

两个彼此靠得很近的电感线圈流过变化的电流时,电流形成的磁感线会与对方线圈交链,形成互感电压。这样的一对电感线圈称为互感耦合线圈或互感电路,二者之间可以传递变化的信号,又能使前后的电路隔离,同时还能改变电路的电压、电流、相位和阻抗。耦合线圈在电子工程、通信工程、测量仪表、电能变换等方面有着广泛的应用。



## 5.1 互感耦合线圈的伏安关系及同名端

### 5.1.1 互感耦合线圈的伏安关系

两个互感耦合线圈,各自的电流、电压设为关联参考方向,绕在同一个非磁性材料的骨架上,由于互相靠近,一方交变电流产生的磁感线不仅穿过本线圈产生自感电动势,还会有一部分穿过另一线圈(称为交链),产生互感电动势,这些电动势对端子外表现为有电压出现。图 5-1(a)中,1-1'端口输入电流  $i_1$ ,2-2'端口开路, $i_1$  在线圈 1 和 2 中产生的磁通链分别为  $\psi_{11}$  和  $\psi_{21}$ ,且  $\psi_{21} \leq \psi_{11}$ ,磁感线与  $i_1$  的方向符合右手螺旋,磁通链前下标是磁通到达的目的地,后下标是磁通的产生地;同理图 5-1(b)中,2-2'端口输入电  $i_2$ ,1-1'端口开路, $i_2$  电流在线圈 2 和 1 中产生的磁通链分别为  $\psi_{22}$  和  $\psi_{12}$ , $\psi_{12} \leq \psi_{22}$ ;图 5-1(c)是图 5-1(a)、(b)两种情况的叠加,在图中线圈所示的绕向下,各磁通方向一致向左,互相加强。则有

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \psi_2 = \psi_{21} + \psi_{22} = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases} \quad (5-1)$$

式中, $\psi_{11}$ 、 $\psi_{22}$  是自感磁通,与产生它的本线圈电流成正比,比例常数是自感系数  $L_1$ 、 $L_2$ ;  $\psi_{21}$ 、 $\psi_{12}$  是互感磁通,与产生它的对方线圈电流成正比,比例常数  $M$  称为互感系数,单位同自感系数为亨利(H),两线圈间相互影响程度一样, $M$  相等。式(5-1)包含了电流,但与两线

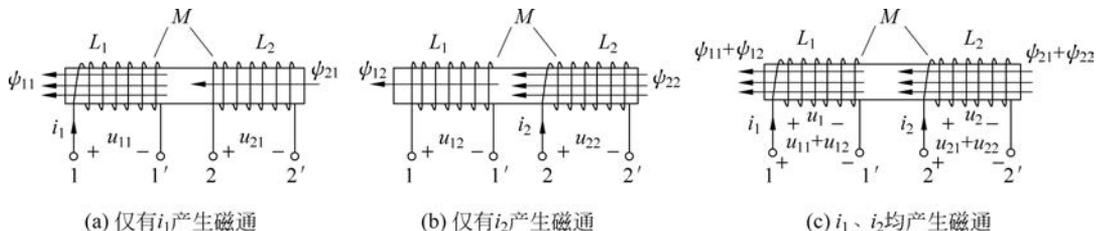


图 5-1 互感耦合线圈的磁感线相互影响引起互感电压

圈的电压无关,为推导伏安关系,将式(5-1)两侧同时对时间  $t$  求导数,得到耦合电感元件的伏安关系式为

$$\begin{cases} u_1 = u_{11} + u_{12} = \frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{21} + u_{22} = \frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (5-2)$$

式中,  $u_{11}$ 、 $u_{22}$  是自感电压,  $u_{21}$ 、 $u_{12}$  是互感电压。若  $i_1$ 、 $i_2$  是同频率的正弦量,可写出式(5-2)对应的复数相量表达式

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases} \quad (5-3)$$

式中,  $j\omega L_1$ 、 $j\omega L_2$  是我们熟悉的自感感抗,而  $j\omega M$  称为互感感抗,单位也为欧姆( $\Omega$ )。

互感系数  $M$  的大小与两线圈的结构、尺寸、相对位置和周围磁环境有关,其量值反映了某线圈电流的磁通与另一线圈相交链的能力。为了表征两互感耦合线圈间的相互影响程度(即耦合程度),定义耦合因数为

$$k = \frac{\psi_{21}}{\psi_{11}} \cdot \frac{\psi_{12}}{\psi_{22}} = \frac{Mi_1}{L_1 i_1} \cdot \frac{Mi_2}{L_2 i_2} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad k \leq 1 \quad (5-4)$$

由于一般  $\psi_{21} < \psi_{11}$ ,  $\psi_{12} < \psi_{22}$ , 所以通常  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1$ , 反映了耦合线圈间只有部分磁链互

相交链,两线圈间不互相交链的磁通称为漏磁通,漏磁通仅引起自感效应。根据耦合因数  $k$  的大小,两线圈间的耦合有以下两种情况: ①紧耦合: 两线圈平行放置并靠近,或者双线并绕,使  $k$  尽量接近于 1,如图 5-2(a)所示,用于两线圈间要传递功率时; ②松耦合: 两线圈垂直放置距离尽量远,使  $k \ll 1$ ,如图 5-2(b)所示,用于两线圈间需避免耦合时,如电力线路与通信线路就不能平行架设。

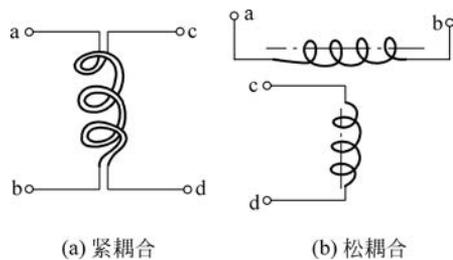


图 5-2 互感耦合线圈的紧耦合与松耦合

### 5.1.2 互感耦合线圈的同名端及同名端测试

如图 5-1 所示线圈的绕向及电流、电压参考方向若有变化,则式(5-3)中每一电压项前面的正负号可能会变化,自感磁通和互感磁通可能会互相削弱;而在实际工作条件下,互感线圈被绝缘物所包裹也看不清绕向。为了在看不清线圈绕向的情况下,能正确判断互感电压的正极与负极所在,耦合线圈上通常标有“同名端”。同名端是用来判断耦合线圈互感电压极性的标志,用“\*”“·”“ $\triangle$ ”等符号在双方线圈的端子处标注。同名端是两耦合线圈中自感电压与互感电压的同极性端。工程中将标有该标志的一端称为耦合线圈的首端。

#### 1. 能看见两线圈绕向用右手螺旋定则判断同名端

设  $i_1$ 、 $i_2$  分别流入一对耦合线圈,借助右手螺旋定则,若两电流在两线圈中产生的磁通互相加强,则  $i_1$ 、 $i_2$  流入端互为同名端,如图(5-3)(a)所示;若两电流在两线圈产生的磁通



互相削弱,则  $i_1$ 、 $i_2$  的流入端互为异名端,如图(5-3)(b)所示。

注意:两“\*”号端是一对同名端,两非“\*”号端也是一对同名端。确定了两线圈的同名端以后,就可用图 5-3(a)、(b)下图的相量模型来表示一对耦合线圈了。

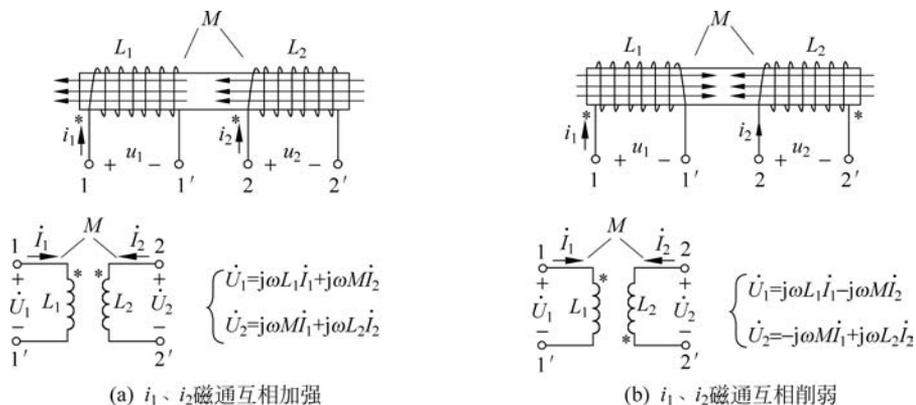


图 5-3 能看见线圈绕向如何判断同名端

针对相量模型写  $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$  的表达式时,设  $\dot{U}_1$  与  $\dot{i}_1$ 、 $\dot{U}_2$  与  $\dot{i}_2$  参考方向关联,则自感电压前取正号;这时若两电流的流入端为一对同名端,则互感电压与自感电压极性同方向,如图 5-3(a)所示,互感电压前取正号;反之,若两电流的流入端为一对异名端,则互感电压与自感电压极性方向相反,如图 5-3(b)所示,互感电压前取负号。

也可如下确定互感电压的正极端:互感电压由对方线圈电流引起,那么对方线圈电流的流入端与本线圈互感电压的正极端对应,两者是一对同名端。书写  $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$  表达式时,该互感电压与  $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$  的极性若一致,则互感电压在表达式中取正号,否则取负号。

耦合线圈中的互感电压,可看成由对方电流控制的受控电压源 CCVS,那么图 5-4(a)的等效电路如图 5-4(b)所示,该等效电路能帮助加深对互感电压的理解。

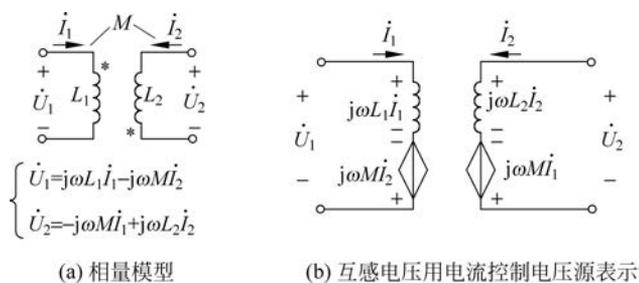


图 5-4 互感电压是由对方电流控制的受控电压源

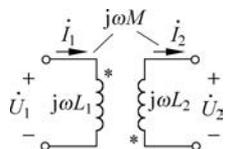


图 5-5 例 5-1 电路图

**【例 5-1】** 如图 5-5 所示,已知自感阻抗  $\omega L_1 = \omega L_2 = 3\Omega$ ,耦合因数  $k = \frac{1}{3}$ 。计算:

- (1) 互感阻抗  $\omega M$  为多少。
- (2) 列写 1 线圈、2 线圈端电压的瞬时值与相量表达式。

解 (1) 根据

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2}}$$

得

$$\omega M = k \times \sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = \frac{1}{3} \sqrt{3 \times 3} = 1 \Omega$$

(2)  $\dot{U}_1$  与  $\dot{I}_1$  为关联参考方向, 1 线圈自感电压为正;  $\dot{I}_2$  流进“\*”号端, 那么 1 线圈的互感电压“\*”号端为正, 与  $\dot{U}_1$  同方向, 则有

$$u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{及} \quad \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$\dot{U}_2$  与  $\dot{I}_2$  为非关联参考方向, 2 线圈自感电压为负;  $\dot{I}_1$  也流进“\*”号端, 那么 2 线圈的互感电压“\*”号端为正, 与  $\dot{U}_2$  反方向, 则有

$$u_2 = u_{21} + u_{22} = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \text{及} \quad \dot{U}_2 = -j\omega M \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2$$

**【例 5-2】** 如图 5-6 所示非磁性骨架上各绕有线圈, 用三组不同符号标出两两线圈之间的同名端。

解 观察 1、2 两立柱形成的环形路径,  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$  产生的磁通均逆时针环形, 互相加强, 所以  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$  流入端互为同名端, 用“\*”号表示。

再观察 1、3 两立柱形成的环形路径,  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_3$  产生的磁通均逆时针绕行, 互相加强, 所以  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_3$  流入端互为同名端, 用“△”号表示。

最后观察 2、3 两立柱形成的环形路径,  $\dot{I}_2$  产生的磁通顺时针、 $\dot{I}_3$  产生的磁通逆时针, 方向相反互相削弱, 所以  $\dot{I}_2$ 、 $\dot{I}_3$  流入端互为异名端, 用“·”号表示。三组同名端不一致时, 用不同的符号进行区别。

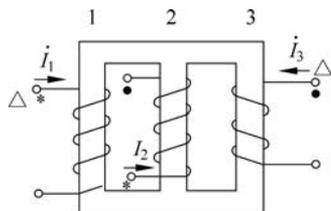


图 5-6 例 5-2 电路图

## 2. 不知两线圈绕向用直流毫伏表测试同名端

如图 5-7 所示, 将线圈的 1、2 端与 1.5V 干电池 E、限流电阻 R、开关 S 接成一个回路; 线圈的 3、4 端与直流毫伏表接成一个回路, 直流毫伏表旁所标的 +、- 号是表本身的极性, 当所测电压极性与表本身的极性一致时, 表正偏转。合上开关 S 瞬间,  $i$  快速增长,  $\frac{di}{dt} > 0$ ,

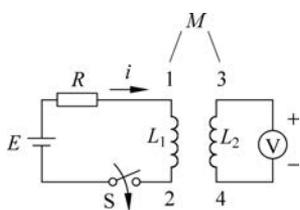


图 5-7 用直流毫伏表测试同名端

端子 1 为自感电压的正极 (阻止  $i$  增长), 毫伏表若正偏转, 表明互感电压的正极在 3 端子, 则 1、3 两端互为同名端; 毫伏表若反偏转, 表明互感电压的正极在 4 端子, 则 1、4 两端互为同名端。

若已知 1、3 两端为同名端, 长久通电后 S 突然断开,

$i$  快速减小,  $\frac{di}{dt} < 0$ , 端子 2 为自感电压的正极 (弥补  $i$  减

小),那么端子 4 为互感电压的正极,电压表反偏转。

**【例 5-3】** 如图 5-8 所示的耦合线圈,(1)检验两图的同名端标志是否正确。(2)判断图 5-8(a)开关 S 闭合瞬间电压表的偏转方向。(3)判断图 5-8(b)开关 S 打开瞬间电压表的偏转方向。

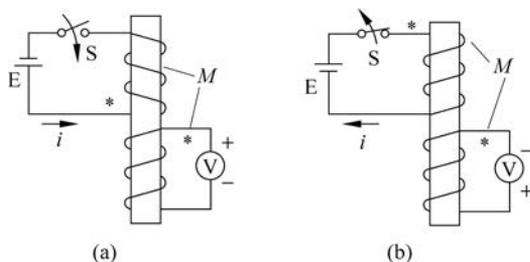


图 5-8 例 5-3 电路图

**解** (1) 同名端标志正确。

(2) 图 5-8(a)开关 S 闭合瞬间电压表正偏转。

(3) 图 5-8(b)开关 S 打开瞬间电压表也是正偏转。图 5-8(b)与图 5-8(a)相比,出现了四处相反的因素: E 的极性反、开关 S 动作的方向反、上线圈绕向反、直流毫伏表的极性反。

### 3. 不知两线圈绕向,用交流电压表测试同名端

如图 5-9 所示一对耦合线圈,1、2 端加交流电压源供电,3、4 端开路,电压表内电阻无穷大,那么左侧电路(称为原边或一次侧)中只有自感电压,右侧电路(称为副边或二次侧)中只有互感电压。测试步骤如下:

(1) 先用电压表分别测量  $\dot{U}_{12}$  和  $\dot{U}_{34}$  的有效值,并记录。

(2) 将 2、4 两端用导线短路,用电压表测量  $\dot{U}_{13}$  的有效值,有以下两种可能: ①若  $U_{13} = |U_{12} - U_{34}|$ ,表明  $\dot{U}_{12}$  和  $\dot{U}_{34}$  是互相削弱的,则 1、3 两端为同名端,如图 5-9(b)所示; ②若  $U_{13} = U_{12} + U_{34}$ ,表明  $\dot{U}_{12}$  和  $\dot{U}_{34}$  是互相加强的,则 1、4 两端为同名端,如图 5-9(c)所示。

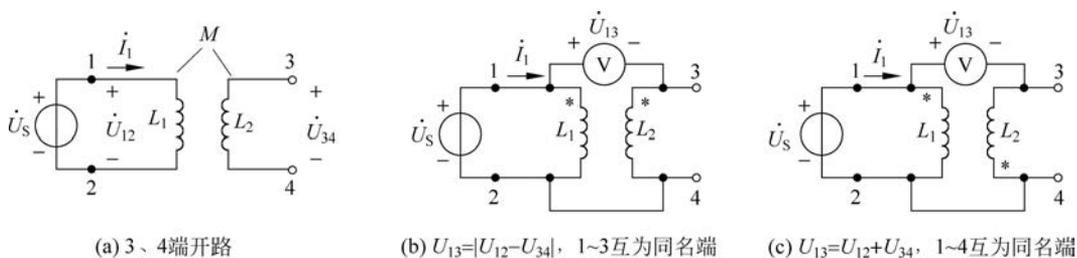


图 5-9 用交流电压表测试同名端

如图 5-10(a)所示变压器由耦合线圈组成,左侧为一次线圈,右侧两个二次线圈的匝数、额定电压、额定电流均相等。若需提高输出电压将两个二次线圈串联运行,须首尾相连,后者首端接前者尾端,如图 5-10(b)所示;如果接错极性,则两个线圈的电压互相削弱,输出电压将为零。

若需提高带负载能力,增加输出电流,将两个二次线圈并联运行,须“\*”端与“\*”端相连,非“\*”端与非“\*”端相连,再分别引输出线,如图 5-10(c)所示;如果接错极性,两个并联线圈本身形成的回路中会出现很大的环流,烧毁线圈。

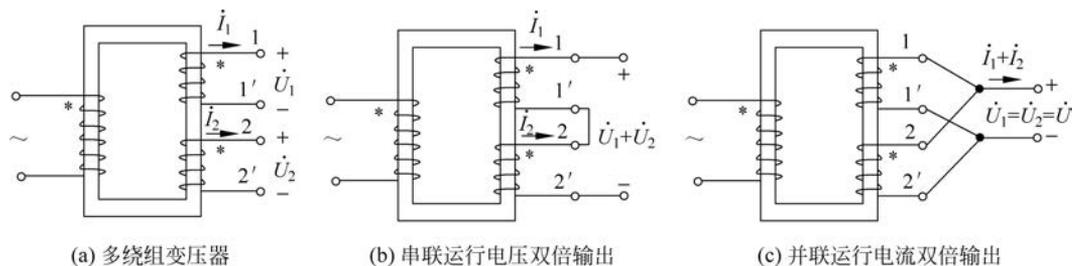


图 5-10 变压器两个相同副线圈的连接

### 【课后练习】

5.1.1 将图 5-11(a)、(c) 的自感电压与互感电压的正负极性分别标在图 5-11(b)、(d) 中,并分别写出  $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$  与  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$  的关系式。

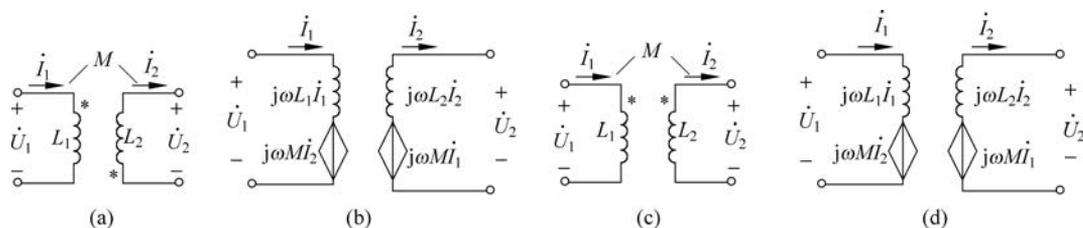


图 5-11 5.1.1 电路图

5.1.2 标出如图 5-12 所示两对耦合线圈的同名端。

5.1.3 如图 5-13 所示电路一次绕组接在有效值为 120V 的交流电源上,二次有 3 个绕组额定电流值都为 2A,其感应电压有效值分别为 5V、3V、8V。(1)要给负载输出 8V 电压 4A 电流,应该如何接线?(2)要给负载输出 3V 电压 4A 电流,又应该如何接线?

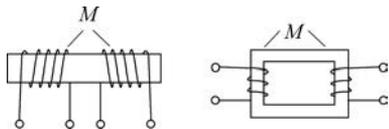


图 5-12 5.1.2 电路图

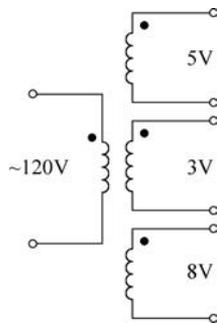


图 5-13 5.1.3 电路图

## 5.2 含互感线圈电路的计算

含互感线圈的电路与一般正弦电路相比,每有一对互感存在,在双方线圈中就分别多一项互感电压,借助同名端可正确判断互感电压的极性。



## 5.2.1 互感耦合线圈的串联

### 1. 顺向串联

两个耦合线圈首尾串联,即后者首端接前者尾端,这时电流  $\dot{I}$  均从“\*”端流入,  $R_1$ 、 $R_2$  为线圈的绕线电阻,如图 5-14(a)所示,其伏安关系式为

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I} + j\omega M\dot{I} + (R_2 + j\omega L_2)\dot{I} + j\omega M\dot{I} \\ &= (R_1 + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + 2j\omega M) \cdot \dot{I} \\ &= [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)]\dot{I} \\ &= (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega L\dot{I}\end{aligned}$$

所以等效电感增加为

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (5-5)$$

等效阻抗也会随之增加。顺向串联时的相量图如图 5-14(b)所示,从相量图可见由于互感的作用,使电路的感性增强了,  $\dot{U}$  超前  $\dot{I}$  的角度(阻抗角)更大。

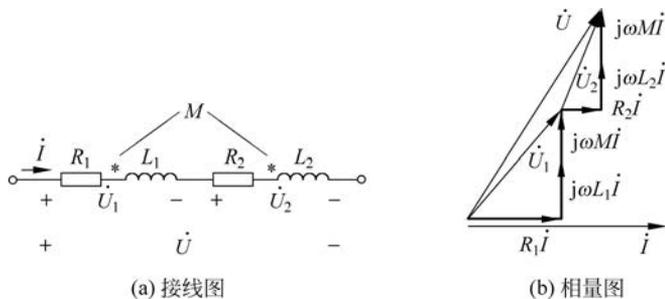


图 5-14 两个耦合线圈顺向串联的接线图及相量图

### 2. 反向串联

两个耦合线圈首端连首端(或尾端连尾端)串联,这时电流  $\dot{I}$  从一个线圈的“\*”端流入,另一个线圈的“\*”端流出,如图 5-15(a)所示,其伏安关系式为

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I} - j\omega M\dot{I} + (R_2 + j\omega L_2)\dot{I} - j\omega M\dot{I} \\ &= (R_1 + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 - 2j\omega M) \cdot \dot{I} \\ &= [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)]\dot{I} \\ &= (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega L\dot{I}\end{aligned}$$

所以等效电感减小为

$$L = L_1 + L_2 - 2M \quad (5-6)$$

等效阻抗也会随之减小。反向串联时的相量图如图 5-15(b)所示,从相量图可见互感电压滞后电流  $90^\circ$ (相当于容抗的作用),使电路的感性削弱了,  $\dot{U}$  超前  $\dot{I}$  的角度(阻抗角)变小了。从局部看,在互感系数较大时,还可能使  $\dot{U}_1$  或  $\dot{U}_2$  的电压滞后电流,但整体电路不可能

变为容性,其串联后的等效电感大于零。

$$L = L_1 + L_2 - 2M \geq 0$$

即

$$M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \quad (5-7)$$

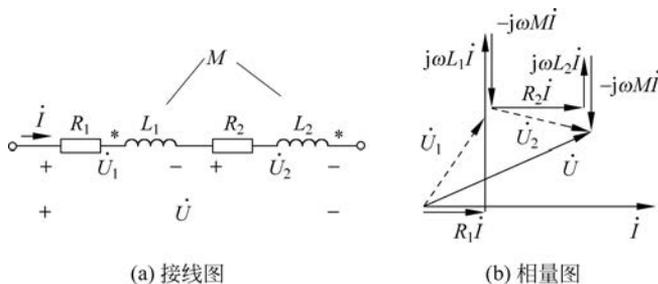


图 5-15 两个耦合线圈反向串联时的接线图及相量图

**【例 5-4】** 一对互感耦合线圈将它们串联起来,加上 30V 直流电压,测得电流  $I$  为 2A;加上 220V 的工频电压,测得电流  $I$  为 5A;将其中一个线圈反向后再串联,交流电压不变,测得电流  $I$  为 10A。

- (1) 求两线圈的绕线电阻之和。
- (2) 判别哪一次接线为顺向串联。
- (3) 求互感系数  $M$ 。

**解** (1) 加上直流电压,线圈的自感阻抗、互感阻抗均为零,两线圈的绕线电阻之和为

$$R_1 + R_2 = \frac{30}{2} = 15\Omega$$

(2) 两次交流电压有效值不变,第一次测量电流较小,第二次测量电流较大。表明第一次是顺向串联,等效阻抗较大;第二次是反向串联,等效阻抗较小。

(3) 设第一次顺向串联时等效电感为  $L'$ ,总阻抗的模值为  $|Z'|$ ,得

$$|Z'| = \frac{U}{I} = \frac{220}{5} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L')^2} = \sqrt{15^2 + (\omega L')^2} = 44\Omega$$

$$(\omega L')^2 = (314L')^2 = 44^2 - 15^2, \quad L' = 0.132\text{H}$$

设第二次反向串联时等效电感为  $L''$ ,总阻抗的模值为  $|Z''|$ ,得

$$|Z''| = \frac{U}{I} = \frac{220}{10} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L'')^2} = \sqrt{15^2 + (\omega L'')^2} = 22\Omega$$

$$(\omega L'')^2 = (314L'')^2 = 22^2 - 15^2, \quad L'' = 0.0513\text{H}$$

因为

$$L' = L_1 + L_2 + 2M, \quad L'' = L_1 + L_2 - 2M$$

所以

$$L' - L'' = 4M, \quad M = \frac{L' - L''}{4} = 0.0202\text{H}$$

### 5.2.2 互感耦合线圈的并联与三端连接

耦合线圈的并联有两种情况,一种是同名端相遇并联;另一种是异名端相遇并联。以前一种为例进行分析。

耦合线圈同名端相遇并联如图 5-16(a)所示,其两条支路的伏安关系式如下:

$$\dot{U} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \quad (5-8)$$

$$\dot{U} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \quad (5-9)$$

将  $\dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1$  代入式(5-8)得

$$\dot{U} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M (\dot{I} - \dot{I}_1) = j\omega M \dot{I} + j\omega (L_1 - M) \dot{I}_1 \quad (5-10)$$

同理,将  $\dot{I}_1 = \dot{I} - \dot{I}_2$  代入式(5-9)得

$$\dot{U} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M (\dot{I} - \dot{I}_2) = j\omega M \dot{I} + j\omega (L_2 - M) \dot{I}_2 \quad (5-11)$$

按式(5-10)、式(5-11)可以得到图 5-16(a)的去耦等效电路,如图 5-16(b)所示,在这张图中,不需再标注互感  $M$  和同名端的标志,使问题简化。这种去耦等效电路可以推广至耦合线圈的三端连接。

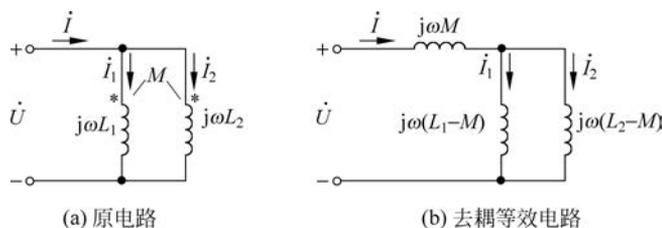


图 5-16 耦合线圈同名端相遇并联的去耦等效电路

耦合线圈的三端连接有如图 5-17 所示的 4 种情况:(a)(b)两同名端相遇,(c)(d)两异名端相遇,线圈的另外两个端子可以相连,也可以不相连。4 种情况的共同点是:在两耦合

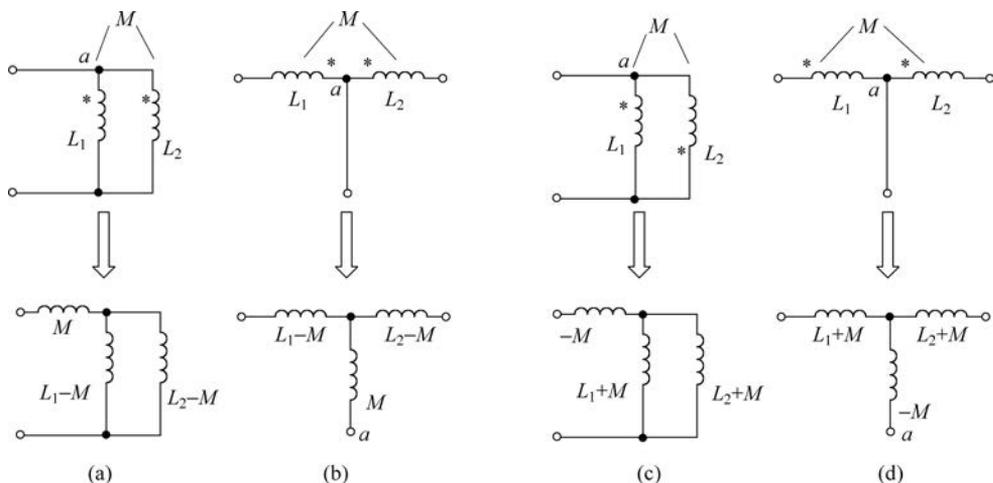


图 5-17 耦合线圈三端连接的四种去耦等效电路

线圈的相遇点 a 处还接有第三条支路。图 5-17(a)(b) 的去耦等效电路是在第三条支路上加一个值为“ $M$ ”的电感, 而两线圈本身的电感减去  $M$ ; 图 5-17(c)(d) 相反, 其等效电路是在第三条支路上加一个值为“ $-M$ ”的电感, 而两线圈本身的电感加上  $M$ 。若已知条件给出的是感抗值, 则直接加上或减去“ $j\omega M$ ”。

【例 5-5】如图 5-18(a) 所示, 已知电源电压  $u = 30\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{V}$ , 求:

- (1) 二次线圈输出端开路时的电压  $\dot{U}_{OC}$ 。
- (2) 二次线圈短路时的电流  $\dot{I}_{SC}$ 。
- (3) 画出 ab 两端的戴维南等效电路。

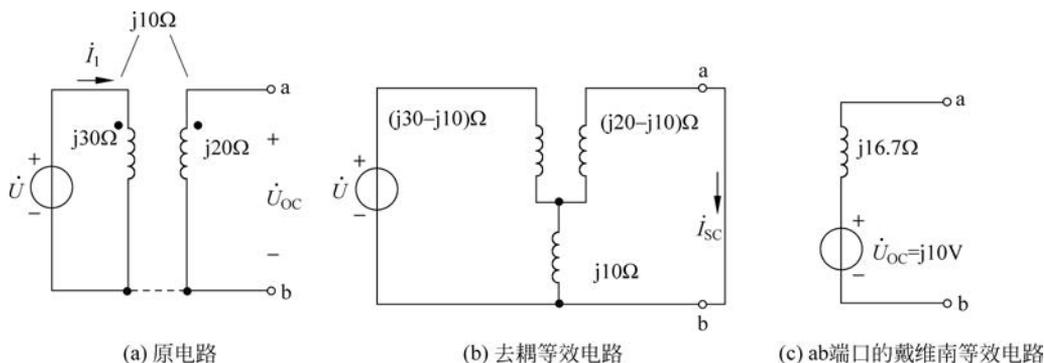


图 5-18 例 5-5 电路图

解 (1) 图 5-18(a) 中二次线圈开路电流为零, 那么二次侧对一次侧没有互感影响, 原边只有自感压降。

已知

$$\dot{U} = 30 \angle 90^\circ \text{V}$$

得

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{j30} = \frac{j30}{j30} = 1 \angle 0^\circ \text{A}$$

副边仅存在互感电压

$$\dot{U}_{OC} = j\omega M \dot{I}_1 = j10 \times 1 = j10 \text{V}$$

(2) 二次线圈短路时的等效电路如图 5-18(b) 所示。图 5-18(a) 电路底部的虚线是人为加上的, 因为只有单线, 并不会形成电流。接上这条虚线后, 电路可以变形成为同名端相遇的三端连接电路, 拉出的第三条支路上加一个“ $j10\Omega$ ”, 而两线圈本身的复感抗则各减去“ $j10\Omega$ ”, 得

$$\dot{I}_{SC} = \frac{\dot{U}}{j10 + \frac{j10 \times j10}{j20 + j10}} \times \frac{1}{2} = \frac{30 \angle 90^\circ}{j25} \times \frac{1}{2} = 0.6 \angle 0^\circ \text{A}$$

(3) ab 两端戴维南等效电路的等效阻抗为

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{OC}}{\dot{I}_{SC}} = \frac{j10}{0.6 \angle 0^\circ} = j16.7 \Omega$$

戴维南等效电路如图 5-18(c)所示。

**【例 5-6】** 如图 5-19(a)所示,求各支路电流  $\dot{I}$ 、 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$  及电路的复功率。

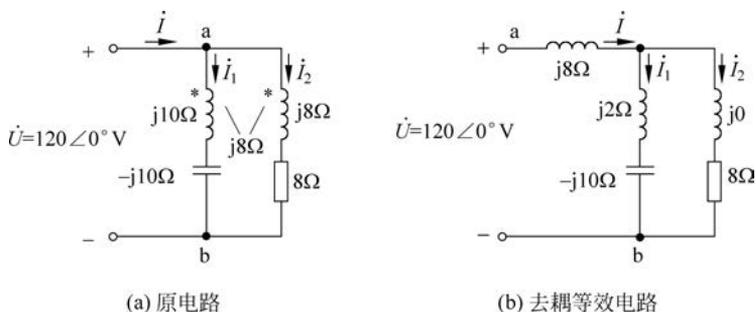


图 5-19 例 5-6 电路图

**解** 画出去耦等效电路如图 5-19(b)所示。

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{j8 + \frac{8(j2 - j10)}{j2 - j10 + 8}} = 15\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$

根据分流公式得

$$\dot{I}_1 = \frac{8}{8 - j8} \dot{I} = \frac{8}{8 - j8} \times 15\sqrt{2} \angle -45^\circ = 15 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1 = 15\sqrt{2} \angle -45^\circ - 15 \angle 0^\circ = 15 \angle -90^\circ \text{ A}$$

复功率

$$\bar{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 120 \angle 0^\circ \times 15\sqrt{2} \angle 45^\circ = 2545.58 \angle 45^\circ \text{ V} \cdot \text{A} = (1800 + j1800) \text{ V} \cdot \text{A}$$



### 5.2.3 含互感电路的基本计算方法——网孔法

如图 5-20(a)所示,设  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$  为网孔电流,则有

$$(R_1 + R_2 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - R_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_S$$

$$-R_2 \dot{I}_1 + (R_2 + R_3 + j\omega L_2) \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = 0$$

两网孔电流均顺时针绕行,自阻抗为正,互阻抗为负,与第 3 章应用的网孔法相比,两个有耦合的线圈分别多了一项互感电压。若按去耦等效电路图 5-20(b)所示,可列出完全相同的方程,请读者自行证明。

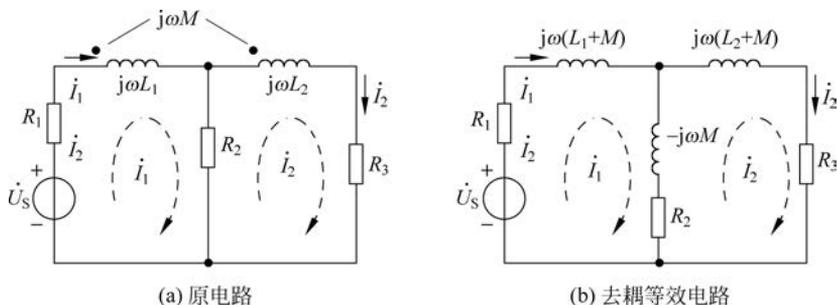


图 5-20 网孔法对含互感电路进行计算

**【例 5-7】** 如图 5-21 所示, 电路是空心变压器的电路模型, 该变压器的骨架是非磁性材料。已知  $R_1=R_2=10\Omega$ ,  $\omega L_1=30\Omega$ ,  $\omega L_2=20\Omega$ ,  $\omega M=10\Omega$ , 电源电压  $\dot{U}_1=100\angle 0^\circ\text{V}$ 。求电压  $\dot{U}_2$  及电阻  $R_2$  消耗的功率。

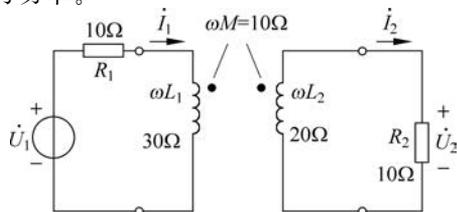


图 5-21 例 5-7 电路图

**解:** 由题意顺时针列写网孔方程

$$\begin{cases} (10 + j30)\dot{I}_1 - j10\dot{I}_2 = 100\angle 0^\circ & \text{①} \\ (10 + j20)\dot{I}_2 - j10\dot{I}_1 = 0 & \text{②} \end{cases}$$

由式②得

$$\dot{I}_2 = \frac{j10\dot{I}_1}{10 + j20} \quad \text{③}$$

将式③代入式①得

$$\begin{aligned} (10 + j30)\dot{I}_1 - j10 \frac{j10\dot{I}_1}{10 + j20} &= 100\angle 0^\circ \\ \dot{I}_1 &= \frac{100\angle 0^\circ}{10 + j30 - j10 \frac{j10}{10 + j20}} = \frac{100\angle 0^\circ}{10 + j30 + \frac{100}{22.36\angle 63.43^\circ}} \\ &= 3.49\angle -65.22^\circ\text{A} \end{aligned} \quad \text{④}$$

将式④代入式③得

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \frac{j10\dot{I}_1}{10 + j20} = 1.56\angle -38.66^\circ\text{V} \\ \dot{U}_2 &= 10\dot{I}_2 = 15.6\angle -38.66^\circ\text{V} \end{aligned}$$

则

$$P = U_2 I_2 = 24.3\text{W}$$

### 【课后练习】

**5.2.1** 如图 5-22 所示,  $L_1=0.01\text{H}$ ,  $L_2=0.02\text{H}$ ,  $C=10\mu\text{F}$ ,  $R=12.5\Omega$ ,  $M=0.01\text{H}$ 。求两个线圈在顺向串联和反向串联时的谐振角频率  $\omega_0$ 。

**5.2.2** 已知如图 5-23 所示互感线圈的耦合因数  $k$  为 0.8,  $\dot{U}_1=120\angle 30^\circ\text{V}$ 。(1)求互感阻抗。(2)列出两个回路的网孔方程(不计算)。

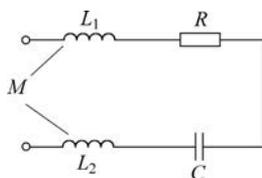


图 5-22 5.2.1 电路图

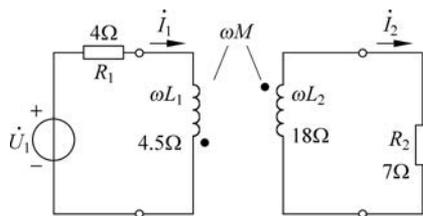


图 5-23 5.2.2 电路图

5.2.3 画出如图 5-24(a)、(b) 电路的去耦等效电路。

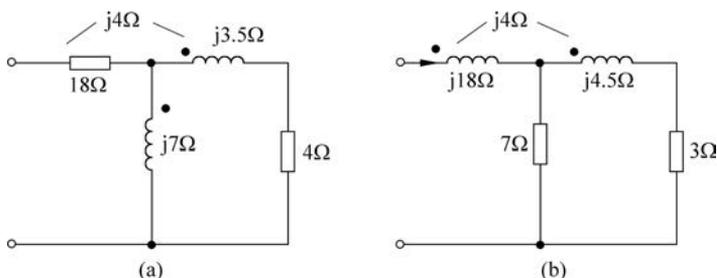


图 5-24 5.2.3 电路图

## 5.3 理想变压器

理想变压器是铁芯变压器,它通过互感线圈的磁耦合来实现对交流电的升压、降压,在变压的同时还可以实现输入电路与输出电路的隔离,以及输出信号对输入信号的相位移动。

实际铁芯变压器本身有一定的功率损耗,而理想变压器忽略了这种损耗,其特性是人们对于铁芯变压器理想工作状态的追求,因此实际铁芯变压器的特性与理想变压器有一定差距。



### 5.3.1 理想变压器的伏安关系式

理想变压器的电路符号如图 5-25 所示,其唯一的参数是电压变比“ $n$ ”, $n$  定义为一次与二次线圈的匝数之比: $n = N_1/N_2$ ,其中  $N_1$ 、 $N_2$  分别为一次线圈和二次线圈的匝数,此时  $n$  标在一次侧。升压变压器中  $N_1 < N_2$ ,  $n < 1$ ; 降压变压器中  $N_1 > N_2$ ,  $n > 1$ 。

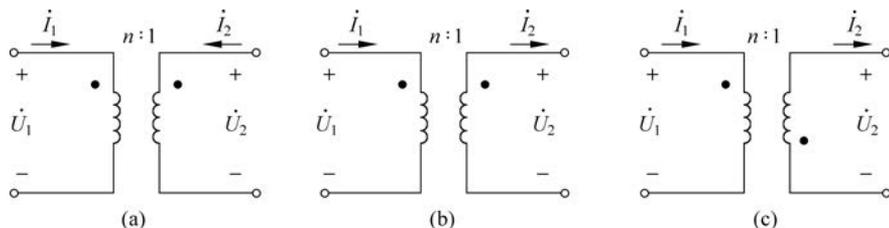


图 5-25 理想变压器的电路符号

图 5-25(a)、(b)、(c) 所示 3 个理想变压器的伏安关系式分别为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\frac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = -n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\frac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (5-12)$$

正确写出伏安关系的原理是： $n$  在哪一侧，该侧电压是另一侧电压的  $n$  倍，电流是  $1/n$  倍；两个电压的参考正极同在一对同名端时，两者同号；两个电流的参考方向同时流进一对同名端时，二者异号；否则反之。从伏安关系式可知，理想变压器升压必降流；降压必升流。

变比  $n$  也可以定义为  $n = N_2/N_1$ ，此时  $n$  标在二次侧。

理想变压器的上述伏安关系是铁芯互感线圈特性理想化的反映，铁芯互感线圈要实现理想化，必须满足以下条件：

(1) 线圈导线无损耗，铁芯无损耗。

(2) 全耦合  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$ 。

(3)  $L_1, L_2, M$  趋于无穷大，但保持  $\sqrt{L_1/L_2} = n$  不变。

互感线圈要满足这些条件，要求其绕线电阻为零，线圈绕制在磁导率趋于无穷大且为常数的铁芯上。实际变压器的线圈都绕制在硅钢片叠成的铁芯上，只能尽量减小绕线电阻及铁芯的涡流、磁滞损耗，尽量提高铁芯的磁导率，却不可能做到理想化。但是性能优良的实际变压器在忽略了某些次要因素后，工作状态接近于理想变压器。由于耦合因数  $k = 1$ ，理想变压器一次、二次每匝线圈感应的电压值相等，使电压与匝数成正比。

实际变压器有电源变压器、调压器、自耦变压器、隔离变压器、脉冲变压器、电压互感器、电流互感器等。电源变压器功率大，要尽量减小内部损耗；电压互感器将电网高电压降为 100V，电流互感器将电网大电流降为 5A(或 1A)，以实现对电网的测量、保护和监控。电压互感器、电流互感器是两种测量设备，要求变比设计准确，工程中要采取多种补偿措施保证互感器的性能接近理想变压器的性能。

### 5.3.2 理想变压器功率平衡方程

理想变压器的伏安关系与频率无关，那么理论上式(5-12)对任意波形的信号都成立，甚至可以由电子线路来实现。将其电流、电压改用小写字母表示瞬时值，如图 5-26 所示，以该图为例列写理想变压器输入、输出端口吸收的功率之和，则

$$\begin{aligned} p &= u_1 i_1 + u_2 i_2 \\ &= (n u_2) \cdot \left(-\frac{1}{n} i_2\right) + u_2 i_2 = 0 \end{aligned} \quad (5-13)$$

式(5-13)表明，理想变压器只是把电信号从前方电路传递到后方电路，起功率耦合作用，它本身既不储能也不耗能，传递信号的过程中同时改变电流和电压值。

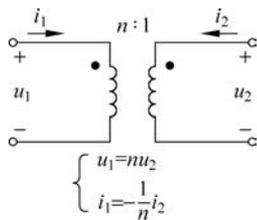


图 5-26 瞬时值表示的伏安关系

### 5.3.3 理想变压器的阻抗变换特性

理想变压器除了可以用来变换电流和电压外，还可以用来变换阻抗。如图 5-27 所示，当二次侧输出端口 2-2' 接负载  $Z_L$  时，从一次侧 1-1' 端口看进去的输入阻抗为

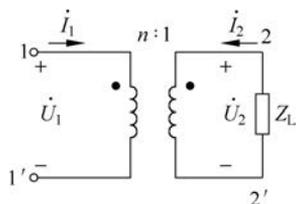


图 5-27 理想变压器用于阻抗变换

$$Z_{11'} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-\frac{1}{n}\dot{I}_2} = n^2 \left( \frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_2} \right) = n^2 Z_L \quad (5-14)$$

注意,  $Z_L$  的电流、电压参考方向为非关联。式(5-14)表明,二次侧所接阻抗透过理想变压器,折算到一次侧后变为  $n^2 Z_L$ ,并且这种阻抗变换与同名端及电流、电压参考方向无关。因此,只要改变  $n$ ,就可在一次侧得到不同的输入阻抗值。在电子工程中,常用理想变压器变换阻抗的性质来实现电源与负载匹配,使负载获得最大功率。

**【例 5-8】** 如图 5-28 所示电路,已知  $U_S = 220\text{V}$ ,  $R_1 = 100\Omega$ ,  $Z_L = 3 + j3\Omega$ ,  $n = 10$ 。求  $\dot{I}_2$ 。

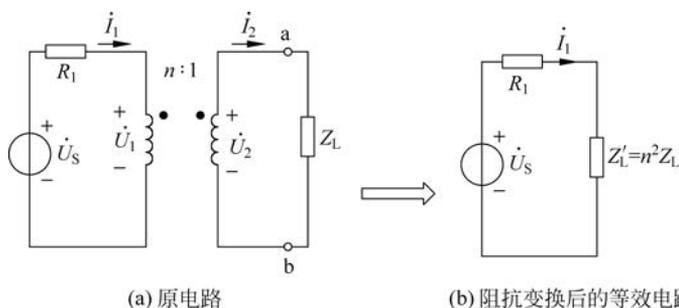


图 5-28 例 5-8 电路图

**解法一** 先将负载  $Z_L$  变换到一次侧,计算出原边电流  $\dot{I}_1$ ,再根据伏安关系计算  $\dot{I}_2$ 。设

$$\dot{U}_S = 220 \angle 0^\circ \text{V}$$

$$Z'_L = n^2 Z_L = 10^2 \times (3 + j3) = 300 + j300 \Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{R_1 + Z'_L} = \frac{220 \angle 0^\circ}{100 + 300 + j300} = 0.44 \angle -36.87^\circ \text{A}$$

因为

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{n} \dot{I}_2$$

所以

$$\dot{I}_2 = n \dot{I}_1 = 4.4 \angle -36.87^\circ \text{A}$$

**解法二** 列写两个网孔方程与两个伏安关系式联立求解。

$$\begin{cases} R_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_1 - \dot{U}_S = 0 \\ Z_L \dot{I}_2 - \dot{U}_2 = 0 \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{n} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_1 = n \dot{U}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 100 \dot{I}_1 + \dot{U}_1 - 220 \angle 0^\circ = 0 \\ (3 + j3) \dot{I}_2 - \dot{U}_2 = 0 \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{10} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_1 = 10 \dot{U}_2 \end{cases}$$

解得

$$\dot{I}_2 = 4.4 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

**【例 5-9】** 如图 5-29 所示铁芯变压器  $N_1 = 500$  匝, 为使内电阻为  $8\Omega$  和  $16\Omega$  的扬声器均能与信号源匹配获得最大功率, 求二次侧两部分线圈的匝数  $N_2$ 、 $N_3$ 。

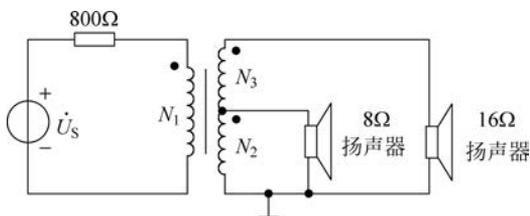


图 5-29 例 5-9 电路图

**解** 这里将一般铁芯变压器按理想变压器对待, 设

$$n_2 = \frac{N_1}{N_2}, \quad n_3 = \frac{N_1}{N_2 + N_3}$$

根据最大功率传输定理, 有

$$800 = n_2^2 \times 8, \quad n_2 = 10$$

$$800 = n_3^2 \times 16, \quad n_3 = 7.07$$

$$N_2 = \frac{N_1}{n_2} = \frac{500}{10} = 50 \text{ 匝}$$

$$N_2 + N_3 = \frac{N_1}{n_3} = \frac{500}{7.07} = 70.72 \text{ 匝}$$

$$N_3 = 70.72 - 50 = 20.72 \text{ 匝}$$

**【例 5-10】** 某单相变压器原边绕组额定电压为  $3000\text{V}$ , 副边绕组额定电压为  $220\text{V}$ , 负载是一台  $220\text{V}$ 、 $25\text{kW}$  的电炉, 试求原边及副边绕组的电流各为多少?

**解** 电炉为电阻性负载, 功率因数为 1。

$$P_2 = I_2 U_2$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2} = \frac{25 \times 10^3}{220} = 113.6 \text{ A}$$

$$n = \frac{U_1}{U_2} = \frac{3000}{220} = 13.64$$

$$I_1 = \frac{I_2}{n} = \frac{113.6}{13.64} = 8.33 \text{ A}$$

## 【课后练习】

**5.3.1** 分别写出如图 5-30(a)、(b) 所示理想变压器的伏安关系式。

**5.3.2** 由理想变压器组成的电路如图 5-31 所示, 求电路的输入阻抗  $Z_1 = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ 。

**5.3.3** 如图 5-32 所示电路是一台仪表电源变压器, 设为理想变压器, 一次绕组有  $550$  匝, 接  $220\text{V}$  电压。二次绕组有两个:  $N_2$  所在绕组额定电压  $24\text{V}$ , 纯电阻负载额定功率  $24\text{W}$ ;

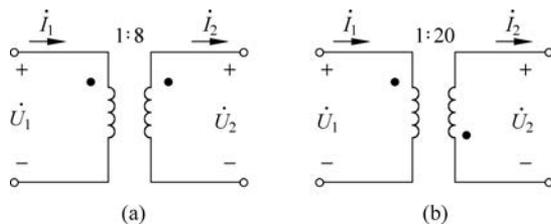


图 5-30 5.3.1 电路图

$N_3$  所在绕组额定电压 12V, 纯电阻负载额定功率 36W。求一次侧电流有效值及两个二次绕组的匝数(提示:  $N_1-N_2$  及  $N_1-N_3$  两对线圈分别计算电压变比; 但两对线圈在一次侧的电流应相加)。

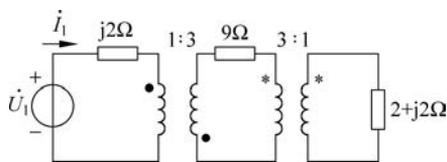


图 5-31 5.3.2 电路图

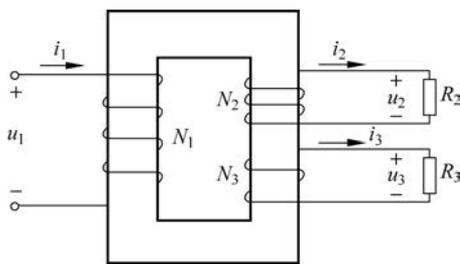


图 5-32 5.3.3 电路图

## 习题

**5-1-1** 如图 5-33 所示, 若三个线圈的同名端标志如图 5-33(a) 所示, 则其实际绕法可能是图 5-33(b)、(c)、(d) 中的哪幅图?

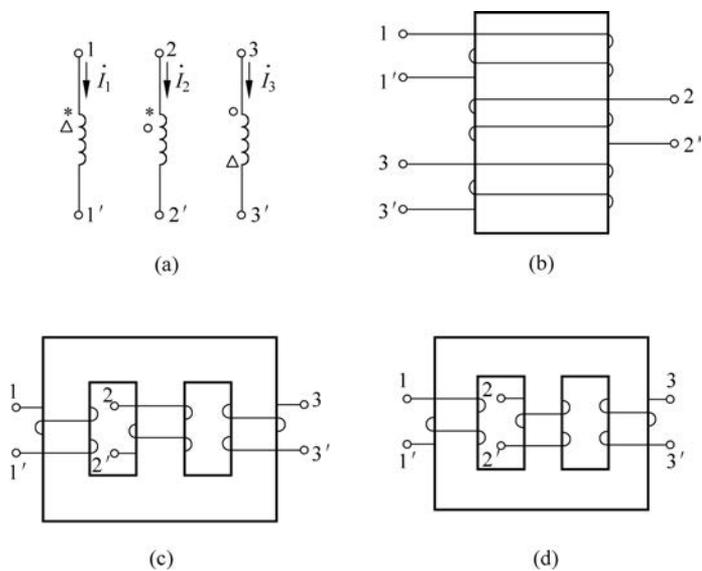


图 5-33 题图 5-1-1

**5-1-2** 如图 5-34 所示,如  $M=L$ ,在 AB 端口接一交流电压源  $U=36\text{V}$ ,CD 端口开路。若将 B、D 端子相连接,测得 A、C 间电压为  $72\text{V}$ ,试确定其同名端。电路不变若将 B、C 端子相连接,则 A、D 间电压应是多少?

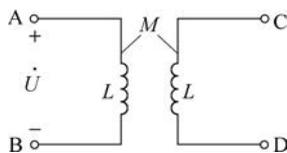


图 5-34 题图 5-1-2

**5-1-3** 两个耦合电感的自感系数分别为  $L_1=2\text{H}$ 、 $L_2=2\text{H}$ ,耦合因数  $k=\frac{1}{2}$ ,求两线圈间的互感系数  $M$ 。

**5-1-4** 判断如图 5-35 所示三对互感线圈的同名端,并标注在图上。

**5-1-5** 正确写出如图 5-36(a)、(b)所示电路中  $u_{cd}$ 、 $u_{ab}$  与  $i_1$ 、 $i_2$  之间的关系式。

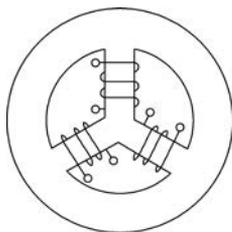


图 5-35 题图 5-1-4

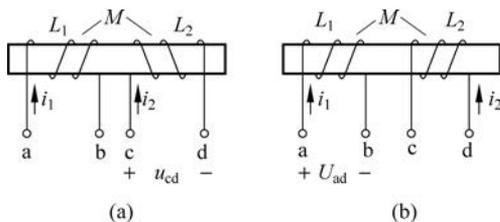


图 5-36 题图 5-1-5

**5-2-1** 分别求出如图 5-37 中并联线圈的等效电感  $L$ 。已知  $L_1=4\text{H}$ 、 $L_2=2\text{H}$ 、 $M=1\text{H}$ 。

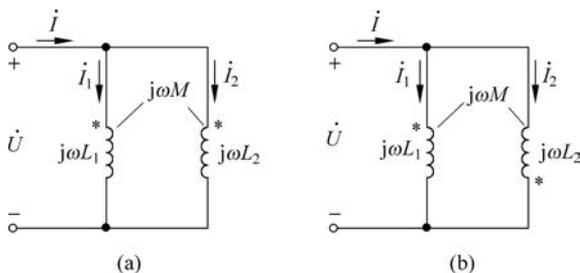


图 5-37 题图 5-2-1

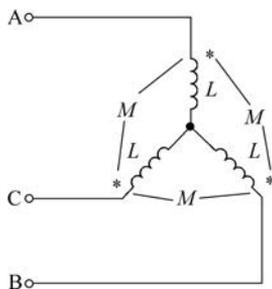


图 5-38 题图 5-2-3

**5-2-2** 两个互感线圈相串联再与电容器串联,已知线圈一的  $R_1=5\Omega$ 、 $L_1=0.01\text{H}$ ,线圈二的  $R_2=10\Omega$ 、 $L_2=0.02\text{H}$ ,线圈互感  $M=0.01\text{H}$ ,电容  $C=20\mu\text{F}$ 。试求当两线圈顺向串联、反相串联时电路的谐振角频率。若在谐振的情况下外加正弦电压  $U=6\text{V}$ ,试求谐振时电容上电压  $U_C$ 。

**5-2-3** 如图 5-38 所示,已知互感系数为  $M$ ,画出其去耦等效电路图。

**5-2-4** 具有互感的两个线圈顺接串联时总电感为  $0.6\text{H}$ ,反接串联时总电感为  $0.2\text{H}$ ,若两线圈的自感系数相同时,求互感系数和线圈的自感系数。

**5-2-5** 列出如图 5-39 两网孔的网孔电流方程。

**5-2-6** 如图 5-40 所示,已知两线圈的参数为  $R_1=R_2=100\Omega, L_1=3\text{H}, L_2=10\text{H}, M=5\text{H}$ , 正弦电源电压  $u=200\sqrt{2}\sin 100t\text{V}$ 。试求两线圈的电流、总电流。

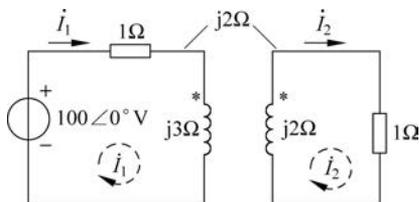


图 5-39 题图 5-2-5

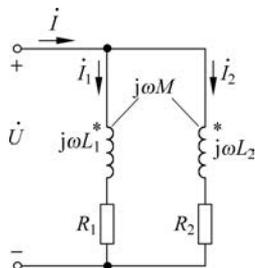


图 5-40 题图 5-2-6

**5-3-1** 求如图 5-41 所示的等效阻抗  $Z_{11}'$ 。

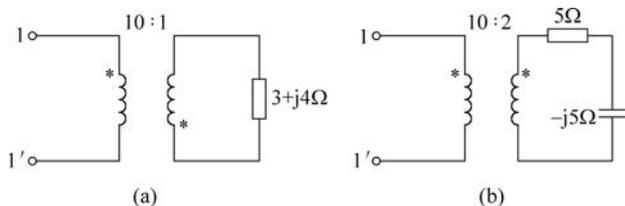


图 5-41 题图 5-3-1

**5-3-2** 求如图 5-42 中 22' 端口的戴维南等效电路。

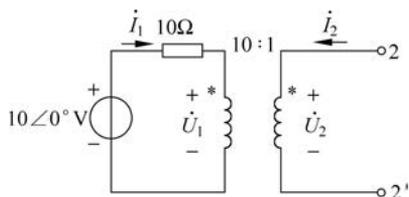


图 5-42 题图 5-3-2

**5-3-3** 如图 5-43 所示, (1) 试选择合适的匝数比  $n$  使传输到负载上的功率达到最大; (2) 求  $1\Omega$  负载上获得的最大功率。

**5-3-4** 一台变比  $n$  为  $220/36$  的理想变压器, 原边绕组接入有效值为  $220\text{V}$  的交流电源, 副边绕组接  $36\text{V}, 40\text{W}$  的灯泡 5 个(并联), 问变压器原边电流是多少安培? 相当于电源接入多少欧姆的等效电阻?

**5-3-5** 已知电流表的读数为  $5\text{A}$ , 正弦电压有效值为  $5\text{V}$ , 求如图 5-44 所示电路中的阻抗  $Z$ 。

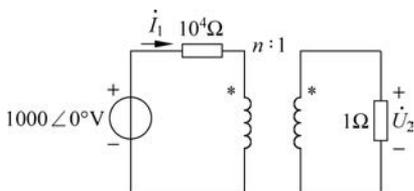


图 5-43 题图 5-3-3

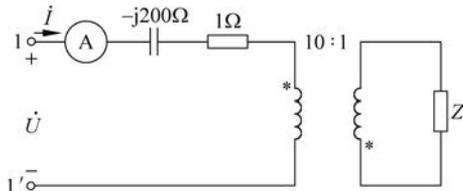


图 5-44 题图 5-3-5

**5-3-6** 如图 5-45 所示电路, 列出能够求解出  $i_1, i_2, \dot{U}_1, \dot{U}_2$  的 4 个联立方程, 并求出这 4 个量。

5-3-7 由理想变压器组成的电路如图 5-46 所示, 已知  $\dot{U}_S = 16 \angle 0^\circ \text{V}$ , 求:  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{U}_2$  和  $R_L$  吸收的功率。

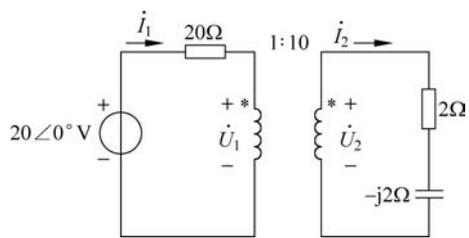


图 5-45 题图 5-3-6

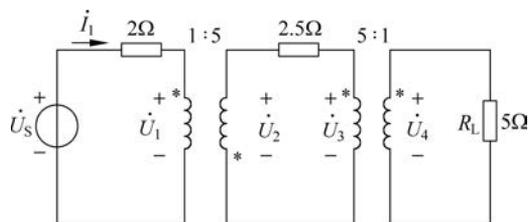


图 5-46 题图 5-3-7



习题答案