

第 5 章 表面形状及其接近性

本章介绍研究单元复合形中子复合形之间关系的两种基本类型的接近性，即空间接近性和描述接近性。这些接近性可用于聚类和分离三角化有限有界表面区域（例如在视觉场景中发现的区域）中的子复合形。本章介绍了许多可用于探测、分析、比较和分类三角化表面区域上的单元复合形的连通接近性内容。

5.1 引言

简而言之，一对非空复合形 A 和 B 具有空间接近性（由 $A \delta B$ 表示），前提是复合形共享点。在复合形重叠的情况下，即复合形相互延伸（一个复合形的内部是另一个复合形的内部的一部分）的情况下，复合形 A 和 B 具有强接近性（用 $A \delta B$ 表示），见表 5.1。

表 5.1 接近性及它们的符号

符号	含义	符号	含义
$A \delta B$	5.4 节，切赫接近	$\delta(A, B)$	5.4 节，斯米尔诺夫测度
$A \overset{\text{cm}}{\delta} B$	5.5 节	$\text{Nrv}A$	例 5.9
$\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}E$	5.5 节	$\text{skNrv}E$	5.6 节
$\overset{\text{M}}{\text{conn}} \delta$	5.7 节	$\overset{\text{M}}{\text{conn}} \delta_{\phi}$	5.12 节
$A \overset{\text{M}}{\cap} B$	5.12 节	$\text{cl}_{\phi}A$	5.12 节
(K, \mathcal{R})	5.14 节 A	$\blacktriangle A \cap \blacktriangle A'$	6.8 节

例 5.1 （骨架与三角形骨架区域重叠）

图 5.1 显示了一族收获的辣椒的三角化视觉场景上的细丝骨架 $\text{sk}E$ 。回想一下，细丝骨架是一种具有非空边界和非空内部的形状。在这个三角剖分中，请注意：

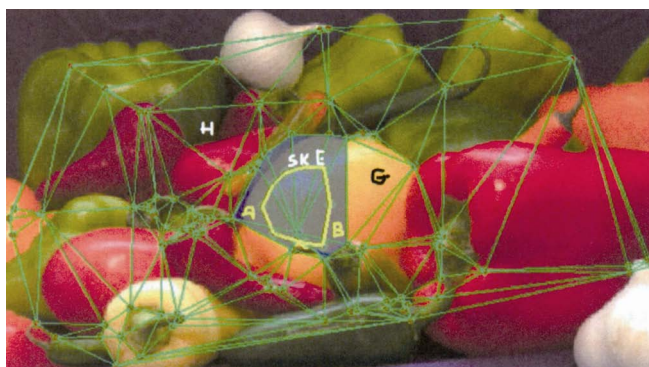


图 5.1 $\text{sk}E$ 覆盖三角形 A 和三角形 B

■

(1) skE 与填充三角形 A 重叠, 即 $skE \overset{\Delta}{\delta} A$ 。

(2) skE 与填充三角形 B 重叠, 即 $skE \overset{\Delta}{\delta} B$ 。

在 skE 和图 5.1 中的区域之间还有许多其他的强接近实例。它们是什么?

一对非空的复合形 G 和 H 彼此远离并且没有空间接近性 (由 $G\delta H$ 表示), 前提是复合形不相交。在此情况下, 我们说复合形 G 和 H 彼此远离。即复合形没有共同的点或边, 并且它们不重叠。

例 5.2 (远离三角形区域的细丝骨架)

骨架形状 skE 远离填充三角形区域的两个实例显示在图 5.1 中的三角化视觉场景中。即

(1) skE 与填充三角形 G 远离, 即 $skE \delta G$ 。

(2) skE 与填充三角形 H 远离, 即 $skE \delta H$ 。

在 skE 和图 5.1 中的区域之间还有许多其他的远离实例。它们是什么? ■

复合形 A 和 B 之间的描述接近性发生在复合形 A 的描述与复合形 B 的描述 (由 $A \delta_{\phi} B$ 表示) 相匹配的情况下。借助描述, 我们指的是一种或多种区域特征, 例如形状、面积、颜色。例如, 复合形 A 的描述用 $\Phi(A)$ 表示, 代表对于复合形 A 的特征的特定选择。当一对复合形 A 和 U 不具有描述上的接近性 (用 $A \delta_{\phi} U$ 表示) 时, 复合形 A 的描述与复合形 U 的描述不匹配。

例 5.3 (三角形区域之间的描述接近性)

图 5.1 中显示了在收获辣椒集族的三角化视觉场景中标记的实心三角形 A 、 B 、 G 、 H 和骨架形状 skE 。令描述 Φ 根据每个三角形的形状给出, 例如, $\Phi(A) = A$ 的形状。在这个三角剖分中, 有许多描述接近性以及区域对之间缺乏描述接近性的实例, 即:

(1) 对于 $\{A, B, G, H\}$ 中的每个 X , A 描述性地接近 X (A 和 X 具有相同的形状), 即 $A \delta_{\phi} X$ 。

(2) skE 在描述上远离 $\{A, B, G, H\}$ 中的每个 X (skE 和 X 的形状不同), 即 $skE \delta_{\phi} X$ 。

还有许多其他实例说明 skE 和图 5.1 中的区域之间缺乏描述接近性。它们是什么? ■

例 5.4 (相机图像的描述接近性)

设 X 是图 5.2 中数字图像中的一组点, 具有描述性的 Lodato 接近性 δ_{ϕ} 。也就是说, 对于 X 中的子集 A 、 B , 我们可以写 $A \delta_{\phi} B$, 只要 A 的描述与 B 的描述匹配。

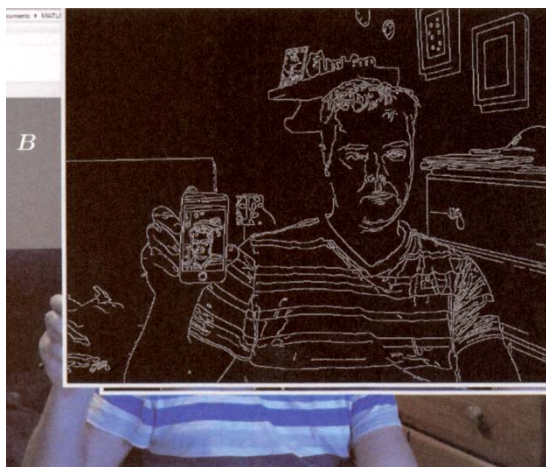


图 5.2 $A \delta_{\phi} B$ (描述接近性集合)

例如，设 A 是图 5.2 中显示手和躯干的部分，设 B 是显示所检测到的图像边缘部分¹。让描述 $\Phi(A)$ 使用在 A 中由边缘像素的形状描述符的梯度方向定义。显然， $A \delta_\Phi B$ ，因为 A 中沿手顶部边缘的边缘像素的梯度方向与 B 中沿手顶部边缘的边缘像素的梯度方向完全相同。

5.2 接近景观

Som Naimpally (图 5.3) 的生活和工作概述了接近景观[1]。这是一个数学家在完成博士学位后开始研究接近空间理论的非凡故事。由于 Som Naimpally 和剑桥大学出版社的访问者在密歇根大学偶然会面，后者邀请他写一本关于接近性的专著。他和他的研究生 B.D. Warrack 给出了对 1970 年之前的接近空间理论的完整概述[2]。

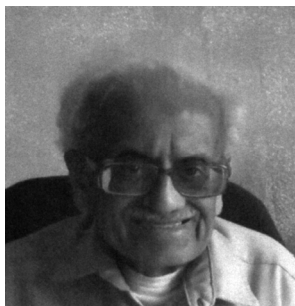


图 5.3 Som Naimpally

接近性的起源


从 F. Riesz 于 1908 年在罗马举行的国际数学家大会上的讲话开始，对集合的接近性的研究至今已跨越了 100 多年[3]，最近 Naimpally [4, 5] 和 Di Concilio [6-8] 还发表了评论。切赫 (Čech) 在 1936—1939 年的布尔诺研讨会期间对接近关系进行了最早之一的介绍，该介绍于 1966 年出版[9, 25.A.1 节]。切赫使用符号 p 来表示定义在非空集合 X 上的接近关系，还将其公理化。切赫在接近空间方面的工作是在 V.A. Efremovič 的工作 (1933 年) 两年后开始的，他引入了广泛考虑的接近公理化，直到 1951 年才发表[10]。有关 Efremovič 的接近公理的详细介绍，请参见文献[8, 11]，对于应用，请参见文献[12-16]。 ■

5.3 什么是接近空间

在我们开始考虑各种形式的接近空间的公理之前，退一步问一个有帮助的问题，什么是接近空间？回想一下，任何具有其特征的非空集合就是我们所说的空间。所以我们可能

¹ 非常感谢 Braden Cross 提供的图 5.2 中的网络摄像头图像，为获取该图像使用了 MATLAB 计算机视觉系统工具箱和 Canny 边缘检测算法的 MATLAB 实现。

想知道什么时候非空集值得命名为接近空间。

什么是接近空间？空间中任意两个集合的可检测接近性 

一个有限非空集 P 是一个接近空间，前提是可以确定 P 中任意两个子集的接近或远离（遥远，即不相交）。斯米尔诺夫[17]有时将接近空间 P 称为 δ 空间。 ■

5.4 切赫接近性和斯米尔诺夫接近性度量

本节介绍最简单的接近空间，称为切赫接近空间。接近空间 P 有时称为 δ 空间[17]，前提是 P 具有满足以下关系的 δ ，例如，下面是对于集合 $A, B, C \in 2^P$ 的切赫公理[9, 2.5节, p.439]。

δ 切赫接近性

切赫公理

P1: P 中的所有子集都远离空集。

P2: $A \delta B \Rightarrow B \delta A$ ，即 A 接近 B 意味着 B 接近 A 。

P3: $A \delta (B \cup C) \Leftrightarrow A \delta B$ 或 $A \delta C$ 。

P4: $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \delta B$ （接近公理）。

具有切赫接近性（用 (P, δ) 表示）的空间 P 称为切赫接近空间。

习题 5.5

在三角化视频帧图像中，切赫接近性的示例有哪些？也就是说，让 K 是由三角化视频帧图像中的填充三角形集族所定义的单元复合形。假设 K 具有切赫 δ 。什么时候认为 K 中的一对子复合形 A 和 B 彼此接近？换句话说，什么时候可以说 $A \delta B$ ，即根据切赫接近公理， A 接近 B ？ ■

习题 5.6

视频帧图像序列中的远离集的示例有哪些？ ■

令 2^P 表示非空集 P 的所有子集的集族。我们采用斯米尔诺夫[17, 1节, p.8]介绍接近测度的惯例。我们认为 $\delta(A, B) = 0$ ，只要子集 $A, B \in 2^P$ 是接近的；认为 $\delta(A, B) = 1$ ，只要子集 $A, B \in 2^P$ 不接近，即在 E 和 H 之间存在着非零距离。令 $A, B, C \in 2^P$ ，那么接近空间满足以下性质。

斯米尔诺夫接近空间性质

Q1: 如果 $A \subseteq B$ ，则对于任何 C ， $\delta(A, C) \geq \delta(B, C)$ 。

Q2: 任何相交的集合都是接近的。

Q3: 没有集合接近空集。

在切赫接近空间中，斯米尔诺夫接近空间性质 Q3 由公理 P1 满足，性质 Q2 由公理 P2 ~ P4 满足，即 P 的任何子集都是接近的，前提是这些子集具有非空交集。也就是说， A 接近 B 意味着 B 接近 A （公理 P2）。类似地， A 接近 $B \cup C$ 意味着 A 接近 B 或 A 接近 C （公理 P3）或 A 接近 $B \cap C$ （公理 P4）。设 $A \cap C = \emptyset$ ，则 $\delta(A, C) = 1$ ，因为 A 与 C 没有共同点。类似地，假设 $B \cap C = \emptyset$ ，则 $\delta(B, C) = 1$ ，因为 B 和 C 没有共同点。因此，满足性质

Q1, 因为

$$\delta(A, C) = \delta(B, C) = 1 \Rightarrow \delta(A, C) \geq \delta(B, C)$$

对于 $A \subset B$ 和 $C \subset B$, 我们有 $\delta(A, C) = 0$, 因为 A 和 C 有共同点。类似地, $\delta(B, C) = 0$ 。因此, $\delta(A, C) = \delta(B, C) = 0 \Rightarrow \delta(A, C) \geq \delta(B, C)$ 。

例 5.7 (三角化有界区域上的斯米尔诺夫接近测度)

在这个例子中, 我们回顾例 5.1, 其中在图 5.1 所示的收获辣椒集族的三角化视觉场景上有填充三角形 A 、 B 、 G 、 H 和细丝骨架 skE 。在这种情况下, 我们可以写出:

- (1) $\delta(skE, \blacktriangle A) = 0$, 因为 $\blacktriangle A$ 的一部分是在 skE 的内部。
- (2) $\delta(skE, \blacktriangle B) = 0$, 因为 $\blacktriangle B$ 的一部分是在 skE 的内部。
- (3) $\delta(skE, \blacktriangle G) = 1$, 因为 $\blacktriangle G$ 的任何部分都没有与 skE 相交。
- (4) $\delta(skE, \blacktriangle H) = 1$, 因为 $\blacktriangle H$ 的任何部分都没有与 skE 相交。

图 5.1 中还有许多其他三角形区域 X , 其中 $\delta(skE, \blacktriangle X) = 0$ 。也就是说, 骨架形状 skE 和区域 X 有共同点。类似地, 图 5.1 中还有许多其他三角形区域 Y , 其中 $\delta(skE, \blacktriangle Y) = 1$ 。换句话说, 骨架形状 skE 和 $\blacktriangle Y$ 没有共同点。这两种情况的例子是什么? ■

5.5 连通接近性空间

令 K 为平面单元复合形中的骨架集族, 并令 A 、 B 、 C 为包含 K 中具有关系 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 的骨架的子集。这对子集 A 和 B 是连通的, 条件是 $A \cap B \neq \emptyset$, 即 A 中有一个骨架, 它至少有一个与 B 中的骨架共有的顶点。否则, A 和 B 是不连通的。有关这方面的更多信息, 请参阅本节下文。

设 X 是一个非空集, 设 A 、 $B \in 2^X$ 是子集集族 2^X 中的非空子集。 A 和 B 是相互分离的, 只要 $A \cap B = \emptyset$, 即 A 和 B 没有共同点[18, 26.4 节, p.192]。回想一个非空集合 A 是开的, 只要 A 有一个非空的内部并且不包括它的边界。例如, 装满咖啡的杯子 A 是开的, 前提是 A 仅包含杯子内的咖啡, 但不包括杯子的壁和底部。

一对非空集 A 和 B 是不相交的, 前提是 A 和 B 没有公共点。例如, 设 A 、 B 是意大利萨勒诺市和马尼托巴省温尼伯市的表面, 它们没有共同的表面点, 因此是不相交的。一个空间 X 是不连通的, 只要我们能找到不相交的开的子集 A 、 $B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$ 。从分离集的概念, 我们得到以下连通空间的结果。

定理 5.8 ([18])

如果 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, 其中每个 $X_n \in 2^X$ 是连通的, 并且对于每个 $n \geq 2$ 有 $X_{n-1} \cap X_n \neq \emptyset$, 那么空间 X 是连通的。

证明: Willard [18, 26.4 节, p.193]给出了证明。这是一种新的连通性, 在这种连通性中, 非空相交被强接近性取代, 参见 Guadagni [19, p.72]和 Peters [20, 1.16 节]。 ■

例 5.9 (连通的神经空间)

令 $NrvA$ 是三角化平面表面区域上的亚历山德罗夫神经复合形。神经 $NrvA$ 中的每个子集集族都是连通的, 因为 $NrvA$ 中没有不相交的开集 E 、 B , 使得 $E \cup B = NrvA$ 。回想一下,

$\text{Nrv}A$ 是一个实心三角形的集族 \blacktriangle ，包括一个具有以下属性的公共顶点：

联合性质： 令 X_n 是 $\text{Nrv}A$ 中的一组三角形 \blacktriangle 。那么

$$\text{Nrv}A = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n : \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$$

相交性质： 令 X_{n-1}, X_n 是三角形 \blacktriangle 的集合。令 p 为 $\text{Nrv}A$ 的核，即神经中三角形 \triangle 的共同顶点。那么

$$X_{n-1} \cap X_n = \overbrace{p}^{\text{p对NrvA的所有子集是公共的}} \\ \text{Nrv}A \text{ 中s的非空交集} \\ \neq \emptyset$$

因此，根据定理 5.8， $\text{Nrv}A$ 是连通的空间。 ■

定理 5.10

光涡旋神经是一个连通的空间。 ■

习题 5.11 ☕

证明定理 5.10。

提示： 令 $\text{sk}_{\text{cyclic}}N$ 是光涡旋神经 $\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}E$ 中最里面的循环骨架，设 $\text{sk}_{\text{cyclic}}A$ 是一个与 $\text{sk}_{\text{cyclic}}N$ 相同的边缘细丝的循环骨架。定义涡旋神经辐条 $\text{spoke}N A$ 为

$$\text{spoke}N A = \overbrace{\text{sk}_{\text{cyclic}}N \cup \text{sk}_{\text{cyclic}}A}^{\text{在光涡旋神经sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}E上的辐条}} \\ \text{光涡旋神经等于其辐条的并集} \\ \text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv} A = \bigcup_{i=1}^k \text{spoke}N A_i$$

使用 $\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}E$ 中的每对辐条都具有非空交集以及 $\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}A$ 是一个连通空间并且满足并集和交集属性的事实。 ■

定理 5.12

光涡旋神经中的每一对顶点都是路径连通的。 ■

习题 5.13 🚲

证明定理 5.12。也就是说，对于每一个光涡旋神经 $\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}A$ ，证明我们总能找到 $\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}A$ 中每对顶点 p 和 q 之间的路径（细丝序列）。 ■

习题 5.14 ☕

对于每个光学涡旋神经 $\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}A$ ，为 $\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}A$ 中的顶点对 p 和 q 编造一个顶点接近性度量 $\delta(p, q)$ ，类似于斯米尔诺夫接近性度量。也就是说，定义 $\delta(p, q)$ 以便该顶点接近性度量返回一个值，该值是 $\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}A$ 中顶点的接近或远离的度量。 $\delta(p, q)$ 的改进版本将计算 $\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}A$ 中 p 和 q 之间的细丝长度，而不仅仅是计算 $\text{sk}_{\text{cyclic}}\text{Nrv}A$ 中 p 和 q 之间的细丝数量。 ■

在这项工作中，连通性是根据连通接近性 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 和重叠连通性 $\overset{\text{M}}{\delta}^{\text{conn}}$ 来定义的。在这两种情况下，在由连通骨架填充的连通单元复合形空间的研究中，非空相交点被连通接近性取代。

对于连通集 $A, B \subset K$ ，我们写成 $A \overset{\text{conn}}{\delta} B$ 。实际上，对于 K 中的每对骨架 A 和 B ，有

$A \overset{\text{conn}}{\delta} B$, 前提是在 A 中的至少一个顶点和 B 中的一个或多个顶点之间存在路径。路径是一对顶点之间的边序列。等价地, $A \cap B \neq \emptyset$ 蕴涵 $A \overset{\text{conn}}{\delta} B$ 。如果骨架集合 $A, B \subset K$ 是分离的 (即 A 和 B 没有共同的顶点), 我们写 $A \overset{\text{conn}}{\delta} B$ 。从连通性方面看, 切赫公理 P4 是皇帝的新装, 即:

$\overset{\text{conn}}{\delta}$ 替换切赫公理 P4 中的 δ

P4conn: $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \overset{\text{conn}}{\delta} B$ 。

通过在余下的切赫公理中用 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 替换 δ , 我们获得了切赫连通接近性的完整图片。

$\overset{\text{conn}}{\delta}$ 切赫连通接近性

连通接近性公理。

P1conn: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \overset{\text{conn}}{\delta} B$, 即非重叠骨架不连通。

P2conn: $A \overset{\text{conn}}{\delta} B \Rightarrow B \overset{\text{conn}}{\delta} A$, 即 A 接近 B 意味着 B 接近 A 。

P3conn: $A \overset{\text{conn}}{\delta} (B \cup C) \Rightarrow A \overset{\text{conn}}{\delta} B$ 或 $A \overset{\text{conn}}{\delta} C$ 。

P4conn: $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \overset{\text{conn}}{\delta} B$ (接近连通公理)。

连通接近性空间由 $(K, \overset{\text{conn}}{\delta})$ 表示。对于 $A, B \in K$, 斯米尔诺夫度量 $\overset{\text{conn}}{\delta}(A, B) = 0$ 表示 $A \cup B$ 中的任意两个顶点之间存在路径, $\overset{\text{conn}}{\delta}(A, B) = 1$ 表示 $A \cup B$ 中的任意两个顶点之间没有路径。

引理 5.15

设 K 是平面单元复合形中的骨架集族, 该复合形具有连通接近性 δ 。那么 $A \overset{\text{conn}}{\delta} B$ 意味着 $A \cap B \neq \emptyset$ 。

证明: $A \overset{\text{conn}}{\delta} B$, 假设骨架 A 和 B 中的任意一对顶点之间存在路径, 即 A, B 是连通的, 前提是 A 和 B 有一个公共顶点。也就是说, 如果骨架 A, B 有一个公共顶点, 那么 $A \overset{\text{conn}}{\delta} B$ (来自公理 P4conn)。因此, $A \cap B \neq \emptyset$ 。 ■

引理 5.16

设 K 是一个连通性空间, 它包含一个平面单元复合形中的骨架集族, 具有关系 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 。空间 K 是接近空间。

证明: 设 $A, B, C \in K$ 。斯米尔诺夫接近空间属性 Q3 由公理 P1conn 满足, 属性 Q2 由公理 P2conn~P4conn 满足, 即任何一组接近的骨架都是相连通的。设 $C \subset A \cup B$ (C 是骨架 $A \cup B \in K$ 的一部分)。对于 A 或 B 中的任何顶点 p , 在 p 和任何顶点 $q \in C$ 之间存在一条路径。那么 $A \overset{\text{conn}}{\delta} C$ 和 $B \overset{\text{conn}}{\delta} C$ 。因此, $\delta(A, C) = 0 = \delta(B, C)$ 。因此, $\delta(A, C) \geq \delta(B, C)$ 。如果 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ (A 和 B 中的骨架与 C 没有相同的顶点), 则 $\delta(A, C) = 1 = \delta(B, C)$ 和 $\delta(A, C) \geq \delta(B, C)$ 。从公理 P4conn, 我们有

$$(A \cup B) \overset{\text{conn}}{\delta} C \Leftrightarrow (A \cup B) \cap C = \emptyset \Leftrightarrow \delta(A, C) = 1 = \delta(B, C) \Rightarrow \delta(A, C) \geq \delta(B, C)$$

斯米尔诺夫属性 Q1 得到满足。因此, $(K, \overset{\text{conn}}{\delta})$ 是接近空间。 ■

例 5.17 (连通接近性空间)

设 K 是图 5.4 中表示的骨架集族, 具有接近性 δ^{conn} 。 K 中的一对骨架是接近的, 前提是这些骨架至少有一个共同的顶点。例如, 涡旋循环 $\text{vcyc}A$ 和骨架 $\text{skel}E$ 有共同的顶点 v_6 。因此, 从公理 P4conn, 我们有

$$v_6 \in \cap \text{skel}E \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{vcyc}A \overset{\text{conn}}{\delta} \text{skel}E$$

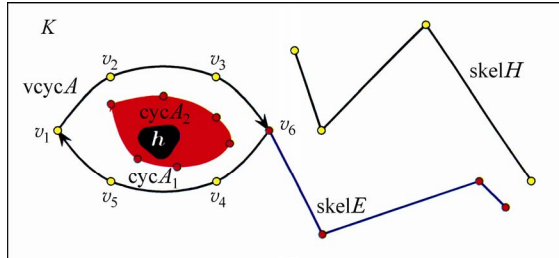


图 5.4 骨架集族, 包括一个带孔的涡旋循环

不接近的骨架没有共同的顶点。例如, 在图 5.4 中, 有

$$\text{skel}E \overset{\text{conn}}{\delta} \text{skel}H$$

这源于这对骨架 $\text{skel}E$ 和 $\text{skel}H$ 没有共同的顶点。 ■

例 5.18 (连通接近性空间上的路径连通细丝顶点)

设 K 是图 5.5 中表示的三角化视觉场景上的单元复合形, 具有接近性 δ^{conn} 。让骨架 $\text{sk}A$, $\text{sk}B$ 如图所示。观察到 $\text{sk}A \cap \text{sk}B = r$ 。因此, 根据公理 P4conn, 我们有

$$\text{sk}A \cap \text{sk}B \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{sk}A \overset{\text{conn}}{\delta} \text{sk}B$$

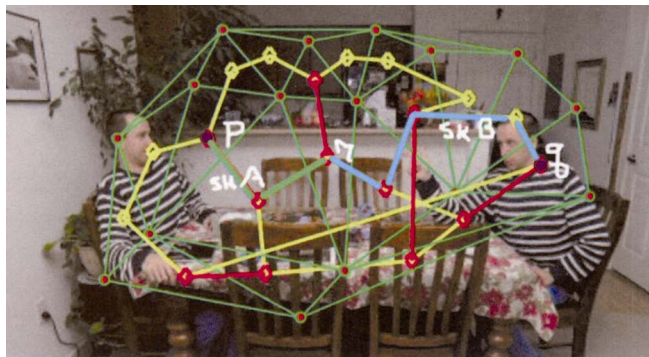


图 5.5 连通接近性空间上的骨架 $\text{sk}A$ 、 $\text{sk}B$

$\text{sk}A$ 上的顶点 p 由路径连通到 $\text{sk}B$ 上的顶点 q , 因为有一系列骨架细丝提供了一对顶点之间的路径。事实上, 这些骨架上的每一对顶点都是路径连通的。 ■

定理 5.19

设 K 是平面单元复合形中涡旋循环的集族。具有关系 δ^{conn} 的空间 K 是接近空间。

证明: 涡旋循环是同心 1-循环的集族。每个 1-循环是一个骨架。那么涡旋循环是骨架的集族, 每个涡旋循环的集族也是骨架的集族。因此, 根据引理 5.16, K 是连通接近性空间。 ■

5.6 涡旋神经接近性空间

包含具有公共顶点的 1-循环的涡旋循环 $\text{vcyc}A$ 是涡旋神经（由 $\text{vNrv}A$ 表示）的一个示例。具有 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 接近性的涡旋神经的集族是连通接近性空间。

定理 5.20

设 K 是平面单元复合形中的涡旋神经的集族。具有关系 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 的空间 K 是接近空间。

证明：每条涡旋神经都是相交的 1-循环的集族，它们是骨架。结果来自引理 5.16，因为 K 也是具有接近性 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 的骨架集族。 ■

例 5.21（涡旋神经接近空间）

三个涡旋神经 $\text{vNrv}A$ 、 $\text{vNrv}B$ 、 $\text{vNrv}E$ 连通到位于单元复合形 K 中的 $\text{vNrv}B$ 内部的 $\text{vNrv}A$ 、 $\text{vNrv}B$ 、 $\text{vNrv}H$ ，如图 5.6 所示（还可参见图 5.7）。图 5.6 中出现的涡旋中的 1-循环的填充内部用阴影内部表示。

$$\begin{aligned} & \text{在图5.6中} \\ & \text{cyc}A_2 \in \text{vNrv}A_1 \in \text{vNrv}A \\ & \text{在图5.6中} \\ & \text{cyc}E_2 \in \text{vNrv}E_1 \in \text{vNrv}E \\ & \text{在图5.7中} \\ & \text{cyc}H_2 \in \text{vNrv}H \in \text{vNrv}B \end{aligned}$$

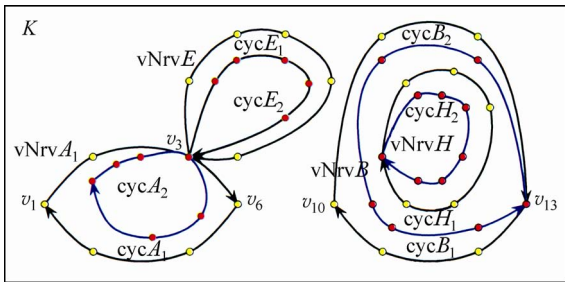


图 5.6 接近涡旋神经的集族

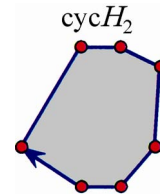


图 5.7 图 5.6 中的 $\text{cyc}H_2 \in \text{vNrv}H \in \text{vNrv}B$

为简单起见，图 5.6 中的 1-循环的填充内部通常是隐藏的（未着色）。令涡旋神经 K 的集族具有接近性 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 。涡旋神经接近的前提是神经有非空交点。例如， $\text{vNrv}A \overset{\text{conn}}{\delta} \text{vNrv}E$ ，即 $\delta(\text{vNrv}A, \text{vNrv}E) = 0$ 。因此，斯米尔诺夫属性 Q2 由 $(K, \overset{\text{conn}}{\delta})$ 满足。涡旋神经远离（不接近）的前提是涡旋神经的相交点为空。例如， $\text{vNrv}A \overset{\text{conn}}{\delta} \text{vNrv}E$ ，即 $\delta(\text{vNrv}A, \text{vNrv}E) = 1$ （斯米尔诺夫属性 Q3）。例如，我们也有：

$$\begin{aligned} \delta(\text{vNrv}A, \text{vNrv}H) &= 1 = \delta(\text{vNrv}B, \text{vNrv}H) \quad \text{不相交神经} \\ \delta(\text{vNrv}H, \text{vNrv}E) &= 1 \text{ 且 } \delta(\text{vNrv}A, \text{vNrv}E) = 0 \Leftrightarrow \delta(\text{vNrv}H, \text{vNrv}E) \geq \delta(\text{vNrv}A, \text{vNrv}E) \end{aligned}$$

实际上，斯米尔诺夫属性 Q1 得到满足。因此， $(K, \overset{\text{conn}}{\delta})$ 是一个连通接近空间。 ■

例 5.22（涡旋神经连通接近性）

设 K 是骨架涡旋神经 $\text{skNrv}E$ 中的 1-循环 $\text{cyc}A$ 、 $\text{cyc}B$ 的集族，该神经 $\text{skNrv}E$ 具有接

近性 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ ，如图 5.8 中的视频帧图像所示。观察 $\text{sk}A \cap \text{sk}B = p$ 。因此，根据公理 P4conn，我们有

$$\text{sk}A \cap \text{sk}B \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{sk}A \overset{\text{conn}}{\delta} \text{sk}B$$

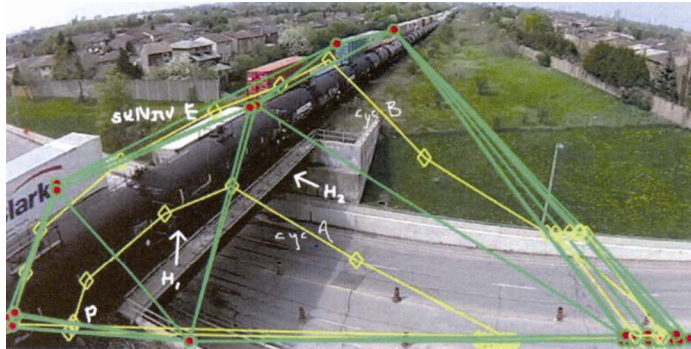


图 5.8 $\text{cyc}A$ 在骨架涡旋神经 $\text{skNrv}E$ 中与循环 $\text{cyc}B$ 重叠

无须太多工作，我们就可以证明连通接近空间 $(K, \overset{\text{conn}}{\delta})$ 的每个公理都能得到满足。 ■

习题 5.23 ☕

证明在例 5.22 中，对于具有 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 的 K ，连通接近空间的每一个公理都得到了满足。 ■

例 5.24 (连通接近空间上的路径连通咖啡杯焦散顶点)

设 K 是具有接近性 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 的咖啡杯焦散上的尖端细丝 $\text{filament}A$ 、 $\text{filament}B$ 、 $\text{filament}E$ (如图 5.9 所示) 的集族。观察 $\text{filament}E \in \text{filament}A \cap \text{filament}B$ ，即细丝 $\text{filament}A$ 和 $\text{filament}B$ 有非空交点。因此，根据公理 P4conn，我们有

$$\text{filament}A \cap \text{filament}B \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{filament}A \overset{\text{conn}}{\delta} \text{filament}B$$

$\text{filament}A$ 上的顶点 p 通过路径连通到 $\text{filament}B$ 上的顶点 q ，因为有一系列细丝提供了一对顶点之间的路径。事实上，这些细丝上的每一对顶点都是路径连通的。 ■

例 5.25 (时空涡旋神经接近空间)

Murphy 和 MacManus [21]最近对地面涡旋空气动力学的研究以及 Barata、Bernardo、Santos 和 Silva [22]以及 Silva、Durão、Barata、Santos、Ribeiro [23]在近地重叠喷射流的涡旋中观察到了时空涡旋神经 (重叠涡旋循环)。物理涡旋神经可以在重叠湍流速度涡旋的轮廓表达中观察到，例如，文献[23]中的图 6.8 和 Spalart、Strelets、Travin 和 Slur 的涡旋系统 [24，图 7]。 ■

在具有接近性 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 的单元复合形中，涡旋神经内部存在孔洞，我们得出以下结果。

推论 5.26

设 K 是平面单元复合形中内部包含孔的涡旋神经的集族。具有关系 $\overset{\text{conn}}{\delta}$ 的空间 K 是接近空间。

证明：直接来自定理 5.20，因为 K 中涡旋神经之间的关系不受神经内部存在孔洞的影响。 ■