

线性空间与线性变换

5.1 线性空间

5.1.1 集合与映射

定义 5-1 集合是能够作为整体看待的一些对象。

集合有两种表示法：

- (1) 列举法： $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ 。
 (2) 性质法： $S = \{a \mid a \text{ 所具有的性质}\}$ 。

集合 S_1, S_2 相等 ($S_1 = S_2$) 指下面二式同时成立：

$$\forall a \in S_1 \Rightarrow a \in S_2, \text{ 即 } S_1 \subseteq S_2$$

$$\forall b \in S_2 \Rightarrow b \in S_1, \text{ 即 } S_2 \subseteq S_1$$

集合可以进行以下运算：

- (1) 交： $S_1 \cap S_2 = \{a \mid a \in S_1 \text{ 且 } a \in S_2\}$ 。
 (2) 并： $S_1 \cup S_2 = \{a \mid a \in S_1 \text{ 或 } a \in S_2\}$ 。
 (3) 和： $S_1 + S_2 = \{a = a_1 + a_2 \mid a_1 \in S_1, a_2 \in S_2\}$ 。

定义 5-2 数域是关于四则运算封闭的数的集合，例如实数域 $\mathbf{R}$ 、复数域 $\mathbf{C}$ 、有理数域 $\mathbf{Q}$ 等。

定义 5-3 设有集合 S_1 与 S_2 ，若对任意的 $a \in S_1$ ，按照法则 σ ，对应唯一的 $b \in S_2$ ，记为 $\sigma(a) = b$ ，称 σ 为由 S_1 到 S_2 的映射， b 为 a 的象， a 为 b 的象源。

定义 5-4 当 $S_1 = S_2$ 时，称 S_1 到 S_2 的映射 σ 为 S_1 上的变换。

例 5-1 假设有两个集合分别是

$$S_1 = \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R} \right\}, S_1 \neq S_2$$

求两个集合的交、并、和。

解：

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \mid a_{12}, a_{21} \in \mathbf{R} \right\}$$

$$S_1 \cup S_2 = \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{11}, a_{22} = 0, a_{ij} \in \mathbf{R} \right\}$$

$$S_1 + S_2 = \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R} \right\}$$

例 5-2 $S = \{ \mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n} \mid a_{ij} \in \mathbf{R} \} (n \geq 2)$ 。

解: 映射 σ_1 为

$$\sigma_1(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A} \quad (S \rightarrow \mathbf{R})$$

变换 σ_2 为:

$$\sigma_2(\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}) I_n \quad (S \rightarrow S)$$

5.1.2 线性空间及其性质

定义 5-5 设集合 V 非空, 给定数域 K 。若在 V 中定义加法运算封闭, 即 $\forall x, y \in V$, 对应唯一元素 $(x+y) \in V$, 且满足

- (1) 结合律: $x + (y + z) = (x + y) + z (\forall z \in V)$ 。
- (2) 交换律: $x + y = y + x$ 。
- (3) 有零元: $\exists \theta \in V$, 使得 $x + \theta = x (\forall x \in V)$ 。
- (4) 有负元: $\forall x \in V, \exists (-x) \in V$, 使得 $x + (-x) = \theta$ 。

并且定义的数乘运算封闭, 即 $\forall x \in V, \forall k \in K$, 对应唯一元素 $(kx) \in V$, 且满足

- (1) 数对元素分配律: $k(x+y) = kx + ky (\forall y \in V)$ 。
- (2) 元素对数分配律: $(k+l)x = kx + lx (\forall l \in K)$ 。
- (3) 数因子结合律: $k(lx) = (kl)x (\forall l \in K)$ 。
- (4) 有单位数: 单位数为 1, 有 $x \in K$, 使得 $1x = x$ 。

则称 V 为 K 上的线性空间。

例 5-3 集合 $\mathbf{R}^+ = \{a \mid a \text{ 是正整数} \}$, 数域 $R = \{k \mid k \text{ 是实数} \}$ 。

加法: $a, b \in \mathbf{R}^+, a \oplus b = ab$ 。

数乘: $a \in \mathbf{R}^+, k \in \mathbf{R}, k \otimes a = a^k$, 验证 $\mathbf{R}^+$ 是 R 上的线性空间。

证: $\mathbf{R}^+$ 关于加法运算封闭, 且定义 5-5 中关于加法运算封闭性的(1)、(2)成立。

(3) $a \oplus \theta = a \Rightarrow a\theta = a \Rightarrow \theta = 1$ 。

(4) $a \oplus (-a) = \theta \Rightarrow a(-a) = 1 \Rightarrow (-a) = 1/a$ 。

$\mathbf{R}^+$ 关于数乘运算封闭, (1)~(4)成立, 故 $\mathbf{R}^+$ 是 R 上的线性空间。

定理 5-1 线性空间 V 中的零元素唯一, 负元素也唯一。

证: 设 θ_1 与 θ_2 都是 V 的零元素, 则

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$$

设 x_1 与 x_2 都是 x 的负元素, 则由 $x + x_1 = \theta$ 及 $x + x_2 = \theta$ 可得

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + \theta = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = (x + x_1) + x_2 \\ &= \theta + x_2 = x_2 + \theta = x_2 \end{aligned}$$

定义 5-6 在线性空间 V 中, 减法运算为

$$x - y = x + (-y)$$

定义 5-7 向量 $\mathbf{x}, x_i \in V$, 若存在 $C_i \in K$, 使向量 $\mathbf{x} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$, 则称向量 $\mathbf{x}$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的线性组合, 或者向量 $\mathbf{x}$ 可由 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 线性表示。

定义 5-8 若有 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 不全为 0, 使得 $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m = \theta$, 则称 $x_1, x_2, \cdots$,

x_m 线性相关。

定义 5-9 仅当 $c_1, c_2, \dots, c_m$ 全为 0 时, 才有 $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m = \theta$, 则称 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 线性无关。

5.1.3 基与坐标

定义 5-10 在线性空间 V 中, 若元素组 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 满足以下两个条件:

- (1) $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性无关。
- (2) $\forall x \in V$ 都可由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性表示。

称 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 V 的一个基, n 为 V 的维数, 记作 $\dim V = n$, 或者 V^n 。

例 5-4 在矩阵空间 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 中, 易见, 因为 $E_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 线性无关,

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

故 $E_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 是 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 的一个基, $\dim \mathbf{R}^{m \times n} = mn$ 。

定义 5-11 给定线性空间 V^n 的基 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 当 $x \in V^n$ 时, $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$, 称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为 x 在给定基 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 下的坐标, 记作列向量 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ 。

例 5-5 在矩阵空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中, 设 $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, 取基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$:

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$$

坐标为 $\alpha = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$ 。

$$\text{取基 } B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} A &= a_{11}(B_1 - B_2) + a_{12}(B_2 - B_3) + a_{21}(B_3 - B_4) + a_{22}B_4 \\ &= a_{11}B_1 + (a_{12} - a_{11})B_2 + (a_{21} - a_{12})B_3 + (a_{22} - a_{21})B_4 \end{aligned}$$

坐标为 $\beta = (a_{11}, a_{12} - a_{11}, a_{21} - a_{12}, a_{22} - a_{21})^T$ 。

定理 5-2 在线性空间 V^n 中, 元素在给定基下的坐标唯一。

证: 设 V^n 的基为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。对于 $x \in V^n$, 若

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \dots + \eta_n x_n$$

则有

$$(\xi_1 - \eta_1)x_1 + (\xi_2 - \eta_2)x_2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)x_n = \theta$$

因为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性无关, 所以 $\xi_i - \eta_i = 0$, 即 $\xi_i = \eta_i (i=1, 2, \dots, n)$, 故 x 的坐标唯一。

定义 5-12 设线性空间 V^n 的基(I)为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 基(II)为 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 则

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \dots + c_{n1}x_n \\ y_2 = c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{n2}x_n \\ \vdots \\ y_n = c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \dots + c_{nn}x_n \end{cases}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

写成矩阵乘法形式为

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)C$$

称上式为基变换公式, C 为由基(I)改变为基(II)的过渡矩阵。

定义 5-13 设 $x \in V^n$ 在两个基下的坐标分别为 α 和 β , 则有



基与坐标
例题



基变换与
坐标变换

$$\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{x}_1 + \xi_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \xi_n \mathbf{x}_n = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n) \boldsymbol{\alpha} \quad (5-2)$$

$$\mathbf{x} = \eta_1 \mathbf{y}_1 + \eta_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + \eta_n \mathbf{y}_n = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_n) \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n) \mathbf{C} \boldsymbol{\beta} \quad (5-3)$$

由定理 5-2 可得 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C} \boldsymbol{\beta}$, 或者 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}$, 称为坐标变换公式。

例 5-6 在多项式空间 $P[t]_2$ 中存在两种基:

(I) $f_1(t)=1, f_2(t)=1+t, f_3(t)=1+t+t^2$ 。

(II) $g_1(t)=1+t^2, g_2(t)=t+t^2, g_3(t)=1+t$ 。

(1) 求由基 (I) 改变为基 (II) 的过渡矩阵。

(2) 求 $P[t]_2$ 中在基 (I) 和基 (II) 下有相同坐标的全体多项式。

解:

(1) 采用中介基法求过渡矩阵: 取 $P[t]_2$ 的简单基 $\mathbf{C}$ 为 $1, t, t^2$, 写出由简单基改变为基 (I) 和基 (II) 的过渡矩阵:

$$\text{所以} \quad \begin{cases} f_1(t)=1 \times 1 + 0 \times t + 0 \times t^2 \\ f_2(t)=1 \times 1 + 1 \times t + 0 \times t^2 \\ f_3(t)=1 \times 1 + 1 \times t + 1 \times t^2 \end{cases}, \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{又} \quad \begin{cases} g_1(t)=1 \times 1 + 0 \times t + 1 \times t^2 \\ g_2(t)=0 \times 1 + 1 \times t + 1 \times t^2 \\ g_3(t)=1 \times 1 + 1 \times t + 0 \times t^2 \end{cases}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{cases} \mathbf{f} = \mathbf{C} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{g} = \mathbf{C} \mathbf{C}_2 \end{cases}$$

由基 (I) 改变为基 (II) 的过渡矩阵为

$$\mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 设 $\mathbf{f}(t) \in P[t]_2$ 在基 (I) 和基 (II) 下的坐标分别为 $\boldsymbol{\alpha} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T, \boldsymbol{\beta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ 。由坐标变换公式 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C} \boldsymbol{\beta}$ 及题设 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ 可得 $(\mathbf{I} - \mathbf{C}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 。

该齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{\alpha} = k (1, 0, 1)^T (\forall k \in \mathbf{R})$$

在基 (I) 和基 (II) 下有相同坐标的全体多项式:

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \boldsymbol{\alpha} = k f_1(t) + k f_3(t) = 2k + kt + kt^2 (\forall k \in \mathbf{R})$$

定义 5-14 在线性空间 V 中, 若子集 V_1 非空, 且对 V 中的线性运算封闭, 即

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1$$

若 $\forall \mathbf{x} \in V_1, \forall k \in K \Rightarrow k\mathbf{x} \in V_1$, 称 V_1 为 V 的线性子空间, 简称子空间。

说明:

(1) 子空间 V_1 也是线性空间, 而且 $\dim V_1 \leq \dim V$ 。

(2) $\{\theta\}$ 是 V 的线性子空间, 规定 $\dim \{\theta\} = 0$ 。

(3) 子空间 V_1 的零元素就是 V 的零元素。

划分 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) \in \mathbf{C}^{m \times n} (\boldsymbol{\beta}_j \in \mathbf{C}^m)$, 称 $R(\mathbf{A}) = L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$ 为矩



线性子空间

阵 A 的值域(列空间)。易见 $\dim R(A) = \text{rank } A$ 。

设 $A \in C^{m \times n}$, 称 $N(A) = \{x | Ax = 0, x \in C^n\}$ 为矩阵 A 的零空间。易见 $\dim N(A) = n - \text{rank } A$ 。

定理 5-3 线性空间 V^n 中, 设子空间 V_1 的基为 $x_1, x_2, \dots, x_m (m < n)$, 则存在 $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n \in V^n$, 得 $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ 为 V^n 的基。

证: $m < n \Rightarrow \exists x_{m+1} \in V^n$ 不能由 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 线性表示 $\Rightarrow x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$ 线性无关。

若 $m+1=n$, 则 $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ 是 V^n 的基。

否则, $m+1 < n \Rightarrow \exists x_{m+2} \in V^n$ 不能由 $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ 线性表示 $\Rightarrow x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}$ 线性无关。

若 $m+2=n$, 则 $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}$ 是 V^n 的基; 否则, $m+2 < n \Rightarrow \dots$ 。

依此类推, 即得所证。

定义 5-15 子空间的交:

$$V_1 \cap V_2 = \{x | x \in V_1 \text{ 且 } x \in V_2\}$$

子空间的和:

$$V_1 + V_2 = \{x = x_1 + x_2 | x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$$

子空间的直和:

$$V_1 + V_2 = \{x = x_1 + x_2 | \text{唯一 } x_1 \in V_1, \text{唯一 } x_2 \in V_2\}$$

记作

$$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 \quad (5-4)$$

定理 5-4 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的子空间。

证: $\theta \in V_1, \theta \in V_2 \Rightarrow \theta \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2$ 非空。

$$\forall x, y \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \begin{cases} x, y \in V_1 \Rightarrow x + y \in V_1 \\ x, y \in V_2 \Rightarrow x + y \in V_2 \end{cases} \Rightarrow x + y \in V_1 \cap V_2$$

$$\forall k \in K, \forall x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in V_1 \Rightarrow kx \in V_1 \\ x \in V_2 \Rightarrow kx \in V_2 \end{cases} \Rightarrow kx \in V_1 \cap V_2$$

所以, $V_1 \cap V_2$ 是 V 的子空间。

定理 5-5 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则 $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间。

证: $\theta \in V_1, \theta \in V_2 \Rightarrow \theta = \theta + \theta \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2$ 非空。

$$\begin{aligned} \forall x, y \in V_1 + V_2 &\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \\ y = y_1 + y_2, y_1 \in V_1, y_2 \in V_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), x_1 + y_1 \in V_1, x_2 + y_2 \in V_2 \\ &\Rightarrow x + y \in V_1 + V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall k \in K, \forall x \in V_1 + V_2 &\Rightarrow x = x_1 + x_2, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \\ &\Rightarrow kx = kx_1 + kx_2, kx_1 \in V_1, kx_2 \in V_2 \\ &\Rightarrow kx \in V_1 + V_2 \end{aligned}$$

所以 $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间。

定理 5-6 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的有限维子空间, 则



线性子空间例题

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) \quad (5-5)$$

证:

$$\dim V_1 = n_1, \dim V_2 = n_2, \dim(V_1 \cap V_2) = m$$

要证 $\dim(V_1 \cap V_2) = n_1 + n_2 - m$ 。

(1) $m = n_1$ 时:

$$(V_1 \cap V_2) \subset V_1 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = V_1$$

$$(V_1 \cap V_2) \subset V_2 \Rightarrow V_1 \subset V_2 \Rightarrow V_1 + V_2 = V_2$$

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_2 = n_2 = n_1 + n_2 - m$$

(2) $m = n_2$ 时:

$$(V_1 \cap V_2) \subset V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = V_2$$

$$(V_1 \cap V_2) \subset V_1 \Rightarrow V_2 \subset V_1 \Rightarrow V_1 + V_2 = V_1$$

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 = n_1 = n_1 + n_2 - m$$

(3) $m < n_1, m < n_2$ 时:

设 $V_1 \cap V_2$ 的基为 $x_1, x_2, \dots, x_m$, 那么, 扩充为 V_1 的基:

$$x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n_1-m} \quad (\text{I})$$

扩充为 V_2 的基:

$$x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_{n_2-m} \quad (\text{II})$$

考虑元素组:

$$x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n_1-m}, z_1, z_2, \dots, z_{n_2-m} \quad (\text{III})$$

因为 $V_1 = L(\text{I}), V_2 = L(\text{II})$, 所以 $V_1 + V_2 = L(\text{III})$ (自证)。

下面证明元素组(III)线性无关:

设有数组 $k_1, k_2, \dots, k_m, p_1, p_2, \dots, p_{n_1-m}, q_1, q_2, \dots, q_{n_2-m}$, 使得

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m + p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_{n_1-m} y_{n_1-m} + q_1 z_1 + q_2 z_2 + \dots + q_{n_2-m} z_{n_2-m} = \theta$$

$$\text{由 } x = \begin{cases} k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m + p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_{n_1-m} y_{n_1-m} \in V_1 \\ -(q_1 z_1 + q_2 z_2 + \dots + q_{n_2-m} z_{n_2-m}) \in V_2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{得 } x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_m x_m$$

结合(*)中第二式得

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_m x_m + q_1 z_1 + q_2 z_2 + \dots + q_{n_2-m} z_{n_2-m} = \theta$$

结合(*)中第一式得

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m + p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_{n_1-m} y_{n_1-m} = \theta$$

(I) 由线性无关可得

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0, p_1 = p_2 = \dots = p_{n_1-m} = 0$$

故元素组(III)线性无关, 从而是 $V_1 + V_2$ 的一个基。因此,

$$\dim(V_1 + V_2) = n_1 + n_2 - m$$

定理 5-7 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则

$$V_1 + V_2 \text{ 是直和} \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$$

证: 充分性。已知 $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$ 。对于 $\forall z \in V_1 + V_2$, 若

$$\begin{cases} z = x_1 + x_2, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \\ z = y_1 + y_2, y_1 \in V_1, y_2 \in V_2 \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) &= \theta, x_1 - y_1 \in V_1, x_2 - y_2 \in V_2 \\ \Rightarrow x_1 - y_1 &= -(x_2 - y_2) \in V_1 \cap V_2 \\ \Rightarrow x_1 - y_1 &= \theta, x_2 - y_2 = \theta \\ \Rightarrow x_1 &= y_1, x_2 = y_2 \end{aligned}$$

故 $z \in V_1 + V_2$ 的分解式唯一, 从而 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ 。

必要性。若 $V_1 \cap V_2 \neq \{\theta\}$, 则有 $\theta \neq x \in V_1 \cap V_2$ 。对于 $\theta \in V_1 \cap V_2$, 有 $\theta = \theta + \theta, \theta \in V_1, \theta \in V_2$,

$$\theta = x + (-x), x \in V_1, (-x) \in V_2$$

即 $\theta \in V_1 + V_2$ 有两种不同的分解式, 这与 $V_1 + V_2$ 是直和矛盾。故 $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$ 。

推论 1 $V_1 + V_2$ 是直和 $\Leftrightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ 。

推论 2 设 $V_1 + V_2$ 是直和, V_1 的基为 $x_1, x_2, \dots, x_k, V_2$ 的基为 $y_1, y_2, \dots, y_l$, 则 $V_1 + V_2$ 的基为 $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l$ 。

证: 因为 $V_1 + V_2 = L(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l)$, 且 $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = k + l$, 所以 $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l$ 线性无关, 故 $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l$ 是 $V_1 + V_2$ 的基。



5.2 线性变换及其矩阵

5.2.1 线性变换及相关概念

定义 5-16 设有线性空间 V 和数域 K , T 是 V 中的变换。若对 $\forall x, y \in V, \forall k, l \in K$, 都有 $T(kx + ly) = k(Tx) + l(Ty)$, 称 T 是 V 中的线性变换。

线性变换的性质如下:

- (1) $T\theta = T(0x + 0y) = 0(Tx) + 0(Ty) = 0$ 。
- (2) $T(-x) = T((-1)x + 0y) = (-1)(Tx) + 0(Ty) = -Tx$ 。
- (3) $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$ 线性相关 $\Rightarrow Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_m$ 线性相关。
- (4) $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$ 线性无关时, 不能推出 $Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_m$ 线性无关。
- (5) T 是线性变换 $\Leftrightarrow T(x + y) = Tx + Ty, T(kx) = k(Tx) (\forall x, y \in V, \forall k \in K)$ 。

例 5-7 矩阵空间 $\mathbf{R}^{n \times n}$, 给定矩阵 $B_{n \times n}$, 则变换 $TX = BX + XB (\forall X \in \mathbf{R}^{n \times n})$ 是 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 的线性变换。

定义 5-17 线性变换的值域是 $R(T) = \{y | y = Tx, x \in V\}$ 。

定义 5-18 线性变换的核是 $N(T) = \{x | Tx = \theta, x \in V\}$ 。

定理 5-8 设 T 是线性空间 V 的线性变换, 则 $R(T)$ 和 $N(T)$ 都是 V 的子空间。

证:

(1) V 非空 $\Rightarrow R(T)$ 非空。

$$\forall y_2 \in R(T) \Rightarrow \exists x_2 \in V, \text{s.t. } y_2 = Tx_2$$

$$y_1 + y_2 = Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2) \in R(T) (\text{因 } x_1 + x_2 \in V)$$

$$ky_1 = k(Tx_1) = T(kx_1) \in R(T) (\text{因 } \forall k \in K, kx_1 \in V)$$

故 $R(T)$ 是 V 的子空间。

(2) $\theta \in V, T\theta = \theta \Rightarrow \theta \in N(T)$, 即 $N(T)$ 非空。

$\forall x, y \in N(T) \Rightarrow T(x+y) = Tx + Ty = \theta$, 即 $x+y \in N(T)$ 。

$\forall x \in N(T), \forall k \in K \Rightarrow T(kx) = k(Tx) = \theta$, 即 $kx \in N(T)$ 。

故 $N(T)$ 是 V 的子空间。

注意, 定义 T 的秩为 $\dim R(T)$, T 的亏为 $\dim N(T)$ 。

例 5-8 设线性空间 V^n 的基为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, T 是 V 的线性变换, 则

$$R(T) = L(Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n), \dim R(T) + \dim N(T) = n$$

证:

(1) 先证 $R(T) \subset L(Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n)$ 。

$\forall y \in R(T) \Rightarrow \exists x \in V^n, \text{s.t. } y = Tx$

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \Rightarrow y = c_1 (Tx_1) + c_2 (Tx_2) + \dots + c_n (Tx_n) \in L(Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n)$$

再证 $R(T) \supset L(Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n)$ 。

$$\forall y \in L(Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n) \Rightarrow \exists c_1, c_2, \dots, c_n, \text{s.t. } y = c_1 (Tx_1) + c_2 (Tx_2) + \dots + c_n (Tx_n)$$

$$x_i \in V^n \Rightarrow Tx_i \in R(T) \Rightarrow y = c_1 (Tx_1) + c_2 (Tx_2) + \dots + c_n (Tx_n) \in R(T)$$

(2) 设 $\dim N(T) = m$, 且 $N(T)$ 的基为 $y_1, y_2, \dots, y_m$, 扩充为 V^n 的基: $y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n$, 则

$$R(T) = L(Ty_1, Ty_2, \dots, Ty_m, Ty_{m+1}, \dots, Ty_n) = L(Ty_{m+1}, Ty_{m+2}, \dots, Ty_n)$$

设数组 $k_{m+1}, k_{m+2}, \dots, k_n$ 使得 $k_{m+1} (Ty_{m+1}) + k_{m+2} (Ty_{m+2}) + \dots + k_n (Ty_n) = \theta$, 故

$$T(k_{m+1} y_{m+1} + k_{m+2} y_{m+2} + \dots + k_n y_n) = \theta$$

因为 T 是线性变换, 所以 $k_{m+1} y_{m+1} + k_{m+2} y_{m+2} + \dots + k_n y_n \in N(T)$, 故

$$k_{m+1} y_{m+1} + k_{m+2} y_{m+2} + \dots + k_n y_n = l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_m y_m$$

$$\text{即 } (-l_1) y_1 + (-l_2) y_2 + \dots + (-l_m) y_m + k_{m+1} y_{m+1} + \dots + k_n y_n = \theta$$

因为 $y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n$ 线性无关, 所以 $k_{m+1} = 0, 2, \dots, k_n = 0$ 。

因此, $Ty_{m+1}, Ty_{m+2}, \dots, Ty_n$ 线性无关, 从而 $\dim R(T) = n - m$, 即 $\dim R(T) + m = n$ 。

例 5-9 在向量空间 R^4 中, $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, 线性变换 T 为 $Tx = (\xi_1 + \xi_2 - 3\xi_3 - \xi_4, 3\xi_1 - \xi_2 - 3\xi_3 + 4\xi_4, 0, 0)$, 求 $R(T)$ 和 $N(T)$ 的基与维数。

解:

(1) 取 R^4 的简单基 e_1, e_2, e_3, e_4 , 计算

$$Te_1 = (1, 3, 0, 0), Te_2 = (1, -1, 0, 0), Te_3 = (-3, -3, 0, 0), Te_4 = (-1, 4, 0, 0)$$

该基象组的一个最大线性无关组为 Te_1, Te_2 。故 $\dim R(T) = 2$, 且 $R(T)$ 的一个基为 Te_1, Te_2 。

(2) 记

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

则

$$N(T) = \{x \mid Tx = \theta\} = \left\{ x \mid A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$



例题 5-9

$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ 。故 $\dim N(T) = 2$, 且 $N(T)$ 的一个基为 $(3 \ 3 \ 2 \ 0), (-3 \ 7 \ 0 \ 4)$

定义 5-19 在线性变换 V 中, 定义变换 T 为 $Tx = x (\forall x \in V)$, 则 T 是单位变换, 记作 T_e 。

定义 5-20 在线性空间 V 中, 定义变换 T 为 $Tx = \theta (\forall x \in V)$, 则 T 是零变换, 记作 T_0 。

5.2.2 线性变换的运算

定义 5-21 设有线性空间 V 和数域 K , 线性变换 T_1 与 T_2 。线性变换有以下运算:

(1) 相等。若 $T_1x = T_2x (\forall x \in V)$, 称 $T_1 = T_2$ 。

(2) 加法。定义变换 T 为 $Tx = T_1x + T_2x (\forall x \in V)$, 则 T 是线性变换, 记作 $T = T_1 + T_2$ 。

(3) 负变换。定义变换 T 为 $Tx = -(T_1x) (\forall x \in V)$, 则 T 是线性变换, 记作 $T = -T_1$ 。

(4) 数乘。给定 $k \in K$, 定义变换 T 为 $Tx = k(T_1x) (\forall x \in V)$, 则 T 是线性变换, 记作 $T = kT_1$ 。

注意, 集合 $\text{Hom}(V, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{T \mid T \text{ 是数域 } K \text{ 上的线性空间 } V \text{ 的线性变换}\}$, 按照线性运算 (2)~(4) 构成数域 K 上的线性空间, 称为 V 的同态。

(5) 乘法。定义变换 T 为 $Tx = T_1(T_2x) (\forall x \in V)$, 则 T 是线性变换, 记作 $T = T_1T_2$ 。

定义 5-22 设 T 是线性空间 V 的线性变换, 若 V 的线性变换 S 满足 $(ST)x = (TS)x = x (\forall x \in V)$, 则称 T 为可逆变换, 且 S 为 T 的逆变换, 记作 $T^{-1} = S$ 。

定义 5-23 设 T 是线性空间 V 的线性变换, 则 $T^m \stackrel{\text{def}}{=} T^{m-1}T (m = 2, 3, 4, \dots)$ 也是 V 的线性变换。

定义 5-24 设 T 是线性空间 V 的线性变换, 多项式

$$f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m (a_i \in K) \quad (5-6)$$

则 $f(T) = a_0T_e + a_1T + \dots + a_mT^m$ 也是 V 的线性变换, 称为多项式变换。

5.2.3 线性变换的矩阵表示

定义 5-25 设线性空间 V^n 的基为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, T 是 V^n 的线性变换, 则 $Tx_i \in V^n$, 且有

$$\begin{cases} Tx_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n \\ Tx_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n \\ \vdots \\ Tx_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (5-7)$$



逆变换、幂变换、多项式变换



线性变换的矩阵表示

写成矩阵乘法形式 $T(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)A$, 称 A 为线性变换 T 在基 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 下的矩阵。

注意:

(1) 给定 V^n 的基 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和线性变换 T 时, 矩阵 A 唯一。

(2) 给定 V^n 的基 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和矩阵 A 时, 基象组 $Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n$ 确定。

$$\forall x \in V^n \Rightarrow x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

定义变换 $Tx = c_1(Tx_1) + c_2(Tx_2) + \dots + c_n(Tx_n)$, 则 T 是线性变换, 因此线性变换 T 与矩阵 A 有一一对应关系。

定义 5-26 线性运算的矩阵表示由定理 5-9 给出。

定理 5-9 设线性空间 V^n 的基为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 线性变换 T_1 与 T_2 的矩阵为 A 与 B 。

(1) $T_1 + T_2$ 在该基下的矩阵为 $A + B$ 。

(2) kT_1 在该基下的矩阵为 kA 。

(3) $T_1 T_2$ 在该基下的矩阵为 AB 。

(4) T_1^{-1} 在该基下的矩阵为 A^{-1} 。

证:

$$T_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)A, T_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)B$$

(1) 略。

(2) 略。

(3) 先证: $\forall C = (c_{ij})_{n \times m}, T[(x_1, x_2, \dots, x_n)C] = [T(x_1, x_2, \dots, x_n)]C$ 。

$$\begin{aligned} \text{左} &= T \left[\sum_i c_{i1} x_1, \sum_i c_{i2} x_2, \dots, \sum_i c_{in} x_n \right] \\ &= \left[\sum_i c_{i1} (Tx_1), \sum_i c_{i2} (Tx_2), \dots, \sum_i c_{in} (Tx_n) \right] \\ &= (Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n)C = \text{右} \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} (T_1 T_2)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= T_1[T_2(x_1, x_2, \dots, x_n)] = T_1[(x_1, x_2, \dots, x_n)B] \\ &= [T_1(x_1, x_2, \dots, x_n)]B = (x_1, x_2, \dots, x_n)AB \end{aligned}$$

(4) 记 $T_1^{-1} = T_2$, 则

$$T_1 T_2 = T_2 T_1 = T_e \stackrel{(3)}{\Rightarrow} AB = BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$$

定义 5-27 象与原象坐标间的关系由定理 5-10 给出。

定理 5-10 线性空间 V^n 的基为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 线性变换 T 在该基下的矩阵为 $A, x \in$

$$V^n \text{ 的坐标为 } \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, Tx \text{ 的坐标为 } \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \text{ 则 } \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

证:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$$

$$Tx = \xi_1 (Tx_1) + \xi_2 (Tx_2) + \dots + \xi_n (Tx_n)$$