

信号的频域分析

3.1 引言

第2章介绍了典型信号在时间域内的变化规律和特点。实际应用中,还会常常在频率域内描述信号,分析其特性。例如,人们所收听的广播电台都是以固定的频率发射信号,像中央人民广播电台第一套节目(中国之声)的频率就有中波 639kHz、981kHz、1008kHz 等,天津交通台的频率为 106.8MHz,天津新闻广播台的频率为 97.2MHz 等。再如,在描述歌唱演员时,可以用男高音、女高音、中音、低音等来区分不同的歌唱家。这些都是在频率域内描述信号特征的,更容易区分和理解不同信号的特点。本章将介绍信号的频域分析方法,研究典型信号在频域内的特性,更深入理解信号的本质。仍然先从连续信号的频域分析开始,然后再介绍离散信号的频域分析。

3.2 连续周期信号的频谱分析——傅里叶级数

先来看一个信号频域表示的例子,如 $f(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, 时域波形如图 3-1(a) 所示,若将其在频域内表示,则以 ω 为横坐标,纵坐标为振幅和相位,如图 3-1(b)、(c) 所示。由频域表示可以看出,信号 $f(t)$ 是一个具有角频率为 ω_0 的单一频率信号。该信号的振幅是 A , 初相位是 φ_0 。

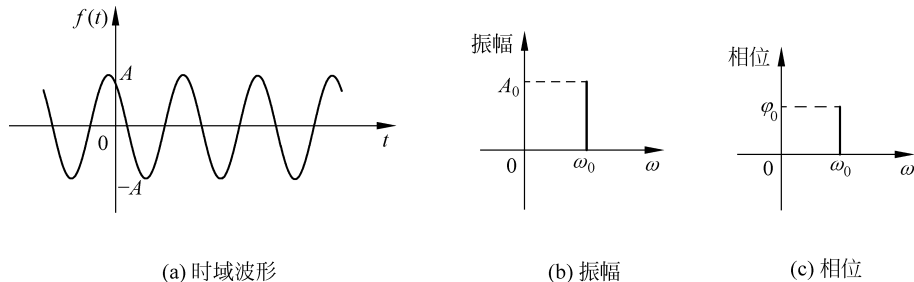


图 3-1 含有一个频率分量的信号时域和频域图

同理,若 $f(t) = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (其时域波形如图 3-2(a)所示),仍可以用组成该信号的频率、初相位及振幅在频域内描述该信号,即如图 3-2(b)、(c)所示。

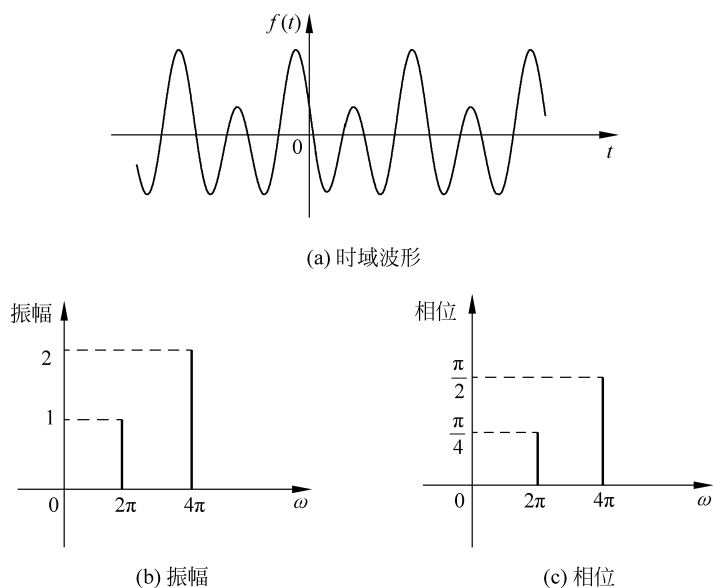


图 3-2 含有两个频率分量的信号时域和频域图

从这个例子可以看出,信号 $f(t)$ 的表达式未知,如果只看到时域波形,很难分析其变化规律和特点。实际上,转到频域内描述后就很容易发现,这个信号实际上是由两个频率 $\left(f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}\right)$ 的正弦或余弦信号组成的。如果由波形写出信号的表达式,图 3-2(a)很难直接写出,而由图 3-2(b)、(c)可很容易写出来。

由此可见,信号不仅可在时域内描述,也可在频域内描述。而且,在许多情况下,频域描述更加简捷。这也是为什么引入信号的频域分析方法的原因之一。那么是不是任意信号都可以在频域内描述呢?如果可以,如何描述?这就是本节要研究的问题。

3.2.1 连续周期信号的单边谱分析——三角形式的傅里叶级数

设 $f(t)$ 为周期信号,其周期为 T_1 ,角频率为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$,若 $f(t)$ 满足狄利赫利条件^①,则 $f(t)$ 可分解为三角函数的线性组合,即

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (3-1)$$

① 狄利赫利条件如下。

- 在一个周期内,如果 $f(t)$ 有间断点存在,则间断点的数目应是有限个。
- 在一个周期内, $f(t)$ 的极大值和极小值的数目应是有限个。
- 在一个周期内,信号 $f(t)$ 是绝对可积的,即 $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt < \infty$ 。

式中, n 为正整数($n=1, 2, \dots$); a_0, a_n, b_n 按如下公式计算

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos n\omega_1 t dt \\ b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin n\omega_1 t dt \end{cases} \quad (3-2)$$

注意: 式(3-2)中的积分区间是 $[t_0, t_0+T_1]$, 其遍布 $f(t)$ 的一个周期, 为了简便起见, 通常取积分区间为 $[0, T_1]$ 或者 $\left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right]$ 。

通常情况下, 用到的周期信号都满足狄利赫利条件。将式(3-1)表示成一个正弦或余弦函数形式, 即

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \\ &= c_0 + c_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + c_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_2) + \dots \end{aligned} \quad (3-3)$$

对照式(3-1)和式(3-3), 可以看出傅里叶级数的系数之间存在以下关系

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ a_n &= c_n \cos \varphi_n \\ b_n &= -c_n \sin \varphi_n \\ \tan \varphi_n &= -\frac{b_n}{a_n} \end{aligned} \quad (3-4)$$

由式(3-3)可见, 信号 $f(t)$ 是由不同频率的余弦(或者正弦, 相位差 $\frac{\pi}{2}$)信号的线性和组成。

以式(3-3)为基准, 把角频率为 ω_1 的分量称为基波, 角频率为 $2\omega_1, 3\omega_1, \dots, n\omega_1$ 的分量分别称为二次谐波, 三次谐波, $\dots, n$ 次谐波。 $c_0 = a_0$ 表示信号的直流分量, c_n 表示各次谐波分量的大小, φ_n 表示各次谐波分量的初始相位。故将周期信号分解成三角函数的傅里叶级数的形式表明: 满足狄利赫利条件的任何周期信号都可分解为直流信号和各次谐波分量之和的形式。换言之, 周期信号是由直流、基波及各次谐波分量组成的。

另外, 由式(3-2)和式(3-4)可以看出, 各分量的幅度 a_n, b_n, c_n 和相位 φ_n 都是 $n\omega_1$ 的函数。如果把 c_n, φ_n 与 $n\omega_1$ 的关系绘成如图 3-3 所示的线图, 其中 $c_n \sim n\omega_1$ 的关系图称为幅度频谱图, 用来描述各频率分量的幅度大小, 每条线代表某一频率分量的幅度, 称为谱线。连接各幅度谱线顶点的曲线称为包络线, 它反映各分量的幅度变化情况。而把 $\varphi_n \sim n\omega_1$ 的关系图称为相位频谱图, 幅度谱和相位谱合称为频谱。可以看出, 无论是幅度谱还是相位谱, 谱线只出现在 $0, \omega_1, 2\omega_1, \dots$ 这些离散的频率点上, 这种频谱称为离散谱, 它是周期信号频谱的主要特点。另外, n 的取值范围在 $[0, +\infty)$, 幅度谱和相位谱均位于横坐标的右半部分, 故称为单边频谱。不同信号所包含的谐波分量各不相同, 因此, 由信号的频谱可唯一描述信号 $f(t)$ 。

例 3-1 分析如图 3-4 所示信号 $f(t)$ 的频谱, 并画出幅度谱和相位谱。

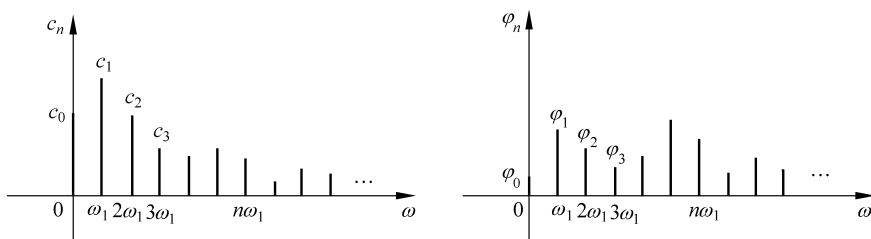


图 3-3 周期信号的频谱示意图

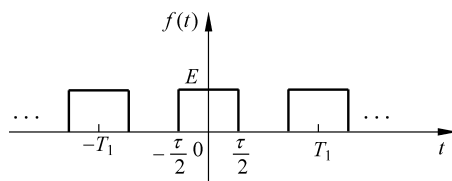


图 3-4 例 3-1 图

解 首先将 $f(t)$ 展为傅里叶三角级数形式, 计算

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E dt \\
 &= \frac{E\tau}{T} \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cos(n\omega_1 t) dt \\
 &= \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

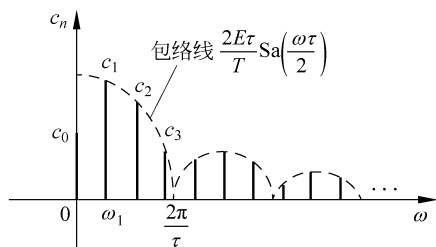
由 a_0 、 a_n 和 b_n 可进一步求得

$$\begin{aligned}
 c_0 &= a_0 = \frac{E\tau}{T} \\
 c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2E\tau}{T} \left| \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) \right| \\
 \varphi_n &= \begin{cases} 0, & \frac{4m\pi}{\tau} < n\omega_1 < \frac{2(2m+1)\pi}{\tau} \\ \pi \text{ 或 } -\pi, & \frac{2(2m+1)\pi}{\tau} < n\omega_1 < \frac{4(m+1)\pi}{\tau} \end{cases} \quad (m=0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

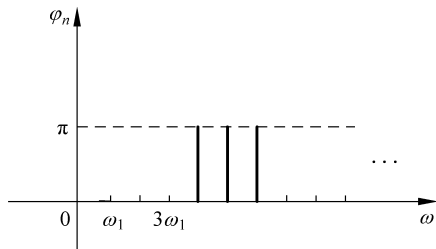
其中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, 所求级数即为

$$f(t) = \frac{E\tau}{T} + \frac{2E\tau}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \cos(n\omega_1 t)$$

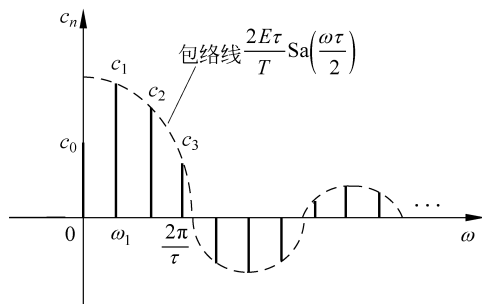
其幅度谱和相位谱分别如图 3-5(a)、(b)所示。当 c_n 为实数时,也可将幅度谱和相位谱画在一张图上,如图 3-5(c)所示。由上式 $f(t)$ 的傅里叶级数可以看到, $c_n = \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 其可以看成是对连续函数 $F(\omega) = \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 的等间隔取样(或离散化), 取样间隔为 ω_1 , 即 $c_n = \left. \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|_{\omega=n\omega_1}$, 故称 $\frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 为 c_n 的包络线。



(a) 幅度谱



(b) 相位谱

(c) 此例中 c_n 为实数, 幅度谱和相位谱合二为一图 3-5 例 3-1 中信号 $f(t)$ 的频谱图

当 $E=1, \tau=1, T=4$ 时, 此时

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{\pi}{4}n\right) \cos(n\omega_1 t) \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{\pi}{4}n\right) \cos(n\omega_1 t) \end{aligned}$$

则

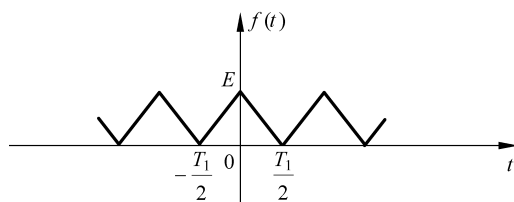
$$c_0 = \frac{1}{4}, \quad c_1 = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}, \quad \dots$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots$$

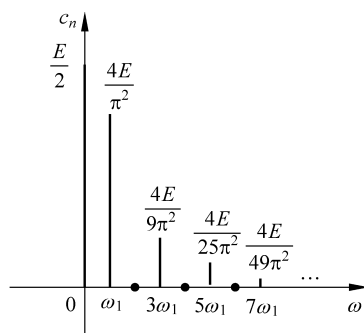
同样,还可以用傅里叶三角级数分析其他连续周期信号的频谱。例如图 3-6(a)所示的周期三角波展开成傅里叶三角级数为

$$f(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_1 t + \dots \right)$$

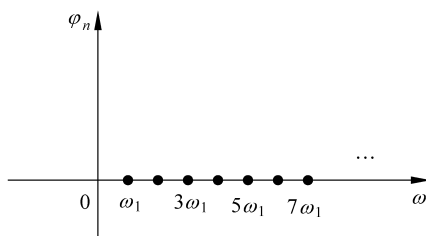
该信号中含有直流分量、一次谐波、三次谐波等奇次谐波分量,其频谱图如图 3-6(b)、(c)所示。



(a) 时域波形



(b) 幅度谱



(c) 相位谱

图 3-6 周期三角波的时域和频域图

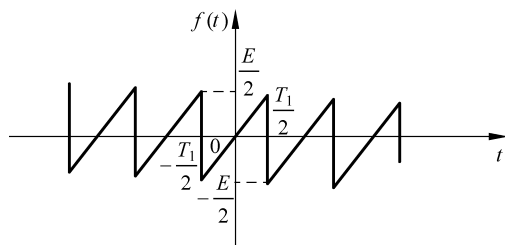
图 3-7(a)所示的周期锯齿波展开成傅里叶三角级数为

$$f(t) = \frac{E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t - \dots \right)$$

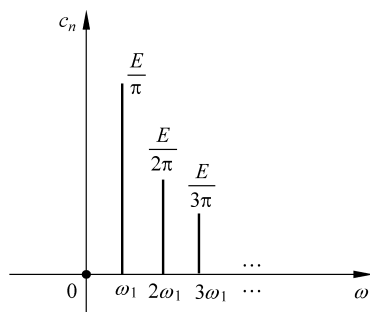
该信号中无直流分量,只有各次谐波分量,需注意的,三角级数中,各次谐波振幅需保持正值,故进一步将 $f(t)$ 写成

$$f(t) = \frac{E}{\pi} \left[\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right]$$

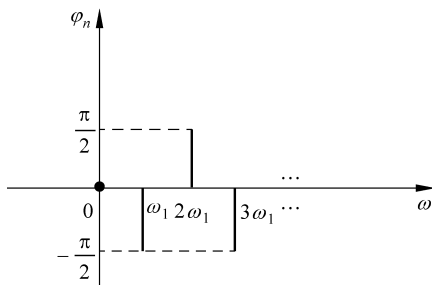
其频谱图如图 3-7(b)、(c)所示。



(a) 时域波形



(b) 幅度谱



(c) 相位谱

图 3-7 周期锯齿波的时域和频域图

3.2.2 连续周期信号的双边谱分析——指数形式的傅里叶级数

周期信号的傅里叶级数也可展开成指数形式,由前面已知,若 $f(t)$ 为周期信号,其三角函数形式的傅里叶级数为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (3-5)$$

由欧拉公式得

$$\cos n\omega_1 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t})$$

$$\sin n\omega_1 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t})$$

将上式代入式(3-5),得到

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right) \quad (3-6)$$

令

$$F(n\omega_1) = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (3-7)$$

并且由式(3-2)可知, a_n 是 n 的偶函数, b_n 是 n 的奇函数, 由式(3-7)可知

$$F(-n\omega_1) = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

将上述结果代入式(3-5),得到

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} + F(-n\omega_1) e^{-jn\omega_1 t}) \quad (3-8)$$

令 $F(0) = a_0$, 则由式(3-8)得到 $f(t)$ 的指数形式的傅里叶级数, 即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \quad (3-9)$$

将式(3-2)中的 a_n 和 b_n 代入式(3-7), 就可得到指数形式的傅里叶级数的系数 $F(n\omega_1)$, 简写作 F_n , 即

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-10)$$

式中, n 的取值是 $-\infty \sim +\infty$ 。

由式(3-4)和式(3-7)可以看出, 两种傅里叶级数的系数存在如下关系

$$\begin{cases} F_0 = c_0 = a_0 \\ F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ F_{-n} = |F_{-n}| e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \\ |F_n| = |F_{-n}| = \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{cases} \quad (3-11)$$

由式(3-10)可见, F_n 一般为 $n\omega_1$ 的复函数, 可写成幅度和相位的形式, 即 $F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$, 把 $|F_n| \sim n\omega_1$ 的关系称为幅度谱, $\varphi_n \sim n\omega_1$ 的关系称为相位谱。需要说明的是, 在指数形式的傅里叶级数中, n 的取值是 $-\infty \sim +\infty$, 因此, 对应的幅度频谱和相位频谱都存在于整个 $n\omega_1$ 轴上, 故称为“双边频谱”。这种双边谱中, 出现了“负频率”项, 即 $F(-\omega_1)$, $F(-2\omega_1)$, $\dots$, 这些项的物理意义不是很明确, 理解起来比较困难, 但它与对应的正频率项合在一起, 却存在明确的物理意义, 即表示周期信号的某一个谐波分量。例如, $F(\omega_1)$ 和 $F(-\omega_1)$ 合成一个基波分量, $F(2\omega_1)$ 和 $F(-2\omega_1)$ 合成一个二次谐波分量等。

例 3-2 分析图 3-8 所示的信号 $f(t)$ 的频谱, 并画出双边幅度谱和相位谱。

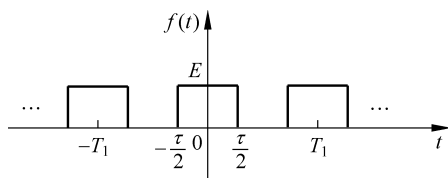


图 3-8 例 3-2 图

解 首先将 $f(t)$ 展为指数傅里叶级数

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

由计算结果可知, F_n 是 $n\omega_1$ 的实函数, 且函数值按正弦抽样信号变化, 不同的 n 值 F_n 可取正值或负值, 对应的相位是 0 (F_n 为正值时) 或 $\pm\pi$ (F_n 为负值时), 即其幅度和相位分别为

$$|F_n| = \left| \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \right|$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 0, & \frac{4m\pi}{\tau} < |n\omega_1| < \frac{2(2m+1)\pi}{\tau} \\ \pi \text{ 或 } -\pi, & \frac{2(2m+1)\pi}{\tau} < |n\omega_1| < \frac{4(m+1)\pi}{\tau} \end{cases} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

幅度谱和相位谱图分别如图 3-9(a)、(b) 所示。此例中, 由于 F_n 是实函数, 故可以把幅度谱

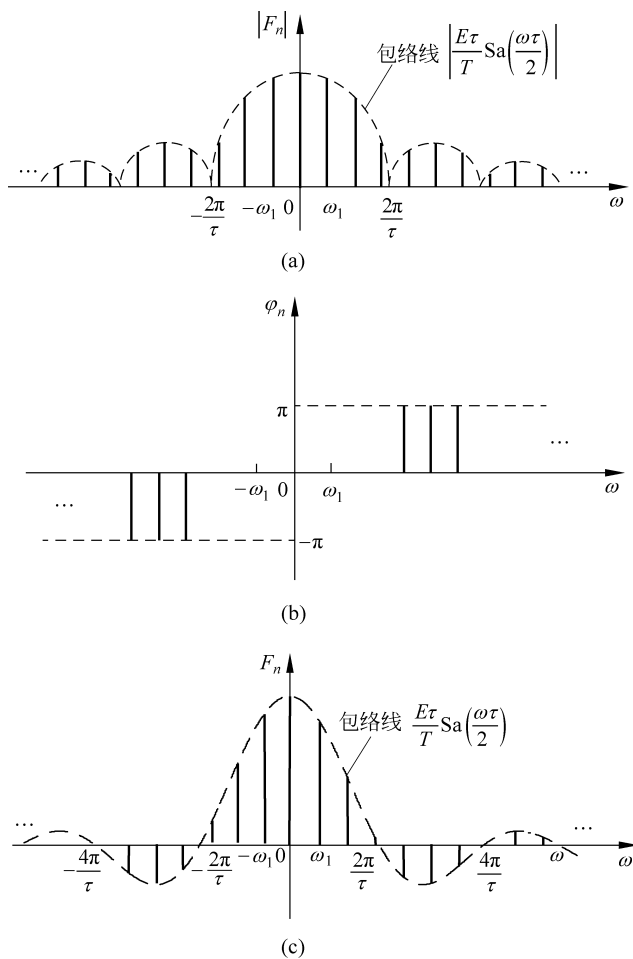


图 3-9 例 3-2 中信号 $f(t)$ 的双边谱示意图

和相位谱合画在一张图上,如图 3-9(c)所示。

综上所述,一个周期信号即可以分解为三角形式的傅里叶级数,也可以分解为指数形式的傅里叶级数,这两种频谱表示方法实质上是一样的。其不同之处在于图 3-5 中每条谱线代表一个分量的幅度,而图 3-9 中每个谐波分量的幅度一分为二,在正、负频率相对应的位置上各为一半,因此,只有把正、负频率上对应的两条谱线矢量相加起来才代表一个谐波分量的幅度。

周期信号的频谱无论是用单边谱描述还是用双边谱描述,总结起来具有如下特点。

(1) 离散性。周期信号的频谱是由离散频率分量组成的。

(2) 谐波性。这些离散频率分量包括直流分量、基波及各次谐波,所有谱线都位于 $\pm n\omega_1$ 上。

(3) 收敛性。通常情况下,周期信号各次谐波分量大小随 $n\omega_1$ 的增加而逐渐减小,最终趋于零。

当然,并不是所有周期信号的频谱都具有上述收敛特性,如图 3-10(a)所示的周期冲激序列 $\delta_{T_1}(t)$,其频谱不具有收敛性。可以计算其 $F_n = \frac{1}{T_1}$,双边谱如图 3-10(b)所示。

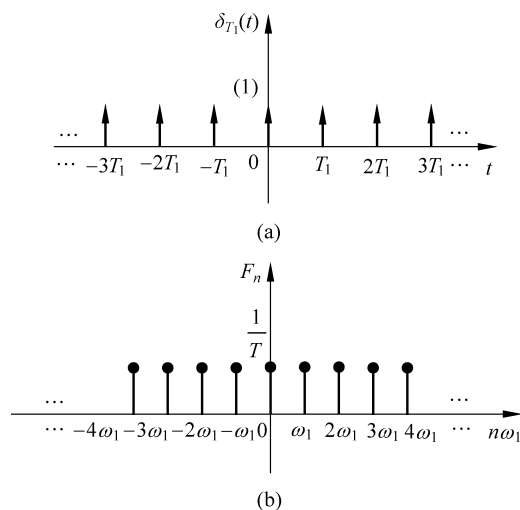


图 3-10 周期冲激序列及其双边谱图

3.2.3 周期信号功率特性的频域描述

周期信号通常都是功率信号,其功率特性可利用其频谱来描述。将式(3-1)和式(3-9)的两边平方,并在一个周期内积分,并利用三角函数及复指数函数的正交性,可以得到周期信号 $f(t)$ 的平均功率 P 与傅里叶系数有下列关系

$$\begin{aligned}
 P = \overline{f^2(t)} &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f^2(t) dt \\
 &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2
 \end{aligned} \quad (3-12)$$

式(3-12)的证明过程留作习题,请读者自行完成。该式表明,周期信号的平均功率等于直流分量、基波分量以及各次谐波分量有效值的平方和。也就是说,时域能量和频域能量是守恒的,此式被称为帕塞瓦尔定理。

3.2.4 信号波形的对称性与傅里叶系数的关系

当周期信号的波形具有某种对称性时,其相应的傅里叶级数的系数就会呈现一定的特征,知道这些特征一方面可以简化函数的求解过程,另一方面可帮助判别信号的频谱特征。波形的对称性有两类:一类是整周期对称,如偶对称和奇对称,这种特性决定了傅里叶级数中是否含有正弦项或余弦项;另一类是半周期对称,即波形前半周期与后半周期是否相同或呈镜像关系,这种对称性决定了傅里叶级数展开式中是否含有偶次谐波或奇次谐波,表 3-1 给出这几种对称关系的傅里叶级数的系数情况,读者可自行证明。

表 3-1 函数的对称性与傅里叶级数系数的关系

函数 $f(t)$ 的特性	波形示例	傅里叶级数的系数	傅里叶级数的特点
偶对称 $f(t) = f(-t)$		$a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ $b_n = 0$	不含有正弦项,只可能含有直流项和余弦项
奇对称 $f(t) = -f(-t)$		$a_0 = 0$ $a_n = 0$ $b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$	只可能含有正弦项
半波镜像 $f(t) = -f(t \pm \frac{T_1}{2})$		$a_0 = 0$ $a_n = b_n = 0 \quad (n \text{ 为偶数})$ $a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ $b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$ $(n \text{ 为奇数})$	只有奇次谐波分量,而无直流分量和偶次谐波分量

3.2.5 实际应用中的傅里叶级数有限项逼近

由傅里叶级数展开式可知,周期信号用无限项三角函数和的形式来精确逼近原函数。

但在实际应用中,不可能将无穷项分量逐一分析和使用,而根据周期信号频谱的收敛性,信号的能量主要集中在低频段,所以一般采用级数的有限项和来逼近无限项和。

若取式(3-1)中的前 $2N+1$ 项来逼近周期信号 $f(t)$,则此 $2N+1$ 项有限项傅里叶级数为

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)) \quad (3-13)$$

此时定义逼近误差为

$$\epsilon_N(t) = f(t) - S_N(t)$$

其均方误差为

$$E_N = \overline{\epsilon_N^2(t)} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \epsilon_N^2(t) dt$$

将 $f(t)$ 、 $S_N(t)$ 所表示的级数代入上式,并利用式(3-12)经化简得到

$$E_N = \overline{\epsilon_N^2(t)} = \overline{f^2(t)} - \left[a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right] \quad (3-14)$$

下面用一个例子来说明用有限项级数来逼近原函数的过程,并观察级数中各种频率分量对波形的影响。

例 3-3 如图 3-11 所示的对称方波,求其傅里叶级数表达式,并用有限项级数来合成原信号,分别计算当 $N=1,3,5,11$ 时,均方误差为多少?

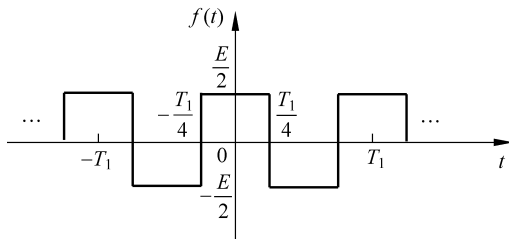


图 3-11 例 3-3 图

解 由图 3-11 可知, $f(t)$ 既是偶函数,又是半波镜像函数。因此,它的傅里叶级数中只含有奇次谐波的余弦项,即

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \dots \right)$$

根据式(3-13)和式(3-14)可得

当 $N=1$ 时

$$S_1(t) = \frac{2E}{\pi} (\cos \omega_1 t)$$

此时

$$\begin{aligned} E_1 &= \overline{\epsilon_1^2} = \overline{f^2(t)} - \frac{1}{2} a_1^2 \\ &= \left(\frac{E}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{\pi} \right)^2 \\ &\approx 0.05E^2 \end{aligned}$$

当 $N=3$ 时

$$S_3(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t \right)$$

此时

$$\begin{aligned} E_3 &= \overline{\epsilon_3^2} = \overline{f^2(t)} - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2) \\ &= \left(\frac{E}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{3\pi}\right)^2 \\ &\approx 0.02E^2 \end{aligned}$$

当 $N=5$ 时

$$S_5(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t \right)$$

此时

$$\begin{aligned} E_5 &= \overline{\epsilon_5^2} = \overline{f^2(t)} - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2 + a_5^2) \\ &= \left(\frac{E}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{3\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{5\pi}\right)^2 \\ &\approx 0.017E^2 \end{aligned}$$

当 $N=11$ 时

$$S_{11}(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_1 t + \frac{1}{9} \cos 9\omega_1 t - \frac{1}{11} \cos 11\omega_1 t \right)$$

此时

$$\begin{aligned} E_{11} &= \overline{\epsilon_{11}^2} = \overline{f^2(t)} - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + a_7^2 + a_9^2 + a_{11}^2) \\ &= \left(\frac{E}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{3\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{5\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{7\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{9\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{11\pi}\right)^2 \\ &\approx 0.008E^2 \end{aligned}$$

图 3-12(a)、(b) 分别给出 N 取不同值时的合成方波情况。

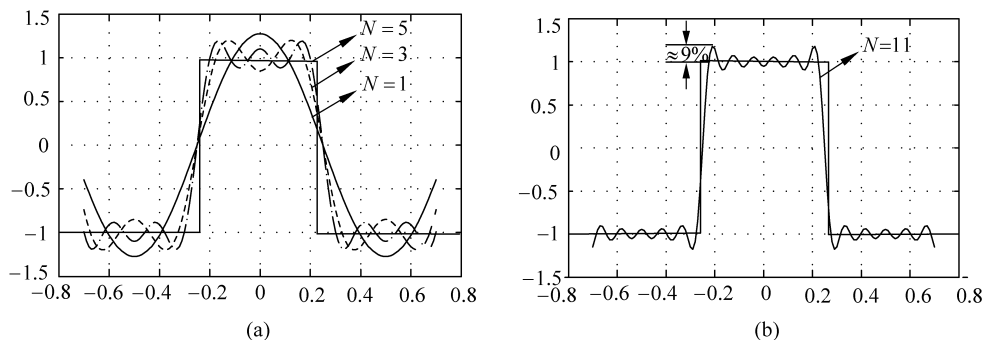


图 3-12 N 取不同值时的合成方波情况

由图 3-12 可以看出,傅里叶级数所取的项数(N)越多,相加之后合成的波形越接近原信号 $f(t)$,均方误差越小;当信号 $f(t)$ 为脉冲信号时,高频分量(也即快变信号)影响脉冲

的跳变沿,低频分量(也即慢变信号)影响脉冲的顶部;任一分量的幅度或相位发生相对变化时,波形就会失真。

由图 3-12 还可以看出,当选取的傅里叶有限级数的项数越多,所合成的波形 S_N 中出现的峰起值越靠近 $f(t)$ 的不连续点。并且当所取的项数 N 足够大时,该峰起值趋于一个常数,它约等于总跳变值的 9%,这种现象通常称为吉布斯现象。

3.3 连续非周期信号的频谱分析——傅里叶变换

3.3.1 傅里叶正变换和逆变换

前面已经讨论了用傅里叶级数分析周期信号的频谱特性。本节将把上述傅里叶分析方法推广到非周期信号,从而得到非周期信号的频谱分析方法——傅里叶变换。

非周期信号可以看作周期趋于无穷大时的周期信号,这里,首先以周期矩形脉冲和它的离散频谱为例,研究当矩形脉冲的周期 T_1 不断增大时,其频谱的变化过程,由此得出非周期信号的频谱分析方法。

如图 3-13 所示,在周期矩形脉冲序列中,当 T_1 逐渐增加至 ∞ 时,就时域波形来讲,周期矩形脉冲信号就变成单脉冲的非周期信号。而就信号的频谱来讲,谱线间隔逐渐减小,最终使 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow 0$,此时离散谱就变成了连续谱。另外由式(3-10)可知,由于周期 $T_1 \rightarrow \infty$, $F(n\omega_1) \rightarrow 0$ 。这就是说,按照傅里叶级数所表示的频谱就化为乌有,失去应有的意义。但是,从物理概念上讲,既然是一个信号,无论怎么分解,其能量都是不变的,因此,不管周期变为多大,频谱的分布总是存在的。从数学的角度来看,在极限情况下,无限多的无穷小量之和仍然等于一有限值。

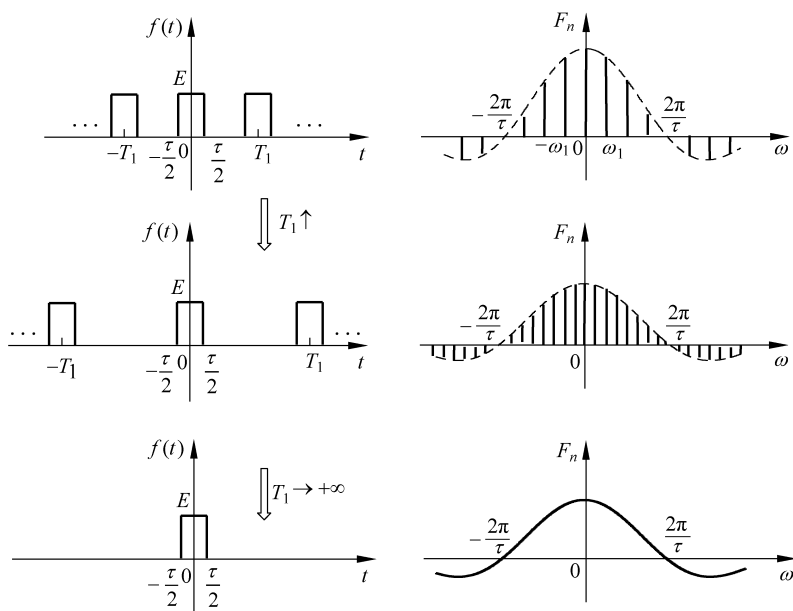


图 3-13 从周期信号的离散频谱到非周期信号的连续频谱

因此,再由傅里叶级数的定义来描述非周期信号的频谱已经不合适了,而必须引入一个新的量——频谱密度函数,用来描述非周期信号的频谱。

设周期信号 $f(t)$ 的周期为 T_1 , 其指数形式的傅里叶级数频谱系数为

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

两边同乘以 T_1 得

$$\begin{aligned} T_1 F(n\omega_1) &= \frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1} \\ &= \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{aligned}$$

当 $T_1 \rightarrow \infty$, 则有 $\omega_1 \rightarrow 0$, 谱线间隔 $\Delta(n\omega_1) = \omega_1 \rightarrow d\omega$, $n\omega_1 \rightarrow \omega$ 。在此极限情况下, $F(n\omega_1) \rightarrow 0$,

但是 $T_1 F(n\omega_1) = \frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1}$ 趋近于有限值, 离散谱线变成一个连续函数, 记为 $F(\omega)$ 或 $F(j\omega)$, 即

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} F(n\omega_1) T_1 \\ &= \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1} \\ &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{aligned} \quad (3-15)$$

进一步可写成

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-16)$$

在式(3-15)中, $\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$ 表示单位频带上的信号频谱值, 即频谱密度的概念。因此, 将 $F(\omega)$ 称为原函数 $f(t)$ 的频谱密度函数, 简称为频谱函数, 式(3-16)即为傅里叶正变换。借助于傅里叶变换, 可分析非周期连续信号在频域内的特性。同样, 也可由其频率特性得到时域表达式, 这也可由周期信号的傅里叶级数导出。

由于周期信号 $f_{T_1}(t)$ 可表示为

$$f_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

上式可改写为

$$f_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} \omega_1 e^{jn\omega_1 t} \quad (3-17)$$

当 $T_1 \rightarrow \infty$, 则有 $\omega_1 \rightarrow d\omega$, $n\omega_1 \rightarrow \omega$, $\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} \rightarrow \frac{F(\omega)}{2\pi}$, 于是式(3-17)的傅里叶级数变成如下积分形式

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} f_{T_1}(t) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} \omega_1 e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-18)$$

此式即为傅里叶逆变换的形式。

为书写方便,习惯上采用如下符号

$$\begin{cases} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt & (\text{傅里叶正变换}) \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega & (\text{傅里叶逆变换}) \end{cases}$$

或者

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

式中, $F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的频谱函数, 它一般是 ω 的复连续函数, 通常可以写作

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

式中, $|F(\omega)|$ 是 $F(\omega)$ 的模, 它代表信号中各频率分量分布值的相对大小, 称为 $f(t)$ 的幅度谱; $\varphi(\omega)$ 是 $F(\omega)$ 的相位, 它表示各频率分量之间的相位关系, 称为 $f(t)$ 的相位谱。

将式(3-18)进一步展开可得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2\pi} j \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega}_{=0} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(\omega)|}{2\pi} \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \end{aligned}$$

可以看出, 非周期信号可以分解为无数个频率为 ω 、振幅为 $\frac{|F(\omega)|}{2\pi} d\omega$ 的频率分量之和。

下面总结一下周期信号与非周期信号频谱之间的差异。

(1) 周期信号的频谱为离散谱, 描述的是各次谐波分量的大小及初相位, 非周期信号的频谱描述的是各频率分量在频域内分布情况, 即频谱密度, 且是连续分布的。

(2) 周期信号频谱 F_n 与非周期信号频谱密度 $F(\omega)$ 之间的关系为

$$F_n = \frac{F(\omega)}{T_1} \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

式中, T_1 表示周期信号的周期, 上述关系可由 F_n 、 $F(\omega)$ 定义式得到。另外, 利用傅里叶变换分析非周期信号 $f(t)$ 的频谱时, $f(t)$ 需满足一定的条件, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

上式是傅里叶变换存在的充分条件。需要说明的是, 任何非周期连续信号的频谱都存在, 但是只有当信号满足绝对可积条件时, 才可用傅里叶变换分析。当不满足绝对可积条件时, 可借助已知函数的傅里叶变换或其他手段分析, 后面将给出具体实例。

3.3.2 典型非周期信号的频谱

1. 矩形脉冲信号

矩形脉冲的表达式为

$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

式中, E 为脉冲幅度; τ 为脉冲宽度。其波形如图 3-14 所示。

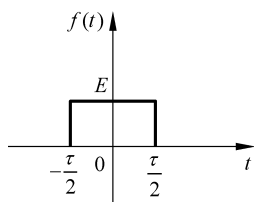


图 3-14 矩形脉冲信号

根据傅里叶变换的定义,有

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt \\
 &= E\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \\
 &= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)
 \end{aligned} \quad (3-19)$$

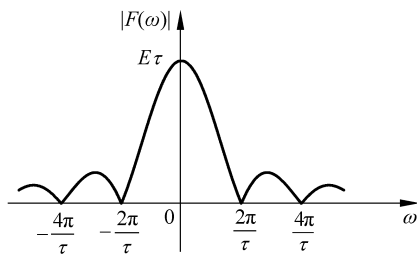
故矩形脉冲的幅度谱为

$$|F(\omega)| = E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

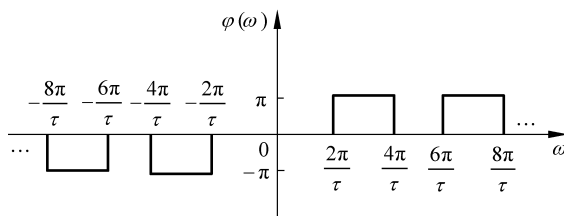
相位谱为

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau}, & \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) > 0 \\ \pm\pi, & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+2)\pi}{\tau}, & \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) < 0 \end{cases} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

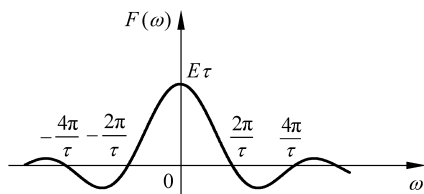
其幅度谱和相位谱分别如图 3-15(a)、(b)所示。由于矩形脉冲的频谱函数 $F(\omega)$ 为实数,所以也可以直接用函数波形表示其频谱函数,如图 3-15(c)所示。



(a) 幅度谱



(b) 相位谱



(c) 频谱

图 3-15 矩形脉冲信号的频谱

由此可见,矩形脉冲在时域上是有限长的,然而它的频谱却以 $\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 的变化规律分布在无限频率范围上,但是其信号能量主要处于 $\omega=0\sim\frac{2\pi}{\tau}(\text{rad/s})$ 或 $f=0\sim\frac{1}{\tau}(\text{Hz})$ 内。因此,一般定义该信号的有效带宽近似为 $\frac{2\pi}{\tau}$ 或者 $\frac{1}{\tau}$,即

$$B_{\omega} \approx \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{或} \quad B_f \approx \frac{1}{\tau}$$

由上述信号的时宽带宽关系进一步说明,信号在时域内存在的时间越短,在频域内占据的频带越宽,含有的高频分量越丰富。

另外,与例 3-2 中周期为 T_1 、宽度为 τ 的矩形脉冲序列的频谱 F_n 相比,也验证了 $F_n = \frac{1}{T_1} F(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$ 的关系。

2. 单位冲激信号

单位冲激信号的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

上式用到了冲激信号的取样特性,图 3-16(a)、(b)分别给出了冲激信号及其频谱。

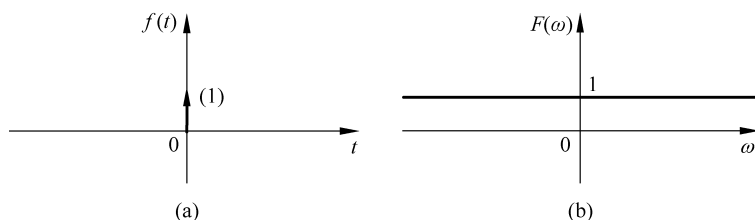


图 3-16 冲激信号及其频谱图

这又一次证明了时间域存在时间越短的信号,在频域内占据的带宽越宽。

3. 单边指数信号

单边指数信号的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} E e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

波形如图 3-17 所示。

根据傅里叶变换的定义可求得

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{+\infty} E e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{E}{\alpha + j\omega} \end{aligned}$$

其幅度谱为

$$|F(\omega)| = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

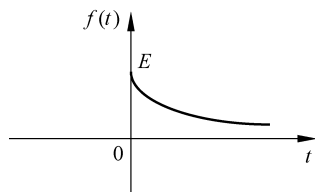


图 3-17 单边指数信号

相位谱为

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

图 3-18(a)、(b)分别给出了单边指数信号的幅度谱和相位谱。

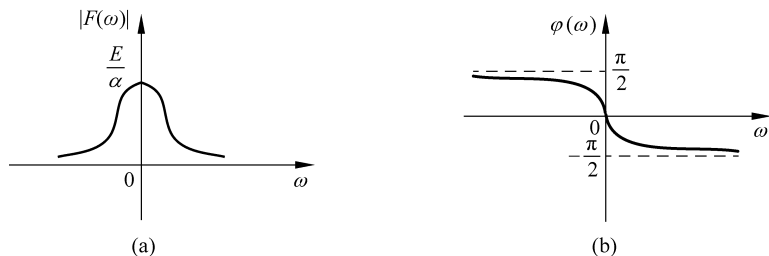


图 3-18 单边指数信号的频谱

4. 符号信号

符号函数的表达式为

$$f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

该信号函数不满足狄利赫利绝对可积条件,不能直接用傅里叶变换公式计算其频谱。但可以借助符号函数和双边指数函数相乘,求相乘之后信号的频谱,再取极限,具体过程如下。

令

$$f_1(t) = \text{sgn}(t)e^{-\alpha|t|} \quad (\alpha > 0)$$

则

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 -e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} \end{aligned}$$

而 $\text{sgn}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_1(t)$, 所以

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_1(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

其幅度谱为

$$|F(\omega)| = \frac{2}{|\omega|}$$

相位谱为

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0 \\ \pi/2, & \omega < 0 \end{cases}$$

其幅度谱和相位谱如图 3-19 所示。

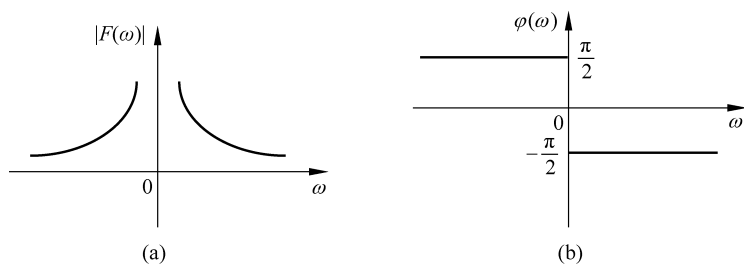


图 3-19 符号函数的频谱

5. 升余弦脉冲信号

升余弦脉冲信号的表达式为

$$f(t) = \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right], \quad 0 \leq |t| \leq \tau$$

其傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{E}{2} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt + \frac{E}{4} \int_{-\tau}^{\tau} e^{j\frac{\pi t}{\tau}} e^{-j\omega t} dt + \frac{E}{4} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\frac{\pi t}{\tau}} e^{-j\omega t} dt \\ &= E\tau \text{Sa}(\omega\tau) + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right] \end{aligned}$$

显然, $F(\omega)$ 的频谱是由 $\text{Sa}(\omega\tau)$ 及其平移函数等三项组成。图 3-20(a)、(b) 分别给出升余弦脉冲及其频谱的合成过程。

由图 3-20 可知, 升余弦脉冲信号的频谱较矩形脉冲的频谱更加集中, 对于半幅度宽度为 τ 的升余弦脉冲信号, 其大部分能量集中在 $\omega = 0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$ 。因为这个能量集成的特性, 升余弦信号在数字通信中被广泛采用, 但形式略有不同。

3.3.3 傅里叶变换的性质

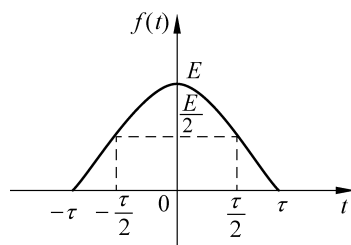
在实际应用中, 经常需要了解信号在时域进行某种运算后, 频域发生何种变化, 或者由频域的运算推测时域的变动。此时, 既可以用傅里叶正变换和逆变换的定义式来求得, 也可以借助傅里叶变换的基本性质获得结果。傅里叶变换的性质揭示了信号的时域特性和频域特性之间确定的内在联系, 用它来求解问题不仅比较简便, 而且物理概念清楚。考虑到大多数读者都应在相关数学课中学过傅里叶变换, 因此, 本节只给出每个性质结论、含义及应用举例, 不再逐一证明。

1. 线性特性

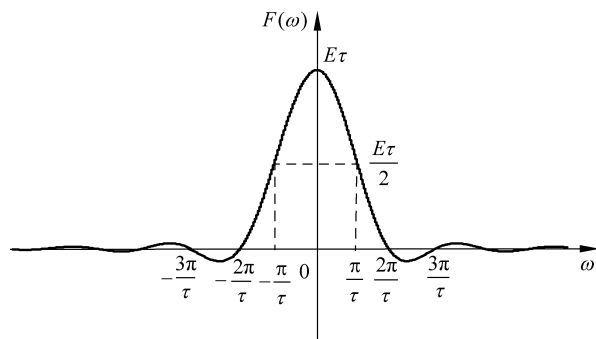
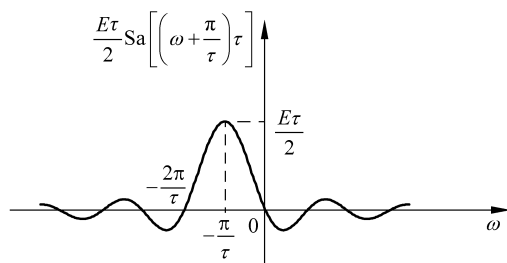
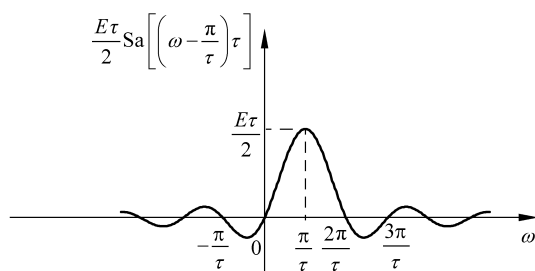
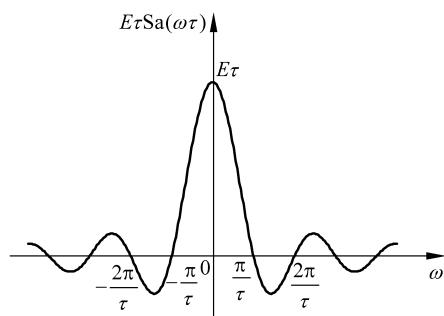
若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, 则有

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftrightarrow c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)$$

式中, c_1 和 c_2 为任意常数。



(a) 升余弦信号



(b) 频谱合成过程

图 3-20 升余弦信号及其频谱

2. 对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

当 $f(t)$ 为偶函数时

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

对称性表明,信号的时域波形与其频谱函数具有对称互易的关系。也就是说,如果知道 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)$, 则 $F(t)$ 的频谱就是原时间信号沿纵轴的镜像。

例 3-4 已知 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, 利用对称性求直流信号 $f(t) = 1$ 的频谱 $F(\omega)$ 。

解 由于 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, 利用对称性有

$$F(\omega) = \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

由此可以看出,冲激函数的频谱为常数,直流信号的频谱则为冲激函数,即 $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$, 则 $1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$, 其波形对比如图 3-21 所示。

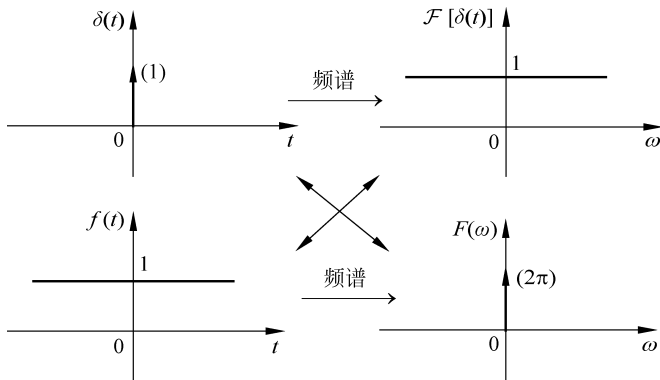


图 3-21 冲激函数和直流信号的频谱对比

例 3-5 已知矩形脉冲为 $f(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$, 其频谱 $F(\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\tau\right)$, 利用对称性求 $f_1(t) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}t\right)$ 的频谱 $F_1(\omega)$ 。

解 由于 $F(\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\tau\right)$, 利用对称性有

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}\left[\tau \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}t\right)\right] = 2\pi \left[u\left(\omega + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

由此可以看出,矩形脉冲的频谱为 Sa 函数,而 Sa 函数的频谱则为矩形函数,即 $u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\tau\right)$, 则 $\tau \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \left[u\left(\omega + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{\tau}{2}\right) \right]$, 其波形对比如图 3-22 所示。

3. 尺度变换特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$F(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

式中, a 为不等于零的实数。

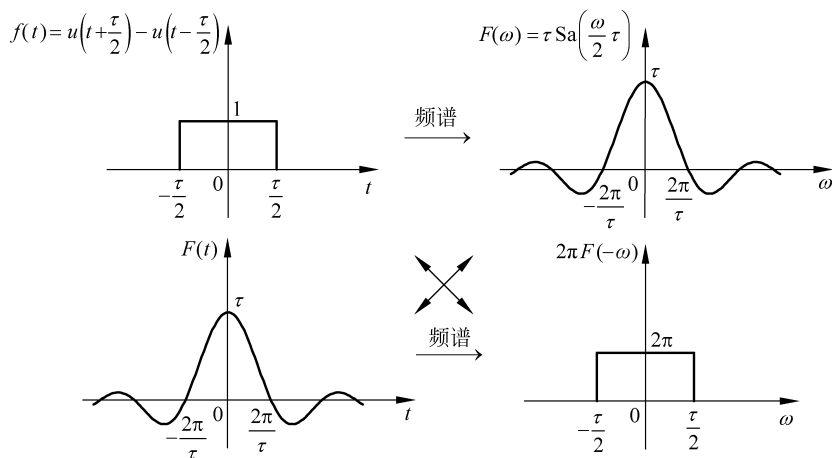


图 3-22 矩形脉冲和 Sa 函数的频谱对比

尺度变换特性表明,信号在时域中压缩($a > 1$)等效于在频域中扩展;反之,信号在时域中扩展($a < 1$)等效于在频域中压缩。这并不难理解,因为信号在时域中压缩 a 倍,信号随时间变化加快 a 倍,所以它所包含的频率分量增加 a 倍,也就是说频谱展宽 a 倍。根据能量守恒定律,各频率分量的大小必然要减小 a 倍。图 3-23(a)~(c)分别给出不同时域宽度的矩形脉冲和相对应的频谱,以此来说明尺度变换的特性。

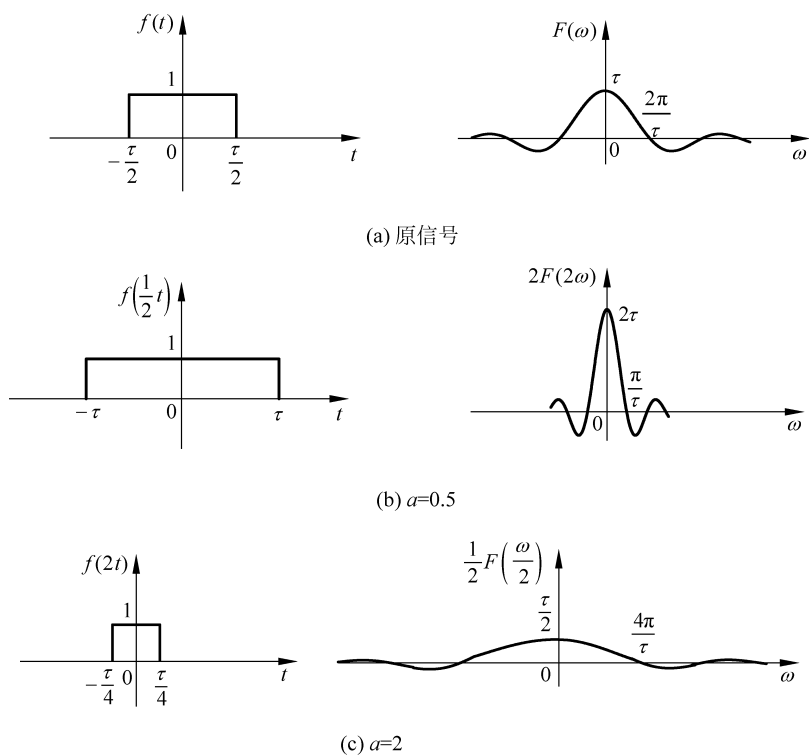


图 3-23 尺度变换特性举例

4. 时移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

式中, t_0 为任意常数。

时移特性表明, 信号在时域中相对原信号超前或滞后 t_0 个单位, 其中幅度谱保持不变, 相位谱产生一个附加相移 $-\omega t_0$; 反之, 若两个信号在频域内的幅度谱相同, 相位谱之间有一个相位差, 且是 ω 的一次函数, 则两个信号在时域内波形相同, 但有一个相对位移。

例 3-6 已知 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, $g(t) = f(2t+4)$, 求 $\mathcal{F}[g(t)]$ 。

解 $f(2t+4)$ 是 $f(t)$ 经过压缩、平移两种运算而得到的信号, 求其频谱需要用到展缩特性和时移特性。在求解时可以将 $f(t)$ 先压缩再平移, 也可以将 $f(t)$ 先左移后压缩, 这两种方法的计算过程稍有不同, 现在分别求解如下。

$$(1) \text{ 压缩 } t \rightarrow 2t, f(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\text{左移 } t \rightarrow t+2, f[2(t+2)] = f(2t+4) \leftrightarrow \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{j2\omega}$$

$$(2) \text{ 左移 } t \rightarrow t+4, f(t+4) \leftrightarrow F(\omega) e^{j4\omega}$$

$$\text{压缩 } t \rightarrow 2t, f(2t+4) \leftrightarrow \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{j2\omega}$$

5. 频移特性(调制定理)

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

频移特性表明, 若时间信号 $f(t)$ 在时域中乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$, 即相对于原信号增加一个相位, 等效于 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 沿频率轴移动 ω_0 个单位, 这就是所谓的频谱搬移技术, 也称为调制定理。该性质在通信系统中得到广泛应用, 诸如调幅、同步解调、频分复用等过程都是在此基础上完成的。在实际应用中, 频谱搬移过程是将信号 $f(t)$ 与载频信号 $\cos(\omega_0 t)$ 或 $\sin(\omega_0 t)$ 相乘。下面分析这种相乘作用引起的频谱搬移。

因为

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

可以导出

$$\mathcal{F}[f(t) \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[f(t) \sin(\omega_0 t)] = \frac{j}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$$

所以, 若时间信号 $f(t)$ 乘以 $\cos(\omega_0 t)$ 或 $\sin(\omega_0 t)$, 等效于 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 一分为二, 沿频率轴向左和向右各搬移至 ω_0 , 从而实现频谱搬移。

例 3-7 已知矩形调幅信号

$$f(t) = G(t) \cos(\omega_0 t)$$

其波形如图 3-24 所示。其中 $G(t)$ 为矩形脉冲, 幅度为 E , 脉宽为 τ , 如图 3-24 中虚线所示, 试求其频谱函数。

解 根据

$$\begin{aligned} f(t) &= G(t) \cos(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2} G(t) [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \end{aligned}$$

利用频移特性得

$$F(\omega) = \frac{1}{2} G(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} G(\omega + \omega_0)$$

由式(3-19)可知

$$G(\omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

代入 $F(\omega)$ 得

$$F(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}\right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2}\right]$$

可见, 调幅信号的频谱等于将矩形脉冲的频谱各向左、右搬移 ω_0 , 幅度降低 $\frac{1}{2}$, 如图 3-25 所示。

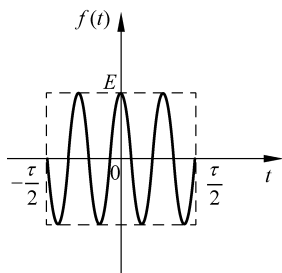


图 3-24 矩形调幅信号的波形

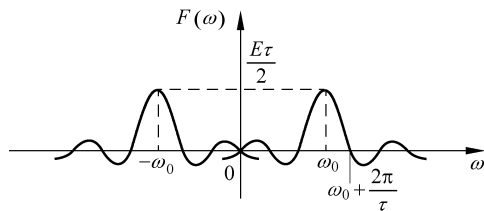


图 3-25 矩形调幅信号的频谱

6. 卷积特性

1) 时域卷积特性

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, 则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

时域卷积性质说明, 两个信号在时域内卷积, 其频谱等于相卷积两信号频谱的乘积, 即在时域卷积, 频域相乘。该性质是线性系统分析从时域转到频域的桥梁。

2) 频域卷积特性

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, 则

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

频域卷积性质说明, 两个信号在时域内相乘, 其频谱等于两信号频谱的卷积再除以 2π 。

从以上两个卷积特性可以看出, 两个信号在一个域内相乘运算, 转到另一个域即为卷积

运算,只是相差一个系数 2π 。

例 3-8 已知信号 $f(t) = \text{Sa}(t)$, $y(t) = f^2(t)$, 求 $Y(\omega)$ 。

解 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \pi[u(\omega + 1) - u(\omega - 1)]$$

其波形如图 3-26(a) 所示。由于 $y(t) = f^2(t)$, 利用傅里叶变换频域卷积特性得

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \{ \pi[u(\omega + 1) - u(\omega - 1)] \} * \{ \pi[u(\omega + 1) - u(\omega - 1)] \} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\omega + \pi \right) [u(\omega + 2) - u(\omega)] + \left(-\frac{\pi}{2}\omega + \pi \right) [u(\omega) - u(\omega - 2)] \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\omega + \pi \right) u(\omega + 2) - \pi\omega u(\omega) + \left(\frac{\pi}{2}\omega - \pi \right) u(\omega - 2) \end{aligned}$$

其波形如图 3-26(b) 所示。

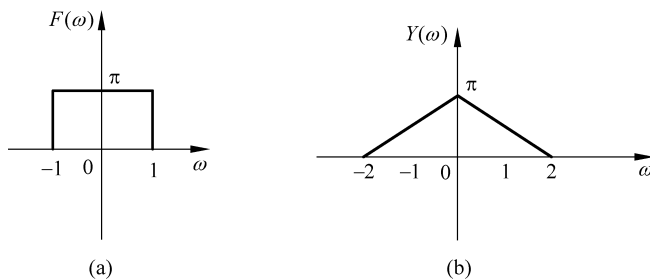


图 3-26 例 3-8 图

7. 微分特性

1) 时域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$f'(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega), \quad f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

式中, $f^{(n)}(t)$ 表示 $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ 。

微分特性表明, 时域中 $f(t)$ 对 t 取 n 阶导数等效于在频域中给 $f(t)$ 的频谱函数乘以 $(j\omega)^n$ 。

2) 频域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

例 3-9 已知 $f_1(t) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}t\right)$ 的傅里叶变换 $F_1(\omega) = 2\pi E \left[u\left(\omega + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{\tau}{2}\right) \right]$,

求 $f_2(t) = tf_1(t)$ 的频谱 $F_2(\omega)$ 。

解 利用频域微分特性得

$$F_2(\omega) = j \frac{dF_1(\omega)}{d\omega}$$

$$=j2\pi E \left[\delta\left(\omega + \frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(\omega - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

8. 时域积分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

其中

$$F(0) = F(\omega) \big|_{\omega=0}$$

例 3-10 已知 $F(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, 利用积分特性求阶跃信号 $u(t)$ 的傅里叶变换 $G(\omega)$ 。

解 由于 $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$, 且已知 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, 所以直接利用积分特性得 $u(t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega} \\ &= \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

其幅度谱和相位谱如图 3-27 所示。

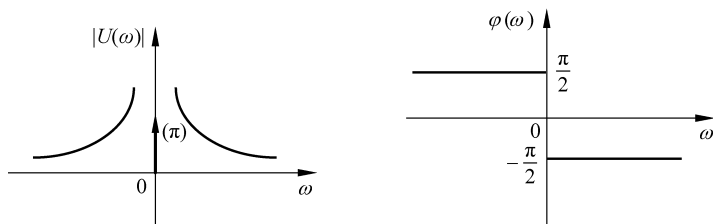


图 3-27 单位阶跃函数的频谱

例 3-11 已知三角脉冲信号

$$f(t) = \begin{cases} E \left(1 - \frac{2|t|}{\tau} \right), & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

如图 3-28(a)所示, 求其频谱 $F(\omega)$ 。

解 将 $f(t)$ 取一阶与二阶导数, 分别得到

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{df(t)}{dt} \\ &= \frac{2E}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u(t) \right] - \frac{2E}{\tau} \left[u(t) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \\ f_2(t) &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \\ &= \frac{2E}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) \right] \end{aligned}$$

其波形如图 3-28(b)和(c)所示。对 $f_2(t)$ 求傅里叶变换得

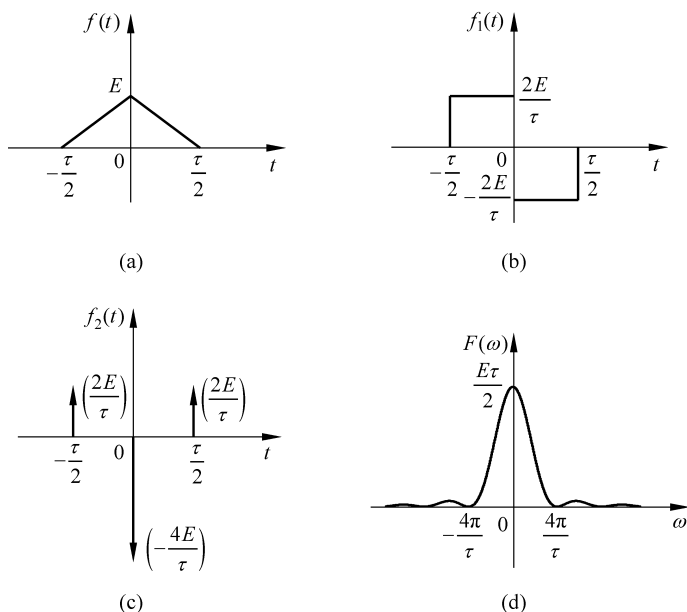


图 3-28 例 3-11 图

$$\begin{aligned}
 F_2(\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = (j\omega)^2 F(\omega) \\
 &= \frac{2E}{\tau} \left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - 2 \right) \\
 &= \frac{2E}{\tau} \left[2\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - 2 \right] \\
 &= -\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)
 \end{aligned}$$

所以

$$F(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} \left[-\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right]$$

经化简得 $f(t)$ 的频谱为

$$F(\omega) = \frac{E\tau}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2} = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

其频谱图如图 3-28(d)所示。可以看出,三角脉冲的频谱是一个 ω 的正实函数,在整个频率轴上相位为 0。

需要再次强调,利用傅里叶变换积分特性求解某信号 $f(t)$ 的频谱,对 $f(t)$ 求导时, $f(t)$ 需满足绝对可积条件或者 $f(t)$ 满足在 $f(-\infty)$ 处为 0。若不满足,则分以下两种情况处理。

(1) 不满足绝对可积,则需同时使用微积分特性求解信号的频谱。

(2) 若不满足 $f(-\infty)=0$,微积分特性同时使用,且积分特性为

$$F(\omega) = \pi G(0)\delta(\omega) + \frac{G(\omega)}{j\omega} + 2\pi f(-\infty)\delta(\omega)$$

下面给出分析推导过程。设

$$f'(t) = g(t)$$

即 $\frac{df(t)}{dt} = g(t)$, 则

$$df(t) = g(t)dt$$

对上式从 $-\infty$ 到 t 积分, 有

$$f(t) - f(-\infty) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

则

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau + f(-\infty) \quad (3-20)$$

取傅里叶变换得

$$F(\omega) = \pi G(0)\delta(\omega) + \frac{G(\omega)}{j\omega} + 2\pi f(-\infty)\delta(\omega) \quad (3-21)$$

此时, 与傅里叶变换积分特性结果相差 $2\pi f(-\infty)\delta(\omega)$ 一项, 在积分特性中, 隐含着 $g^{(-1)}(-\infty) = f(-\infty) = 0$ 。

例 3-12 求图 3-29(a)、(b) 所示信号的频谱。

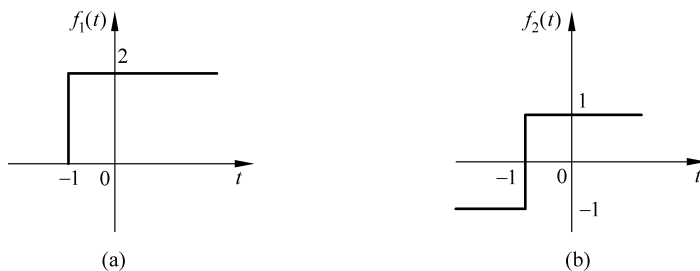


图 3-29 例 3-12 图

解 (1) 图 3-29(a) 所示的函数可写为

$$f_1(t) = 2u(t+1)$$

对其求导可得

$$g(t) = f_1'(t) = 2\delta(t+1)$$

所以

$$G(\omega) = 2e^{j\omega}$$

而

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

故

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \pi G(0)\delta(\omega) + \frac{G(\omega)}{j\omega} \\ &= 2\pi\delta(\omega) + \frac{2e^{j\omega}}{j\omega} \end{aligned}$$

(2) 图 3-29(b)所示的函数可写为

$$f_2(t) = 2u(t+1) - 1$$

由图 3-29(b)可见, $f_2(-\infty) = -1$, 不满足 $f(-\infty) = 0$, 故由式(3-21)得

$$F_2(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \frac{2e^{j\omega}}{j\omega} - 2\pi\delta(\omega) = \frac{2e^{j\omega}}{j\omega}$$

除以上介绍的傅里叶变换常用性质外, 还有其他性质, 如奇偶虚实特性等, 读者可以参考积分变换等相关教材学习。

3.3.4 周期信号的傅里叶变换(频谱密度函数)

3.2 节介绍了周期信号的频谱分析方法及其特点。那么, 周期信号的频谱密度函数该具有什么特点, 是以什么形式分布的呢? 这同样可借助于傅里叶变换来分析。

1. 正弦信号、余弦信号的傅里叶变换

将 $\cos\omega_0 t$ 或 $\sin\omega_0 t$ 用欧拉公式展开并利用

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

及

$$1 \cdot e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

可得

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

其频谱分别如图 3-30 和图 3-31 所示。可以发现, 这两个信号的频谱密度(傅里叶变换)仍位于原信号谱线位置处, 只是变为了冲激函数。

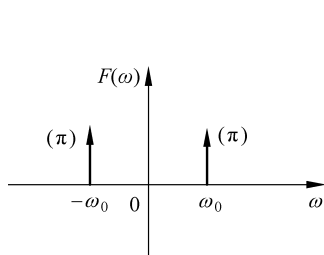


图 3-30 余弦信号的频谱

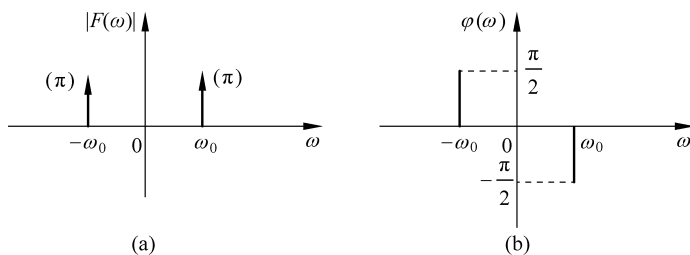


图 3-31 正弦信号的频谱

2. 一般周期信号

设周期信号为 $f_{T_1}(t)$, 其周期为 T_1 , 将其表示为指数傅里叶级数形式为

$$f_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

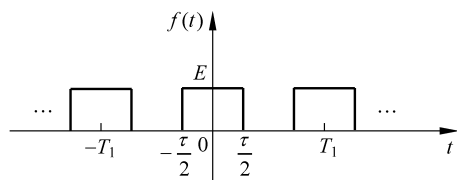
式中, F_n 是 $f_{T_1}(t)$ 的谱系数, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, 对上式两边做傅里叶变换得

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f_{T_1}(t)] \\ &= \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}\right] \end{aligned}$$

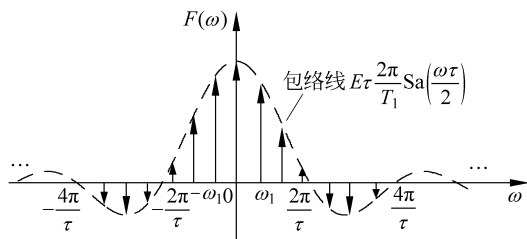
$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_1 t}] \\
 &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)
 \end{aligned} \quad (3-22)$$

式(3-22)表明: 周期信号的频谱密度函数(傅里叶变换)是由一些冲激函数组成的, 这些冲激位于信号的各谐波 $n\omega_1$ (n 为整数)处, 每个冲激的强度是 $f_{T_1}(t)$ 谱系数 F_n 的 2π 倍。不难理解这一结果, 因为频谱密度函数描述的是单位频带宽度上频谱分量的大小, 周期信号的频谱是由离散的谱线组成的, 对每一根谱线存在的点上, 所占据的频带宽度为无限小, 但频谱分量的大小是一个定值, 故密度值趋于无穷大, 即冲激信号。而在非谱线存在的频段上, 频谱分量为 0, 密度自然也为 0。

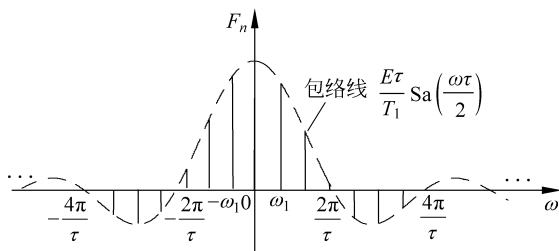
例 3-13 求如图 3-32(a)所示的周期矩形脉冲信号的频谱密度函数。



(a) 周期矩形脉冲信号



(b) 频谱密度函数



(c) 频谱

图 3-32 周期矩形脉冲信号及其频谱

解 首先计算谱系数 F_n

$$F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \quad (3-23)$$

将 F_n 代入式(3-22)得

$$F(\omega) = E\tau \frac{2\pi}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

$f(t)$ 的频谱如图 3-32(c) 所示, 对比频谱密度函数图 3-32(b) 可以看出, 原来 $f(t)$ 的每根谱线变成了冲激信号。

3.4 抽样信号的频谱

在数字信号处理系统中, 当被处理的信号是连续时间信号时, 需首先将连续信号离散化, 进一步形成数字信号, 才能进行后续的数字化处理。而将连续信号离散化的过程即为对连续信号抽样的过程。这一过程形成的信号与原信号之间是怎样的关系, 是否还包含原信号的全部信息, 能否恢复原信号, 都是在进行数字化处理之前需要弄清楚的问题, 也是本节要讲的主要内容。

3.4.1 信号的时域抽样

在时域内对连续时间信号抽样的过程称为时域抽样, 其可以用图 3-33(a) 表示抽样过程, 即开关 k 每隔 T_s 秒闭合一次, 当开关闭合时, $f_s(t) = f(t)$, 当开关打开时, $f_s(t) = 0$ 。如果用数学模型描述抽样过程, 就相当于将连续时间信号与抽样脉冲序列相乘, 如图 3-33(b) 所示。

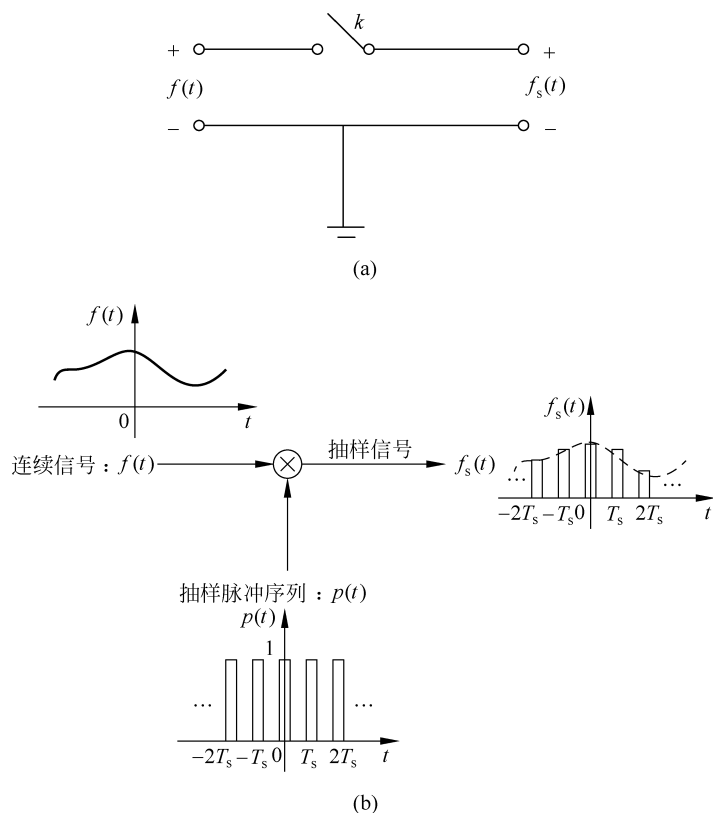


图 3-33 连续时间信号的抽样模型示意图

通常, 可根据抽样脉冲序列的不同将抽样过程划分为均匀抽样和非均匀抽样、理想抽样和非理想抽样。如果用来抽样的脉冲序列是等间隔的, 则称此种抽样过程为均匀抽样; 反之, 称为非均匀抽样。如果用来抽样的脉冲序列是冲激序列, 则称为理想抽样; 反之, 称为

非理想抽样。本书只讨论均匀抽样。

1. 理想抽样及抽样信号的频谱

设连续时间信号 $f(t)$, 抽样脉冲 $p(t)$ 为单位冲激序列 $\delta_{T_s}(t)$, 抽样后的信号为 $f_s(t)$, T_s 为序列周期, 其波形如图 3-34 所示, 写成数学表达式为

$$f_s(t) = f(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

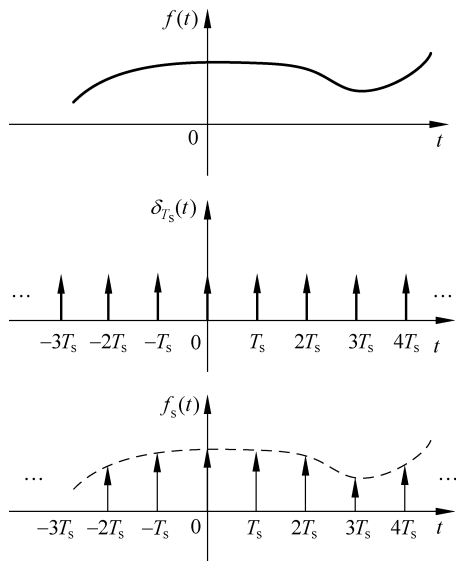


图 3-34 理想抽样

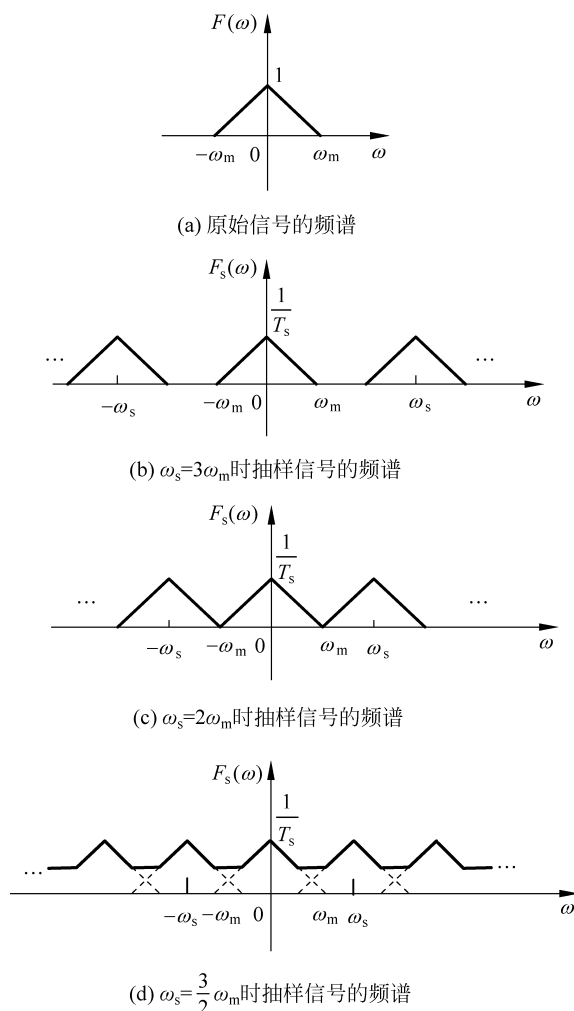
信号经抽样后, 能否包含原信号 $f(t)$ 的全部信息? 若包含了原信号的全部信息, 在什么条件下可从抽样信号无失真恢复原信号? 从 $f_s(t)$ 时域波形上看, 似乎是否定的, 下面在频域内分析抽样信号的频谱, 进而得出结论。

根据频域卷积定理可知, 设 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)$, 如图 3-35(a) 所示, 由傅里叶变换频域卷积定理得抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \delta_{T_s}(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_s \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} [\dots + F(\omega - \omega_s) + F(\omega) + F(\omega + \omega_s) + \dots] \end{aligned} \quad (3-24)$$

式中, $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ 。式(3-24)表明, 理想抽样信号的频谱 $F_s(\omega)$ 是被抽样信号频谱 $F(\omega)$ 以 ω_s

为周期的周期延拓, 而幅度变为原来的 $\frac{1}{T_s}$ 。可以看出, 抽样信号不仅包含了原信号的全部信息 $F(\omega)$, 而且还包含更多频率成分的信号, 图 3-35(b)~(d) 分别表示 ω_s 取不同值时的情况。

图 3-35 ω_s 取不同值时抽样信号的频谱

2. 矩形脉冲抽样及抽样信号的频谱

理想抽样在实际应用中是不可实现的,这主要因为抽样序列为冲激序列,实际中不可能产生这样的信号,将其用于抽样的目的是便于对抽样信号的理论分析。实际应用中抽样序列通常采用矩形脉冲序列,称为矩形脉冲抽样。本节就来分析矩形脉冲抽样及抽样信号的频谱。

设 $p(t)$ 表示矩形脉冲序列,幅度为 E ,脉宽为 τ ,抽样角频率为 ω_s (抽样间隔为 T_s), $f(t)$ 频谱为 $F(\omega)$ 。则抽样信号 $f_s(t) = f(t)p(t)$,抽样过程如图 3-36(a) 所示。

根据频域卷积定理则可得,矩形抽样信号的频谱为

$$\begin{aligned}
 F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) \\
 &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \frac{2\pi E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s) \\
 &= \frac{E\tau}{T_s} \left[\cdots + \text{Sa}\left(\frac{\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega + \omega_s) + F(\omega) + \text{Sa}\left(\frac{\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - \omega_s) + \cdots \right]
 \end{aligned}$$

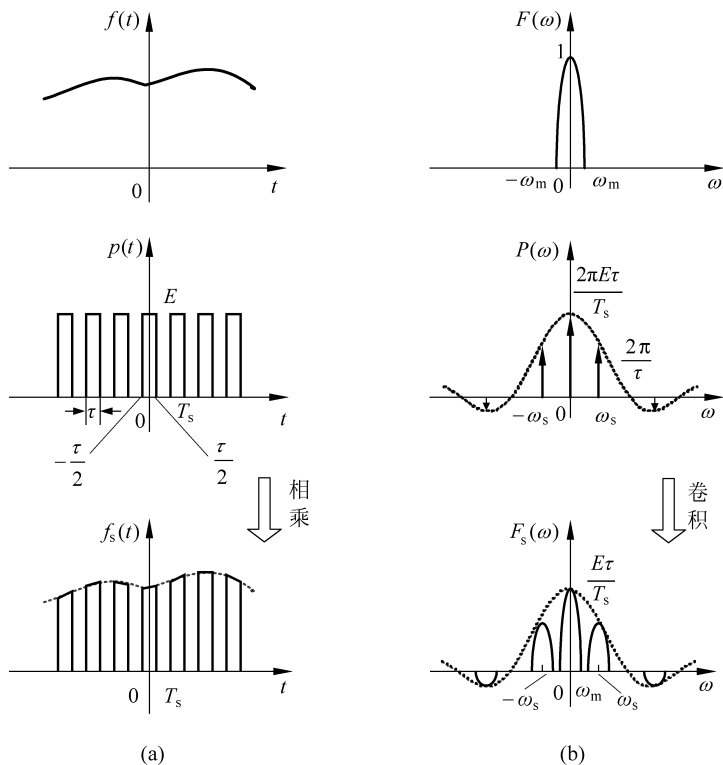


图 3-36 脉冲抽样信号的频谱

同样,连续信号经过矩形脉冲序列抽样后,得到抽样信号的频谱仍然是原信号频谱 $F(\omega)$ 以 ω_s 为周期进行周期重复。只是此时在重复过程中,频谱峰值是以 $\text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$ 的规律变化的,如图 3-36(b) 所示。由理想抽样和矩形脉冲抽样可以得出抽样信号 $f_s(t)$ 中包含有 $f(t)$ 的全部信息,但是抽样信号的频谱会因 ω_s 的不同而不同。

3.4.2 时域抽样定理

无论是理想抽样还是矩形脉冲抽样,抽样信号的频谱都是将原信号频谱以 ω_s (抽样角频率) 为周期重复。由图 3-35 可知, $F(\omega)$ 在重复过程中有可能发生谱与谱之间的混叠。此时要想从抽样信号中完全不失真地提取出原信号是不可能的。导致混叠的原因是,抽样角频率 ω_s 比较小,或者是被抽样信号频带无限宽。故要想使原信号频谱被分离出来,必须保证抽样信号的频谱不能混叠,即需满足以下两个条件。

(1) $f(t)$ 必须为频带有限信号,其频谱在 $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$ 之外全部为零。

(2) 抽样频率不能过低,要满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$ (或 $f_s \geq 2f_m$), 或抽样间隔 $T_s = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_m}$ 。

只有满足上述条件才能由 $f_s(t)$ 不失真地恢复被抽样信号 $f(t)$, 称上述内容为时域抽样定理。当 $f_s = 2f_m$ 时, 将其称为奈奎斯特(Nyquist)频率, 把 $T_s = \frac{1}{2f_m}$ 称为奈奎斯特间隔, 奈奎斯特抽样频率(抽样间隔)是时域抽样的极端结论。实际应用中, 抽样频率通常选为 $f_s \approx (2.5 \sim 3)f_m$ 。

一般情况下, 信号很难保证是频带有限信号。这样, 无论怎样指定抽样频率, 都不能做到抽样信号的频谱不混叠。所以, 通常在对信号抽样前, 先通过一个抗混叠滤波器, 滤掉影响不大的高频部分, 变为带限信号。

3.4.3 信号的频域抽样与频域抽样定理

若在频域内对连续谱信号进行数字化处理, 同样也需要对信号的连续谱进行抽样, 使其频谱离散化, 这个过程称为频域取样。与时域抽样分析思路相同, 需要分析信号在频域段抽样后, 是否包含原信号的全部信息? 如何不失真恢复原信号?

设被取样信号为 $F(\omega)$, 对应的时间信号为 $f(t)$, 现以周期为 ω_1 的冲激序列 $\delta_{\omega_1}(\omega)$ 对 $F(\omega)$ 进行理想抽样, 得取样信号 $F_s(\omega)$ 为

$$F_s(\omega) = F(\omega) \cdot \delta_{\omega_1}(\omega) = F(\omega) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

抽样过程如图 3-37(a)所示, 则 $f_s(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[\delta_{\omega_1}(\omega)]$, 由周期冲激信号的傅里叶变换可知

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)\right] = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

所以 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$ 的逆变换为

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)\right] = \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)$$

因此

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F_s(\omega)] \\ &= f(t) * \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1) \\ &= \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_1) \\ &= \frac{1}{\omega_1} [f(-\infty) + \cdots + f(t + 2T_1) + f(t + T_1) + f(t) \\ &\quad + f(t - T_1) + f(t - 2T_1) + \cdots] \end{aligned} \quad (3-25)$$

式(3-25)表明, 若对信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 以 ω_1 等间隔理想抽样, 则时域中等效于原信号 $f(t)$ 以周期为 T_1 (其中 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$) 进行周期延拓, 同样包含了 $f(t)$ 的全部信息, 图 3-37 示出了频域取样的过程。

通过对时域抽样和频域抽样过程进行研究, 由此得出信号的时域与频域呈现抽样与周期重复相对应这一重要结论, 即信号在一个域(时域或频域)上取样, 则在另外一个域上(频

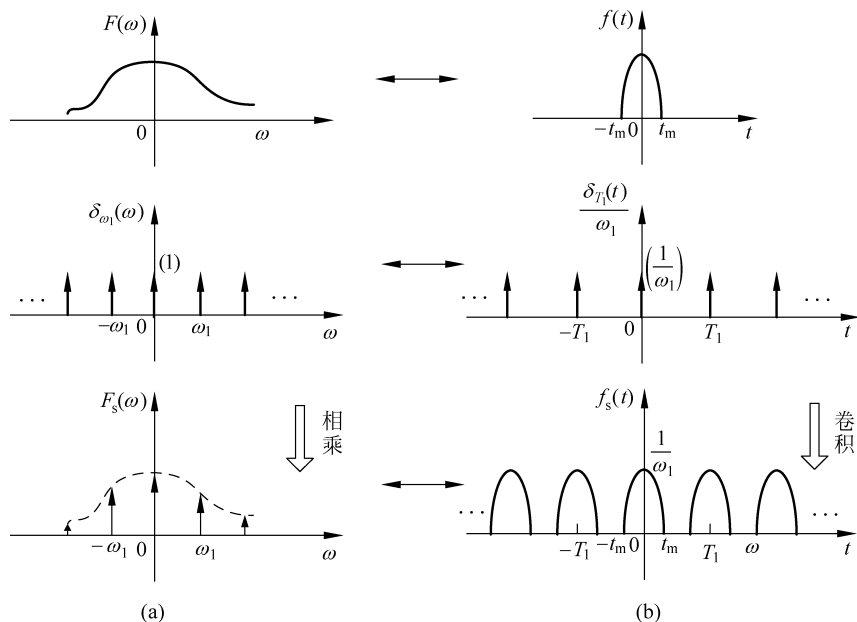


图 3-37 频域抽样所对应的信号波形

域或时域)周期化。

同样,信号 $f_s(t)$ 在对原信号以 T_1 为周期进行周期延拓时,也可能会出现 $f(t)$ 的混叠问题,为避免混迭,在频域取样中也要满足一定条件。下面给出频域抽样定理:如果信号 $f(t)$ 是时间有限信号,即 $|t| > t_m$ 时 $f(t) = 0$,当以 $f_1 \leq \frac{1}{2t_m}$ ($T_1 \geq 2t_m, \omega_1 = 2\pi f_1$) 的频率间隔对 $F(\omega)$ 进行抽样时,则抽样后的频谱 $F_s(\omega)$ 可以唯一地表示原信号,即可不失真地恢复原信号。

可以看出,无论是时域抽样还是频域抽样,都需满足两个条件:一个是对被抽样信号的要求;另一个是对抽样序列的要求。另外,本节讲解的抽样定理只针对非单一频率的低频信号的抽样。对于单一频率信号(如正弦或余弦以及带通等信号)的抽样,还有一定的条件限制,在此不再讲解,有兴趣的读者可参考相关文献或书籍。

3.5 离散时间信号频谱分析

在前面介绍了连续信号的频谱可采用傅里叶级数或傅里叶变换方法来分析,离散信号的频谱同样可采用傅里叶级数或傅里叶变换的方法,只是需要采用离散形式来描述。本节将详细讲解离散信号的频域分析方法及频谱特点。

3.5.1 非周期离散时间信号频谱分析——离散时间傅里叶变换

离散时间傅里叶变换(Discrete Time Fourier Transform, DTFT)是分析离散时间信号的频谱、离散时间系统的频率特性以及线性系统响应频域求解方法的重要工具,它是针对离散序列的一种数学变换。

1. 定义

设离散时间序列 $x(n)$ 满足绝对可和, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < +\infty$$

则 $x(n)$ 的傅里叶变换定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3-26)$$

式(3-26)也称为序列的傅里叶变换, ω 表示序列的数字角频率, 单位为 rad。

离散时间傅里叶变换的逆变换(Inverse Discrete Time Fourier Transform, IDTFT)定义为

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-27)$$

通常用以下符号分别表示对 $x(n)$ 取傅里叶正变换和逆变换

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) = \text{IDTFT}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$

也可以简化表示为 $x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})$ 。

2. 离散时间信号的频谱及特点

由离散时间序列傅里叶变换的定义可知, $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的复函数, 可表示为

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

式中, $|X(e^{j\omega})|$ 称为序列 $x(n)$ 的幅度谱, 是 ω 的偶函数; $\varphi(\omega)$ 称为相位谱, 是 ω 的奇函数。幅度谱和相位谱合起来称为 $x(n)$ 的频谱, 其含义与连续信号的频谱相同。

离散时间信号的频谱具有连续性和周期性的特点, 即无论是幅度谱还是相位谱均为 ω 的连续函数, 而且以 2π 为周期, 即

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2k\pi)}), \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

实际上, 因为 $X(e^{j\omega})$ 是连续周期函数, 所以可以对它做连续傅里叶级数展开, 离散时间傅里叶正变换表达式(3-26)正是 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶指数级数展开式, $x(n)$ 相当于 $X(e^{j\omega})$ 的谱系数即式(3-27), 与连续周期信号指数形式傅里叶级数相比, 从物理意义上看, 就是将时域和频域的对应关系调换了一下, 数学关系是完全一样的。

从时域抽样信号的频谱可以理解离散序列频谱的连续性和周期性。非周期连续信号在时域内理想抽样后得到离散序列, 序列的频谱是原信号的周期延拓, 周期为 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$, 若以弧度表示, 则周期为 $\Omega_s T = 2\pi$ 。

例 3-14 若 $x(n) = u(n) - u(n-6)$, 求此序列的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

解

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \text{DTFT}\{u(n) - u(n-6)\} \\ &= \sum_{n=0}^5 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j6\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{-j3\omega}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \left(\frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{3\omega}{2}} - e^{-j\frac{3\omega}{2}}} \right) \\
 &= e^{-j\frac{5}{2}\omega} \left[\frac{\sin(3\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right]
 \end{aligned}$$

幅频特性为

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(3\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\frac{5}{2}\omega + \arg \left[\frac{\sin(3\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right] = \begin{cases} -\frac{5}{2}\omega \pm \pi, & \frac{\sin(3\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} < 0 \\ -\frac{5}{2}\omega, & \frac{\sin(3\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \geq 0 \end{cases}$$

序列 $x(n)$ 的幅频特性及相频特性如图 3-38 所示。

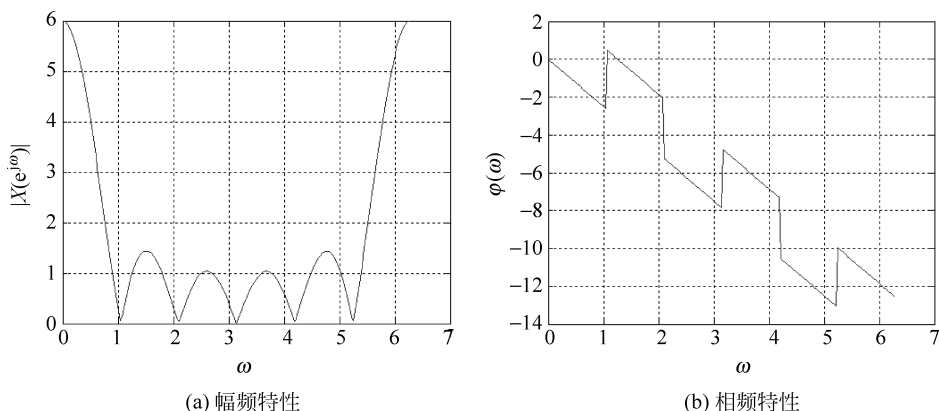


图 3-38 序列 $x(n)$ 的幅频特性及相频特性(一个周期)

3.5.2 离散时间傅里叶变换的性质

与连续时间傅里叶变换一样,离散时间傅里叶变换也具有许多特性。这里只给出一些基本特性,这些特性均可由定义证明,留给读者自行完成。

1. 线性

若 $\text{DTFT}[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$, $\text{DTFT}[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$, 则

$$\text{DTFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

式中, a, b 为任意常数。

2. 移位

1) 时域移位

若 $\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$, 则

$$\text{DTFT}[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

式中, n_0 为整数。该性质说明时域移位对应于序列频谱增加了一个相位。

2) 频域移位

若 $\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$, 则

$$\text{DTFT}[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

该性质说明频域移位对应于时域的调制。

3. 序列的线性加权

若 $\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$, 则

$$\text{DTFT}[nx(n)] = j \frac{d[X(e^{j\omega})]}{d\omega}$$

该性质说明时域序列的线性加权对应着频域内信号频谱的微分。

4. 序列的反转

若 $\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$, 则

$$\text{DTFT}[x(-n)] = X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

该性质说明时域序列反转对应着幅度谱不变, 相位谱为原相位谱的相反数。

5. 卷积定理

1) 时域卷积定理

若 $\text{DTFT}[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$, $\text{DTFT}[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$, 则

$$\text{DTFT}[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega})$$

该定理说明时域卷积对应着频域乘积。

2) 频域卷积定理

若 $\text{DTFT}[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$, $\text{DTFT}[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$, 则

$$\text{DTFT}[x_1(n)x_2(n)] = \frac{1}{2\pi} [X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})]$$

该定理说明时域相乘对应着频域卷积。

6. 帕斯瓦尔定理——能量定理

设 $x(n)$ 是能量信号, 且 $\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

此定理也称为能量定理, 序列的总能量可在频域内利用幅度谱来求得, 即时域总能量等于频域一个周期内总能量的均值。

3.5.3 典型离散时间序列——窗函数及其频谱

本节介绍几种常用的离散序列(窗函数)及其频谱, 这些窗函数在数字滤波器设计和功率谱估计中都有很重要的应用。

在下面的讨论中, 窗函数及其频谱分别用 $w(n)$ 和 $W(e^{j\omega})$ 表示, 且

$$W(e^{j\omega}) = |W(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

对幅频响应以分贝形式进行归一化表示为

$$W_{\text{dB}}(e^{j\omega}) = 10 \lg \frac{|W(e^{j\omega})|}{|W(e^{j0})|}$$

式中, $W(e^{j0})$ 表示信号的直流成分。

1. 矩形窗

$$w(n) = 1 \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

其对应的频谱为

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

为便于将其他窗的频谱与矩形窗函数的频谱进行比较, 将矩形窗函数的频谱用 $W_R(e^{j\omega})$ 表示, 即

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

矩形窗函数的频谱特性 $W_R(e^{j\omega})$ 具有 $\frac{\sin(Nx)}{\sin(x)}$ 的形式, 其主瓣宽度是 $\frac{4\pi}{N}$, 第一个副瓣对应的电平(第一副瓣电平)比主瓣峰值低 13dB 左右。图 3-39 示出了在 $[0, \pi]$ 区间内 $N=51$ 时的矩形窗函数及其归一化幅度谱(dB), 后面其他窗函数的频谱也同样只给出 $[0, \pi]$ 内的频谱, 因为其频谱是关于 π 对称的, 并以 2π 为周期。

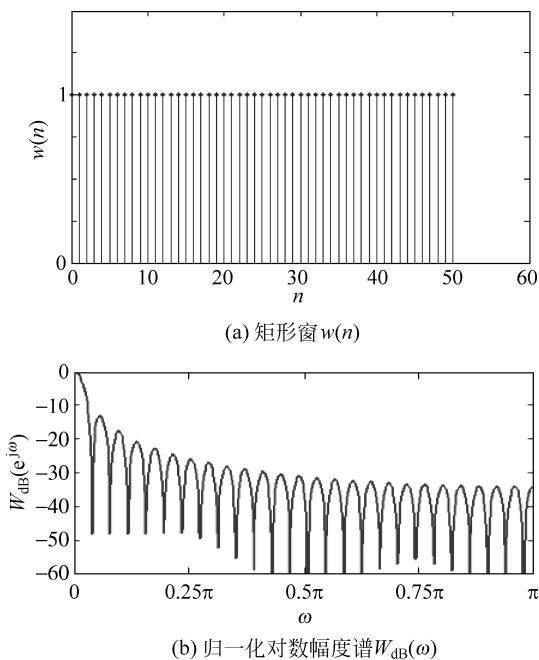


图 3-39 矩形窗及其幅度谱

2. 三角形窗

三角形窗又称巴特利特(Bartlett)窗,即

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{n}{N}, & n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \\ w(N-n), & n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (N \text{ 为偶数})$$

它所对应的频谱函数为

$$W(e^{j\omega}) = \left[\frac{N}{2} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right]^2 e^{-j\left(\frac{N}{2}-1\right)\omega}$$

其幅频特性主瓣宽度是矩形窗的两倍,即 $\frac{8\pi}{N}$,第一个副瓣电平比主瓣峰值低 26dB 左右,

图 3-40 示出了 $N=51$ 时的时域及频谱。

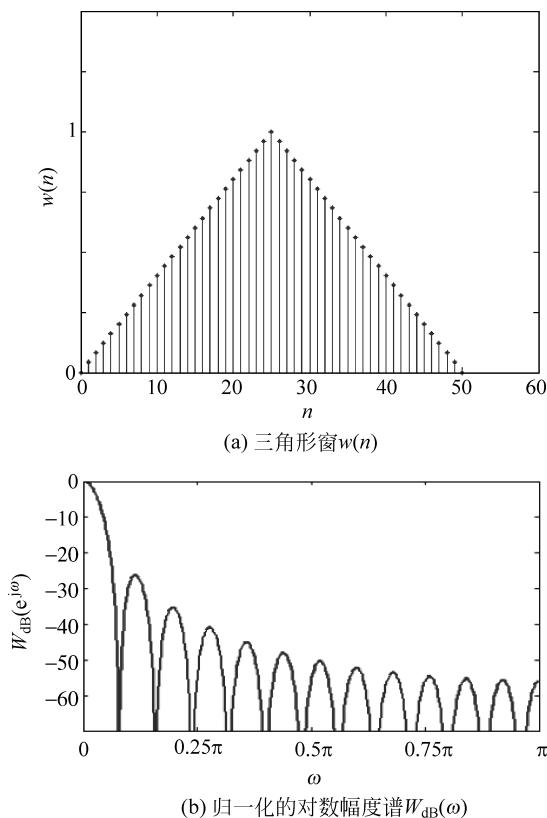


图 3-40 三角形窗及其幅度频谱

3. 汉宁窗

汉宁窗也称余弦平方窗或升余弦窗,即

$$w(n) = \sin^2\left(\frac{\pi}{N}n\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right] \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

利用欧拉公式及频移定理,可以得到用矩形窗的频谱 $W_R(e^{j\omega})$ 表示的偶对称式汉宁窗的频谱函数为

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}W_R(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}W_R(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N})}) - \frac{1}{4}W_R(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{N})})$$

其频谱特性如图 3-41 所示,它是由三个互有频移的不同幅值的矩形窗幅度谱函数合成,这将使副瓣大为衰减,能量更有效地集中在主瓣内,使计算主瓣宽度加宽了一倍。

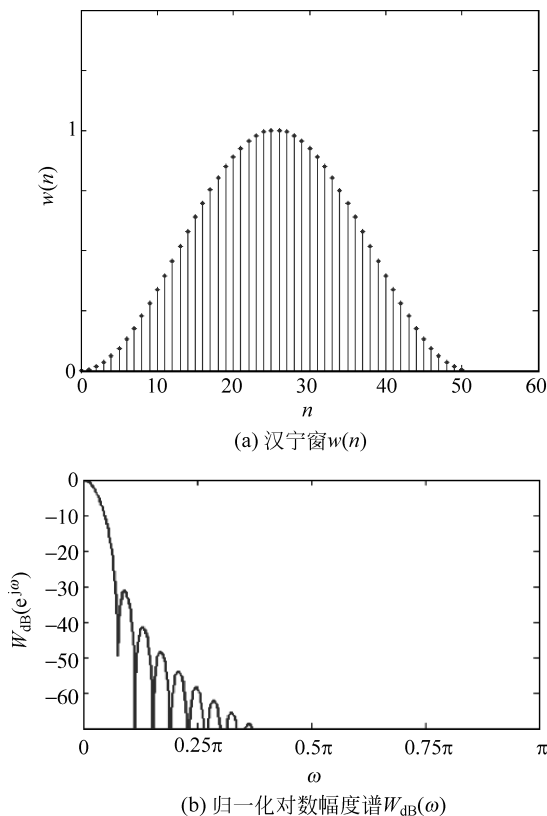


图 3-41 汉宁窗及其幅度频谱

4. 海明窗

海明窗的单边表示为

$$w(n) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

其频谱函数为

$$W(e^{j\omega}) = 0.54W_R(e^{j\omega}) + 0.23[W_R(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N})}) + W_R(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{N})})]$$

海明窗频谱的幅度函数可以达到 99.96% 的能量集中在主瓣内,在与汉宁窗相等的主瓣宽度下,获得了更好的副瓣抑制。图 3-42 示出了海明窗及其幅度谱(dB),可以看到,在第一副瓣处出现了很深的凹陷。

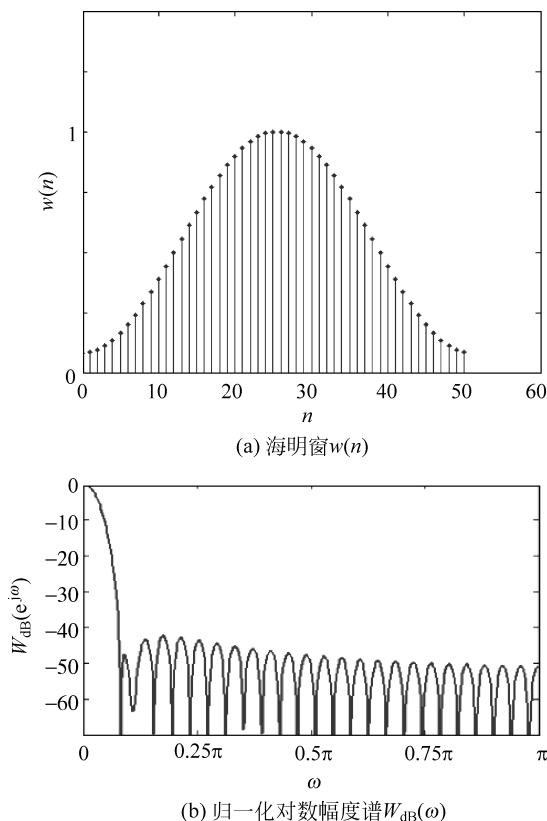


图 3-42 海明窗及其幅度频谱

5. 布拉克曼窗

布拉克曼窗也称二阶升余弦窗。汉宁窗、海明窗都是由三个中心频率不同的矩形窗频谱线性组合而成的。布拉克曼窗是利用更多的矩形窗频谱线性组合构成的,其单边表示为

$$w(n) = \sum_{m=0}^{K-1} (-1)^m a_m \cos\left(\frac{2\pi}{N} m n\right) \quad (n = 0, 1, \dots, (N-1))$$

其频谱表达式为

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{K-1} (-1)^m \frac{a_m}{2} \left[W_R e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N})} + W_R e^{j(\omega + \frac{2\pi}{N})} \right]$$

其中窗函数系数 a 的选择应满足以下约束条件

$$\sum_{m=0}^{K-1} a_m = 1$$

实际上,汉宁窗、海明窗是 a_0 、 a_1 不为零,而其他系数都为零的布拉克曼窗。假设布拉克曼窗有 K 个非零的系数,则其振幅频谱将由 $2K-1$ 个中心频率不同的矩形窗频谱线性组合而成。要使窗函数的主瓣宽度变窄,则 K 值不能选择很大。图 3-43 给出了 $K=3$, $a_0=0.42$, $a_1=0.5$, $a_2=0.08$ 时所对应的布拉克曼窗及其幅度谱(dB)。

最后给出各种窗函数的基本参数,如表 3-2 所示。可以看出相同宽度的窗函数,主瓣宽度与副瓣的幅度是成反比的。实际使用时需根据需求选择相应的窗。

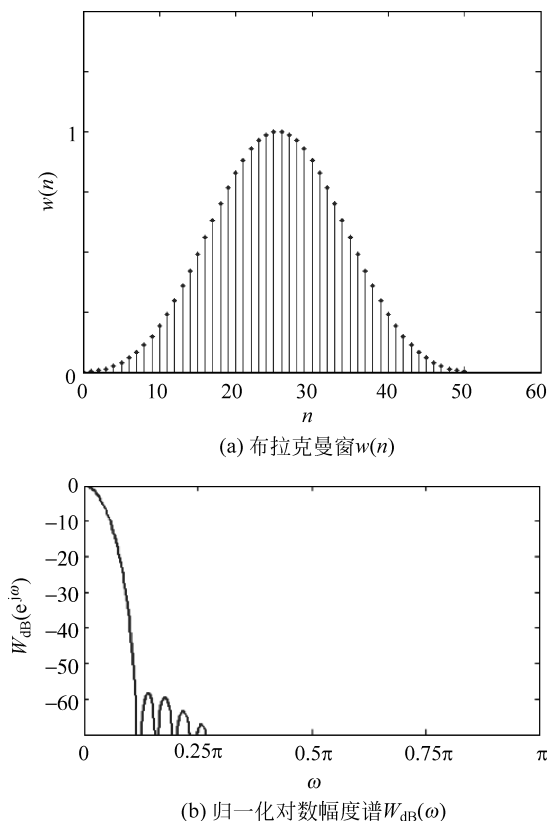


图 3-43 布拉克曼窗及其幅度频谱

表 3-2 5 种窗函数基本参数的比较

窗 函 数	窗频谱性能指标	
	副瓣峰值/dB	主瓣宽度
矩形窗	-13	$4\pi/N$
巴特利特	-25	$8\pi/N$
汉宁窗	-31	$8\pi/N$
海明窗	-41	$8\pi/N$
布拉克曼窗	-57	$12\pi/N$

3.6 周期离散时间信号的频谱分析——离散傅里叶级数

首先回顾一下已经学过的几种信号的频谱形式。图 3-44(a)~(c)分别给出了连续周期、非周期、离散非周期信号的时域波形及频谱示意图,图中用 Ω 表示连续信号模拟角频率,单位为 rad/s,用 ω 表示离散信号数字角频率,单位为 rad。

由图 3-44 可以看出,从离散与连续、周期与非周期的角度看,可以定性推断出图 3-44(d)中离散周期信号的频谱是离散周期的。①时域上 $x_p(n)$ 可以看作连续周期信号 $x_p(t)$ 的离散化,根据时域上的离散化将产生频谱的周期化,因此 $x_p(n)$ 的频谱 $X_p(e^{j\omega})$ 是非周期离散谱 $X_p(jk\Omega_1)$ 的周期化,即 $X_p(e^{j\omega})$ 是周期的离散谱。②时域上 $x_p(n)$ 还可以看作离散非周

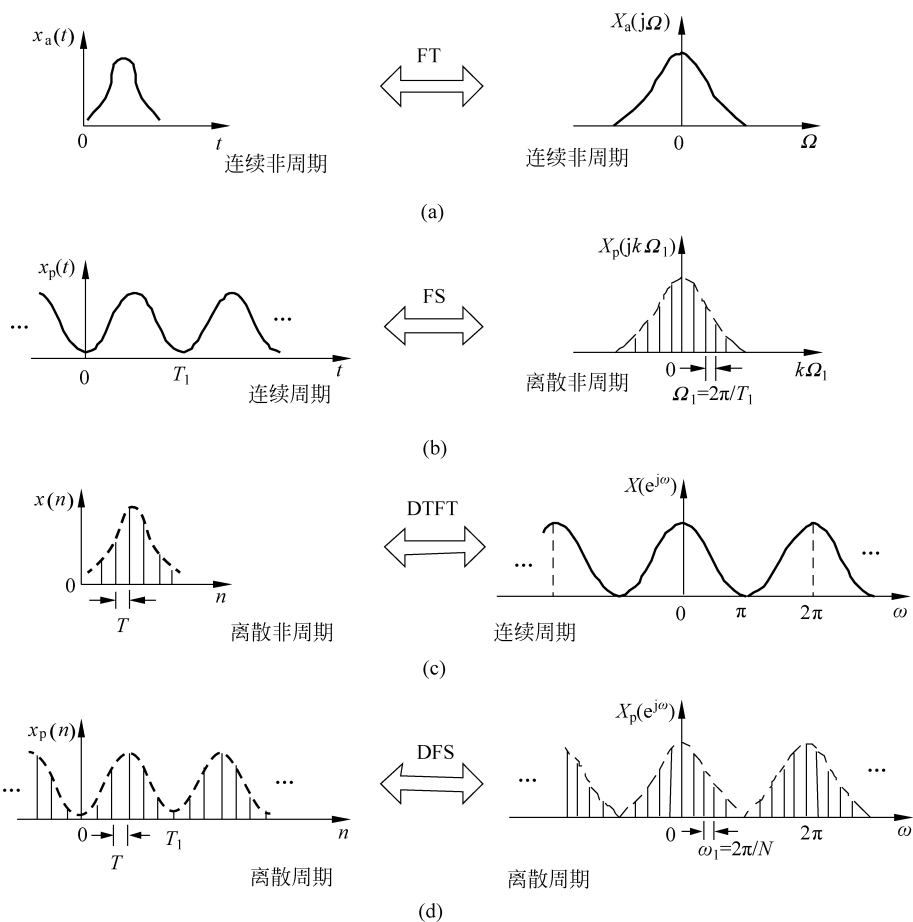


图 3-44 信号在时、频域中的对称性规律

期信号 $x(n)$ 的周期化, 根据时域周期化将产生频谱的离散化规律, 也能推断出离散周期信号 $x_p(n)$ 的频谱 $X_p(e^{j\omega})$ 是周期离散谱的结论。下面从理论上给出周期离散时间序列 $x_p(n)$ 与其频谱 $X_p(e^{j\omega})$ 的关系, 即离散傅里叶级数变换。

3.6.1 离散傅里叶级数变换

设 $x(n)$ 的列长为 N , 其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 为表示其周期性, 在 $X(e^{j\omega})$ 上方加上标“ $\sim$ ”, 即

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

现对 $\tilde{X}(e^{j\omega})$ 在每个周期内均匀取样, 取样点数为 N , 则取样间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$, 因此一个周期内第 k 个取样点为

$$\omega_k = k\omega_1 = \frac{2\pi}{N}k \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

取样后的取样序列为

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

上式是取样点 k 的函数,可以写为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (k=0,1,\dots,N-1) \quad (3-28)$$

利用式(3-28),可以计算出一个周期内的 N 个取样值。可以证明 $\tilde{X}(k)$ 也是以 N 为周期的周期序列,即

$$\tilde{X}(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k)$$

对 $\tilde{X}(e^{j\omega})$ 均匀取样后,在频域内形成了一个新的周期序列 $\tilde{X}(k)$,那么 $\tilde{X}(k)$ 对应的时域序列与原序列 $x(n)$ 之间有何关系? 下面来分析这个问题。

将式(3-28)两边同乘以 $e^{j\frac{2\pi}{N}kr}$,并在一个周期内求和,即

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kr} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kr} = N \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(r-n)k} \right) \right]$$

因为

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(r-n)k} = \begin{cases} 1, & n=r \\ 0, & n \neq r \end{cases}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kr} = N \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \right] \Big|_{n=r} = Nx(r)$$

以 n 置换 r ,可得

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3-29)$$

由频域取样定理知, $X(e^{j\omega})$ 在频域取样后,对应的时域序列 $x(n)$ 将以取样点数 N 为周期进行周期延拓,形成周期序列,此时用 $\tilde{x}(n)$ 表示其周期性。由式(3-29)也可以证明

$$\tilde{x}(n) = x(n+mN) \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

如果引入符号 W_N ,记为

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

并以 $\tilde{x}(n)$ 替换式(3-28)和式(3-29)中的 $x(n)$,得到一组变换关系

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] & (k=0,1,\dots,N-1) \end{cases} \quad (3-30)$$

$$\begin{cases} \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] & (n=0,1,\dots,N-1) \end{cases} \quad (3-31)$$

称式(3-30)为离散傅里叶级数正(Discrete Fourier Series,DFS)变换,式(3-31)为离散傅里叶级数逆(Inverse Discrete Fourier Series,IDFS)变换。离散傅里叶级数描述了离散周期序列的时频域关系,简化表述为 $\tilde{x}(n) \leftrightarrow \tilde{X}(k)$ 。通常将 $\tilde{x}(n)$ 的谱序列 $\tilde{X}(k)$ 称为 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数系数。至此研究了周期信号的频谱分析方法,无论是连续周期信号还是离散周期信号都可以用傅里叶级数来分析其频谱特性,它们的频谱的共同特点是离散性。

3.6.2 离散傅里叶级数的性质

为方便起见,先假设两个离散周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 的周期均为 N ,且 $\tilde{X}_1(k) =$

$\text{DFS}[\tilde{x}_1(n)], \tilde{X}_2(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_2(n)]$, 在即将讲述的各性质中, 直接引用。

1. 线性

若 $\tilde{x}_3(n) = a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)$, 则

$$\tilde{X}_3(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_3(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$$

式中, a, b 为任意常数, 线性特性可根据 DFS 的定义证明。

由于是线性组合, 所以 $\tilde{x}_3(n)$ 的周期长度不变, 仍为 N , $\tilde{X}_3(k)$ 也是周期为 N 的离散周期序列。

2. 移位

1) 时域移位

周期序列 $\tilde{x}(n)$, 周期为 N , 将其沿横坐标平移 m (m 为整数) 位后, 得 $\tilde{x}(n+m)$, 则

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

证明

$$\begin{aligned} \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{nk} \quad (\text{令 } i = n+m) \\ &= \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ik} W_N^{-mk} \\ &= W_N^{-mk} \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ik} \end{aligned}$$

由于 $\tilde{x}(i)$ 及 W_N^{ik} 都是以 N 为周期的周期函数, 因此对 i 求和时, 下限从 m 至上限 $N-1+m$ 与 0 至 $N-1$ 是相同的。因此

$$\sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki} = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ki} = \tilde{X}(k)$$

所以

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

注意: 大于周期的任何移位 ($m \geq N$) 与小于周期的移位在时域上不能区分。

2) 频域移位

当将 $\tilde{X}(k)$ 沿横轴平移 l (l 为整数) 时, 得 $\tilde{X}(k+l)$, 则

$$\text{IDFS}[\tilde{X}(k+l)] = W_N^{nl} \tilde{x}(n)$$

可用与上面类似的方法证明该性质。需要说明的是, 序列在一个域内移位, 在另一个域内就会增加一个相位。

3. 周期卷积定理

1) 时域周期卷积定理

$$\text{DFS}[\tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)$$

证明 设 $\tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) = \tilde{X}_3(k)$, 且 $\tilde{X}_3(k)$ 的 IDFS 为 $\tilde{x}_3(n)$, 则

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3(n) &= \text{IDFS}\{\tilde{X}_3(k)\} = \text{IDFS}\{\tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) W_N^{-nk} \end{aligned}$$

代入 $\tilde{X}_1(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) W_N^{mk}$, 则

$$\begin{aligned}\tilde{x}_3(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{X}_2(k) W_N^{-(n-m)k} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \\ &= \tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n)\end{aligned}$$

2) 频域周期卷积定理

若 $\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_2(n)$, 则 $\text{DFS}[\tilde{x}_3(n)] = \frac{1}{N} [\tilde{X}_1(k) * \tilde{X}_2(k)]$, 即

$$\begin{aligned}\text{DFS}[\tilde{x}_3(n)] &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k-l) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) \tilde{X}_1(k-l)\end{aligned}$$

频域周期卷积定理的证明与时域周期卷积定理的证明类似, 这里不再赘述。

3.7 离散时间信号频谱的离散化和非周期化——离散傅里叶变换

如前面所述, 非周期离散信号的频谱是连续的周期谱, 不利于用数字信号处理系统进行处理, 需要对其频谱进行离散化, 得到周期的离散序列。频域离散化带来了时域信号的周期化, 此时时域及频域信号都为离散的周期信号, 即前面讲述的离散傅里叶级数变换。这种时域及频域序列都是离散的序列。由于其周期特性, 同样不便于数字化处理, 但是可以利用其周期性分别取出时域及频域周期序列的一个周期进行分析和处理, 并将分析和处理结果应用于其他周期, 这一过程被称为非周期化处理, 也就是本节要讲的离散傅里叶变换的思想。

3.7.1 离散傅里叶变换

设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的周期序列, 称 $\tilde{x}(n)$ 从 0 开始的第一个周期内的序列为 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列, 对应的区间 $n \in [0, N-1]$ 称为主值区间。利用矩形窗 $R_N(n)$ 与周期序列相乘, 就可以表示主值序列, 即

$$x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

这样就可以将 $\tilde{x}(n)$ 看作主值序列以 N 为周期的周期延拓。

同理, 也可以将 $\tilde{x}(n)$ 的谱序列 $\tilde{X}(k)$ 看作是长度为 N 的有限长序列 $X(k)$ 的周期延拓, 称序列 $X(k)$ 为周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列, 对应的主值区间为 $k \in [0, N-1]$, 即

$$\tilde{X}(k) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X(k + rN)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

在定义了主值序列和主值区间之后, 现在给出有限长序列离散傅里叶变换的定义, 设

$\tilde{x}(n)$ 周期为 N , 其离散傅里叶级数为 $\tilde{X}(k)$, 分别取 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列, 并构成一个变换对, 即

$$\begin{cases} X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & (0 \leq k \leq N-1) \end{cases} \quad (3-32)$$

$$\begin{cases} x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & (0 \leq n \leq N-1) \end{cases} \quad (3-33)$$

称以上两式为主值序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换对, 其中式 (3-32) 为离散傅里叶正变换 (Discrete Fourier Transform, DFT), 式 (3-33) 为离散傅里叶逆变换 (Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)。需要说明的是, DFS 是按傅里叶分析严格定义的, 而 DFT 的定义则是一种“借用”的形式。它在时域和频域都可实现对信号的离散化、非周期化, 因此也可以将 DFT 看作对非周期连续时间信号及其频谱的抽样。虽然离散傅里叶变换描述的是 DFS 对应的主值序列, 但实际应用中, 可以将其应用于非周期序列的时域和频域离散化分析, 此时可将其理解为某一周期序列的主值序列即可, 因此离散傅里叶变换在时域和频域都隐含着周期性, 且正逆变换的范围是相同的。

需要说明的是, 离散傅里叶逆变换形式与正变换不同之处在于 W_N 因子为负指数, 具有一比例系数 $\frac{1}{N}$, 因此离散傅里叶逆变换还可以写为

$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^* \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

这种逆变换形式在运算上与正变换一样, 因此在实现时, 只要编一个程序就可以既用来计算离散傅里叶变换, 又用来计算它的逆变换。

例 3-15 求矩形脉冲序列 $x(n) = R_N(n)$ 的 DFT。

解 由定义写出

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\frac{2\pi}{N}k})^n \\ &= \begin{cases} N, & e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = 1 \\ \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}kN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = 0, & e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

当 $k=0$ 时, 对应 $e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = 1$, 因此 $X(0) = N$ 。当 $k=1, 2, \dots, N-1$ 时, 则有 $e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \neq 1$, 然而, $(e^{-j\frac{2\pi}{N}k})^N = e^{-j2\pi k} = 1$, 故对应非零的 k 值, $X(k)$ 全部等于零, 如图 3-45 所示。

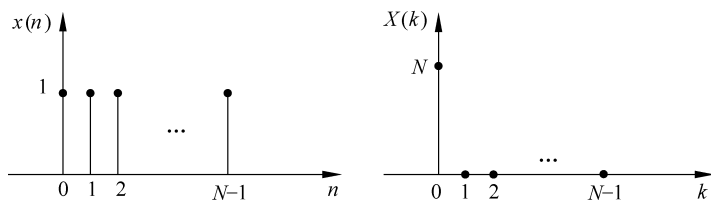


图 3-45 时域序列 $x(n)$ 及其对应的 DFT $X(k)$

此结果表明,矩形脉冲序列的 DFT 仅在 $k=0$ 样点处的取样值为 N ,在其余 $(N-1)$ 个样点的取样值都是零,即抽样点正好落在正弦抽样信号(矩形信号的频谱是正弦抽样信号)的过零点处,因此可以写作

$$X(k) = N\delta(k) \quad (k=0,1,\cdots,(N-1))$$

不难想到,将 $R_N(n)$ 周期延拓(周期等于 N)成为无始无终幅度恒为单位值的序列,取离散傅里叶级数即 $\sum_{m=0}^{+\infty} N\delta(k-mN)$ 。

3.7.2 离散傅里叶变换的性质

作为一种数学变换,离散傅里叶变换也有许多性质,本节给出离散傅里叶变换的一些基本性质,这些性质大都可由定义直接证明,下面只给出结论,其证明过程由读者自行完成。假定 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 和 $x(n)$ 都是列长为 N 的有限长序列,它们的离散傅里叶变换分别为 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 和 $X(k)$ 。

1. 线性

设 $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, 且 $X_3(k) = \text{DFT}[x_3(n)]$, 则

$$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$$

式中, a 、 b 为任意常数。

注意: 如果 $x_1(n)$ 列长为 N_1 , $x_2(n)$ 列长为 N_2 , 则 $x_3(n)$ 的列长为 $N_3 = \max[N_1, N_2]$ 。因而,离散傅里叶变换 $X_3(k)$ 必须按 $N = N_3$ 计算。

2. 对称定理

$$\begin{aligned} \text{DFT}[X(n)] &= Nx(-k) \\ &= Nx(N-k) \end{aligned}$$

该性质说明, $X(n)$ 的对应频谱序列是原来的时间序列 $x(n)$ 在时间上的倒置。需要说明的是,由于离散傅里叶变换隐含着周期性,其周期可理解为 $x(n)$ 的长度 N ,离散傅里叶变换通常用时域和频域的主值序列描述时频域对应关系,故将 $x(-k)$ 表示为 $x(N-k)$,即用从 0 开始的主值序列代替 $x(-k)$ 。

3. 反转定理

$$\text{DFT}[x(-n)] = X(-k) = X(N-k)$$

该性质说明,序列在时域沿纵轴翻转,对应的频域序列也同样翻转。

4. 初值定理

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

该性质说明,序列 $x(n)$ 的初值 $x(0)$ 是频域序列的平均值。若知道序列在频域的特性,可直接得到其初值,而不需要计算 IDFT 序列。同样,也可以由时域序列得到序列在频域内的初值,而这个初值实际上就是序列的直流分量,即

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

5. 延长序列的离散傅里叶变换

1) 后补零情况

现将序列 $x(n)$ 末尾补零至 rN 点,记为 $g(n)$,即

$$g(n)=\begin{cases}x(n), & 0\leq n\leq N-1\\0, & N\leq n\leq rN-1\end{cases}$$

则 $g(n)$ 的离散傅里叶变换为

$$G(k)=\text{DFT}[g(n)]=X\left(\frac{k}{r}\right) \quad (k=0,1,\cdots,rN-1)$$

该性质说明, $g(n)$ 的频谱 $G(k)$ 与 $x(n)$ 的频谱 $X(k)$ 是相对应的, 但其频谱序列是将原序列的频谱取样间隔减少 r 倍, 即增加了一个周期内的原信号频谱的抽样点数, 得到的频谱更加细致, 分布更清晰。

注意: 序列补零后的频谱分布形状与补零前一样, 不会改变。

如连续信号 $x(t)=\sin(2\pi f_1t)+\sin(2\pi f_2t+90^\circ)+\sin(2\pi f_3t)$, $f_1=2.67\text{Hz}$, $f_2=3.75\text{Hz}$, $f_3=6.75\text{Hz}$, 取样频率 $f_s=20\text{Hz}$, 取样点数 $N=16$, 该信号抽样后的时域波形及其 16 点幅度谱如图 3-46 和表 3-3 所示, 对抽样信号末尾补零至长度 N_1 , 其中 N_1 分别为原序列长度 N 的 2 倍、7 倍和 29 倍时, 对应的时域波形及幅度谱如图 3-47~图 3-49 所示。

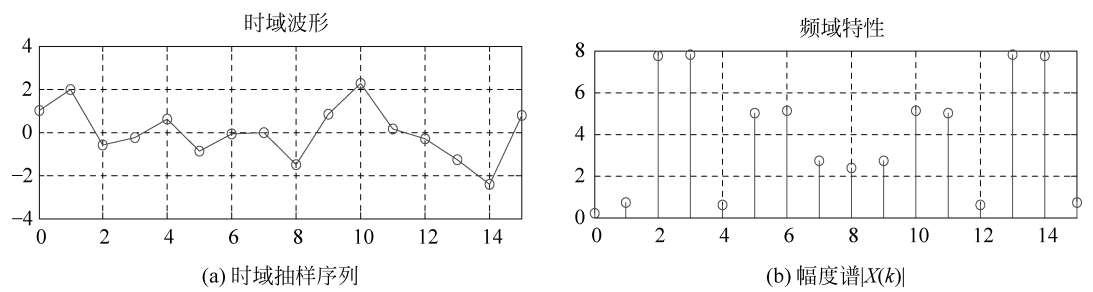


图 3-46 抽样后的 $N=16$ 点的时域波形幅度谱

表 3-3 序列 $x(n)$ 的幅度谱

k	1	2	3	4	5	6	7	8
频率点/Hz, $(k-1)f_s/16$	0	1.25	2.5	3.75	5.0	6.25	7.5	8.75
幅度值 $ X(k) $	0.226	0.7375	7.7637	7.7883	0.6139	4.9905	5.1146	2.6982
k	9	10	11	12	13	14	15	16
频率点/Hz, $(k-1)f_s/16$	10	11.25	12.5	13.75	15	16.25	17.5	18.75
幅度值 $ X(k) $	2.3627	2.6982	5.1146	4.9905	0.6139	7.7883	7.7637	0.7375

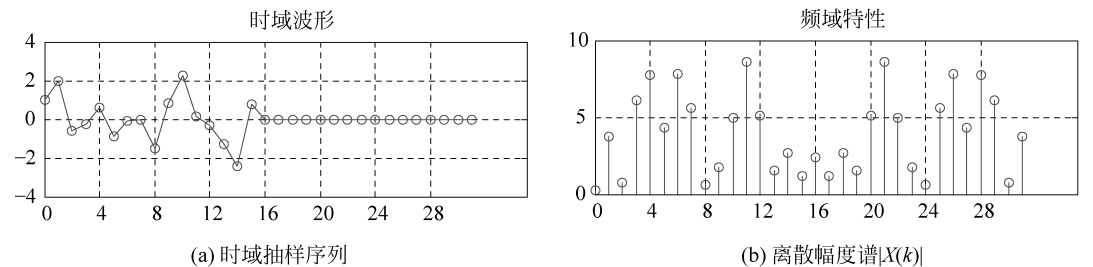
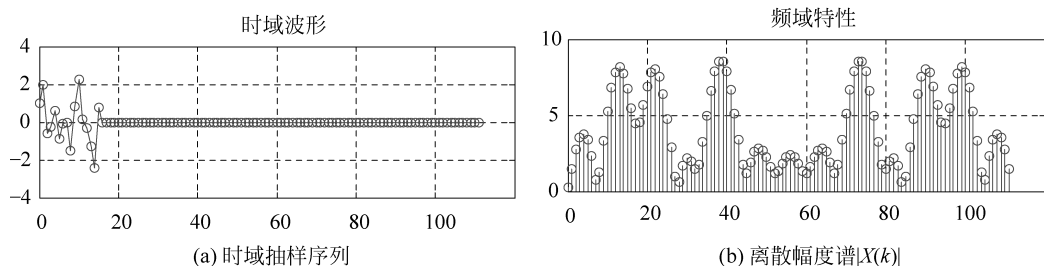
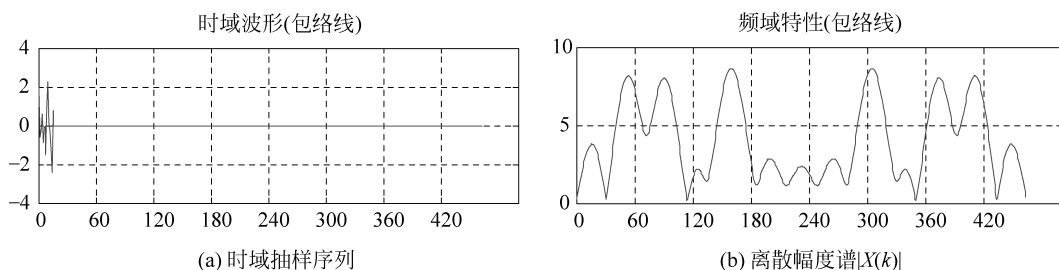


图 3-47 抽样后的 $N_1=32$ 点的时域波形及幅度谱

图 3-48 抽样后的 $N_1 = 128$ 点的时域波形及幅度谱图 3-49 抽样后的 $N_1 = 464$ 点的时域波形及幅度谱

通过对序列末尾补零,可以将原序列的频谱分布看得更清晰,序列中的主要频率分量也不容易漏掉,当然由于补零使原序列加长,点数增多,计算量会增大。

2) 序列前补零

将序列 $x(n)$ 右移 $(r-1)N$ 点,并在 $[0, (r-1)N-1]$ 内补上零值,形成 rN 点序列 $g(n)$,即

$$g(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq (r-1)N-1 \\ x(n), & (r-1)N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

则

$$G(k) = \text{DFT}[g(n)] = W_r^{(r-1)k} X\left(\frac{k}{r}\right) \quad (k=0, 1, \dots, rN-1)$$

证明 因为

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{n=0}^{rN-1} g(n) W_{rN}^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{(r-1)N-1} 0 \cdot W_{rN}^{kn} + \sum_{n=(r-1)N}^{rN-1} x(n) W_{rN}^{kn} \end{aligned}$$

令 $n - (r-1)N = m$, 所以

$$G(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m + (r-1)N] W_{rN}^{k[m + (r-1)N]} = W_r^{(r-1)k} X\left(\frac{k}{r}\right)$$

该性质说明,若在序列 $x(n)$ 前面填充零值,使序列加长,相当于对时域信号进行了延迟移位,则加长后的时域序列的频谱抽样间隔减少 r 倍,原频谱所对应的一个周期内增加了抽样点数,得到的频谱更加细致,同时离散谱对应的每一个谱线都附加一个相位因子。

图 3-50 给出了 $N=16$ 的离散序列及其频谱。若对其进行前补零加长至 32 点,加长后的

离散序列及其对应的频谱如图 3-51 所示,可以看出,前补零加长至原序列长度 2 倍后的序列的离散谱抽样间隔减少至原来的 $\frac{1}{2}$,同时离散谱对应的每一个谱线都附加一个相位移因子。

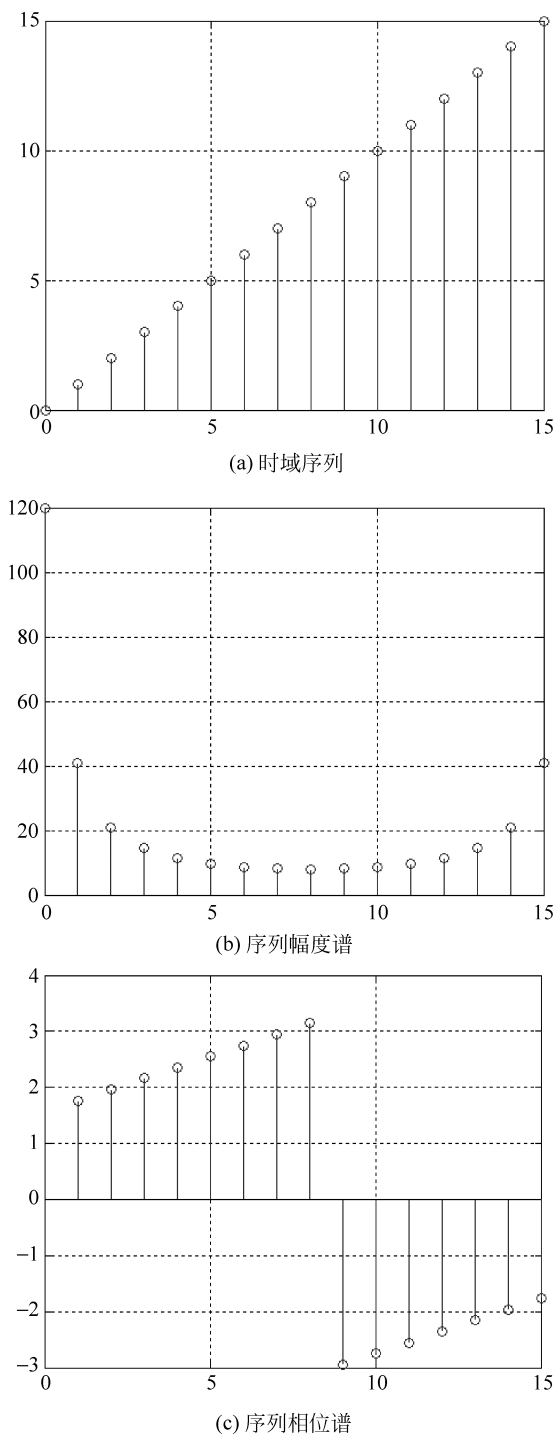
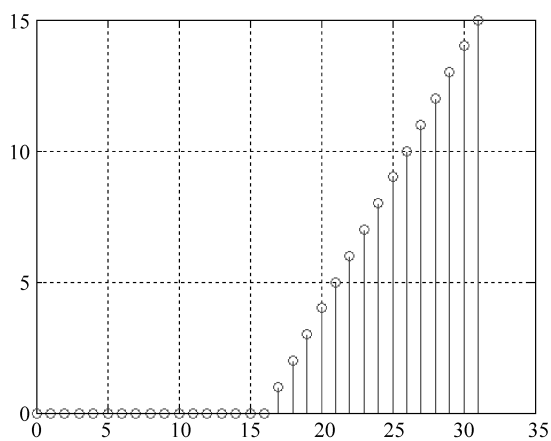
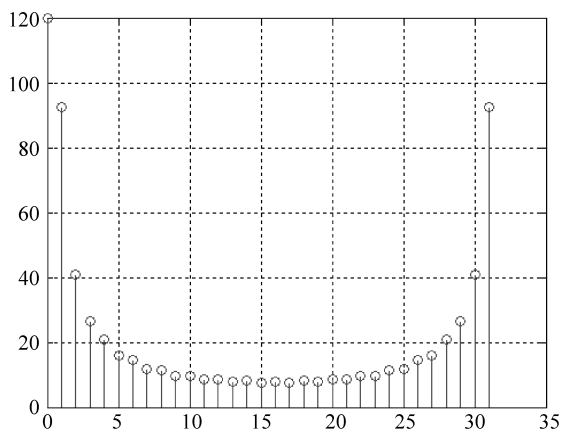


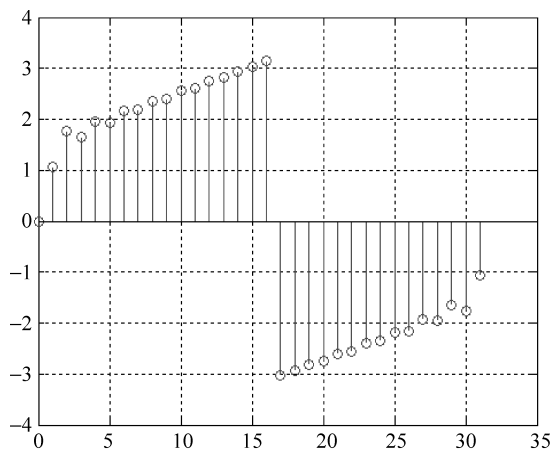
图 3-50 时域抽样序列及离散序列频谱 ($N=16$)



(a) 时域序列



(b) 序列幅度谱



(c) 序列相位谱

图 3-51 前补零后的时域抽样序列及离散序列频谱($N=32$)

3) 重复原序列本身

对序列 $x(n)$ 本身重复 r 个周期, 形成长度为 rN 的序列, 即

$$g(n) = x((n))_N \quad (0 \leq n \leq rN - 1)$$

此时

$$G(k) = \text{DFT}[g(n)] = \begin{cases} rX\left(\frac{k}{r}\right), & k \text{ 能被 } r \text{ 整除} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{n=0}^{rN-1} g(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n-N) e^{-j\frac{2\pi(n+N)k}{rN}} + \cdots + \sum_{n=(r-1)N}^{rN-1} x(n+(r-1)N) e^{-j\frac{2\pi(n+(r-1)N)k}{rN}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi(n+lN)k}{rN}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}} \sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi lNk}{rN}} \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi lNk}{rN}} = \sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi lk}{r}}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{r-1} \left(e^{-j\frac{2\pi k}{r}} \right)^l &= \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{r}}} \\ &= \begin{cases} r, & k \text{ 能被 } r \text{ 整除} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

可以得出

$$G(k) = \begin{cases} rX\left(\frac{k}{r}\right), & k \text{ 能被 } r \text{ 整除} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

该性质说明, 若将长度为 N 的序列 $x(n)$ 重复原序列本身而人为加长至长度为 rN , 其频谱在 $\frac{k}{r}$ 为整数的位置处的值与原 $X(k)$ 值对应, 幅度放大 r 倍, 在其他点处的值为零。例如, 16 点序列 $x(n)$ 及其频谱 $X(k)$ 如图 3-52 所示, 若重复原序列本身将其人为加长至长度为 $2N$, 即 $r=2$, 加长后的时域信号及其频谱如图 3-53 所示, 其幅度谱在原序列幅度谱中两个相邻谱线之间插入 1 个零值, 原谱线幅值放大 2 倍。若重复原序列本身将其人为加长至长度为 $4N$, $r=4$, 加长后的时域信号及其频谱如图 3-54 所示。加长后的序列还保持原有的谱线, 但每根谱线的幅值放大 4 倍, 且其位置是在 $\frac{k}{4}$ 为整数时的点上, 即每相邻两个谱线之间插入 3 个零值。

由此可得出以下结论: 如果在时域内对序列 $x(n)$ 重复 r 倍, 则其频谱是将原频谱序列

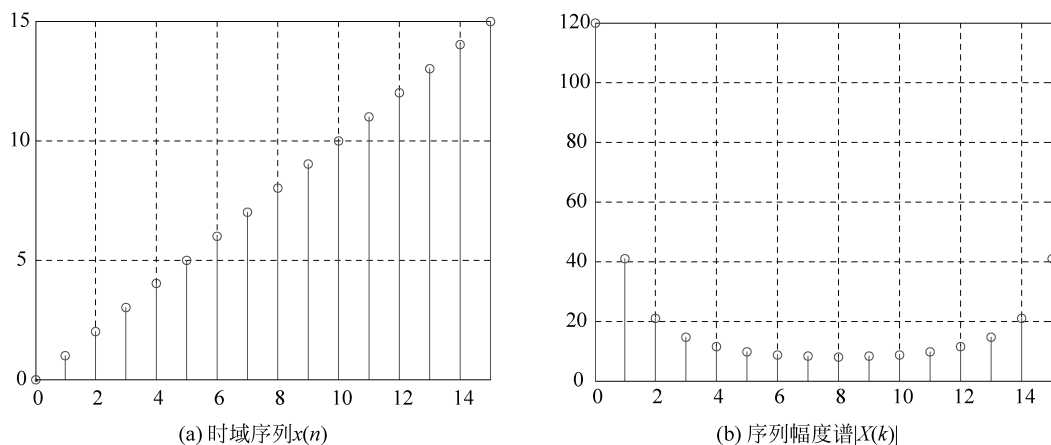


图 3-52 时域序列 $x(n]$ 及其幅度频谱 $|X(k)|$ ($N=16$)

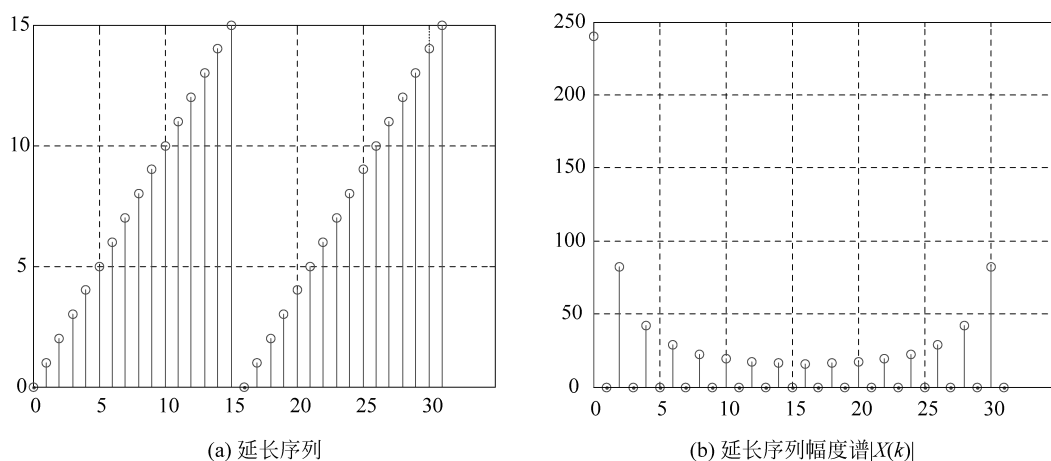


图 3-53 延长序列及其幅度频谱 $|X(k)|$ ($N=32$)

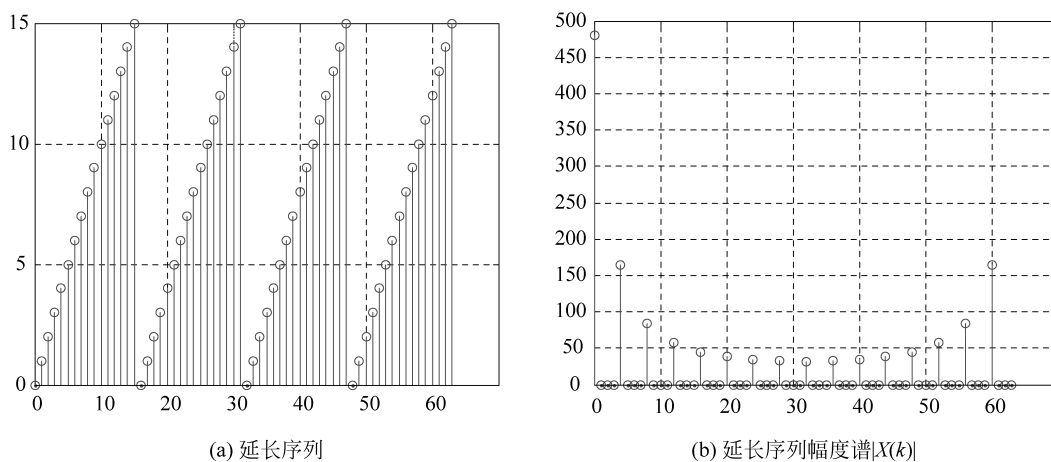


图 3-54 延长序列及其幅度频谱 $|X(k)|$ ($N=64$)

谱线之间内插 $(r-1)$ 个零值,且原谱线幅值放大 r 倍。利用 DFT 对称特性,如果频谱序列 $X(k)$ 在频域内重复 r 倍,则对应时域序列每相邻点之间有 $(r-1)$ 个零插值。

6. 序列的圆周移位(循环移位)

1) 时移定理

若 $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$, 则

$$\text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-km} X(k)$$

上述特性表明,序列在时域上圆周移位,频域上每根谱线产生附加相移。实际上就是离散傅里叶级数时移定理再取主值序列。

2) 频移定理

若 $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$, 则

$$\text{DFT}[W_N^{nl} x(n)] = X((k+l))_N R_N(k)$$

上述特性表明,若序列在时域上乘以复指数 W_N^{nl} ,则在频域上 $X(k)$ 将圆周移位 l 位,这可以看作调制信号的频谱搬移,因此也称为调制定理。由此还可以得出以下两个结论

$$\text{DFT}\left[x(n) \sin\left(\frac{2\pi}{N}nl\right)\right] = \frac{1}{2j}[X((k-l))_N - X((k+l))_N]R_N(n)$$

$$\text{DFT}\left[x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}nl\right)\right] = \frac{1}{2}[X((k-l))_N + X((k+l))_N]R_N(n)$$

上述特性表明,频域序列在频域内移位,时域序列在时域内进行了调制。

注意: 这里讲的 DFT 移位性质,特别强调的是“圆周移位”,这是因为 DFT 本身隐含着周期性,因此对于移位过程也隐含着“周期序列的移位”再取主值序列,因而是圆周移位。

7. 圆周卷积定理

1) 时域圆周卷积定理

$$\text{DFT}[x_1(n) \textcircled{\text{N}} x_2(n)] = X_1(k) X_2(k)$$

证明 因为 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 隐含着周期性,存在周期序列 $\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)$,则根据周期卷积定理有

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3(n) &= \text{IDFS}[\tilde{X}_3(k)] = \tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N x_2((n-m))_N \end{aligned}$$

取其主值序列

$$x_3(n) = \tilde{x}_3(n) R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) = x_1(n) \textcircled{\text{N}} x_2(n)$$

所以

$$\text{DFT}[x_1(n) \textcircled{\text{N}} x_2(n)] = X_1(k) X_2(k)$$

时域圆周卷积定理说明,两个序列的圆周卷积的离散傅里叶变换等于两序列离散傅里叶变换的乘积。

2) 频域圆周卷积定理

若序列 $x_3(n) = x_1(n) x_2(n)$, 则

$$X_3(k) = \text{DFT}[x_3(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \circledast X_2(k)$$

该性质的证明方法与时域卷积定理证明类似,此处不再赘述。

8. 离散相关定理

圆周相关定理

若 $x_3(n)$ 为 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的圆周相关, $x_3(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)x_2((n+l))_N R_N(n)$, 则 $x_3(n)$ 的离散傅里叶变换为 $X_1^*(k)X_2(k)$, 即

$$\text{DFT}\left[\sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)x_2((n+l))_N R_N(n)\right] = X_1^*(k)X_2(k)$$

证明 由于 $X_1(k)X_2(k)$ 隐含周期性, 可令 $\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1^*(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$ 则

$$\tilde{x}_3(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1^*(k) \tilde{X}_2(k) W_N^{-kn}$$

将 $\tilde{X}_1^*(k) = \left[\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_1(l) W_N^{kl}\right]^*$ 代入上式得

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_1^*(l) \tilde{X}_2(k) W_N^{-(n+l)k} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_1^*(l) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2(k) W_N^{-(n+l)k} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_1^*(l) \tilde{x}_2(l+n) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) x_2((l+n))_N \end{aligned}$$

因而

$$\tilde{x}_3(n) R_N(n) = \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) x_2((l+n))_N\right] R_N(n)$$

当 $x_1(n)$ 为实序列时

$$\tilde{x}_3(n) R_N(n) = \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_1(l) x_2((l+n))_N\right] R_N(n)$$

9. 帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

证明 圆周相关定理中, 令 $x_2(l) = x_1(l) = x(l)$, 则

$$\sum_{l=0}^{N-1} x^*(l) x((l+n))_N R_N(l) \Big|_{n=0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) X(k) W_N^{-kn} \Big|_{n=0}$$

即

$$\sum_{l=0}^{N-1} |x(l)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

令 $l=n$, 可得

$$\sum_{l=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

当 $x(n)$ 为实序列时, 可以写为

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

上式左侧代表离散信号在时域中的能量, 右端代表在频域中的能量, 表明变换过程中能量是守恒的。

10. 离散傅里叶变换的奇偶性和对称性

1) 离散傅里叶变换的奇偶性

(1) 若有限长序列 $x(n)$ 满足奇对称特性, 即 $x(n) = -x(-n) = -x(N-n)$, 则其离散傅里叶变换也具有奇对称特性, 即

$$\text{DFT}[x(n)] = X(k) = -X(-k) = -X(N-k)$$

式中, N 为序列长度。

证明 若有限长序列 $x(n)$ 奇对称, 则其离散傅里叶变换 $X(k)$ 可写为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} [-x(-n)] W_N^{(-k)(-n)} = -X(-k) \\ X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} [-x(N-n)] W_N^{(N-k)(N-n)} = -X(N-k) \end{aligned}$$

因而, $X(k)$ 具有奇对称特性。

(2) 若有限长序列 $x(n)$ 满足偶对称特性, 即 $x(n) = x(-n) = x(N-n)$, 则其离散傅里叶变换也具有偶对称特性, 即

$$\text{DFT}[x(n)] = X(k) = X(-k) = X(N-k)$$

证明 若有限长序列 $x(n)$ 偶对称, 则其离散傅里叶变换 $X(k)$ 可写为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} [x(-n)] W_N^{(-k)(-n)} = X(-k) \\ X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} [x(N-n)] W_N^{(N-k)(N-n)} = X(N-k) \end{aligned}$$

因而, $X(k)$ 具有偶对称特性。

2) 共轭复序列的离散傅里叶变换

若 $x(n)$ 为复序列, 其共轭序列为 $x^*(n)$, 则

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k) \quad (3-34)$$

证明

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) W_N^{-kn}]^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) W_N^{(N-k)n}]^* \\ &= X^*(N-k) \end{aligned}$$

注意: $k=0$ 时, $X^*(N-k) = X^*(N)$, 而 $X(k)$ 在主值区间 $0 \leq k \leq N-1$ 内取值, 所以 $X(N)$ 已超出了主值区间, 因而式(3-34)的严格定义应该是

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*((N-k))_N$$

式中, $X((k))_N$ 表示括号内数值按模 N 取余。

3) 复序列的离散傅里叶变换

若有限长序列 $x(n)$ 是复序列, 即 $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$, 则

$$\text{DFT}[x_r(n)] = \frac{1}{2} \text{DFT}[x(n) + x^*(n)] = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)] = X_{\text{ep}}(k)$$

$$\text{DFT}[jx_i(n)] = \frac{1}{2} \text{DFT}[x(n) - x^*(n)] = \frac{1}{2} [X(k) - X^*(N-k)] = X_{\text{op}}(k)$$

式中, $X_{\text{ep}}(k)$ 称为共轭对称序列, 满足 $X_{\text{ep}}(k) = X_{\text{ep}}^*(N-k)$; $X_{\text{op}}(k)$ 称为共轭反对称序列, 满足 $X_{\text{op}}(k) = -X_{\text{op}}^*(N-k)$ 。

当 $X_{\text{ep}}(k)$ 、 $X_{\text{op}}(k)$ 为实序列时, $X_{\text{ep}}(k)$ 即为偶序列, $X_{\text{op}}(k)$ 即为奇序列。

此性质可由离散序列的共轭复序列的离散傅里叶变换结论证明, 这里不再赘述。

3.7.3 离散傅里叶变换在实际应用中需注意的问题——

混叠、泄漏与栅栏效应

通过前面几节学习可知, 离散傅里叶变换可用于时域和频域连续信号的离散化分析和数字化处理。这种离散化处理可以理解为是对非周期连续时间信号在时域和频域内的抽样。同时, 离散傅里叶变换对又是通过对离散傅里叶级数变换对加窗截取主值序列而得的。因此取样及加窗截断过程都会使原信号的频谱发生变化, 如出现频谱混叠、泄漏和栅栏效应等问题。

1. 混叠问题

信号在时域或频域被抽样都会在另一个域内产生周期延拓。通常情况下, 被抽样信号不能严格满足抽样定理, 就会发生混叠现象。这是在实际应用 DFT 时遇到的一个问题。下面着重讨论应用 DFT 时, 为避免时域或频域混叠所必需的一些重要参数关系。

对于时域取样, 设连续时间信号在取样前经前置滤波后, 截止频率为 f_h , 为避免频谱混叠, 要求抽样频率 f_s 满足

$$f_s \geq 2f_h \quad (3-35)$$

抽样周期 T_s 必须满足

$$T_s = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_h} \quad (3-36)$$

对于频域抽样, 一个频谱周期 f_s 内抽样点数为 N , 则频率抽样间隔为

$$F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT_s} \geq \frac{2f_h}{N} \quad (3-37)$$

式中, F 称为信号频率分辨率, F 值越小, 频率分辨率越高, 反之则越低。

频域抽样后, 对应的时域序列将做周期延拓, 周期为 N , 以时间单位表示为 NT_s , 即为周期序列的有效周期称其为最小记录长度, 用 t_p 表示, 即

$$t_p = NT_s = \frac{1}{F} \quad (3-38)$$

可见, t_p 与 F 呈反比关系。

由式(3-37)和式(3-38)可以看出, F 、 N 、 f_h (T_s) 之间相互影响, 由式(3-37)可知, 如果频域抽样点数 N 不变, 若 f_h 增加, 为满足抽样定理, f_s 必须增加, 导致 F 增大, 降低了频率分辨率, 且此时 t_p 减小。相反, 在抽样点数 N 一定的情况下, 要提高分辨率就必须增加 t_p ,

必然导致 T_s 增加,因而需要减小信号的最高频率 f_h 。

同理,在信号的最高频率 f_h 与频率分辨率 F 两个参数中,保持其中一个不变而增加另一个的唯一办法,就是增加在一记录长度内的点数 N 。如果 f_h 与 F 都已给定,则 N 必须满足

$$N = \frac{f_s}{F} \geq \frac{2f_h}{F}$$

这是为实现基本的 DFT 算法所必须满足的最低条件。

例 3-16 一个估算实数信号频谱的处理器,抽样点数必须是 2 的整数次方,假设对数据未作任何的修正,规定的指标是:信号频率分辨率 $F \leq 0.5\text{Hz}$; 信号的最高频率 $f_h \leq 250\text{Hz}$ 。求下列参数:①最小记录长度;②抽样点间的最大时间;③在最小记录长度中的最少点数,要求点数是 2 的整数幂。

① 根据要求的分辨率确定最小记录长度。

$$t_p = \frac{1}{F} = \frac{1}{0.5} = 2\text{s}$$

记录长度必须满足

$$t_p \geq 2\text{s}$$

② 从信号的最高频率确定最大的抽样时间间隔。

$$T_s \leq \frac{1}{2f_h} = \frac{1}{2 \times 250\text{Hz}} = 2 \times 10^{-3}\text{s}$$

③ 记录中的最少点数为

$$N \geq \frac{2f_h}{F} = \frac{2 \times 250}{0.5} = 1000(\text{点})$$

因此该处理器的一个适当的点数选为 $N = 2^{10} = 1024$ 。

2. 栅栏效应

因为用 DFT 计算频谱得到的频域序列 $X(k)$ 并不是序列 $x(n)$ 真实频谱的全部,只是对 $x(n)$ 频谱 $X(e^{j\omega})$ 在一个周期内的离散抽样值,就好像将 $X(e^{j\omega})$ 通过一个“栅栏”来观看一样,只能在栅栏之间的缝隙看到 $X(e^{j\omega})$,这样被栅栏挡住的部分就看不到了。也就是说, $X(k)$ 中有可能会漏掉 $X(e^{j\omega})$ 中的重要信息,这种现象称为“栅栏效应”。

减少栅栏效应的一个方法可利用延长序列的 DFT 性质,即在时间序列末端增加一些零值点来增加一个周期内频谱的抽样点数,从而在保持原有频谱连续性不变的情况下,变更了频谱抽样点的位置。这样,原来看不到的频谱分量就能移动到可见的位置上。

3. 频谱泄漏

由于 DFT 是对时域和频域内的周期序列加窗截断,取主值序列得到的,因此时域内加窗截断后,频谱内是加窗信号与原信号频谱的卷积,导致加窗后信号频域相对原信号频谱产生扩展,称为频谱泄漏。假定 $x(n) = \cos \omega_0 n$, 用长度为 L 的矩形窗对其进行截断,即

$$\bar{x}(n) = x(n)w(n)$$

式中

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则有限长序列 $\bar{x}(n)$ 的傅里叶变换为

$$\bar{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)]$$

式中, $W(\omega)$ 为窗函数的傅里叶变换。对于矩形窗来讲, 可表示为

$$W(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{L}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

利用 DFT 计算 $\bar{X}(\omega)$, 通过对时域序列末端补零使其长度为 N , 可以计算截断序列 $\bar{x}(n)$ 的 N 点 DFT, 图 3-55 给出了 $\omega_0 = 0.2\pi$ 、 $L = 25$ 、 $N = 2048$ 时的幅度谱。可以注意到, 加窗截断后的信号的频谱并没有定位到单个频率, 而是扩展到整个频率范围, 原无限长信号集中在单个频率上的能量由于加窗扩展到整个频率范围, 即能量已经泄漏到整个频率范围。这种加窗信号的特征即为频谱泄漏。

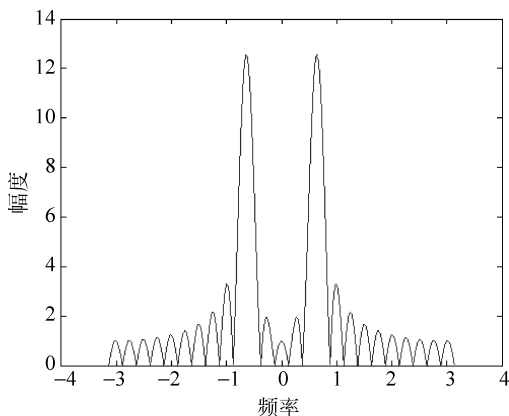


图 3-55 信号截断时产生的频谱泄漏现象

应该指出, 由于泄漏将导致频谱的扩展, 使信号频谱的最高频率增加, 造成混叠, 所以泄漏和混叠不能完全分开。

用 DFT 分析信号频谱的前提是信号必须是有限长序列, 对于无限长序列首先要加窗处理, 因此必然会产生频谱泄漏。另外, 实际中在处理长序列信号时, 通常也要用加窗截断的方法分段处理, 这时同样会产生频谱泄漏。为减少泄漏, 需要根据实际情况选择合适的窗函数, 比如相同宽度的窗函数下选副瓣小的窗等。由前面 3.5.3 节可知, 不同主瓣宽度与副瓣幅度大小之间是矛盾的, 实际选择窗时应折中考虑。

3.8 离散傅里叶变换的快速算法——快速傅里叶变换

3.8.1 引言

DFT 是信号和系统频域分析的重要工具, 但是 DFT 的计算量与序列长度 N 有关, N 越大, 计算量越大, 例如直接计算一个 N 点序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$, 根据计算公式

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = x(0)W_N^0 + x(1)W_N^k + \cdots + x(N-1)W_N^{(N-1)k} \quad (k=0,1,\cdots,N-1)$$

可知,计算一个 $X(k)$ 值需要 N 次复数相乘和 $N-1$ 次复数相加。对于 N 个 $X(k)$ 值,应重复 N 次上述运算。因此,要完成全部 DFT 运算共需要 N^2 次复数乘法 and $N(N-1)$ 次复数加法,随着 N 值的增大,运算量将迅速增长,且与 N^2 成正比。例如 $N=8$ 需要 64 次复数乘法,当 $N=2^{10}=1024$ 时,就需要 $N^2=1\,048\,576$,即一百多万次复数相乘运算。按照这种规律,如果在 N 较大的情况下,将每个复数运算转化为实数运算,运算量会更大,很难满足对信号的实时处理。所以早期的 DFT 并没有得到真正的运用。直到 1963 年,美国科学家 J. W. Cooley(库利)和 J. W. Tukey(图基)提出了计算 DFT 的快速算法,后来 G. Sunde(桑德)和 J. W. Tukey 的快速算法也相继出现,经过学者对算法的改进、发展和完善,开发了一系列高速有效的运算方法,DFT 的计算得以大大简化,运算时间一般可缩短一两个数量级,进而使 DFT 在实际中得到了广泛的应用。与此同时,20 世纪 60 年代中期,大规模集成电路的发展也促成了这个算法的实现。目前,已有多种 FFT 信号处理器,成为数字信号处理强有力的工具。

快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)算法形式很多,但最基本的方法有两大类,即按时间抽取(Decimation-In-Time, DIT)法和按频率抽取(Decimation-In-Frequency, DIF)法,其基本思想是将长序列截断形成短序列,通过计算短序列的 DFT 来得到原长序列的 DFT,从而达到减小运算量的目的。

3.8.2 按时间抽取的快速傅里叶变换算法 DIT-FFT(库利-图基法)

1. 算法原理

设序列 $x(n)$ ($n=0,1,\cdots,N-1$), 长度 $N=2^r$, 其中 r 为整数。如果 N 不满足 2 的整数幂要求,可以在序列末尾补上最少的零值点来达到。

由定义得 $x(n)$ 的 DFT 为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad (k=0,1,\cdots,N-1)$$

n 按奇偶取值将 $x(n)$ 分为两个子序列

$$\begin{cases} x_1(r) = x(2r) & \left(r=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1\right) \\ x_2(r) = x(2r+1) & \left(r=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1\right) \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{n \text{ 为奇数}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n \text{ 为偶数}} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) (W_N^2)^{rk}$$

由于

$$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 2} = e^{-j2\pi/(\frac{N}{2})} = W_{\frac{N}{2}}$$

则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \end{aligned} \quad (3-39)$$

其中

$$\begin{cases} X_1(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} & \left(k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1\right) \\ X_2(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{\frac{N}{2}}^{rk} & \left(k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1\right) \end{cases}$$

式中, $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 分别为 $x_1(r)$ 和 $x_2(r)$ 的 $\frac{N}{2}$ 点 DFT, 因此式 (3-39) 实际上是计算了 $X(k)$ 的前 $\frac{N}{2}$ 个值, 即 $X(0), X(1), \dots, X\left(\frac{N}{2}-1\right)$, 而 $X(k)$ 共有 N 个点, 其后 $\frac{N}{2}$ 个点的值, 可将 $k = k + \frac{N}{2}$ 代入式 (3-39) 计算来得到

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) + W_N^{(k+\frac{N}{2})} X_2\left(k + \frac{N}{2}\right)$$

其中

$$\begin{aligned} X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{\frac{N}{2}}^{r(k+\frac{N}{2})} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} \\ &= X_1(k) \end{aligned}$$

同理

$$X_2\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_2(k)$$

这样可得 $X(k)$ 的后 $\frac{N}{2}$ 个点的值为

$$\begin{aligned} X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= X_1(k) + W_N^{(k+\frac{N}{2})} X_2(k) \\ &= X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad \left(k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1\right) \end{aligned} \quad (3-40)$$

式 (3-39) 和式 (3-40) 的运算可用图 3-56 的信号流图表示。图中左面两路为输入, 中间以一

个小圆表示加或减运算,右上路为相加输出,右下路为相减输出。如果在某一支路上信号需要进行相乘运算,则在该支路上标以箭头,将相乘的系数标在箭头旁边。当支路上没有标出箭头及系数时,则该支路的系数为1。由于此结构图形状像蝴蝶,所以称为蝶形图。

由图 3-56 可以看出,一个蝶形运算需要一次复数乘法及两次复数加(减)法。据此,一个 N 点的 DFT 分解为两个 $N/2$ 点的 DFT,则各需 $(N/2)^2$ 次复乘和 $[N/2(N/2-1)]$ 次复加,两个 $N/2$ 点 DFT 则需要 $2 \times (N/2)^2 = N^2/2$ 次复乘和 $[2 \times (N/2)](N/2-1) =$

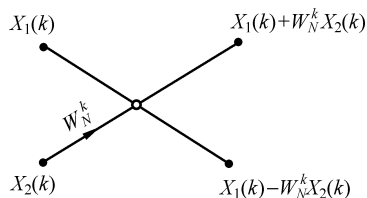


图 3-56 蝶形运算流图符号

$N(N/2-1)$ 次复加。将两个 $N/2$ 点的 DFT 合成为 N 点的 DFT 时,需要再进行 $N/2$ 个蝶形运算,即还需要 $N/2$ 次复乘和 $N/2 \times 2 = N$ 次复加运算。因此通过这样分解后,计算全部 $X(k)$ 共需要 $(N^2/2 + N/2)$ 次复乘和 $N(N/2-1) + N = N^2/2$ 次复加。前已指出,直接计算 N 点 DFT 需要 N^2 次复乘和 $N(N-1)$ 次复加,由此可见,仅仅做了一次分解,即可使计算量节省了近一半。

看一个具体例子,设序列 $x(n)$ 的点数 $N=8$,按偶数点和奇数点进行一次分解后成为

$$\begin{array}{ll} x_1(r) = x(2r) & x_2(r) = x(2r+1) \\ \downarrow & \downarrow \\ x_1(0) = x(0) & x_2(0) = x(1) \\ x_1(1) = x(2) & x_2(1) = x(3) \\ x_1(2) = x(4) & x_2(2) = x(5) \\ x_1(3) = x(6) & x_2(3) = x(7) \end{array}$$

分别计算 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的 $N/2=4$ 点的 DFT,得 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$,即

$$\begin{cases} X_1(k) = \sum_{r=0}^3 x_1(r) W_4^{rk} = \sum_{r=0}^3 x(2r) W_4^{rk} \\ X_2(k) = \sum_{r=0}^3 x_2(r) W_4^{rk} = \sum_{r=0}^3 x(2r+1) W_4^{rk} \end{cases} \quad (k=0,1,2,3)$$

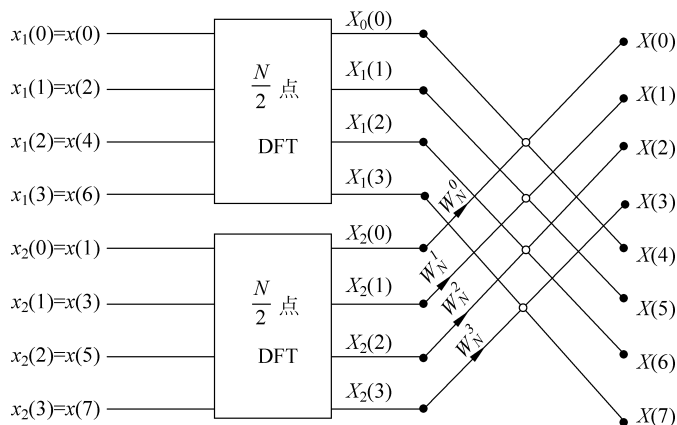
则

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X(k+4) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{cases} \quad (k=0,1,2,3)$$

此时对应的蝶形图如图 3-57 所示。

由于 $N=2^r$,当 $r>1$ 时, $N/2$ 仍然是偶数,所以可以进一步把每个 $N/2$ 点子序列再按奇偶分解为两个 $N/4$ 点子序列,分别计算两个 $N/4$ 点子序列的 DFT,再合成两个 $N/2$ 点 DFT,最后合成一个 N 点 DFT。继续上面的例子,不直接计算 $N/2$ 点 DFT,而是进一步把每个 $N/2$ 点子序列按其奇偶部分分解为两个 $N/4$ 点子序列,此时可将 $x_1(r)$ 按 r 的奇偶取值分解为

$$\begin{array}{ll} x_1(r) \text{ 的偶数序列} & x_1(r) \text{ 的奇数序列} \\ x_3(l) = x_1(2l) \quad (l=0,1) & x_4(l) = x_1(2l+1) \quad (l=0,1) \end{array}$$

图 3-57 按时间抽取将一个 N 点 DFT 分解为两个 $N/2$ 点 DFT ($N=8$)

$$\begin{aligned} x_3(0) &= x_1(0) = x(0) & x_4(0) &= x_1(1) = x(2) \\ x_3(1) &= x_1(2) = x(4) & x_4(1) &= x_1(3) = x(6) \end{aligned}$$

与第一次分解相同,将序列 $x_1(r)$ 按奇偶进行第二次分解后,进行两个 2 点序列的 DFT 可得

$$\begin{cases} X_3(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2l) W_{N/4}^{2lk} \\ X_4(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_4(l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2l+1) W_{N/4}^{(2l+1)k} \end{cases} \quad (k=0,1) \quad (3-41)$$

可由上述两个 2 点的 DFT 合成一个 4 点 DFT $X_1(k)$, 即

$$\begin{cases} X_1(k) = X_3(k) + W_{N/2}^k X_4(k) \\ X_1(k+2) = X_3(k) - W_{N/2}^k X_4(k) \end{cases} \quad (k=0,1)$$

将 $x_2(r)$ 进行同样的分解, 可得

$$\begin{aligned} & x_2(r) \text{ 的偶数序列} & & x_2(r) \text{ 的奇数序列} \\ & x_5(l) = x_2(2l) \quad (l=0,1) & & x_6(l) = x_2(2l+1) \quad (l=0,1) \\ & x_5(0) = x_2(0) = x(1) & & x_6(0) = x_2(1) = x(3) \\ & x_5(1) = x_2(2) = x(5) & & x_6(1) = x_2(3) = x(7) \end{aligned}$$

进行离散傅里叶变换, 得到

$$\begin{cases} X_5(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_5(2l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_5(l) W_{N/4}^{lk} \\ X_6(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_6(2l+1) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_6(l) W_{N/4}^{lk} \end{cases} \quad (k=0,1) \quad (3-42)$$

由 $X_5(k)$ 、 $X_6(k)$ 进行蝶形运算, 即

$$\begin{cases} X_2(k) = X_5(k) + W_{N/2}^k X_6(k) \\ X_2(2+k) = X_5(k) - W_{N/2}^k X_6(k) \end{cases}$$

此时对应的蝶形图如图 3-58 所示。

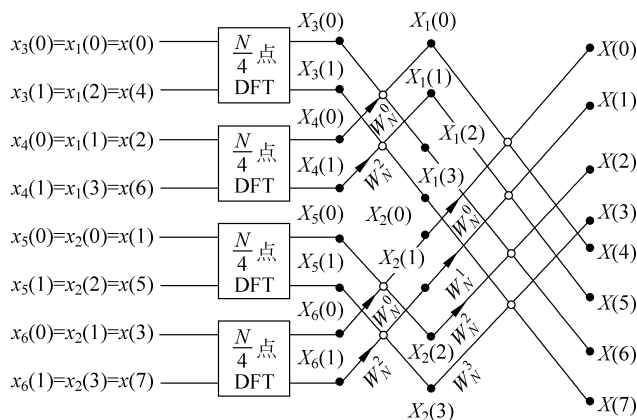


图 3-58 按时间抽取将一个 N 点 DFT 分解为 4 个 $\frac{N}{4}$ 点 DFT ($N=8$)

根据前面的分析可知,利用四个 2 点 DFT 及两次组合来计算 8 点 DFT,比仅用一次分解组合方式时的计算量又减少了约一半。

对于 $N=8$ 点的 DFT,经过两次分解后,最后剩下的是四个 2 点的 DFT,即 $X_3(k)$ 、 $X_4(k)$ 、 $X_5(k)$ 、 $X_6(k)$,利用式(3-41)和式(3-42)可分别将它们计算出来。例如利用式(3-41)可得

$$\begin{cases} X_3(0) = x(0) + W_N^0 x(4) = x(0) + W_N^0 x(4) \\ X_3(1) = x(0) + W_N^1 x(4) = x(0) - W_N^0 x(4) \end{cases}$$

$X_4(k)$ 、 $X_5(k)$ 、 $X_6(k)$ 可类似求出。对每个 2 点的 DFT,同样可进一步分解成两个 1 点的序列,分别计算每个 1 点序列的 DFT,再合成 2 点 DFT,而一个 1 点 DFT 即是序列本身的值。这样,一个按时间抽取运算的完整的 8 点 DFT 流图如图 3-59 所示。

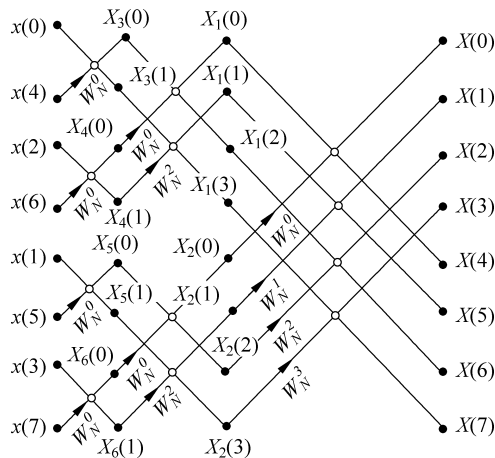


图 3-59 $N=8$ 的按时间抽取法 FFT 运算流图

由上面分析可知,由于每一步分解都是每级输入序列按时间序号是属于偶数还是奇数进行分解的,所以称为按时间抽取的 FFT 算法。由于此方法要求序列长度是 2 的整数次幂,即 $N=2^r$,故称为基-2 FFT 算法。

2. 按时间抽取的 FFT 算法与直接计算 DFT 运算量的比较

由按时间抽取的 FFT 运算流程图可见,一个 $N=2^r$ 点序列的 FFT 共需经过 $r=\log_2 N$ 级分解运算,当 $N=8$ 时,需逐级分解形成三级运算,每一级都由 $N/2$ 个蝶形运算完成,每一个蝶形需要 1 次复乘和 2 次复加运算,这样完成一个 N 点的 FFT 共需要

复乘次数为

$$m_F = \frac{N}{2} r = \frac{N}{2} \log_2 N$$

复加次数为

$$a_F = Nr = N \log_2 N$$

由此可见,按时间抽取的 FFT 算法所需的复乘数和复加数与 $N \log_2 N$ 成正比,而直接计算 DFT 所需的复乘数和复加数则与 N^2 成正比(复乘 $m_F = N^2$,复加数 $a_F = N(N-1) \approx N^2$)。表 3-4 列出了不同 N 值时的 FFT 算法与直接计算 DFT 的运算量的比较。

表 3-4 DIT-FFT 算法与直接算法的比较

N	N^2	$N/2 \log_2 N$ (复乘次数)	$N^2 / ((N/2) \log_2 N)$
2	4	1	4.0
4	16	4	4.0
8	64	12	5.4
16	256	32	8.0
32	1024	80	12.8
64	4096	192	21.4
128	16 384	448	36.6
256	65 536	1024	64
512	262 144	2304	113.8
1024	1 048 576	5120	204.8
2048	4 194 304	11 264	372.4

可以看出,当 N 较大时,按时间抽取法将比直接法快一两个数量级之多。例如 $N=2048$ 时,如果直接运算需近三小时(计算机型号为联想启天 M690E,CPU 型号为 Inter 奔腾双核 E5300,CPU 频率 2.60GHz,内存 2GB,所使用的仿真软件为 MATLAB R2010a),通过 FFT 则只要 0.85s 就完成了。这样的速度增益使得利用 FFT 解决信号处理问题成为可能。

图 3-60 示出了 FFT 算法和直接算法所需运算量与点数 N 的关系曲线,使人们更加直观地看到 FFT 算法的优越性,特别是点数 N 越大时,优点更加突出。

3. 按时间抽取的 FFT 算法特点

由前面讨论的 DIT-FFT 算法原理及 $N=8$ 点的例子,可以看出算法具有一定的规律和特点,现总结如下。

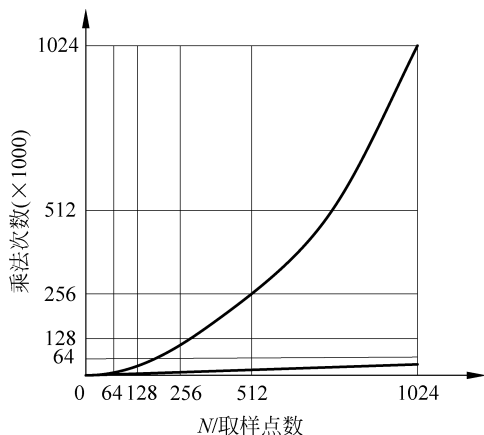


图 3-60 直接算法与 DIT-FFT 算法所需乘法次数的比较曲线

(1) 一个 $N=2^r$ 点序列的 DIT-FFT, 需经过 $r=\log_2 N$ 级分解, 得到 $N/2$ 个 2 点 FFT 运算。

(2) 由 $N/2$ 个 2 点 DIT-FFT 运算, 逐级合成 4 点、6 点、8 点……至 N 点。

(3) 每级都有 $N/2$ 个蝶形, 最后一级(第 r 级) W_N 因子的个数最多, 为 $N/2$ 个, 且 W_N 因子依次为 $W_N^0, W_N^1, W_N^2, \dots, W_N^{\frac{N}{2}-1}$, 以后每向前推进一级, W_N 因子的个数减少一半, 且 W_N 因子取后一级的偶次幂因子。

(4) DIT-FFT 算法属于原位运算。

由图 3-59 可知, 在 FFT 的每级(列)运算中, 每一个蝶形的输出与输入之间满足如下关系

$$X_m(i) = X_{m-1}(i) + X_{m-1}(j)W_N^k$$

$$X_m(j) = X_{m-1}(i) - X_{m-1}(j)W_N^k$$

式中, m 表示第 m 列(级)迭代; i, j 为数据所在的行数。

每一列(级)的输出又作为下一列(级)的输入参与运算, 而与之之前的输入无关。因此, 如果所有的 W_N^k 的值已预先保存, 则除了运算的工作单元外, 只要用 N 个寄存器存储初始的 $x(n)$ 值即可。因为每个蝶形运算是由两个寄存器中取出数据, 而计算结果仍存放到原来寄存器中, 该寄存单元中原存储的内容, 一经取用即可删除, 不影响以后的计算, 相当于每列运算均在原位进行, 这种原位运算的结构可以节省存储单元, 降低设备成本。

(5) 在 DIT-FFT 算法的信号流图中, 输入是“乱序”的, 输出是“顺序”的。

由图 3-59 可知, 输入端 $x(n)$ 的排列不是按 n 的自然顺序, 而是以 $x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7)$ (假设 $N=8$) 的“乱序”排列作为输入的, 而在输出端是以自然顺序输出。造成这种现象的原因是在分解时, 对 $x(n)$ 按 n 的奇偶取值而造成的, 这种排列方式称为“码位倒读”。所谓倒读是指二进制表示的数字首尾位置颠倒, 重新按十进制读取。表 3-5 列出了 $N=8$ 两种排列的变换规律。

表 3-5 自然顺序与码位倒读顺序($N=8=2^3$)

$x(n)$	序号 n 的自然排序十进制表示	n 的二进制表示	码位倒置	码位倒置后的十进制表示
$x(0)$	0	000	000	0
$x(1)$	1	001	100	4
$x(2)$	2	010	010	2
$x(3)$	3	011	110	6
$x(4)$	4	100	001	1
$x(5)$	5	101	101	5
$x(6)$	6	110	011	3
$x(7)$	7	111	111	7

3.8.3 按频率抽取的快速傅里叶变换算法(桑德-图基法)

按照将长序列分解为短序列,通过计算短序列的傅里叶变换来合成长序列傅里叶变换的思想,还可以将时间序列 $x(n)$ 直接按照 n 的自然取值先后分为两组,形成两个 $\frac{N}{2}$ 点短序列,通过某种组合和计算并按 k 的奇偶取值组合成 N 点 DFT。该方法是桑德和图基 1966 年提出的,也称为桑德-图基法。

1. 算法原理

设 $x(n)$ 的列长 $N=2^r$, r 为整数。先将 $x(n)$ 按 n 的自然取值顺序分成前后两组,即

$$\begin{cases} x(n) \\ x\left(n + \frac{N}{2}\right) \end{cases} \quad \left(0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, n \text{ 为整数}\right)$$

则由定义可得

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{\left(n + \frac{N}{2}\right)k} \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{\frac{N}{2}k} \right] W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn} \end{aligned}$$

考虑以下两种情况。

(1) 当 k 为偶数时,令 $k=2r$ ($r=0, 1, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right)$), 则

$$X(k) = X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2rn}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{rn} \quad (3-43)$$

(2) 当 k 为奇数时, 令 $k=2r+1$ ($r=0, 1, \dots, (\frac{N}{2}-1)$), 则

$$\begin{aligned} X(k) = X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{(2r+1)n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \right\} W_{N/2}^{rn} \end{aligned} \quad (3-44)$$

如果令

$$\begin{cases} x_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ x_2(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{cases} \quad \left(n=0, 1, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right) \right)$$

则

$$\begin{cases} X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{N/2}^{nr} \\ X(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{N/2}^{nr} \end{cases} \quad \left(r=0, 1, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right) \right) \quad (3-45)$$

由式(3-45)可见, $X(2r)$ 和 $X(2r+1)$ 分别有两个 $N/2$ 点序列进行 DFT 而得, 而这两个 $N/2$ 点序列分别是 $x(n)$ 的前一半序列与后一半序列重新组合而成的。式(3-45)的运算关系可以用如图 3-61 所示的蝶形运算来表示。这样就将计算一个 N 点的 DFT 首先分解为计算两个新序列的 $N/2$ 点的 DFT, 这两个 $N/2$ 点的 DFT 分别对应 $X(k)$ 的偶数点和奇数点序列。当 $N=8$ 时, 上述的分解过程如图 3-62 所示。

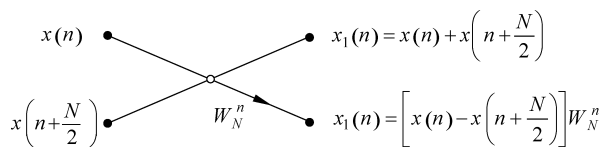


图 3-61 频率域抽取法的蝶形运算

与时间抽取法的推演过程一样, 由于 $N=2^r$, 当 $r>1$ 时, $N/2$ 仍是一个偶数, 因此可以继续将每个 $N/2$ 点的时间序列同样前后按自然顺序分开, 通过蝶形运算形成两个 $N/4$ 点的新序列, 分别计算 $N/4$ 点 DFT, 得到原 $N/2$ 点的 DFT。图 3-63 示出了这一步分解的过程。

这样的分解可一直进行下去, 直到分解 r 步以后得到求 $N/2$ 个两点的 DFT 为止。而这 $N/2$ 个 2 点 DFT 计算结果(共 N 个值)就是 $x(n)$ 的 N 点 DFT 的结果 $X(k)$ 。图 3-64 给出了 $N=8$ 时完整的计算流图。由于整个计算过程是按频域取样点 k 的奇偶取值分开计算的, 故将此方法称为按频率抽取的 FFT 算法。

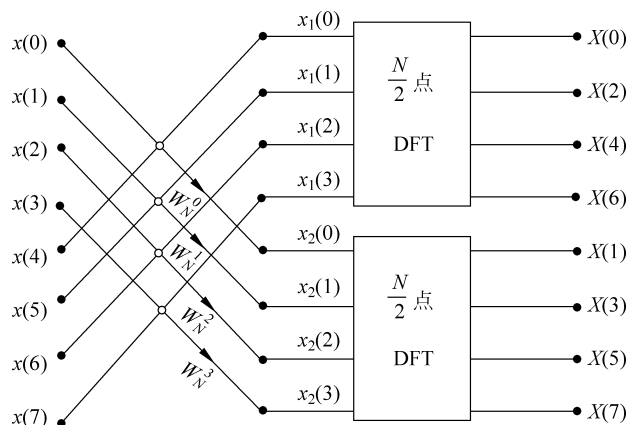


图 3-62 按频率抽取,将 N 点 DFT 分解为 2 个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT($N=8$)

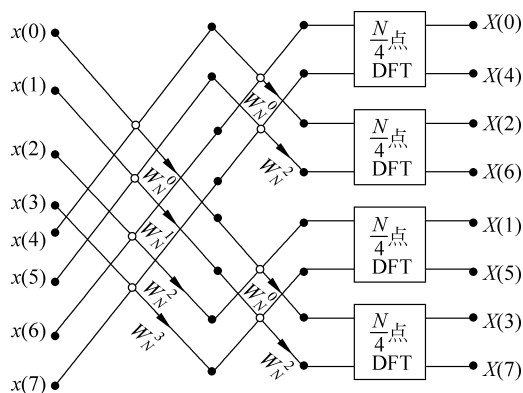


图 3-63 按频率抽取,将 N 点 DFT 分解为 4 个 $\frac{N}{4}$ 点 DFT($N=8$)

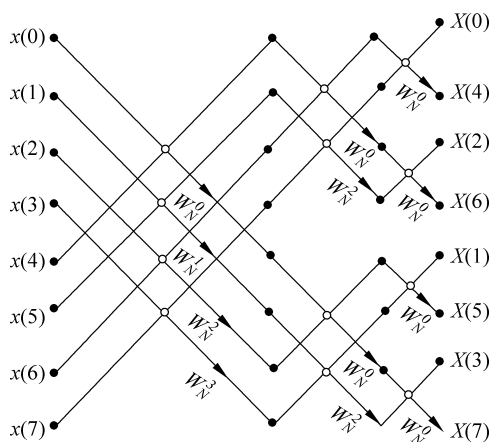


图 3-64 $N=8$ 的频率抽取法 FFT 流图

2. 按时间抽取算法和按频率抽取算法的比较

比较按时间抽取和按频率抽取信号流程图可知,两种算法既有相同点,又有不同点。先来看相同点。

(1) 两种算法计算量相同。频率抽取法也需分解为 r 级运算。每级需要 $\frac{N}{2}$ 个蝶形运算来完成,即需 $m_F = \frac{N}{2} \log_2 N$ 次复乘和 $a_F = N \log_2 N$ 次复加。

(2) 两种算法均为原位运算。在 DIF-FFT 的每级运算中,每一个蝶形的输出同样只与其对应的输入点有关,而每一个输出就是下一级的输入而与之之前的点无关,故属于原位运算。

再看不同点。

(1) DIF-FFT 的输入是自然顺序,输出是反序顺序,这与 DIT 的情况正好相反。所以运算完毕后,要经过“整序”变为自然顺序输出,整序的规律和时间抽取法相同。

(2) DIF 的蝶形运算与 DIT 的蝶形运算略有不同,其差别在于 DIF 中复数乘法出现于减法运算之后。

(3) W_N 因子的排序不同。DIF 的蝶形运算中,第一级 W_N 因子类型个数最多,为 $\frac{N}{2}$ 个,以后每向后推进一级, W_N 因子类型个数减半,这与 DIT-FFT 算法相反。

需要说明的是,比较两种算法的流程图可知,如果将 DIT-FFT 算法流图的方向倒转并将输入与输出对调,即可转换为按 DIF-FFT 算法流程图。同理,也可通过倒置将 DIF-FFT 流程图转为 DIT-FFT 流程图。也就是说,对于每一种按时间抽取的 FFT 都存在一种按频率抽取的算法,二者互为转置。

3. 离散傅里叶逆变换的快速算法

比较 IDFT

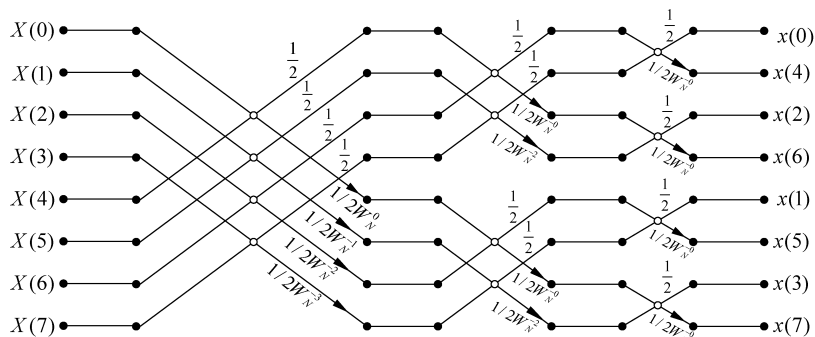
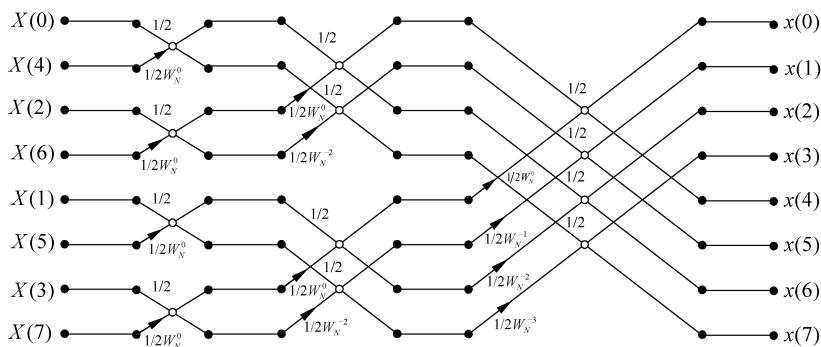
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

和 DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

可以发现,如果将 $X(k)$ 作为输入, $x(n)$ 作为输出,用 W_N^{-1} 代替 W_N ,并将计算结果乘以 $1/N$ (或将 $1/N$ 分解为 $(1/2)^r$ 并且在 r 级运算中每级都分别乘以一个 $1/2$ 因子)。这样,以上所讨论的按时间抽取或按频率抽取的 FFT 算法都可以直接用来运算 IDFT,称为快速傅里叶逆变换(Inverse Fast Fourier Transform, IFFT)。例如,按照上述原则,可以直接由按频率抽取的 FFT 流程图,得到如图 3-65 所示的 IFFT 流程图。此时,输入为 $X(k)$,是自然顺序输入,输出为 $x(n)$,是乱序输出,称其为按时间抽取的 IFFT 算法。同理,可以由 DIT-FFT 流程图得到如图 3-66 所示的 DIF-IFFT 流程图。

本节介绍了两种最基本也是最常用的 FFT 算法,实际上,还有许多基-2FFT 算法的各种变体,如基-4FFT、基-8FFT 等。这些算法的思想仍然是利用短序列的 DFT 计算长序列的 DFT。感兴趣的读者可以查看相关书籍。另外,需要说明的是,FFT 不是新的数学变换,它只是 DFT 的一种快速算法。

图 3-65 $N=8$ 的按时间抽取 IFFT 流图图 3-66 $N=8$ 的按频率抽取 IFFT 流图

3.8.4 快速傅里叶变换的应用实例

因为 FFT 是 DFT 的快速算法,所以凡是可以利用离散傅里叶变换来进行分析、综合、变换的问题,都可以利用 FFT 算法及运用数字计算技术来实现。本节给出几个 FFT 的应用实例。

1. 利用 FFT 求线性卷积——快速卷积

1) 用 FFT 求有限长序列的线性卷积

利用 FFT 求有限长序列线性卷积,其主要思想是希望借助于 DFT 的圆周卷积定理来求解。

由 2.2 节可知,若 $x_1(n)$ 的长度为 N , $x_2(n)$ 的长度为 M ,当满足条件 $L \geq N+M-1$ 时

$$x_1(n) * x_2(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = \text{IFFT}[X_1(k)X_2(k)] \quad (k=0,1,2,\dots,L-1)$$

知道了圆周卷积与线性卷积的关系,可以利用 DFT 的圆周卷积定理,通过 FFT 计算两个有限长序列的线性卷积,具体流程如图 3-67 所示。

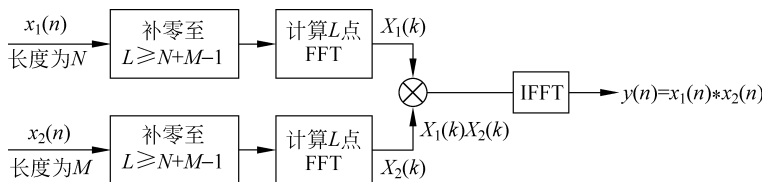


图 3-67 用 FFT 计算两个有限长序列的线性卷积流程图

当 M 、 N 较大时,这种计算线性卷积的方法明显比直接计算要快。例如,计算两个长度均为 2^{20} 的矩形脉冲序列的线性卷积,利用 MATLAB 直接计算用时达到 2h,而利用 FFT 计算线性卷积则只需要 2.2s 就可以了(计算机为联想启天 M690E,CPU 为 Inter 奔腾双核 E5300,CPU 频率为 2.60GHz,内存为 2GB,所使用的计算工具为 MATLAB R2010a)。

2) 同时计算两个实序列的卷积运算

FFT 算法是复数运算,无论是硬件实现还是软件实现,都是按复数运算设计的,所以当采用 FFT 算法分析实序列信号时,算法的虚部就被浪费掉。为此,应设法提高使用效率。

设 $g(n)$ 、 $s(n)$ 、 $h(n)$ 都是 N 点的实序列,它们的 N 点 DFT 分别为 $G(k)$ 、 $S(k)$ 、 $H(k)$,若需计算 $g(n) \otimes h(n)$ 和 $s(n) \otimes h(n)$,可以用一次 FFT 运算同时实现这两个圆周卷积。方法是先将 $g(n)$ 、 $s(n)$ 组合成一个复数序列 $p(n)$,即

$$p(n) = g(n) + js(n)$$

则

$$\text{DFT}[p(n)] = P(k) = G(k) + jS(k)$$

令

$$Y(k) = H(k)P(k)$$

然后用 IFFT 运算求出 $y(n)$,它是 $p(n)$ 、 $h(n)$ 的圆周卷积值,即

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IFFT}[Y(k)] = p(n) \otimes h(n) \\ &= [g(n) + js(n)] \otimes h(n) \\ &= g(n) \otimes h(n) + js(n) \otimes h(n) \end{aligned}$$

因此同时得到两组实序列的圆周卷积值,即

$$\begin{aligned} y_1(n) &= \text{Re}[y(n)] = g(n) \otimes h(n) \\ y_2(n) &= \text{Im}[y(n)] = s(n) \otimes h(n) \end{aligned}$$

若是计算实序列的线性卷积,可利用线性卷积与圆周卷积的关系,将原序列 $g(n)$ 、 $s(n)$ 、 $h(n)$ 末尾补零后再采用上述方法计算,具体流程如图 3-68 所示。

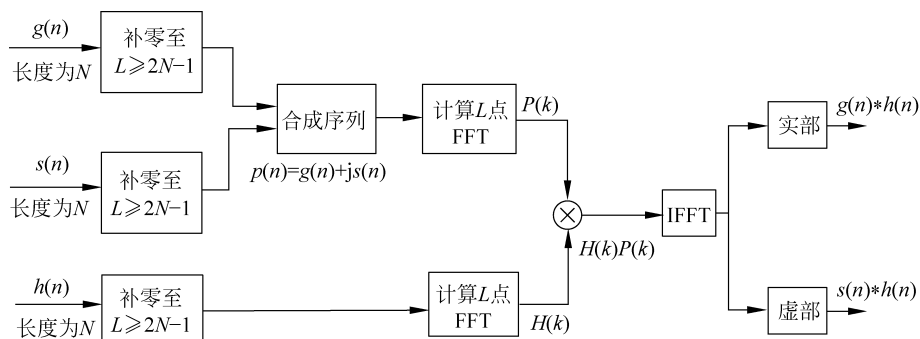


图 3-68 同时计算两组实序列的线性卷积流程图

2. 利用 FFT 求相关

类似于圆周卷积与线性卷积的关系,序列长度分别为 N_1 和 N_2 的两个有限长序列的线性相关,等于将这两个序列补零至 $N = N_1 + N_2 - 1$ 列长后的圆周相关。由圆周相关定理可知,两个有限长序列的线性相关可以借助于离散傅里叶变换求得。用 FFT 计算两个有

限长序列的线性相关,具体流程如图 3-69 所示。

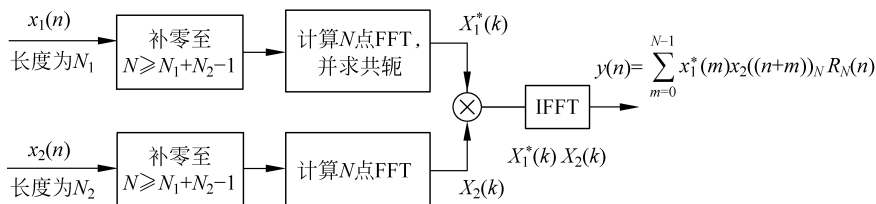


图 3-69 用 FFT 计算两个有限长序列的线性相关流程图

用 FFT 计算相关函数称为快速相关。它与快速卷积完全类似,所不同的是:一个应用圆周相关定理,利用圆周相关来等效线性相关;另一个是应用圆周卷积定理,利用圆周卷积来等效线性卷积。

3. FFT 在多普勒雷达信号处理中的应用——多普勒滤波器组

由前面学习可知,当满足采样定理的条件时,一个时间函数的取样序列经过 DFT 处理后,输出为该信号频谱的取样。可以将每条谱线看成为对应于一个窄带滤波器的输出,这就是 DFT 的滤波特性。下面进行较为详细的分析。

设时间序列 $x(n)$ 为具有单位振幅的 N 点复指数序列,其频率为 f_0 ,即

$$x(n) = e^{j2\pi f_0 nT} \quad (n=0,1,\dots,N-1)$$

式中, T 为采样间隔。对 $x(n)$ 做 N 点 DFT 运算,所对应的频域序列为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi f_0 nT} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{\sin N\pi\left(f_0 - \frac{k}{NT}\right)T}{\sin\pi\left(f_0 - \frac{k}{NT}\right)T} e^{-j\pi(N-1)\left(f_0 - \frac{k}{NT}\right)T} \quad (3-46)$$

由式(3-46)可知,若信号 $x(n)$ 频率不同,得到的 $X(k)$ 也不同。为描述 $X(k)$ 随信号频率的这种变化,用 f 代替 f_0 ,因而式(3-46)可进一步写为

$$X_k(f) = \frac{\sin N\pi\left(f - \frac{k}{NT}\right)T}{\sin\pi\left(f - \frac{k}{NT}\right)T} e^{-j\pi(N-1)\left(f - \frac{k}{NT}\right)T}$$

若信号 $x(n)$ 是频率为 f_0 的单频信号,则对应的 $X_k(f_0)$ 在 $f_0 = \frac{k}{NT}$ 时,即 $k = f_0 NT$ 时有输出,而其他 k 点处值为 0; 若信号 $x(n)$ 为包含多种频率具有一定频带宽度的信号,可以将该信号表示成若干单频信号的叠加,此时第 k 点频谱值 $X_k(f)$ 看成是将频率为 f_k 的分量 $e^{j2\pi f_k nT}$ 通过某个系统的输出,该系统只允许通过输入信号的第 k 个频谱抽样值,这个系统称为滤波器,其输出信号对应的频率点称为该滤波器的中心频率,即 $f_k = k/NT$ 。也就是说,对一个长度为 N 的有限长序列做 DFT 就相当于将该序列通过一组滤波器,每个滤波器组的中心频率为 $f_k = k/NT$,其输出即为 $X_k(f)$,窄带滤波器组的幅度随频率的变化关系 $H_k(e^{j2\pi f})$ 满足

$$H_k(e^{j2\pi f}) = \frac{\sin N\pi(f - f_k)T}{\sin\pi(f - f_k)T}$$

DFT 的滤波特性如图 3-70 所示。

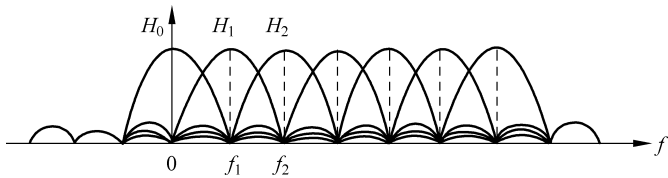


图 3-70 DFT 的滤波特性

脉冲多普勒雷达是利用运动目标的多普勒特性来提取目标运动速度等参数的。因此脉冲多普勒雷达中覆盖目标多普勒频移范围的一组邻接窄带滤波器称为多普勒滤波器组,窄带多普勒滤波器组起到了实现速度分辨和精确测量的作用。每个滤波器的带宽应设计的尽量与回波信号的谱线宽度相匹配。这个带宽同时确定了多普勒雷达的速度分辨能力和测速精度。人们正是利用上述 DFT 的滤波特性来形成脉冲多普勒雷达信号处理中所必需的窄带多普勒滤波器组。

由于多普勒雷达的杂波分布情况比较复杂,目标回波可能落入杂波区,也可能落入无杂波区,两种区域中干扰的强度相差很大。经过上述滤波器组进行滤波处理之后,信号的背景干扰仍包含很宽的幅度范围。因此,利用多普勒雷达进行目标检测时一般采用恒虚警(Constant False Alarming Rate, CFAR)处理技术,以便防止干扰增大时虚警概率过高,努力使得当噪声、杂波和干扰功率或其他参数发生变化时,输出端的虚警概率保持恒定。

脉冲多普勒雷达数据处理单元中,将 FFT 处理机的输出进行适当的 CFAR 处理后与检测门限比较,由超过门限的信号所对应多普勒滤波器中心频率的位置得出目标的速度,将其送入数据处理机或直接显示,具体流程如图 3-71 所示。

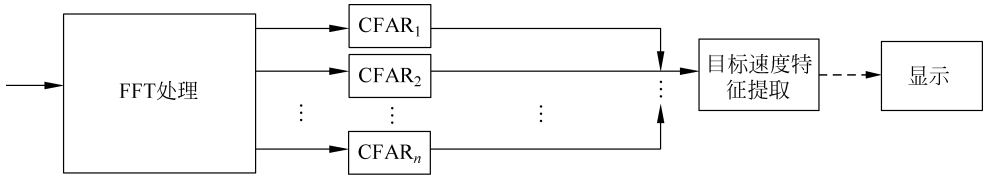


图 3-71 多普勒雷达数据处理流程

3.9 无线电频率划分及典型信号的频率范围

本章介绍了信号频域分析方法,了解了信号的频域特征量即“频谱”的概念。通过对典型信号在频域内特性的分析,发现不同信号在频域内分布不同,根据其主要能量在频率域的分布,对频率划分区间,并给出不同区间的命名,以示区分不同信号。信号的频率通常以 Hz(赫兹)为单位,其表示方式如下。

- (1) 3000kHz 以下(包括 3000kHz),以 kHz(千赫兹)表示。
- (2) 3MHz~3000MHz(包括 3000MHz),以 MHz(兆赫兹)表示。
- (3) 3GHz~3000GHz(包括 3000GHz),以 GHz(吉赫兹)表示。

无线电频率一般认为是在 3kHz~300GHz 内,其划分区间如表 3-6 所示。而对于较高的频段,也经常采用如表 3-7 所示的频段划分标准。

表 3-6 无线电频率划分表

名 称	字 母 缩 写	频 率 范 围	波 长
甚低频	VLF	3kHz~30kHz	100km~10km
低频	LF	30kHz~300kHz	10km~1km
中频	MF	300kHz~3MHz	1km~100m
高频	HF	3MHz~30MHz	100m~10m
甚高频	VHF	30MHz~300MHz	10m~1m
超高频	UHF	300MHz~3GHz	1m~10cm
特高频	SHF	3GHz~30GHz	10cm~1cm
极高频	EHF	30GHz~300GHz	1cm~1mm

表 3-7 较高频段的无线电频率划分表

字 母 代 号	频率范围/GHz	字 母 代 号	频率范围/GHz
L 波段	1.00~1.88	X 波段	8.20~12.40
Ls 波段	1.50~2.80	KuKe 波段	12.40~18.00
S 波段	2.35~4.175	K 波段	16.00~28.00
C 波段	3.60~7.45	Ka 波段	26.00~40.00
Xb 波段	6.00~10.65	Q 波段	33.00~50.00

另外,本章所描述的频域分析方法通常应用在实际遇到的信号分析中(例如地震、生物和电磁信号)。为了从观测信号提取信息,先要对信号做频谱分析。例如,在生物信号中,如心电图(ECG)信号,为了诊断,需要使用分析工具提取相关信息。对地震信号,人们可能对检测核爆炸的表现或者确定地震特征和位置感兴趣。对于电磁信号,例如从飞机反射的雷达信号,包含了飞机的位置和径向速度的信息。这些参数可以从接收雷达信号观测估计出来。为了测量参数或者提取其他类型的信息,在信号处理时,必须大致知道获取信号的频率范围。在此,表 3-8~表 3-10 给出了一些典型信号的频率范围。

表 3-8 一些生物信号的频率范围

信 号 类 型	频率范围/Hz	信 号 类 型	频率范围/Hz
(视)网膜电图 ^①	0~20	脑电图(EEG)	0~100
眼震颤电流图 ^②	0~20	肌电图 ^④	10~200
呼吸描记图 ^③	0~40	脉波图 ^⑤	0~200
心电图(ECG)	0~100	语音	100~4000

注: ①(视)网膜特性图示记录; ②眼睛不知不觉运动的图示记录; ③呼吸活动的图示记录; ④肌肉动作(如肌肉收缩)的图示记录; ⑤血压的图示记录。

表 3-9 一些地震信号的频率范围

信 号 类 型	频率范围/Hz	信 号 类 型	频率范围/Hz
风声	100~1000	地震和核爆炸信号	0.1~10
地震勘探信号	10~100	地震噪声	0.1~1

表 3-10 一些电磁信号的频率范围

信号类型	波长/m	频率范围/Hz
无线电广播	$10^4 \sim 10^2$	$3 \times 10^4 \sim 3 \times 10^6$
短波无线电信号	$10^2 \sim 10^{-2}$	$3 \times 10^6 \sim 3 \times 10^{10}$
雷达、卫星通信、太空通信和普 通载波微波	$1 \sim 10^{-2}$	$3 \times 10^8 \sim 3 \times 10^{10}$
红外线	$10^{-3} \sim 10^{-6}$	$3 \times 10^{11} \sim 3 \times 10^{14}$
可见光	$3.9 \times 10^{-7} \sim 8.1 \times 10^{-7}$	$3.7 \times 10^{14} \sim 7.7 \times 10^{14}$
紫外线	$10^{-7} \sim 10^{-8}$	$3 \times 10^{15} \sim 3 \times 10^{16}$
γ 射线和 X 射线	$10^{-9} \sim 10^{-10}$	$3 \times 10^{17} \sim 3 \times 10^{18}$

3.10 民航飞机通信、导航、监视信号频谱及系统工作频段

1. 民航飞机通信系统典型信号频谱

民航飞机通信系统包括甚高频通信(VHF)、高频通信(HF)、选择呼叫(SELCAL)、客舱广播(PA)、飞机内话、旅客娱乐(录像、电视、音乐)、旅客服务、勤务内话、客舱内话、话音记录系统和 ARINC 通信寻址报告系统等。主要用于实现飞机与地面、飞机与飞机的相互通信,也用于进行机内通话、旅客广播、记录话音信号以及向旅客提供视听娱乐信号。

1) 甚高频通信系统信号频谱

甚高频通信系统是一种近距离的飞机与飞机之间、飞机与地面电台之间的通信系统,是民航飞机主要的通信工具,用于飞机在起飞、降落或通过管制空域时机组人员和地面管制人员之间的双向语音通信。起飞和降落期间是驾驶员处理问题最繁忙的时刻,也是飞行中最容易发生事故的时刻,因此必须保证甚高频通信的高度可靠。民航飞机上一般都装有 2~3 套甚高频通信系统。

目前,VHF 除可进行话音通信外,还可进行数据通信。数据通信主要的应用是一种称为飞机通信寻址报告系统(Aircraft Communications Addressing and Reporting System, ACARS)的数据通信系统。话音通信系统包括地面电台和机载电台两部分,而地面与机载台的主要组成部分为 VHF 收发信机,其发射的信号为双边带调幅波。图 3-72 为 VHF 通信系统示意图。按照国际民航组织的统一规定,甚高频通信工作频率为 118.000~136.975MHz,波段间隔为 25kHz,工作方式采用调幅方式,信号形式如下。

发射信号为 $s_{AM}(t)$,即

$$s_{AM}(t)=[A+f(t)]\cos(\omega_0 t+\theta_0)$$

式中, $f(t)$ 表示话音信号; ω_0 表示载波角频率; A 为一直流电压;话音信号 $f(t)$ 是被发送的信号,称为调制信号,该信号不含直流成分; θ_0 为载波的起始相位,波形如图 3-73(a)所示。可以看出, $s_{AM}(t)$ 中载波的幅度随 $f(t)$ 的变化而变化,故称为调幅波。其频谱为

$$s_{AM}(\omega)=\pi A[\delta(\omega-\omega_0)e^{j\theta_0}+\delta(\omega+\omega_0)e^{-j\theta_0}]+\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)e^{j\theta_0}+F(\omega+\omega_0)e^{-j\theta_0}] \quad (3-47)$$

式(3-47)表明,调幅信号 $s_{AM}(t)$ 的频谱包含位于 $\omega=\omega_0$ 和 $\omega=-\omega_0$ 处的载波频率,以及位

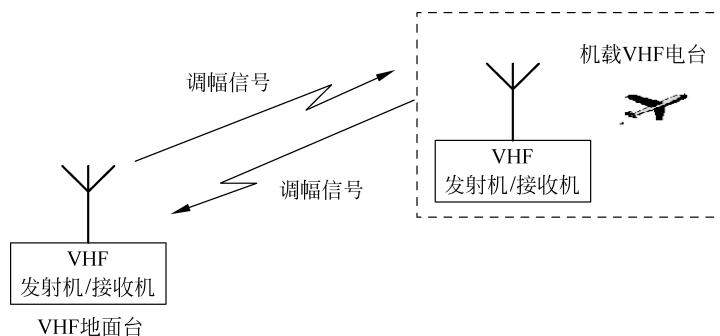


图 3-72 VHF 空地话音通信系统

于它们两旁的边带频谱 $F(\omega - \omega_0)$ 和 $F(\omega + \omega_0)$, 如图 3-73(b) 所示。若假定 $\theta_0 = 0$, $F(\omega)$ 是话音信号 $f(t)$ 的频谱。角频率高于 ω_0 和低于 $-\omega_0$ 的频谱称为上边带 (Upper Side Band, USB), 而在角频率 ω_0 和 $-\omega_0$ 之间的频谱称为下边带 (Lower Side Band, LSB)。可见, 调幅波频谱是由载波分量以及被搬移到 ω_0 和 $-\omega_0$ 的基带频谱所构成的, 调制的作用就是实现基带频谱的搬移。

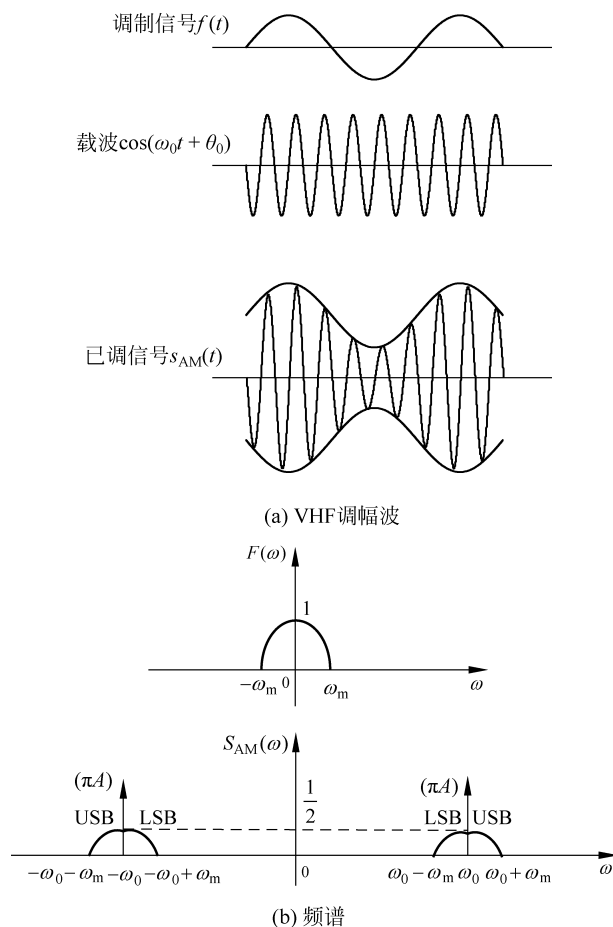


图 3-73 VHF 调幅波及其频谱

2) 高频通信系统信号频谱

高频通信系统是一种机载远程通信系统,通信距离可达数千千米,用于在远程飞行时保持与基地间的通信联络。系统占用 2MHz~30MHz 的高频频段,典型设备的工作频率为 2.8MHz~24MHz,波道间隔为 1kHz。高频通信信号利用天波传播,因此信号可以传播很远的距离。大型飞机上通常装备 1~2 套高频通信系统。现代机载高频通信系统都是单边带通信系统,并通常能够和普通调幅通信相兼容。

与 VHF 通信系统一样,HF 通信系统也包括地面台和机载台两部分,地面台与机载台的主要组成部分为 HF 收发信机,其发射单边带(Single Side Band,SSB)信号。

设 $f(t) = A_m \cos(\omega_m t + \theta_m)$ 为要发送的单频信号,调制信号的载波信号为 $\cos(\omega_0 t)$, ω_0 为载波频率($\omega_0 \gg \omega_m$),则已调信号为

$$\begin{aligned} s(t) &= A_m \cos(\omega_m t + \theta_m) \cos(\omega_0 t) \\ &= \frac{A_m}{2} \{ \cos[(\omega_0 + \omega_m)t + \theta_m] + \cos[(\omega_0 - \omega_m)t + \theta_m] \} \end{aligned}$$

对应的频谱为

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{A_m \pi}{2} e^{j\theta_m} \delta(\omega - (\omega_0 + \omega_m)) + \frac{A_m \pi}{2} e^{-j\theta_m} \delta(\omega + (\omega_0 + \omega_m)) \\ &\quad + \frac{A_m \pi}{2} e^{j\theta_m} \delta(\omega - (\omega_0 - \omega_m)) + \frac{A_m \pi}{2} e^{-j\theta_m} \delta(\omega + (\omega_0 - \omega_m)) \end{aligned}$$

其幅度谱 $|S(\omega)|$ 如图 3-74(a) 所示,取出频率绝对值高于载频 ω_0 ($|\omega| > \omega_0$) 的频谱,即为单边带信号频谱,如图 3-74(b) 所示,对应的时域信号

$$S_{SSB}(t) = \frac{A_m}{2} \cos[(\omega_0 + \omega_m)t + \theta_m]$$

称为单边带调幅信号,其波形如图 3-74(c) 所示。它是一个等幅的频率为 $(\omega_0 + \omega_m)$ 的余弦或正弦信号。

2. 无线电导航系统

所谓导航,即在各种复杂的气象条件下,采用最有效的方法并以规定的所需导航性能(Required Navigation Performance, RNP)引导航行体(飞机、导弹、宇宙飞船、船舶、车辆等)以及个人从出发点到目的地的过程。利用无线电技术实现对飞行器的导航(测距和测向)是飞机导航的一种方式,其所应用的导航系统主要分为航路导航系统和终端区导航系统。其中,航路导航系统以无方向性信标(Non-Directional Beacon, NDB)、甚高频全向信标(Very High Frequency Omnidirectional Range, VOR)和测距机(Distance Measuring Equipment, DME)为代表,终端区导航系统以自动定向仪-无方向性信标(ADF-NDB)、VOR、DME、仪表着陆系统(Instrument Landing System, ILS)、微波着陆系统(Microwave Landing System, MLS)为代表。

1) 多普勒甚高频全向信标

甚高频全向信标是一种高精度的非自主式相位测角近程导航系统,是目前民用航空主用的陆基导航系统,它为飞机提供相对于 VOR 台的方位信息。VOR 通常与 DME 配合,为飞机提供 ρ - θ 极坐标定位而用于航路,也可布置在终端区,用作仪表着陆系统的引进系统。

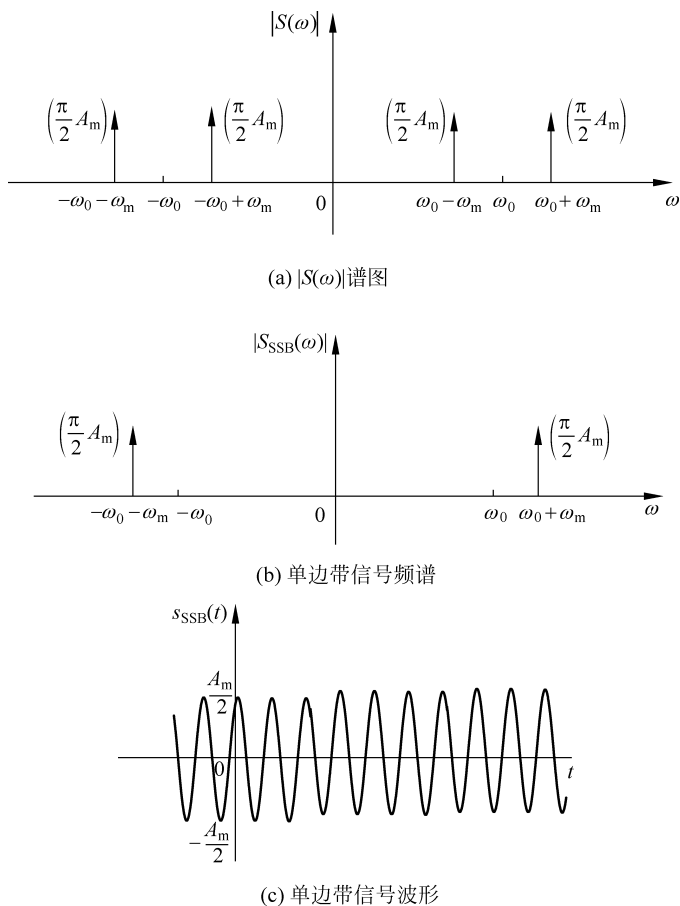


图 3-74 单边带信号的波形及其频谱

多普勒甚高频全向信标 (Doppler Very High Frequency Omnidirectional Range, DVOR) 是 VOR 导航设备的一种, 其与常规甚高频全向信标 (Conventional Very High Frequency Omnidirectional Range, CVOR) 不同之处在于: DVOR 导航系统基于多普勒原理, 利用天线的旋转, 让飞机与旋转的天线产生多普勒效应, 从而使机载接收机接收信号中含有飞机磁方位信息的可变相位信号, 将该信号与基准信号相比较, 从而获得飞机的磁方位角。DVOR 系统主要包括 DVOR 地面信标和 VOR 机载接收机两部分组成, 如图 3-75 所示。

DVOR 信标的空间辐射场 $e(t)$ 为调幅调频波信号, 即

$$e(t) = E_m \{ 1 + m_A \sin(\Omega t) + m_f \cos[\Omega_s t + K_f \cos(\Omega t + \theta)] \} \cos(\omega_c t)$$

式中, $\omega_c = 2\pi f_c$, $f_c = 108.00 \sim 117.95 \text{ MHz}$ 为载波频率 (此频段为甚高频频段), 在此频段中, 频道间隔为 0.05 MHz , 共有 200 个频道, VOR 占有其中的 160 个频道; $\Omega_s = 2\pi F_s$, $F_s = 9960 \text{ Hz}$ 为副载波频率; $\Omega = 2\pi F$, $F = 30 \text{ Hz}$; m_A 、 m_f 均为调制度, $K_f = 16$, 为调频指数; θ 为方位角; $\sin \Omega t$ 为调制信号, 单一频率正弦波; $\cos[\Omega_s t + K_f \cos(\Omega t + \theta)]$ 为调制信号 (调频波); $\cos(\Omega t + \theta)$ 调频波

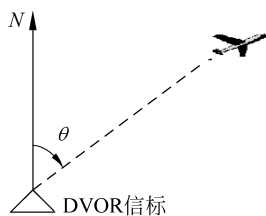


图 3-75 DVOR 信标

的调制信号。

将 $e(t)$ 展开为

$$\begin{aligned}
 e(t) &= E_m \{1 + m_A \sin \Omega t + m_f \cos[\Omega_s t + K_f \cos(\Omega t + \theta)]\} \cos(\omega_c t) \\
 &= E_m \cos \omega_c t + m_A E_m \sin \Omega t \cos \omega_c t + m_f E_m \cos[\Omega_s t + K_f \cos(\Omega t + \theta)] \cos(\omega_c t) \\
 &= E_m \cos \omega_c t - \frac{1}{2} m_A E_m \cos \left[(\omega_c + \Omega) t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{2} m_A E_m \cos \left[(\omega_c - \Omega) t + \frac{\pi}{2} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_f E_m \cos[(\omega_c + \Omega_s) t + K_f \cos(\Omega t + \theta)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_f E_m \cos[(\omega_c - \Omega_s) t - K_f \cos(\Omega t + \theta)]
 \end{aligned}$$

其频谱图如图 3-76 所示。

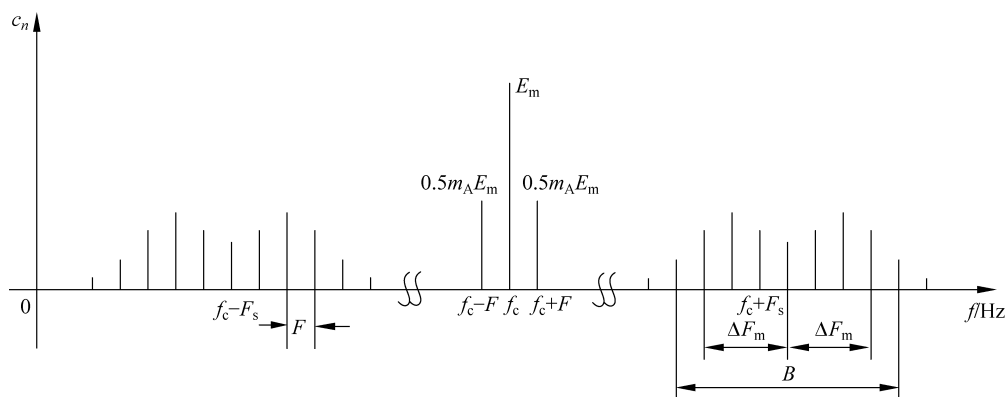


图 3-76 DVOR 信标的空间辐射场 $e(t)$ 的频谱

图中 c_n 表示 n 次谐波的幅度,最大频偏为 $\Delta F_m = 480 \text{ Hz}$, $B = 2(\Delta F_m + F) = 1020 \text{ Hz}$ 为调频波的带宽。从图中可以看出, $f_c + F$ 是基准信号频谱,而 $f_c + F_s$ 周围的这些频谱代表可变相位信号频谱,在机载接收机中,通过设置不同的带通滤波器,就可分离出基准信号和可变相位信号,进而获得飞机的方位信息 θ 。关于滤波器的详细知识见后续章节。

2) 测距机射频信号

测距机(DME)是一种非自主的脉冲式(时间式)近程测距导航系统,主要包括地面信标和机载系统两部分。它测量的是飞机与地面 DME 台之间的斜距 R ,如图 3-77 所示。它的起源可追溯到第二次世界大战期间英国研制的 Rebecca-Eureka 系统。从 1959 年起,DME 已成为国际民航组织(International Civil Aviation Organization, ICAO)批准的标准测距系统,其装备在世界范围内呈上升趋势,获得广泛的应用。

DME 是通过测量电波在空间的传播时间来获取距离信息的,采用询问-应答方式工作。其地面信标也称为应答器,机载系统也称为询问器。机载询问器发射询问信号,地面信标接收到该询问信号后,给出相应的应答信号,机载 DME 系统便能得到询问与应答之间的时间差 T (见图 3-78),通过下面的公式便能计算出飞机到 DME 地面台之间的斜距 R 。

$$R = \frac{1}{2}(T - T_0)C$$

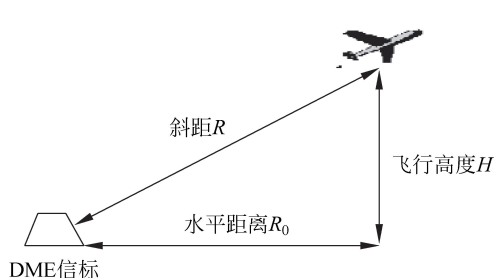


图 3-77 飞机到测距台的斜距

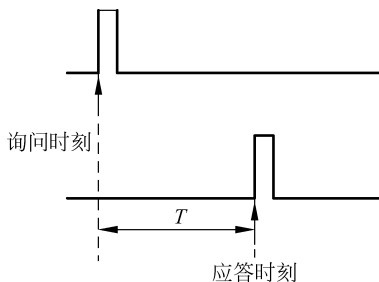


图 3-78 询问与应答之间的时间差 T

式中, C 为光速 $3 \times 10^8 \text{ m/s}$; T_0 为地面应答器从接收到询问信号到给出应答信号之间存在的一个应答固定延时(或称系统延时),其典型值为 $50 \mu\text{s}$ 。

DME 系统工作在 L 波段的 $962 \sim 1213 \text{ MHz}$ 。机载询问频率工作在 $1025 \sim 1150 \text{ MHz}$, 波道间隔为 1 MHz , 因此有 126 个询问频率。地面应答频率工作在 $962 \sim 1213 \text{ MHz}$, 波道之间的间隔也为 1 MHz , 可以得到 252 个应答频率。询问频率和应答频率的频差为 63 MHz 。

询问与应答均是以脉冲对来表示的, 即一对脉冲表示一次询问或应答, 而该脉冲对两个脉冲之间的间隔是固定的。对于询问脉冲对, 两个脉冲之间的间隔是 $12 \mu\text{s}$ 或 $36 \mu\text{s}$ 。对于应答脉冲对, 两个脉冲之间的间隔是 $12 \mu\text{s}$ 或 $30 \mu\text{s}$, 如图 3-79 所示。

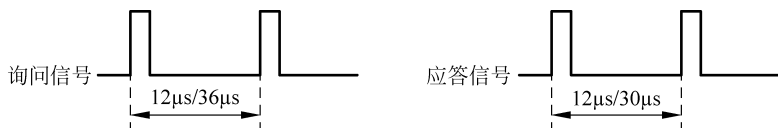


图 3-79 DME 的询问与应答信号

询问脉冲对和应答脉冲对通过对各自的射频(Radio Frequency, RF)调制之后, 由各自的无方向性天线辐射出去, 其表达式为

$$e(t) = f(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

这也是一个调幅信号, 其中 $f(t)$ 为询问脉冲或应答脉冲, $\omega_c = 2\pi f_c$, $f_c = 962 \sim 1213 \text{ MHz}$ 为载波频率。DME 询问脉冲 $f(t)$ 和 RF 调制信号 $e(t)$ 如图 3-80 所示。

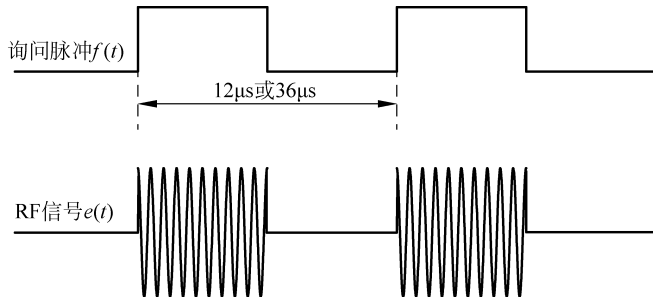


图 3-80 DME 的询问脉冲及 RF 调制信号

根据傅里叶变换的频移性质, 调制信号 $e(t)$ 的频谱 $E(\omega)$ 为

$$E(\omega) = \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c))$$

上述 RF 脉冲的包络形状为矩形,但这容易增大邻道干扰。要避免邻道干扰的出现,对在某一频道传输信号的带宽就必须有一定的要求,特别是对 DME 系统。若传输的信号带宽不满足要求,就很容易造成邻道干扰,因为 DME 系统波道之间的间隔仅为 1MHz。所以,为了压缩信号频谱,减小邻道干扰,实际 DME 的 RF 脉冲包络 $f(t)$ 采用升余弦脉冲

$$f_1(t) = \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] \quad (0 \leq t \leq \tau)$$

其时域波形如图 3-81(a)所示。而其频谱 $F_1(\omega)$ 为

$$F_1(\omega) = \frac{E\tau \text{Sa}(\omega\tau)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2}$$

其波形如图 3-81(b)所示。

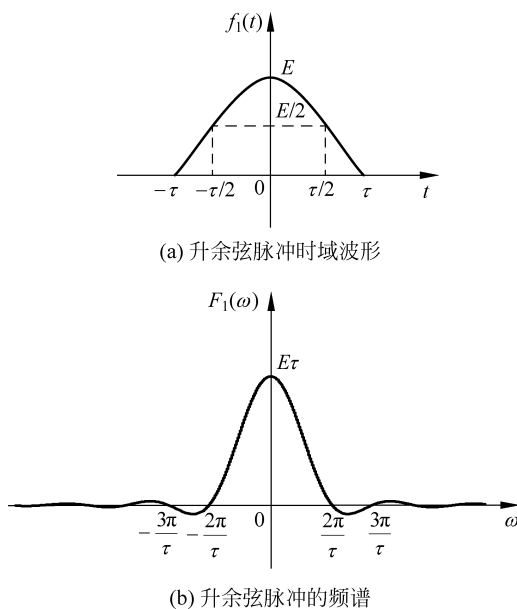


图 3-81 升余弦脉冲信号的波形及频谱

比较矩形脉冲和升余弦脉冲的频谱可以得出,矩形脉冲具有更加丰富的高频成分。由于 DME 波道的间隔仅为 1MHz,若 DME RF 脉冲包络采用矩形,则会出现更多的邻道干扰,使系统性能下降。因此,DME 的 RF 包络采用高频成分相对较小的升余弦脉冲。

3. 空管监视系统典型信号频谱

民航空管监视系统用于帮助管制员对空中和地面目标进行识别和移交。通常,空管监视系统主要分为终端区监视系统和航路监视系统。而终端区监视系统主要以一次监视雷达 (Primary Surveillance Radar, PSR)、二次监视雷达 (Secondary Surveillance Radar, SSR) 和场面监视雷达 (Surface Movement Radar, SMR) 为主,航路监视系统主要分为雷达监视和广播式自动相关监视 (Automatic Dependent Surveillance-Broadcast, ADS-B) 系统。其中,一次监视雷达和二次监视雷达是现代空中交通管制 (Air Traffic Control, ATC) 中实施对飞机监视的重要工具,它们能够给出飞机的方位、飞机离雷达站的距离、飞机的高度及飞机的识别号等重要信息,为管制员实行对飞机的管制提供重要依据。

一次监视雷达和二次监视雷达的区别在于工作方式不同。一次监视雷达主要靠目标对雷达发射的电磁波(射频脉冲)的反射来主动发现目标并确定其位置。而二次监视雷达不能靠接收目标反射的自身发射的探测脉冲来工作。它是由地面站(通常称询问机)通过天线的方向性波束发射频率为 1030MHz 的一组询问编码(射频脉冲)。二次雷达要求飞机必须装有应答机,当地面发射询问码后,飞机通过应答机将自身的位置、方向、高度等相关信息发回地面。

一次雷达和二次雷达的发射信号基本形式是脉冲调幅信号,其原理为

$$e(t) = g(t) \cos(\omega_0 t)$$

式中, $g(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$ 为矩形脉冲; 载波角频率 $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 通常称为雷达的工作频率。目前民航空管系统中使用的 PSR 大部分为脉冲雷达,工作在 S 波段,即其工作频率为 2000~4000MHz。而 SSR 的询问 RF 和应答 RF 频率分别为 1030MHz 和 1090MHz。PSR/SSR 单个 RF 脉冲信号如图 3-82 所示。

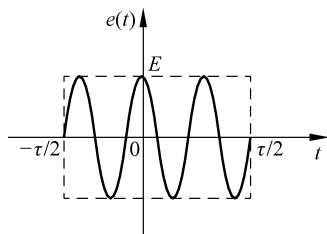


图 3-82 PSR/SSR 单个 RF 脉冲信号

矩形脉冲 $g(t)$ 的频谱 $G(\omega)$ 为

$$G(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据傅里叶变换的频移定理,可得 $e(t)$ 的频谱 $E(\omega)$ 为

$$E(\omega) = \frac{1}{2}G(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}G(\omega + \omega_0) \\ = \frac{E\tau}{2} \left\{ \text{Sa}\left[(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}\right] + \text{Sa}\left[(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2}\right] \right\}$$

可见,RF 矩形脉冲 $e(t)$ 的频谱等于将包络线 $g(t)$ 的频谱一分为二,各向左、右移载频 ω_0 。 $e(t)$ 的频谱 $E(\omega)$ 如图 3-83 所示。

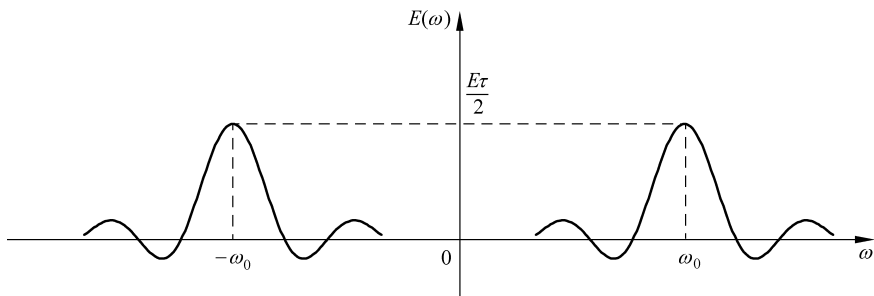


图 3-83 PSR/SSR 单个 RF 脉冲信号的频谱

3.11 相关的 MATLAB 函数

下面介绍本章所涉及的信号处理相关的 MATLAB 函数。

1. fft

功能: 用来实现快速傅里叶变换。

调用格式: $X = \text{fft}(x)$ 或 $X = \text{fft}(x, N)$

其中, x 为待分析的时域序列; X 为序列 x 所对应的快速傅里叶变换序列; N 为快速傅里叶变换的点数。

2. ifft

功能: 用来实现快速傅里叶逆变换。

调用格式: $x = \text{ifft}(X)$ 或 $x = \text{ifft}(X, N)$

其中, X 为进行逆变换的频域序列; x 为序列 X 所对应的快速傅里叶逆变换的时域序列; N 为快速傅里叶逆变换的点数。

3. fftshift

功能: 重新排列的 FFT 变换的输出。

调用格式: $Y = \text{fftshift}(X)$

其中, X 为排序前的以 $f_s/2$ (采样率的一半) 为对称中心的快速傅里叶变换的频域序列; Y 为排序后的以坐标原点为对称中心的快速傅里叶变换的频域序列。

4. circshift

功能: 用来实现圆周移位。

调用格式: $y = \text{circshift}(x, M)$

其中, x 为待移位的时域序列; M 为圆周移位的点数, 若 M 为正值, 则向右圆周移位, 若 M 为负值, 则向左圆周移位; y 为圆周移位后的时域序列。

5. fftfilt

功能: 利用重叠相加法实现长序列的线性滤波。

调用格式: $y = \text{fftfilt}(h, x)$

其中, x 为待滤波的时域序列 (长序列); h 为滤波器的系数 (短序列); y 为滤波器后的时域序列。

6. rectwin、triang、hann、hamming、blackman、gausswin、kaiser

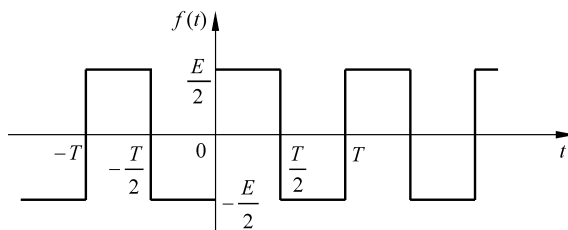
功能: 分别用来产生矩形窗、三角窗、汉宁窗、汉明窗、布莱克曼窗、高斯窗和凯泽窗。

调用格式: $\text{rectwin}(N)$, $\text{triang}(N)$, $\text{hann}(N)$, $\text{hamming}(N)$, $\text{blackman}(N)$, $\text{gausswin}(N)$, $\text{kaiser}(N)$

其中, N 为待产生窗的长度。

习题

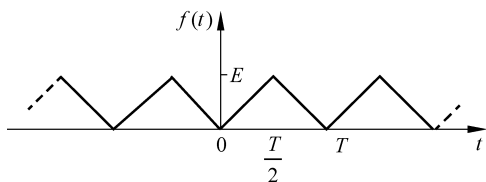
3-1 求题图 3-1 所示对称周期矩形信号的傅里叶级数 (三角形式与指数形式)。



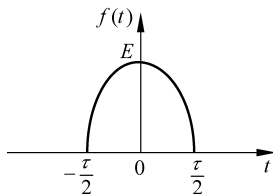
题图 3-1

3-2 求题图 3-2 所示周期三角信号的傅里叶级数(三角形形式与指数形式),并画出幅度谱。

3-3 求题图 3-3 所示半波余弦脉冲的傅里叶变换,并画出频谱图。

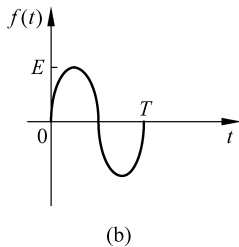
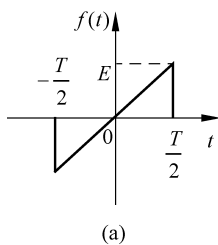


题图 3-2



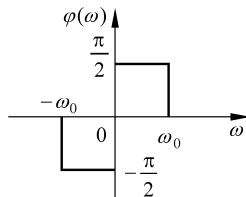
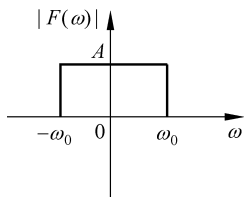
题图 3-3

3-4 求题图 3-4 所示锯齿脉冲与单周正弦脉冲的傅里叶变换。



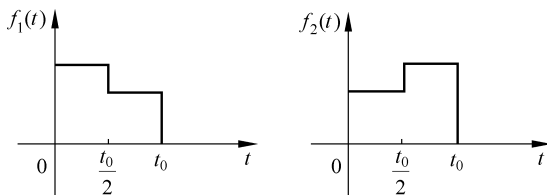
题图 3-4

3-5 求题图 3-5 所示 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换 $f(t)$ 。



题图 3-5

3-6 如题图 3-6 所示波形,若已知 $f_1(t)$ 的傅里叶变换为 $F_1(\omega)$,利用傅里叶变换的性质求 $f_1(t)$ 以 $\frac{t_0}{2}$ 为轴反褶后所得 $f_2(t)$ 的傅里叶变换。



题图 3-6

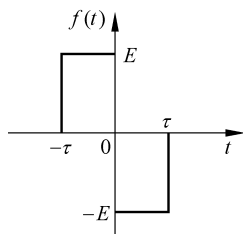
3-7 利用时域与频域的对称性,求下列傅里叶变换的时间函数。

(1) $F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$;

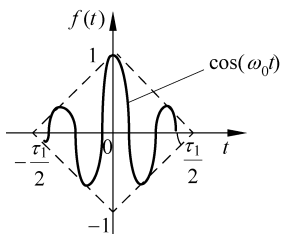
(2) $F(\omega) = u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$ 。

3-8 若已知矩形脉冲的傅里叶变换,利用时移特性求题图 3-8 所示信号的傅里叶变换,并大致画出幅度谱。

3-9 求题图 3-9 所示三角形调幅信号的频谱。



题图 3-8



题图 3-9

3-10 利用微分定理求题图 3-10 所示梯形脉冲的傅里叶变换,并大致画出 $\tau = 2\tau_1$ 情况下该脉冲的频谱图。

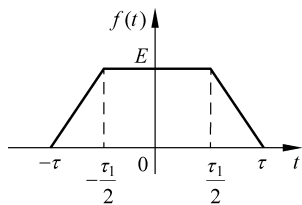
3-11 若已知 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$,利用傅里叶变换的性质确定下列信号的傅里叶变换。

- (1) $tf(2t)$;
- (2) $(t-2)f(-2t)$;
- (3) $f(1-t)$;
- (4) $f(2t-5)$ 。

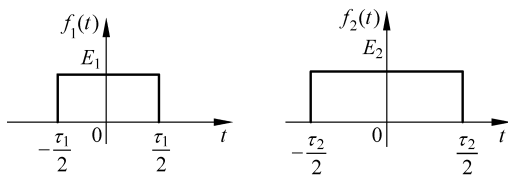
3-12 已知题图 3-12 中两矩形脉冲 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$,且 $f_1(t)$ 的傅里叶变换为 $E_1\tau_1\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_1}{2}\right)$,

$f_2(t)$ 的傅里叶变换为 $E_2\tau_2\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_2}{2}\right)$ 。

- (1) 画出 $f_1(t) * f_2(t)$ 的图形;
- (2) 求 $f_1(t) * f_2(t)$ 的频谱。

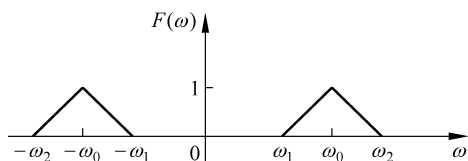


题图 3-10



题图 3-12

3-13 若 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 如题图 3-13 所示,利用卷积定理粗略画出 $f(t)\cos(\omega_0 t)$ 、 $f(t)e^{j\omega_0 t}$ 、 $f(t)\cos(\omega_1 t)$ 的频谱(注明频谱的边界频率),其中 $\omega_2 - \omega_0 = \omega_0 - \omega_1$ 。



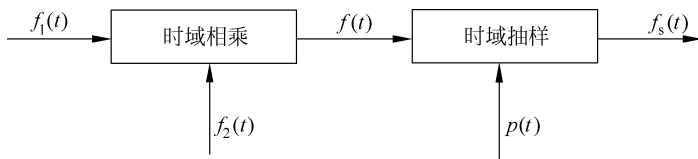
题图 3-13

3-14 确定下列信号的最低抽样率与奈奎斯特间隔。

- (1) $\text{Sa}(100t)$;
- (2) $\text{Sa}^2(100t)$ 。

3-15 系统如题图 3-15 所示, $f_1(t) = \text{Sa}(1000\pi t)$, $f_2(t) = \text{Sa}(2000\pi t)$, $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$, $f(t) = f_1(t)f_2(t)$, $f_s(t) = f(t)p(t)$ 。

- (1) 为从 $f_s(t)$ 无失真恢复 $f(t)$, 求最大抽样间隔 $T_{\max}$;
- (2) 当 $T = T_{\max}$ 时, 画出 $f_s(t)$ 的幅度谱 $|F_s(\omega)|$ 。



题图 3-15

3-16 试求如下各序列的离散时间傅里叶变换(DTFT)。

- (1) $x(n) = \delta(n-3)$;
- (2) $x(n) = \frac{1}{2}\delta(n+1) + \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$;
- (3) $x(n) = a^n u(n) (0 < a < 1)$;
- (4) $x(n) = u(n+3) - u(n-4)$ 。

3-17 $\tilde{x}(n)$ 表示一个具有周期为 N 的周期性序列, 而 $\tilde{X}(k)$ 表示它的离散傅里叶级数的系数, 也是一个具有周期为 N 的周期性序列。试根据 $\tilde{x}(n)$ 确定 $\tilde{X}(k)$ 的离散傅里叶级数的系数。

3-18 如果 $\tilde{x}(n)$ 是一个具有周期为 N 的周期性序列, 它也是具有周期为 $2N$ 的周期性序列。令 $\tilde{X}_1(k)$ 表示当 $\tilde{x}(n)$ 看作是具有周期为 N 的周期性序列的 DFS 系数。而 $\tilde{X}_2(k)$ 表示当 $\tilde{x}(n)$ 看作是具有周期为 $2N$ 的周期性序列的 DFS 系数。当然 $\tilde{X}_1(k)$ 是具有周期为 N 的周期性序列, 而 $\tilde{X}_2(k)$ 是具有周期为 $2N$ 的周期性序列, 试根据 $\tilde{X}_1(k)$ 确定 $\tilde{X}_2(k)$ 。

3-19 求下列序列的离散傅里叶变换(DFT)。

- (1) $\{1, 1, -1, -1\}$;
- (2) $\{1, j, -1, -j\}$;
- (3) $x(n) = \delta(n)$;
- (4) $x(n) = \delta(n - n_0) (0 < n_0 < N)$;
- (5) $x(n) = \{1, 1, 1, 1\}$;
- (6) $x(n) = \{1, 0, 0, 0\}$;
- (7) $x(n) = a^n (0 \leq n \leq N-1)$ 。

3-20 频谱分析的模拟数据以 10kHz 取样, 且计算了 1024 个取样的离散傅里叶变换。试确定频谱取样之间的频率间隔, 并证明。

3-21 证明

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k=0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3-22 已知序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换为 $X(k)=[9 \ 1 \ 1 \ 9 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ 。

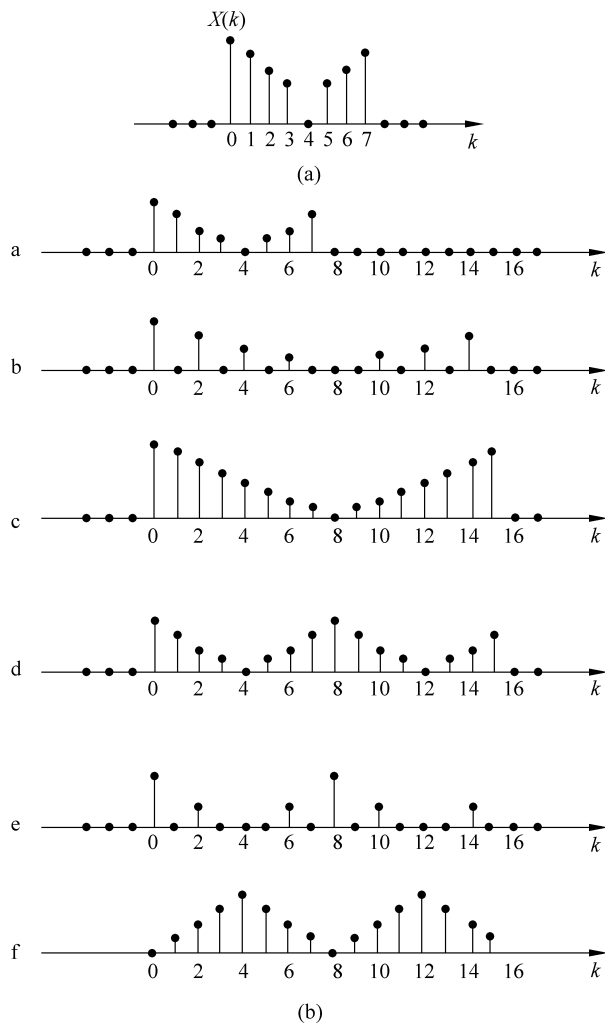
(1) 确定其对应的 8 点 IDFT；

(2) 若序列 $y(n)$ 对应的 8 点 DFT $Y(k)=W_8^{-4k}X(k)$, 求序列 $y(n)$ 。

3-23 列长为 8 的一个有限长序列具有 8 点离散傅里叶变换 $X(k)$, 如题图 3-23(a) 所示。列长为 16 点的一个新的序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

试画出 $y(n)$ 的波形, 并从题图 3-23(b) 的几个图中选出相当于 $y(n)$ 的 16 点离散傅里叶变换序列图。



题图 3-23

3-24 现有一为随机信号谱分析所使用的处理器,该处理器所用的取样点数必须是 2 的整数次幂,并假设没有采取任何特殊的数据处理措施。设频率的分辨率 $\leq 5\text{Hz}$;信号的最高频率 $\leq 12.5\text{MHz}$,要求确定下列参量。

- (1) 最小记录长度;
- (2) 取样点间的最大时间间隔;
- (3) 在一个记录中的最少点数。

上机习题

3-1 编制信号产生子程序,产生以下典型信号。

$$(1) x_1(n) = R_4(n);$$

$$(2) x_2(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 8-n, & 4 \leq n \leq 7 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(3) x_3(n) = \cos \frac{\pi}{4}n \quad (0 \leq n \leq 7);$$

$$(4) x_4(n) = \sin \frac{\pi}{4}n \quad (0 \leq n \leq 7);$$

$$(5) x_5(t) = \cos 8\pi t + \cos 16\pi t + \cos 20\pi t \quad (\text{采样频率 } f_s = 64\text{Hz}).$$

3-2 对题 3-1 中所给出的信号分别进行谱分析,参数如下:

$x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 、 $x_3(n)$ 、 $x_4(n)$ 进行 DFT 时的点数 $N=8$,对于 $x_5(t)$ 需进行采样,采样频率 $f_s=64\text{Hz}$,点数 N 分别为 16、32、64。

3-3 对题 3-1 中的信号,令 $x_6(n) = x_3(n) + x_4(n)$,用 FFT 计算 8 点的离散傅里叶变换: $X_6(k) = \text{DFT}[x_6(n)]$,并根据 DFT 的对称性,由 $X_6(k)$ 求出 $X_3(k)$ 和 $X_4(k)$,并与题 3-2 中所得的结果进行比较。

3-4 对题 3-1 中的信号,令 $x_7(n) = x_3(n) + jx_4(n)$,用 FFT 计算 8 点的离散傅里叶变换: $X_7(k) = \text{DFT}[x_7(n)]$,并根据 DFT 的对称性,由 $X_7(k)$ 求出 $X_3(k)$ 和 $X_4(k)$,并与题 3-2 中所得的结果进行比较。

$$3-5 \quad \text{已知 } X(k) = \begin{cases} 3, & k=0 \\ 1, & 1 \leq k \leq 9 \end{cases}, \text{求其 10 点 IDFT。}$$

3-6 产生频率为 505Hz 的正弦波信号,编制相应的程序,并绘制频谱图。具体参数如下。

- (1) 设定采样频率 $f_s=5120\text{Hz}$,FFT 计算点数为 512;
- (2) 设定采样频率 $f_s=2560\text{Hz}$,FFT 计算点数为 512;
- (3) 分析上述两种情况下正弦信号频谱图的差异,并说明栅栏效应所造成的频谱计算误差。

3-7 对 300Hz 正弦波信号分别用矩形窗截断和汉宁窗截断,编制相应的程序,绘制加窗前后的该正弦波信号的频谱,观察其频谱泄漏情况。相关参数如下:采样频率 $f_s=1200\text{Hz}$,窗的长度 $N=512$ 。

3-8 已知连续时间信号 $x(t)$ 由 3 个正弦信号相加得到, 它们的频率、幅度和初相分别为: $f_1=1\text{kHz}, A_1=2, \varphi_1=0$; $f_2=1.5\text{kHz}, A_2=1, \varphi_1=\frac{\pi}{2}$; $f_3=2\text{kHz}, A_3=0.5, \varphi_2=\pi$ 。

以取样频率 $f_s=10\text{kHz}$ 对 $x(t)$ 取样得到序列 $x(n)$ (设序列长度 $N=500$), 画出 $x(n)$ 对应的时域波形, 分别计算 $x(n)$ 的 500 点和 1024 点 DFT, 画出幅度谱和相位谱 (要求利用 `fftshift` 函数将幅度谱和相位谱横坐标转变为以 Hz 为单位的频率)。

3-9 已知 $x(n)$ 是一个长度为 8 的矩形窗函数, 即 $x(n)=R_8(n)$, 现将 $x(n)$ 的每两点之间补进 3 个零值, 得到一个长为 32 点的有限长序列 $y(n)$, 试画出 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的幅度谱和相位谱, 并给出 $x(n)$ 与 $y(n)$ 幅度谱与相位谱的关系。

3-10 已知信号

$$x(t) = \sin(2\pi ft) + kn(t)$$

其中, $f=10\text{Hz}$, $n(t)$ 为高斯白噪声。首先对该信号进行采样, 采样率为 $f_s=200\text{Hz}$, 变量 k 控制所加噪声信号的强度, 试画出当 $k=0.2$ 以及 $k=1.5$ 两种情况下取样后信号的时域波形及其频谱, 并分析 k 的取值对信号频谱的影响。