前已指出, $\delta(t)$ 可看作 $P_{\Delta}(t)$ 的一种极限情况, 即

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\epsilon(t) - \epsilon(t - \Delta)]$$

而上式右边的表示式正是函数 $\epsilon(t)$ 的导数定义式, 于是式(5-9)成立。

性质 1 也可用下列两式表述:

$$\delta(t - t_0) = \frac{d\epsilon(t - t_0)}{dt} \quad (5-11)$$

$$\epsilon(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(t' - t_0) dt' \quad (5-12)$$

性质 2 相乘特性和筛分性。相乘特性的表达式为

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (5-13)$$

式中, $f(t)$ 为任意连续函数。相乘特性可直观地予以说明。由 $\delta(t)$ 的波形可知该函数在 $t \neq 0$ 时为零, 仅在 $t=0$ 时取值, 因此有

$$f(t)\delta(t) = f(t) \big|_{t=0} \delta(t) = f(0)\delta(t)$$

相乘特性也可表示为

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad (5-14)$$

上式表明, 连续函数 $f(t)$ 与冲激函数 $\delta(t - t_0)$ 的乘积等同于一个在 t_0 时刻出现且强度为 $f(t_0)$ 的冲激函数。

设 $f(t)$ 为任意连续函数, 则冲激函数的筛分性可用下式表示:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (5-15)$$

式(5-15)表明, 该式左边的积分之值等于函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 时的值, 也即是该积分运算能将冲激函数出现时刻($t=0$)对应的函数 $f(t)$ 的值 $f(0)$ 筛分出来。

冲激函数的筛分性也可用下式表示:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0)dt \\ &= f(t_0) \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} \delta(t - t_0)dt = f(t_0) \end{aligned} \quad (5-16)$$

性质 3 冲激函数是偶函数。该性质的表达式为

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (5-17)$$

或

$$\delta(t - t_0) = \delta(t_0 - t) \quad (5-18)$$

例 5-3 试作出 $f(t) = -2\delta(3-t)$ 的波形。

解 $f(t) = -2\delta(3-t) = -2\delta[-(t-3)]$

由性质 3 便得

$$f(t) = -2\delta(t - 3)$$

于是作出波形如图 5-10 所示。

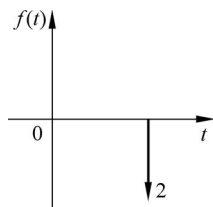


图 5-10 例 5-3 图

同步练习

5-1 什么是奇异函数?

5-2 作出阶跃函数 $f_1(t) = 2\epsilon(t-2)$ 和 $f_2(t) = 2\epsilon(2-t)$ 的波形。

5-3 写出冲激函数 $\delta(t)$ 的定义式。

5-4 单位冲激函数 $\delta(t)$ 和单位阶跃函数间是什么关系？

5.2 电容元件

电容器是常见的电路基本器件之一。电容元件是一种理想化模型,用它来模拟实际电容器和其他实际器件的电容特性,即电场储能特性。

5.2.1 电容元件的定义及线性时不变电容元件

1. 电容元件的定义及分类

电容元件的基本特征是当其极板上聚集有电荷时,其极板间便有电压。电容元件的定义可表述为:一个二端元件,在任意时刻 t ,若其储存的电荷 q 与其两端的电压 u 之间的关系可用确切的代数关系式表示或可用 $q-u$ 平面上的曲线予以描述,则称该二端元件为电容元件。该曲线便是电容元件的定义曲线,也称为电容元件的特性曲线。电容元件通常简称为电容。

和电阻元件类似,也按特性曲线在定义平面上的性状对电容元件进行分类。这样,电容元件有线性的或非线性的,时不变的或时变的等类型。本书主要讨论线性时不变电容元件。

2. 线性时不变电容元件

当电容元件的特性曲线是一条经过原点的直线且该直线在坐标平面上的位置是固定的而不随时间变化,则称为线性时不变电容元件。

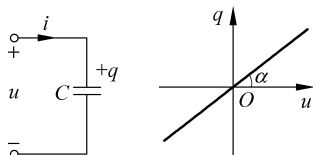


图 5-11 线性电容元件的符号及其特性曲线

线性时不变电容元件的电路符号及特性曲线如图 5-11 所示,图中电容元件的正极板上的电荷量为 q 。线性时不变电容元件的定义式为

$$q(t) = Cu(t) \quad (5-19)$$

式中, C 为比例常数,是特性曲线的斜率,即 $C = \tan\alpha$ 。 C 为电容元件的电容(值)。在国际单位制中,电荷的单位为库仑,简称库(符号为 C);电压的单位为伏特;电容的单位为法拉,简称法(符号为 F)。在实用中,法拉这个单位太大,而常用微法(符号为 μF)和皮法(符号为 pF)作为电容的单位。这些单位间的关系为

$$1\text{F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{pF}$$

由电容元件的定义式(5-19)可见,当电容元件两端的电压升高时,其电荷量也随之增加,这一现象称为电容元件的充电过程。反之,当电容元件两端的电压减小时,其电荷量也随之减少,称为电容元件的放电过程。

5.2.2 线性时不变电容元件的伏安关系

1. 电容元件的伏安关系式

在电路分析中,人们通常关心的是电容元件的电压和电流间的关系。设电容元件的电压和电流为关联的参考方向,如图 5-11 所示,由电流的定义及式(5-19),可得

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt} \quad (5-20)$$

若将电容电压用电容电流表示,便有

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' \quad (5-21)$$

式(5-20)和式(5-21)是线性时不变电容元件伏安关系式的两种形式。应注意,上述关系式对应于电压、电流为关联参考方向,若电压、电流是非关联参考方向,则电容元件的伏安关系式中应有一负号,即

$$i(t) = -C \frac{du(t)}{dt} \quad (5-22)$$

和

$$u(t) = -\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' \quad (5-23)$$

2. 电容元件伏安关系式的相关说明

(1) 电容元件的电压和电流间并非为代数关系,而是微分或积分的关系。

(2) 电容电流的大小正比于电容电压的变化率,这表明仅当电压变动时才会有电流,故电容元件被称为动态元件。这一特性说明,电容电流的瞬时值大小与电容电压的瞬时值大小没有直接的关系,这与电阻元件是截然不同的。

(3) 因直流电压的变化率为零,故在直流的情况下电容电流为零。这也表明在直流电路中电容元件相当于断路,这一特性称为电容元件的“隔直”作用。

(4) 由式(5-21)可知,当前时刻 t 的电容电压不仅和该时刻的电流有关,而且与 t 以前所有时刻的电流均有关,这说明电容元件能记住从 $-\infty$ 到 t 之间的电流对电容电压的全部贡献,因此又称电容元件为“记忆元件”。

5.2.3 电容电压的连续性原理

1. 关于时间起始时刻的说明

考察问题时,通常需选定一个时间起始时刻。例如研究电路发生突然短路的情况,就把发生短路的这一瞬间定为研究问题的时间起始时刻。在电路分析中,时间起始时刻通常用 $t=0$ 表示,并称为初始时刻。在许多情况下,还需对初始时刻 $t=0$ 的前一瞬间 $t=0_-$ 和后一瞬间 $t=0_+$ 加以区分。从数学的角度看,这种区分是为了便于对不连续函数的描述,以便问题的讨论更加清晰。如图 5-12 所示为一不连续函数的波形, $t=0$ 为间断点, $y(0)$ 为不定值,但 $y(0_-)=-1$, $y(0_+)=1$ 。在电路分析中,应特别注意对 $t=0_-$ 、 0 、 0_+ 三个时刻加以区分。当然,在波形连续的情况下,这种区分是无关紧要的。

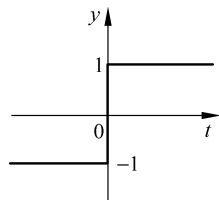


图 5-12 不连续函数的波形

为方便起见,把 $y(0_-)$ 称为原始值, $y(0_+)$ 称为初始值。若 $y(t)$ 在 $t=0$ 处连续,便有 $y(0)=y(0_-)=y(0_+)$,则 $y(0)$ 亦称为初始值。使用 $y(0)$ 时意味着 $y(t)$ 在 $t=0$ 处是连续的。

也可把 $t=t_0$ 作为时间起始时刻,这时需加以区分的是 $t=t_0$ 、 $t=t_{0-}$ 和 $t=t_{0+}$ 三个时刻。

当给定电容电压的原始值时,电容的伏安关系式可表示为

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0_-} i_C(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_C(\tau) d\tau \\ &= u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_C(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5-24)$$

式中,

$$u_C(0_-) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0_-} i_C(\tau) d\tau$$

为电容电压的原始值,它体现了电容电流在 $-\infty$ 到 0_- 这段时间内作用的结果。

2. 电容电压的连续性原理

重要结论:当通过电容的电流为有界函数时,电容电压不能跃变(突变),只能连续变化,这一结论的数学表达式为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (5-25)$$

该结论称为电容电压的连续性。

该结论也可表示为

$$u_C(t_{0+}) = u_C(t_{0-})$$

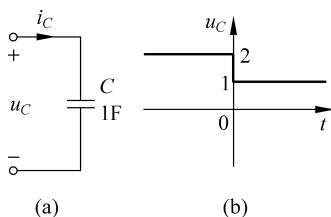


图 5-13 例 5-4 图

例 5-4 如图 5-13(a) 所示的电容元件,已知 $u_C(0_-) = 2\text{V}$, 现有一冲激电流 $-\delta(t)$ 流过该电容元件,求电压 $u_C(t)$, $t > 0$ 并画出 $u_C(t)$ 在整个时间域中的波形。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad u_C &= u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_C(\tau) d\tau \\ &= 2 + \frac{1}{1} \int_{0_-}^{0_+} [-\delta(\tau)] d\tau \\ &= (2 - 1)\text{V} = 1\text{V}, \quad t > 0 \text{ (或 } t \geq 0_+) \end{aligned}$$

应注意, u_C 的时间定义域既可表示为 $t > 0$, 也可表示为 $t \geq 0_+$, 但不可用 $t \geq 0$, 这是因为在 $t = 0$ 处, u_C 不连续。作出 u_C 在整个时间域中的波形如图 5-13(b) 所示。

例 5-5 给定线性电容元件 C 的电压、电流的参考方向如图 5-14(a) 所示。

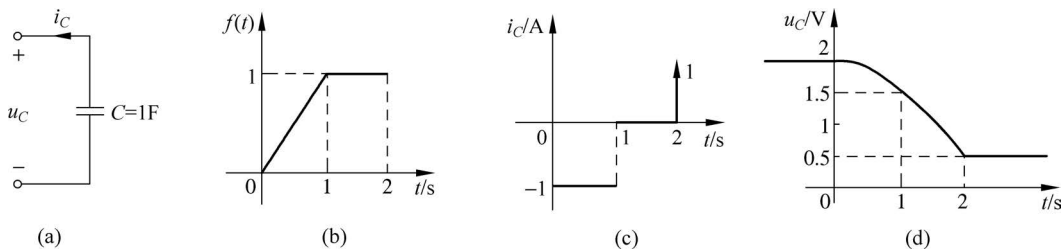


图 5-14 例 5-5 图

(1) 若电压 u_C 的波形如图 5-14(b) 所示,求电流 i_C , $t > 0$, 并作出 i_C 的波形;

(2) 若图 5-14(b) 为电流 i_C 的波形, 且 $u_C(0_-) = 2\text{V}$, 求 u_C , $t \geq 0$, 并作出 u_C 在整个时间域中的波形。

解 (1) 应注意电容上电压和电流为非关联方向, 则电容的伏安关系式为

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt}$$

u_C 的表达式为

$$u_C = t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] + [\varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2)]$$

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt} = -[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] + \delta(t-2)$$

作出 i_C 的波形如图 5-14(c) 所示。该波形中出现的冲激函数与 u_C 波形中出现的跳变现象对应。

(2) 因 u_C, i_C 为非关联正向, 故电容的伏安关系式为

$$u_C = u_C(0_-) - \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_C(\tau) d\tau$$

i_C 为分段连续的函数, 下面用分段积分法求 u_C :

$$0 \leq t \leq 1, \quad u_C(t) = u_C(0_-) - \frac{1}{C} \int_{0_-}^t \tau d\tau = 2 - \frac{1}{2} t^2$$

$$u_C(1) = \left(2 - \frac{1}{2} \times 1^2\right) \text{V} = \frac{3}{2} \text{V}$$

$$1 \leq t \leq 2, \quad u_C = u_C(1) - \frac{1}{C} \int_1^t 1 d\tau = \frac{5}{2} - t$$

$$u_C(2) = \left(\frac{5}{2} - 2\right) \text{V} = \frac{1}{2} \text{V}$$

$$t \geq 2, \quad u_C = u_C(2) - \frac{1}{C} \int_2^t 0 d\tau = \frac{1}{2} \text{V}$$

作出 u_C 的波形如图 5-14(d) 所示, 可见 u_C 在整个时间域中都是连续的, 这与 i_C 波形中未出现冲激函数这一情况相对应。

在计算每一时间段 (t_0, t) 的积分时, 应先求得初始值 $y(t_0)$, 而这一初始值是根据上段积分的结果算出的。

5.2.4 电容元件的能量

1. 电容能量的计算公式

当电容的极板上集聚有电荷时, 电容中便建立起电场, 储存了电场能量。

设 u_C, i_C 为关联方向, 则电容元件的功率为

$$p_C = u_C i_C = C u_C \frac{du_C}{dt} \quad (5-26)$$

由上式可见, 由于 u_C 与 $\frac{du_C}{dt}$ 可能不同符号, 则 p_C 可正可负。这表明电容元件有时自外电路吸收功率(能量), 有时则向外电路输出功率(能量)。这种现象称为“能量交换”, 这与电阻元件始终从外电路吸收功率是大不相同的。

电容中的电场能量为

$$W_C(t) = \int_{-\infty}^t p_C(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t C u_C \frac{du_C}{d\tau} d\tau = \int_{u_C(-\infty)}^{u_C(t)} C u_C du_C$$

$$= \frac{1}{2} C u_C^2 - \frac{1}{2} C u_C^2(-\infty) = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (5-27)$$

注意, $u_C(-\infty)$ 为电容未充电时的电压值, 故 $u_C(-\infty)=0$ 。

2. 关于电容能量的说明

分析式(5-33), 可有如下的结论。

(1) 任一时刻 t 的电容能量只决定于该时刻的电容电压值, 而与电压建立的过程无关。

(2) 恒有 $W_C \geq 0$, 这表明具有正电容值的电容的能量均是自外电路吸取的, 电容并不能产生能量向外电路输出, 因而它是一无源元件。

(3) 尽管电容元件的功率有时为正, 有时为负, 但因为它不是有源元件, 故它在功率为负时输出的能量必定是以前吸收的能量, 即它能将吸收的能量储存起来, 在一定的時候又释放出去, 故电容又称为储能元件。显然, 电容也是非耗能元件。

(4) 电容的储能与电容的瞬时电流无关。在电容的瞬时电流为零时, 只要电压不为零, 能量就不为零。

(5) 当电容电流有界时, 电容电压不能跃变意味着能量不能跃变; 而电容电压连续时, 电容能量必定连续, 反之亦然。

(6) 在时间间隔 $[t_0, t]$ 内, 电容元件吸收的能量为

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p_C(\tau) d\tau = \int_{u_C(t_0)}^{u_C(t)} C u_C du_C = \frac{1}{2} C [u_C^2(t) - u_C^2(t_0)]$$

同步练习

5-5 电容元件是如何定义的? 写出线性时不变电容元件的定义式。

5-6 当电压、电流为关联正向或非关联正向时, 写出电容元件的伏安关系式。

5-7 简述电容电压连续性定理, 并写出其数学表达式。

5-8 计算一个原已充电至 10V 的 $10\mu\text{F}$ 的电容被充电至 60V 时电容极板上电荷量及在此期间电容所吸收的能量。

5.3 电感元件

电感器是常见的电路基本器件之一。实际电感器一般用导线绕制而成, 也称为电感线圈, 或简称为线圈。电感元件是一种理想化的电路模型, 用它来模拟实际电感器和其他实际器件的电感特性, 即磁场储能特性。

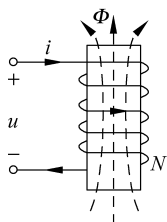


图 5-15 电感线圈中的电流、磁通及感应电压

5.3.1 电感线圈的磁链和感应电压

当电感线圈通以电流时, 便在其周围建立起磁场。电流 i 和磁通 Φ 的方向符合右手螺旋定则, 如图 5-15 所示。设线圈有 N 匝, 每一匝线圈穿过的磁通为 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$, 则全部磁通之和称为线圈所交链的磁通链, 简称为磁链, 用 Ψ 表示, 即

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N = \sum_{j=1}^N \Phi_j$$

根据法拉第电磁感应定律,当穿过一个线圈的磁链随时间发生变化时,将在线圈两端产生一个感应电压,这个感应电压的大小就等于磁链变化率的绝对值。若线圈形成了电流的通路,则感应电压将在线圈中引起感应电流。

又根据楞次定律,感应电压总是企图利用引起的感应电流所产生的磁通去阻止原有磁通的变化,据此便可确定感应电压的方向,在图 5-23 中,感应电压 u 的参考方向与磁通 Φ 的参考方向间也应符合右螺旋定则,于是可确定感应电压 u 的参考方向如图中所示,且感应电压的表达式为

$$u(t) = \frac{d\Psi}{dt} \quad (5-28)$$

由图 5-15 可见,上式在感应电压与产生磁通的电流两者的参考方向对线圈而言为关联的参考方向时成立。若 u, i 为非关联的参考方向,则有

$$u(t) = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (5-29)$$

5.3.2 电感元件的定义及线性时不变电感元件

1. 电感元件的定义及分类

电感元件的基本特征是当其通以电流时便会建立起磁场,且磁链的数值与电流有关。电感元件的定义可表述为:一个二端元件,在任意时刻 t ,其通过的电流 i 与电流产生的磁链 Ψ 之间的关系可用确切的代数关系式表示或可用 Ψ - i 平面上的曲线予以描述,则称该二端元件为电感元件。该曲线便是电感元件的定义曲线,也称为电感元件的特性曲线。电感元件通常也简称为电感。

按照特性曲线在定义平面上的性状,电感元件也分为线性的、非线性的、时不变的、时变的等类型。本书主要讨论线性时不变电感元件。

2. 线性时不变电感元件

若电感元件的特性曲线是一条通过原点的直线,且该直线在平面上的位置不随时间变化,则称为线性时不变电感元件。

线性时不变电感元件的电路符号和特性曲线如图 5-16 所示,图中的磁链 Ψ 和电流 i 的参考方向符合右手螺旋定则。

由特性曲线可得线性时不变电感元件的定义式为

$$\Psi(t) = Li(t) \quad (5-30)$$

式中, L 为比例常数,是特性曲线的斜率,即 $L = \tan\alpha$ 。 L 为电感元件的电感(值),也称作自感。在国际单位制中,

磁链的单位为韦伯,简称韦(符号为 Wb); 电流的单位为安培,电感的单位为亨利,简称亨(符号为 H)。实际应用中,电感的单位还有毫亨(符号为 mH)、微亨(符号为 μH)等。这些单位间的关系为

$$1\text{H} = 10^3\text{mH} = 10^6\mu\text{H}$$

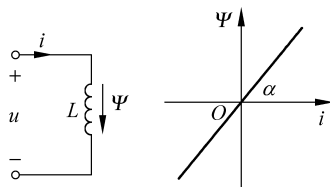


图 5-16 线性时不变电感元件的电路符号和特性曲线

5.3.3 线性时不变电感元件的伏安关系

1. 电感元件的伏安关系式

电磁感应定律的表达式为

$$u(t) = \frac{d\Psi}{dt}$$

前已指出,上式在电压与电流为关联参考方向时成立,将电感元件的特性方程式(5-30)代入上式,便有

$$u(t) = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \quad (5-31)$$

或

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t') dt' \quad (5-32)$$

上述两式是线性时不变电感元件伏安关系式的两种形式。若电感元件的电压、电流取非关联参考方向,则其伏安关系式为

$$u(t) = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (5-33)$$

或

$$i(t) = -\frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t') dt' \quad (5-34)$$

2. 电感元件伏安关系式的相关说明

(1) 电感元件的电压和电流间并非为代数关系,而是微分或积分的关系。

(2) 电感电压比例于电感电流的变化率,这表明仅当电流变动时才会有电压,因此电感元件也是一种动态元件。

(3) 由于直流电流的变化率为零,故在直流的情况下电感电压为零。这表明在直流电路中电感元件相当于短路。

(4) 由 $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$ 可知,当前时刻 t 的电感电流不仅和该时刻的电压有关,而且与从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电压均有关,这说明电感元件的电流具有记忆电压作用的本领。因此,电感元件是一种记忆元件。

5.3.4 电感电流的连续性原理

重要结论:当加于电感两端的电压是有界函数时,电感电流不能跃变(突变),只能连续变化。这一结论的数学表达式为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (5-35)$$

此结论称为电感电流的连续性。结论的证明和电容电压连续性的证明相仿,这里不再赘述。

5.3.5 电感元件的能量

电感元件的电压、电流取关联参考方向时,其功率为

$$p_L = u_L i_L = L i_L \frac{di_L}{dt} \quad (5-36)$$

电感元件储存的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_L(t) &= \int_{-\infty}^t p_L(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t L i_L(\tau) \frac{di_L(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \int_{i_L(-\infty)}^{i_L} L i_L(\tau) di_L(\tau) = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} \frac{\Psi^2}{L} \end{aligned} \quad (5-37)$$

上式表明,在任一时刻 t ,电感的储能只取决于该时刻的电流 $i_L(t)$ 。

分析电感功率和能量的表达式,可得出电感元件是无源元件、储能元件和非耗能元件,以及在电感中存在着能量交换现象的结论。可以看出,电感元件和电容元件的特性是十分相似的,它们都属于非耗能元件,既是动态元件,又是储能元件。

同步练习

5-9 电感元件是如何定义的? 写出线性时不变电感元件的定义式。

5-10 写出电压、电流为关联正向和非关联正向情况下的电感元件的伏安关系式。

5-11 电感元件是动态元件意味着什么?

5-12 一个 2H 的电感元件两端的电压 $u_L(t) = 5e^{-20t}\text{V}$,当 $i_L(0) = 0$ 且 u_L 和 i_L 为关联的参考方向时,求电感电流 $i_L(t)$ 及 $t = 0.1\text{s}$ 时的磁链值及储存的能量。

5.4 动态元件的串联和并联

5.4.1 电容元件的串联和并联

1. 电容元件的串联

图 5-17(a)所示为 n 个电容元件串联。由 KVL,有

$$\begin{aligned} u_C &= \sum_{k=1}^n u_{Ck} = u_{C1}(0) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_C(\tau) d\tau + u_{C2}(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_C(\tau) d\tau + \cdots + \frac{1}{C_n} \int_0^t i_C(\tau) d\tau \\ &= [u_{C1}(0) + u_{C2}(0) + \cdots + u_{Cn}(0)] + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \right) \int_0^t i_C(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=1}^n u_{Ck}(0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int_0^t i_C(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5-38)$$

令

$$u_C(0) = \sum_{k=1}^n u_{Ck}(0) \quad (5-39)$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (5-40)$$

则式(5-38)可写为

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau \quad (5-41)$$

该式和单一电容元件伏安关系式的形式完全相同。因此有下面结论: n 个电容元件的串联

与一个电容元件等效,等效电容的初始电压等于 n 个电容的初始电压之和;等效电容的电容量(简称为等值电容)之倒数等于 n 个电容量的倒数之和。等效电路如图 5-17(b)、(c)所示。

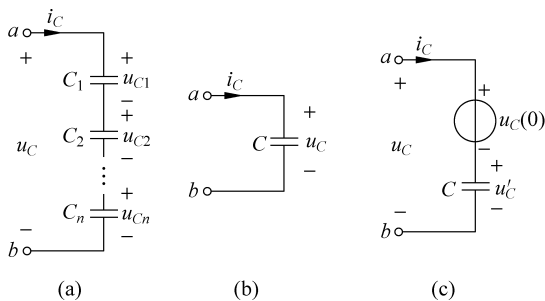


图 5-17 电容元件的串联及等效电路

设图 5-17(a)中所有电容元件上的初始电压为零,则端口电压为

$$u_C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int_0^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

第 k 个电容上的电压为

$$u_{Ck} = \frac{1}{C_k} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

故有

$$u_{Ck} = \frac{C}{C_k} u_C(t) \quad (5-42)$$

上式称为串联电容的分压公式,式中 C 为等值电容。式(5-42)表明电容量愈小的电容分配到的电压愈高。

当两电容串联时,由式(5-40),有

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

则等效电容为

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

又由式(5-42),两电容元件上的电压分别为

$$u_{C1}(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u_C(t), \quad u_{C2}(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_C(t)$$

以上的分析表明,电容串联时等效电容的算式及分压公式与电阻元件并联时等效电阻的算式及分流公式分别相似。

例 5-6 在图 5-18(a)所示电路中,已知 $C_1 = 1\text{F}$, $u_{C1}(0) = 2\text{V}$; $C_2 = 2\text{F}$, $u_{C2}(0) = 4\text{V}$, $E_s = 18\text{V}$,在 $t = 0$ 时,开关 S 闭合。求当电路达到稳定状态后,两电容上的电压各是多少。

解 在 S 闭合瞬时,电路中的电流并不为零。在电路达到稳定状态后,因为是直流电路,故 $i(t) = 0$ 。可利用分压公式(5-42)计算各电容上的电压。但应注意,分压公式只能用于初始电压为零的电容,为此,将两初始电压不为零的电容用等效电路代替,如图 5-18(b)所示。要注意,在图 5-18(b)中,两初始电压为零的串联电容承受的电压为

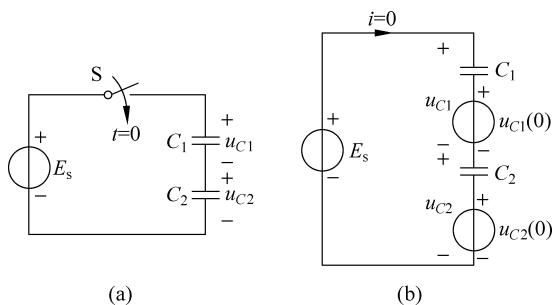


图 5-18 例 5-6 图

$$u'_C = E_s - u_{C1}(0) - u_{C2}(0) = 18 - 2 - 4 = 12\text{V}$$

各初始电压为零的电容上的电压为

$$u'_{C1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u'_C = 8\text{V}$$

$$u'_{C2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u'_C = 4\text{V}$$

于是初始电压不为零的两电容的稳态电压为

$$u_{C1} = u_{C1}(0) + u'_{C1} = 8 + 2 = 10\text{V}$$

$$u_{C2} = u_{C2}(0) + u'_{C2} = 4 + 4 = 8\text{V}$$

2. 电容元件的并联

(1) 各电容初始电压相等时的并联

图 5-19(a) 所示为 n 个初始电压相同的电容元件相并联。设 $u_{Ck}(0) = u_C(0)$, 由 KCL, 有

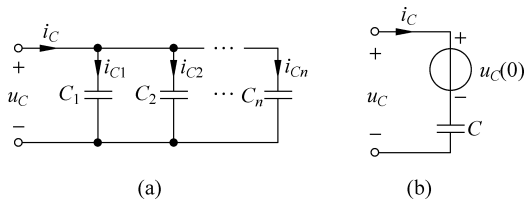


图 5-19 电容元件并联及其等效电路

$$i_C = i_{C1} + i_{C2} + \cdots + i_{Cn} = \sum_{k=1}^n i_{Ck} = \sum_{k=1}^n C_k \frac{du_{Ck}}{dt} = \sum_{k=1}^n C_k \frac{du_C}{dt} \quad (5-43)$$

令

$$C = \sum_{k=1}^n C_k \quad (5-44)$$

则式(5-44)可写为

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

或

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

因此有结论: n 个初始电压相同的电容元件相并联可等效为一个电容元件,如图 5-19(b)所示,等效电容的初始电压等于每个电容元件的初始电压,等效电容为 n 个电容的电容值之和。

在图 5-19(a)中,第 k 个电容中的电流为

$$i_{Ck} = C_k \frac{du_C}{dt}$$

将 $\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_C$ 代入上式,有

$$i_{Ck} = \frac{C_k}{C} i_C \quad (5-45)$$

式(5-45)称为并联电容的分流公式,其中 C 为等效电容的电容量。分流公式表明电容量愈大的电容通过的电流愈大。

(2) 各电容初始电压不相等时的并联

仍设有 n 个电容并联,各电容的原始电压不相等且为 $u_{Ck}(0_-)$ ($k=1,2,\dots,n$)。这 n 个电容并联后的等效电路仍是一个具有初始电压的电容元件,如图 5-19 所示。图中的 C 为等效电容,其值仍用式(5-44)计算,但图中电压源的电压应改为初始电压 $u_C(0_+)$ 。 $u_C(0_+)$ 应如何计算呢?

根据 KVL, n 个电容并联时各电容电压应相等,因此在并联时各电容初始电压将发生跳变,与此对应,各电容极板上的电荷将重新分配。又根据电荷守恒,在并联前后,与某节点关联的所有电容极板上的电荷总量保持不变,即

$$\sum_{k=1}^n q_{Ck}(0_-) = \sum_{k=1}^n q_{Ck}(0_+) \quad (5-46)$$

式(5-46)称为节点电荷守恒原则,可根据这一原则计算并联之后的电容电压跳变量 $u_{Ck}(0_+)$ 。

n 个电容并联前的电荷总量为

$$q_C(0_-) = \sum_{k=1}^n q_{Ck}(0_-) = \sum_{k=1}^n C_k u_{Ck}(0_-)$$

n 个电容并联后的电荷总量为

$$q_C(0_+) = \sum_{k=1}^n q_{Ck}(0_+) = \sum_{k=1}^n C_k u_{Ck}(0_+) = \left(\sum_{k=1}^n C_k \right) u_C(0_+)$$

根据式(5-46),有

$$\sum_{k=1}^n C_k u_{Ck}(0_-) = \left(\sum_{k=1}^n C_k \right) u_C(0_+)$$

于是电容电压的跳变值为

$$u_C(0_+) = \frac{\sum_{k=1}^n C_k u_{Ck}(0_-)}{\sum_{k=1}^n C_k} \quad (5-47)$$

例 5-7 在图 5-20(a)所示电路中,已知 $u_{C1}(0_-) = u_{C2}(0_-) = 6\text{V}$, $u_{C3}(0_-) = 10\text{V}$; $C_1 = 1\text{F}$, $C_2 = C_3 = 2\text{F}$ 。开关 S 在 $t=0$ 时合上,求 S 合上后的等效电路。

解 S 合上后,三个电容为并联,则等效电容为

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = 5\text{F}$$

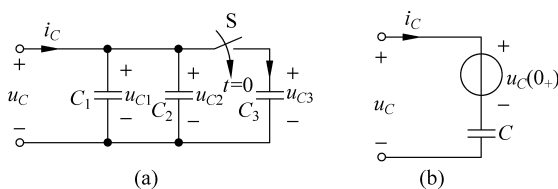


图 5-20 例 5-7 图

并联后,电容电压初始值发生跳变。由电荷守恒原则,有

$$C_1 u_{C1}(0_-) + C_2 u_{C2}(0_-) + C_3 u_{C3}(0_-) = (C_1 + C_2 + C_3) u_C(0_+)$$

于是求得

$$u_C(0_+) = \frac{C_1 u_{C1}(0_-) + C_2 u_{C2}(0_-) + C_3 u_{C3}(0_-)}{C_1 + C_2 + C_3} = 9.6 \text{ V}$$

等效电路如图 5-20(b)所示。

5.4.2 电感元件的串联和并联

1. 电感元件的串联

(1) 各电感元件初始电流相同时的串联

图 5-21(a)所示为 n 个初始电流相同的电感元件的串联。设 $i_{Lk}(0) = i_L(0)$, 由 KVL, 有

$$u_L = \sum_{k=1}^n u_{Lk} = \sum_{k=1}^n L_k \frac{di_{Lk}}{dt} = \sum_{k=1}^n L_k \left(\frac{di_L}{dt} \right) \quad (5-48)$$

令

$$L = \sum_{k=1}^n L_k \quad (5-49)$$

则式(5-48)可写为 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ 或 $i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau$ 。因此, 有下面的结论: n 个初始电流相同的电感元件的串联可等效为一个电感元件, 其等效电路如图 5-21(b)和(c)所示, 等效电感的初始电流等于每个电感中的初始电流, 等值电感为 n 个电感量之和。

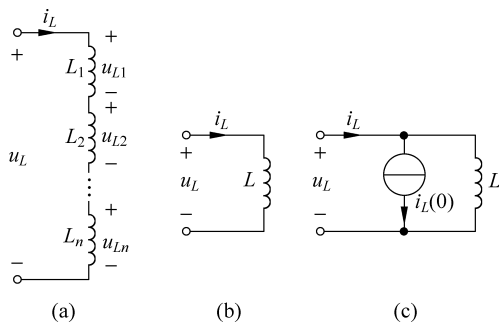


图 5-21 串联电感及其等效电路

图 5-21(c)所示的电路表明, 单一电感元件的等效电路由一初始电流为零的电感元件和一理想电流源并联而成, 理想电流源的输出电流为电感的初始电流。

图 5-21(a)所示电路中第 k 个电感上的电压为

$$u_{Lk} = L_k \frac{di_L}{dt}$$

将 $\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} u_L$ 代入上式,有

$$u_{Lk} = \frac{L_k}{L} u_L \quad (5-50)$$

式(5-50)称为串联电感的分压公式,式中 L 为串联电感的等值电感。分压公式表明电感量愈大的电感分配到的电压愈高。

不难看出,电感元件串联时等值电感的计算公式及分压公式分别与电阻串联时等值电阻的计算公式及分压公式形式相似。

(2) 各电感元件初始电流不相等时的串联

设有 n 个电感串联,各电感的原始电流不相等且为 $i_{Lk}(0_-)$ ($k=1,2,\dots,n$)。这 n 个电感串联后的等效电路仍是一个具有初始电流的电感元件,如图 5-21(c)所示。图中的 L 为等效电感,其值仍用式(5-49)计算,但图中电流源的电流应改作初始电流 $i_L(0_+)$ 。如何计算 $i_L(0_+)$ 呢?

按照 KCL, n 个电感串联时各电感电流应相等,因此在串联时各电感初始电流将发生跳变。根据磁链守恒,在串联前后,回路中的各电感磁链总和维持不变,即

$$\sum_{k=1}^n \Psi_{Lk}(0_-) = \sum_{k=1}^n \Psi_{Lk}(0_+) \quad (5-51)$$

式(5-51)称为回路磁链守恒原则,可据此计算串联后电感电流的跳变值 $i_L(0_+)$ 。

n 个电感串联前的总磁链为

$$\Psi_L(0_-) = \sum_{k=1}^n \Psi_{Lk}(0_-) = \sum_{k=1}^n L_k i_{Lk}(0_-)$$

n 个电感串联后的总磁链为

$$\Psi_L(0_+) = \sum_{k=1}^n \Psi_{Lk}(0_+) = \sum_{k=1}^n L_k i_{Lk}(0_+) = \left(\sum_{k=1}^n L_k \right) i_L(0_+)$$

根据式(5-51),有

$$\sum_{k=1}^n L_k i_{Lk}(0_-) = \left(\sum_{k=1}^n L_k \right) i_L(0_+)$$

于是电感电流的跳变值为

$$i_L(0_+) = \frac{\sum_{k=1}^n L_k i_{Lk}(0_-)}{\sum_{k=1}^n L_k} \quad (5-52)$$

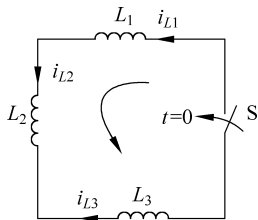


图 5-22 例 5-8 图

例 5-8 在图 5-22 所示电路中, $L_1 = 0.5\text{H}$, $L_2 = 1\text{H}$, $L_3 = 0.5\text{H}$; $i_{L1}(0_-) = i_{L2}(0_-) = 2\text{A}$, $i_{L3}(0_-) = 1\text{A}$ 。开关 S 在 $t=0$ 时合上,求 S 合上后各电感的电流。

解 在开关 S 合上后,根据 KCL,有

$$i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+) = -i_{L3}(0_+)$$

选取如图 5-22 所示的回路绕行正向,按回路磁链守恒原则列出下面的方程

$$\begin{aligned} & L_1 i_{L1}(0_-) + L_2 i_{L2}(0_-) - L_3 i_{L3}(0_-) \\ &= L_1 i_{L1}(0_+) + L_2 i_{L2}(0_+) - L_3 i_{L3}(0_+) \end{aligned}$$

可求得

$$\begin{aligned} i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+) = -i_{L3}(0_+) &= \frac{L_1 i_{L1}(0_-) + L_2 i_{L2}(0_-) - L_3 i_{L3}(0_-)}{L_1 + L_2 + L_3} \\ &= \frac{0.5 \times 2 + 1 \times 2 - 0.5 \times 1}{0.5 + 1 + 0.5} = 1.25 \text{ A} \end{aligned}$$

2. 电感元件的并联

图 5-23(a)所示为 n 个电感元件的并联,其中第 k 个电感上的初始电流为 $i_{Lk}(0)$ 。由 KCL,有

$$\begin{aligned} i_L &= \sum_{k=1}^n i_{Lk} = \sum_{k=1}^n \left[i_{Lk}(0) + \frac{1}{L_k} \int_0^t u_L(\tau) d\tau \right] \\ &= \sum_{k=1}^n i_{Lk}(0) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right) \int_0^t u_L(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5-53)$$

令

$$i_L(0) = \sum_{k=1}^n i_{Lk}(0) \quad (5-54)$$

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \quad (5-55)$$

则式(5-53)可写为

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau$$

因此有结论: n 个电感元件的并联可与一个电感元件等效,等效电感的初始电流等于 n 个电感的初始电流之和,等值电感的倒数等于 n 个电感值的倒数之和,其等效电路如图 5-23(b)所示。

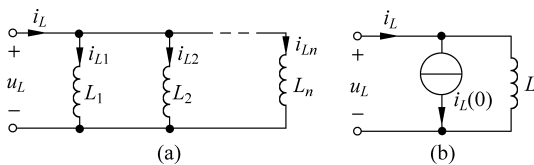


图 5-23 电感元件的并联及其等效电路

设图 5-23(a)所示电路中 n 个电感元件的初始电流均为零,则端口电流为

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau$$

于是

$$\int_0^t u_L(\tau) d\tau = L i_L \quad (5-56)$$

第 k 个电感中的电流为

$$i_{Lk} = \frac{1}{L_k} \int_0^t u_L(\tau) d\tau$$

将式(5-56)代入上式,有

$$i_{Lk} = \frac{L}{L_k} i_L \quad (5-57)$$

式(5-57)称为并联电感的分流公式,式中 L 为并联电感的等值电感。分流公式表明,电感量越小的电感元件通过的电流越大。

可以看出,电感元件并联时,等值电感的计算公式及分流公式分别与电阻并联时等值电阻的计算公式及分流公式形式相似。

当两电感并联时,由式(5-55),等效电感为

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

又由式(5-57),两电感中的电流分别为

$$i_{L1} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_L, \quad i_{L2} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_L$$

同步练习

5-13 多个电容元件串联时,其等效参数及各电容电压的分配算式是与电阻元件串联还是并联时的相应算式相似? 这些关于电容元件串联的算式是如何导出的?

5-14 n 个电容并联前若各电容电压不相等,在并联时会发生什么情况? 为什么? 并联后各电容的初始电压 $u_k(0_+)$ 如何计算?

5-15 写出 n 个电感串联及并联时等效电感 L_{eq} 的表达式。

5-16 推导图 5-24 所示电路中两电容电流 i_{C1} 和 i_{C2} 与端口电流 i 之间的关系。

5-17 电路如图 5-25 所示。已知 $u_{C1}(0_-) = 3V$, $u_{C2}(0_-) = 1V$ 。求开关 S 闭合后, $t > 0$ 时两电容上的电压。

5-18 求图 5-26 所示电路的等效电感 L_{ab} 。

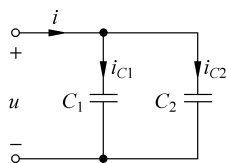


图 5-24 同步练习 5-16 图

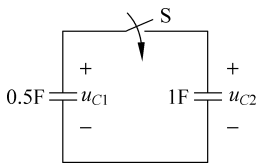


图 5-25 同步练习 5-17 图

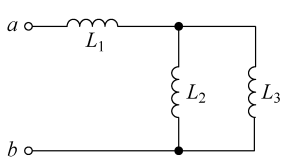


图 5-26 同步练习 5-18 图

5.5 应用实例：用电容元件构成微分器和积分器

微分器和积分器是两种简单的实用电路,在工程实际中得到了广泛的应用。这两种电路主要由电容元件和运算放大器构成。

1. 微分器

图 5-27(a)所示为微分器电路,这一电路的一种简化画法如图 5-27(b)所示。这种画法的特点是当电路中的电压源的一个端子与地相接时,该电压源的电路符号可不必画出,用电

压源非接地端子处的带极性的电压值表示,这也是电子电路中的一种习惯画法。根据运放的“虚短”“虚断”特性,可得

$$i_C = C \frac{du_i}{dt}, \quad i_R = i_C, \quad u_o = -Ri_R = -Ri_C$$

于是电路的输出为

$$u_o = -Ri_C = -RC \frac{du_i}{dt}$$

上式表明电路的输出比例于输入的微分,即电路能实现对输入的微分运算,因此这一电路称为微分器。利用微分电路可实现波形的变换。如输入 u_i 为图 5-27(c) 所示的三角波,则输出 u_o 为图 5-27(d) 所示的方波。

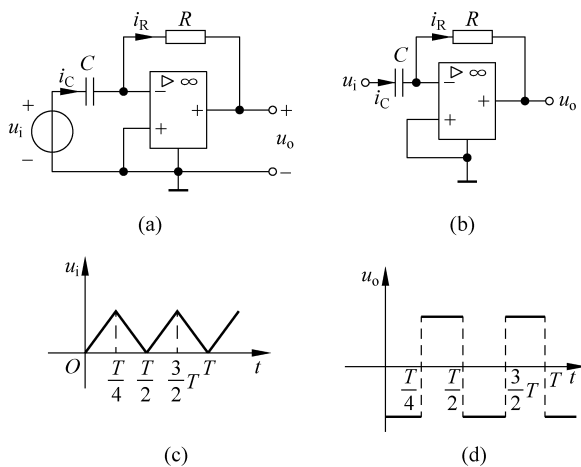


图 5-27 微分器电路

2. 积分器

积分器电路如图 5-28(a) 所示,其习惯画法如图 5-28(b) 所示。由运放的“虚断”和“虚短”特性,可得

$$i_R = \frac{u_i}{R}, \quad i_C = i_R, \quad u_o = u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt'$$

于是电路的输出为

$$u_o = -\frac{1}{C} \int_0^t i_C dt' = -\frac{1}{C} \int_0^t \frac{u_i}{R} dt' = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_i dt'$$

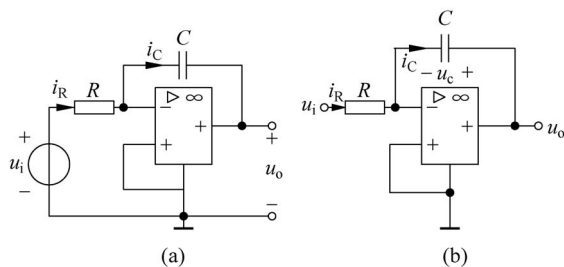


图 5-28 积分器电路

上式表明该电路的输出比例于输入的积分,即电路能实现输入的积分运算,因此称为积分器。与微分器类似,积分器能实现波形的变换。例如若电路的输入为图 5-27(d)所示的方波,则输出为图 5-27(c)所示的三角波。

本章习题

一、填空题

1. 电容元件被定义在由电量()和()构成的平面上。
2. 电容元件的电压和电流的关系是()或()的关系。
3. 电感元件被定义在由电量()和()构成的平面上。
4. 若电压、电流为非关联正向,则电感元件的伏安关系式可写为()或()。
5. 电容和电感元件都是动态元件、()元件、()元件和()元件。
6. 电容电压一般不能突变,这一特性的数学表达式为()。
7. 若一个电感元件的初始电流 $i_L(0_+) = I_0$,则该电感的等效电路是一个初始电流为零的电感与一个()的电路。
8. 若三个电容的参数 $C_1 = 2\mu\text{F}$, $C_2 = 4\mu\text{F}$, $C_3 = 1\mu\text{F}$,则三个电容串联后的等效电容参数为(),三个电容并联后的等效电容参数为()。

二、选择题

1. 电容元件的伏安关系式为 $i_C = -C \frac{du_C}{dt}$,这说明()。
 - A. 电容电流的大小与电容电压的大小有关
 - B. u_C 和 i_C 为关联正向
 - C. u_C 和 i_C 为非关联正向
 - D. 在电路频率极高的情况下,电容相当于开路
2. 电感元件电流和电压的关系式写为 $i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt'$ 的形式,这可说明()。
 - A. 不能确定电感电流、电压是否为关联正向
 - B. 电感元件具有记忆电压作用的特性
 - C. 电感元件具有记忆电流作用的特性
 - D. 电感当前的电流大小只与当前电压有关
3. 电容元件当前储存的能量()。
 - A. 与过去所有时刻其所承受的电压有关
 - B. 只与当前的电流值有关
 - C. 与初始时刻至当前的电流作用情况有关
 - D. 只与当前的电压值有关
4. 电感元件两端电压的大小取决于()。
 - A. 其通过电流的大小
 - B. 其通过的电流的变化率的大小
 - C. 其储存的能量大小
 - D. 其初始电流的大小

三、判断题

1. 电容元件的电荷和电压是代数关系。 ()

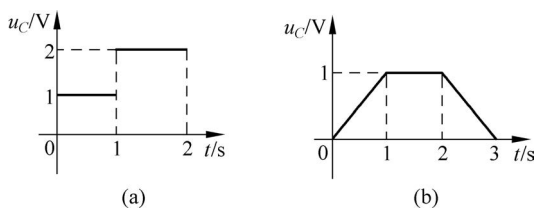
2. 电感元件的电压和电流是代数关系。 ()
3. 电容元件两端的电压愈高,则其通过的电流愈大。 ()
4. 在电路中信号频率极高的情况下,电感元件相当于断路。 ()
5. 电容和电感元件只能储存能量,不会消耗能量,它们是非耗能元件。 ()
6. 电容元件具有记忆电压作用的特性。 ()
7. 电感元件电流突变只可能发生在两个或两个以上的原始电流不同的电感串联的情况下,即 KCL 的约束使电感电流发生突变。 ()
8. 电容元件和电感元件是对偶元件,可根据对偶原理由一种元件的某关系式或结论得到另一元件的相应的关系式或结论。 ()
9. 当讨论电容元件的电压时,必须给出电容的原始电压值 $u_C(0_-)$ 。 ()

四、分析计算题

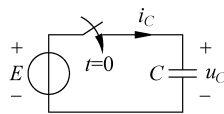
5-1 一个 $C=0.2\text{F}$ 电容的电压 u 和电流 i 为关联参考方向,若 $u(0)=2\text{V}$, $i(t)=10\sin 10t\text{A}$,试分别求出 $t=\frac{\pi}{60}\text{s}$ 及 $t=\frac{\pi}{30}\text{s}$ 时电容电压 u 的值。

5-2 一个 $C=0.5\text{F}$ 电容的电压、电流为非关联的参考方向,若其电压 u_C 的波形如题 5-2 图所示,求电容电流 i_C 并作出波形图。

5-3 一电容器 C 的原始电压值为 $u_C(0_-)=U_0$,在 $t=0$ 时,将该电容器与一电压为 E (设 $E>U_0$) 的电压源并联,如题 5-3 图所示,试求电压 $u_C(0_+)$ 和电流 i_C ,并画出 $u_C(t)$ 在全时间域中的波形。



题 5-2 图



题 5-3 图

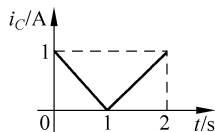
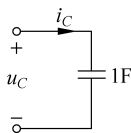
5-4 一电容元件及通过它的电流如题 5-4 图所示,且 $u_C(0_-)=1\text{V}$ 。

- (1) 求电容两端的电压 u_C 并作出波形图;
- (2) 求 $t=1\text{s}$, $t=2\text{s}$ 及 $t=3\text{s}$ 时电容储能。

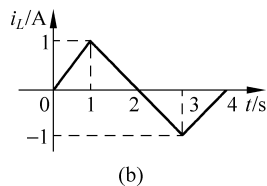
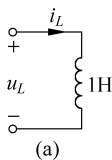
5-5 一电感元件通过的电流为 $i_L(t)=2\sin 100\pi t\text{A}$,若 $t=0.0025\text{s}$ 时的电感电压为 0.8V ,则 $t=0.001\text{s}$ 时的电感电压应为多少?

5-6 电感元件及通过它的电流 i_L 的波形如题 5-6 图所示。

- (1) 求电感电压 u_L 并作出波形;
- (2) 作出电感瞬时功率 P_L 的波形。



题 5-4 图

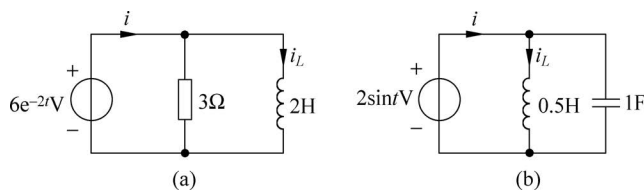


题 5-6 图

5-7 电感元件与上题相同,其两端电压 u_L 的波形与题 5-6(b)图也相同,设电压的单位为伏, $i_L(0_-)=0$ 。

- (1) 试求电感电流 i_L 并作出其波形;
- (2) 求 $t=1\text{s}$, $t=2\text{s}$ 和 $t=3\text{s}$ 时的电感储能。

5-8 电路如题 5-8 图所示,求两电路中的电流 $i(t)$, $t \geq 0$ 。设两电路均有 $i_L(0_-)=0$ 。

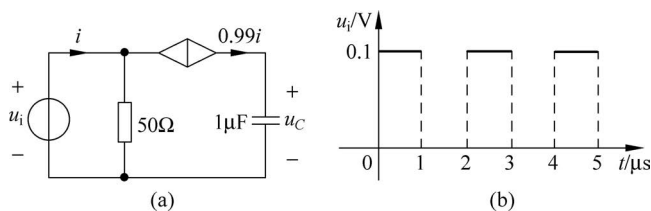


题 5-8 图

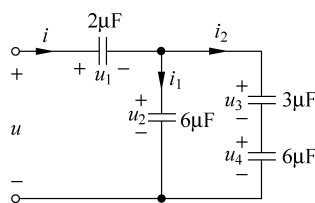
5-9 题 5-9(a)图所示的电路可用作脉冲计数器。题 5-9(b)图所示为需计数的脉冲波。试计算当电容电压从 0 上升到 19.8V 时共出现了多少个脉冲波,并作出电容电压 u_C 的波形图。

5-10 电路如题 5-10 图所示。

- (1) 求端口的等效电容 C ;
- (2) 若端口电压 $u=10\text{V}$,求各电容的电压;
- (3) 若端口电流 $i=8e^{-3t}\text{A}$,求电流 i_1 和 i_2 。



题 5-9 图

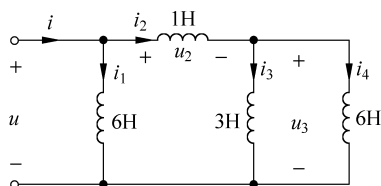


题 5-10 图

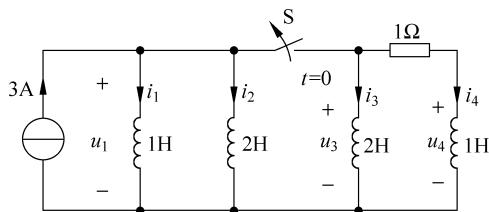
5-11 电路如题 5-11 图所示,设各电感的初始电流为零。

- (1) 求端口的等效电感;
- (2) 若端口电压 $u(t)=8e^{-2t}\epsilon(t)\text{V}$,求各电感电流及电压 u_2 和 u_3 。

5-12 在题 5-12 图所示电路中,开关 S 原是闭合的。在 $t=0$ 时 S 打开,求 $t=0_+$ 时各电感的电流及 $t \geq 0_+$ 时电压 $u_1(t)$ 。



题 5-11 图



题 5-12 图