

连续时间信号与 系统的频域分析

本章要点：

- (1) 连续周期信号的傅里叶级数及其基本性质。
- (2) 连续周期信号和非周期信号频谱的概念。
- (3) 连续非周期信号和周期信号的傅里叶变换及傅里叶变换的基本性质。
- (4) 连续系统频率响应的概念及其频域分析方法。
- (5) 无失真传输系统和理想滤波器。
- (6) 信号的抽样定理,调制与解调。
- (7) 典型例题解析。

学习目标：

- (1) 理解周期信号的频谱、频谱宽度和频谱图,掌握周期信号频谱的特点。
- (2) 理解非周期信号的频谱、频谱宽度和频谱图,掌握信号的正、反傅里叶变换。
- (3) 理解非周期信号激励下系统的零状态响应与全响应。
- (4) 掌握周期信号的傅里叶变换及周期信号与非周期信号傅里叶变换之间的关系。
- (5) 掌握频域系统函数的定义、物理意义、求法与应用。
- (6) 掌握理想低通滤波器的定义、传输特性。
- (7) 了解信号无失真传输的条件。
- (8) 掌握抽样信号的频谱及其求解。
- (9) 掌握抽样定理。
- (10) 了解调制与解调的基本原理与应用。

本章重点：

- (1) 周期信号的频谱分析及其频谱的特点。
- (2) 傅里叶变换的定义、性质及其正反傅里叶变换的求解。
- (3) 周期信号的傅里叶变换,频域系统函数的定义与求解。
- (4) 非周期信号激励下系统的零状态响应的求解。
- (5) 理想低通滤波器的定义及其传输特性。
- (6) 信号无失真传输的条件,抽样信号和抽样定理。
- (7) 调制与解调的基本原理与应用。

在第 2 章中讨论了连续时间系统的时域分析,以冲激函数为基本信号,任意输入信号都

可分解为一系列冲激函数,而系统的零状态响应是输入信号与系统冲激响应的卷积。本章将以正弦函数(正弦和余弦函数可统称为正弦函数)或虚指数函数 $e^{j\omega t}$ 为基本信号,将任意信号表示为不同频率的正弦函数或虚指数函数之和(对于周期信号)或积分(对于非周期信号)。把信号表示为不同频率正弦分量或虚指数分量的和称为信号的频域分析,也称信号的谱分析。用频谱分析的观点来分析系统,称为系统的频域分析。

3.1 周期信号的傅里叶级数分析

周期信号是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 区间,每隔一定时间 T ,按相同规律重复变化的信号,如图 3-1-1 所示。周期信号可以表示为

$$f(t) = f(t + mT) \quad (3-1-1)$$

式中, m 为任意整数。时间 T 称为该信号的重复周期,简称周期。周期的倒数称为该信号的频率。

周期信号 $f(t)$ 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 可以展开成在完备正交信号空间中的无穷级数。如果完备的正交函数集是三角函数集或指数函数集,那么,周期信号所展开的无穷级数就分别称为“三角形傅里叶级数”或“指数形傅里叶级数”,统称傅里叶级数。

需要指出,只有当周期信号满足狄里赫利条件时,才能展开成傅里叶级数。通常遇到的周期信号都满足该条件,以后不再特别说明。

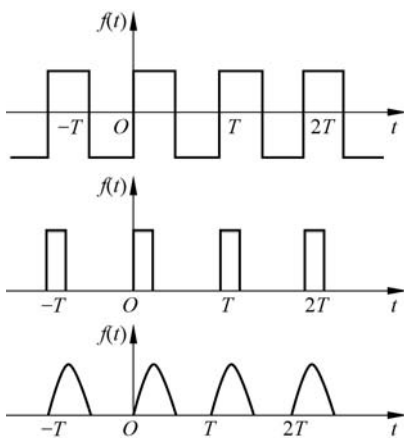


图 3-1-1 周期信号

3.1.1 周期信号的分解

1. 信号分解为正交函数

信号分解为正交函数的原理与向量分解为正交向量的概念相似。例如,在平面上的向量 $\mathbf{A}$ 在直角坐标中可以分解为 x 方向分量和 y 方向分量,如图 3-1-2(a)所示。如令 $\mathbf{v}_x$ 、 $\mathbf{v}_y$, 为各相应方向的正交单位向量,则向量 $\mathbf{A}$ 可写为

$$\mathbf{A} = C_1 \mathbf{v}_x + C_2 \mathbf{v}_y \quad (3-1-2)$$

为了便于研究向量分解,将相互正交的单位向量组成一个二维“正交向量集”。这样,在此平面上的任意向量都可用正交向量集的分量组合表示。

对于一个三维空间的向量 $\mathbf{A}$,可以用一个三维正交向量集 $\{\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z\}$ 的分量组合表示,如图 3-1-2(b)所示,它可写为

$$\mathbf{A} = C_1 \mathbf{v}_x + C_2 \mathbf{v}_y + C_3 \mathbf{v}_z \quad (3-1-3)$$

空间向量正交分解的概念可以推广到信号空间,在信号空间找到若干个相互正交的信号作为基本信号,使得信号空间中的任一信号均可表示为它们的线性组合。

空间向量正交分解的概念可以推广到信号空间,在信号空间找到若干个相互正交的信号作为基本信号,使得信号空间中任一信号均可表示为它们的线性组合。

如有定义在 (t_1, t_2) 区间的两个函数 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$,若满足

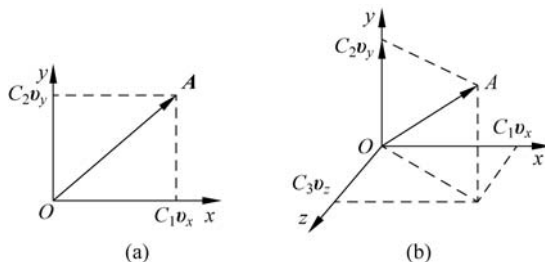


图 3-1-2 向量分解

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt = 0 \quad (3-1-4)$$

则称 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内正交。

如有 n 个函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 构成一个函数集, 当这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases} \quad (3-1-5)$$

式中, K_i 为常数, 则称此函数集为在区间 (t_1, t_2) 的正交函数集。在区间 (t_1, t_2) 内相互正交的 n 个函数构成正交信号空间。

如果在正交函数集 $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ 之外, 不存在函数 $\psi(t)$ 满足等式

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi_i(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3-1-6)$$

则此函数集称为完备正交函数集。也就是说, 如能找到一个函数 $\psi(t)$, 使得式(3-1-6)成立, 即 $\psi(t)$ 与函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 的每个函数都正交, 那么它本身就应属于此函数集。显然, 不包含 $\psi(t)$ 的集是不完备的。

例如, 三角函数集 $\{1, \cos(\Omega t), \dots, \cos(m\Omega t), \dots, \sin(\Omega t), \dots, \sin(n\Omega t), \dots\}$ 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ ($T = \frac{2\pi}{\Omega}$) 组成正交函数集, 而且是完备的正交函数集。这是因为

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(m\Omega t) \cos(n\Omega t) dt &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \neq 0 \\ T, & m = n = 0 \end{cases} \\ \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(m\Omega t) \sin(n\Omega t) dt &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases} \\ \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(m\Omega t) \cos(n\Omega t) dt &= 0, \quad \text{对于所有的 } m \text{ 和 } n \end{aligned} \quad (3-1-7)$$

集合 $\{\sin(\Omega t), \sin(2\Omega t), \dots, \sin(n\Omega t), \dots\}$ 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 内也是正交函数集, 但它是不完备的, 因为还有许多函数, 如 $\cos(\Omega t), \cos(2\Omega t), \dots$, 也与此集合中的函数正交。

如果是复函数集, 则正交的定义如下。

若复函数集 $\{\varphi_i(t)\} (i=1, 2, \dots, n)$ 在区间 (t_1, t_2) 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases} \quad (3-1-8)$$

则称此复函数集为正交函数集。式中, $\varphi_j^*(t)$ 为函数 $\varphi_j(t)$ 的共轭复函数。

复函数集 $\{e^{jm\Omega t}\} (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 在区间 (t_0, t_0+T) 内是完备的正交函数集, 式中, $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ 。它在区间 (t_0, t_0+T) 内满足

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jm\Omega t} (e^{jn\Omega t})^* dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(m-n)\Omega t} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T, & m = n \end{cases} \quad (3-1-9)$$

设有 n 个函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 构成一个正交函数空间。将任一函数 $f(t)$ 用这 n 个正交函数的线性组合来近似, 可表示为

$$f(t) \approx C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + \dots + C_n \varphi_n(t) = \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \quad (3-1-10)$$

这里的问题是, 如何选择 C_j 才能得到最佳近似。显然, 应选取各系数 C_j 使实际函数与近似函数之间误差在区间 (t_1, t_2) 内为最小。这里“误差最小”不是指平均误差最小, 因为在平均误差很小甚至等于零的情况下, 也可能有较大的正误差和负误差在平均过程中相互抵消, 以致不能正确反映两函数的近似程度。通常选择误差的均方值(或称方均值)最小, 这时, 可以认为已经得到了最好的近似。误差的均方值也称为均方误差, 用符号 $\overline{\epsilon^2}$ 表示。

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right]^2 dt \quad (3-1-11)$$

在 $j=1, 2, \dots, i, \dots, n$ 时, 为求得使均方误差最小的第 i 个系数 C_i , 必须使

$$\frac{\partial \overline{\epsilon^2}}{\partial C_i} = 0$$

即

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right]^2 dt \right\} = 0 \quad (3-1-12)$$

展开上式的被积函数, 注意到由序号不同的正交函数相乘的各项, 其积分均为零, 而且所有不包含 C_i 的各项对 C_i 求导也等于零。这样, 式(3-1-12)中只有两项不为零, 它可以写为

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [-2C_i f(t) \varphi_i(t) + C_i^2 \varphi_i^2(t)] dt \right\} = 0$$

交换微分与积分次序, 得

$$-2 \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt + 2C_i \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t) dt = 0$$

于是可求得

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t) dt} = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt \quad (3-1-13)$$

在式(3-1-13)中,

$$K_i = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t) dt \quad (3-1-14)$$

这就是在满足最小均方误差的条件下,式(3-1-10)中系数 C_i 的表示式。此时, $f(t)$ 能获得最佳近似。

当按式(3-1-13)选取系数 C_i 时,将 C_i 代入式(3-1-10),可以求得最佳近似条件下的均方误差为

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon^2} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt + \sum_{j=1}^n C_j^2 \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j^2(t) dt - 2 \sum_{j=1}^n C_j \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_j(t) dt \right] \\ \text{考虑到 } K_j &= \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j^2(t) dt, C_j = \frac{1}{K_j} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_j(t) dt, \text{ 得} \\ \overline{\epsilon^2} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt + \sum_{j=1}^n C_j^2 K_j - 2 \sum_{j=1}^n C_j^2 K_j \right] \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{j=1}^n C_j^2 K_j \right] \quad (3-1-15)\end{aligned}$$

利用式(3-1-15)可直接求得在给定项数 n 的条件下的最小均方误差。

由均方误差的定义式(3-1-11)可见,由于函数平方后再积分,因而 $\overline{\epsilon^2}$ 不可能为负,即恒有 $\overline{\epsilon^2} \geq 0$ 。由式(3-1-15)可见,在用正交函数去近似(或逼真) $f(t)$ 时,所取的项数愈多,即 n 愈大,则均方误差愈小。当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\overline{\epsilon^2} = 0$ 。由式(3-1-15)可得,如 $\overline{\epsilon^2} = 0$,则有

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^2 K_j \quad (3-1-16)$$

式(3-1-16)称为帕斯瓦尔(Parseval)方程。

如果信号 $f(t)$ 是电压或电流,那么,式(3-1-16)等号左端就是在 (t_1, t_2) 区间信号的能量,等号右端是在 (t_1, t_2) 区间信号各正交分量的能量之和。式(3-1-16)表明,在区间 (t_1, t_2) 信号所含能量恒等于此信号在完备正交函数集中各正交分量能量的总和。与此相反,如果信号在正交函数集中的各正交分量能量总和小于信号本身的能量,这时式(3-1-16)不成立,则该正交函数集是不完备的。

这样,当 $n \rightarrow \infty$ 时,均方误差 $\overline{\epsilon^2} = 0$,式(3-1-10)可写为

$$f(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} C_j \varphi_j(t) \quad (3-1-17)$$

即函数 $f(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 可分解为无穷多项正交函数之和。

2. 周期信号的分解

设有周期信号 $f(t)$, 它的周期是 T , 角频率 $\Omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$, 它可以分解为

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\Omega t) + a_2 \cos(2\Omega t) + \cdots + b_1 \sin(\Omega t) + b_2 \sin(2\Omega t) + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\Omega t) \quad (3-1-18)\end{aligned}$$

式(3-1-18)中的系数 a_n 和 b_n 称为傅里叶系数。可由式(3-1-9)求得。为简便,式(3-1-12)的

积分区间 $(t_0, t_0 + T)$ 取为 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 或 $(0, T)$ 。考虑到正、余弦函数的正交条件,由式(3-1-7)可得傅里叶系数

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3-1-19)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-1-20)$$

式中, T 为函数 $f(t)$ 的周期, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 为角频率。由式(3-1-19)和式(3-1-20)可见,傅里叶系数 a_n 和 b_n 都是 n (或 $n\Omega$)的函数,其中 a_n 是 n 的偶函数,即有 $a_{-n} = a_n$;而 b_n 是 n (或 $n\Omega$)的奇函数,即有 $b_{-n} = -b_n$ 。

将式(3-1-18)中同频率项合并,可写成如下形式

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2) + \dots \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \end{aligned} \quad (3-1-21)$$

式中

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \\ \varphi_n &= -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3-1-22)$$

如将式(3-1-21)的形式化为式(3-1-18)的形式,其系数之间的关系为

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0 \\ a_n &= A_n \cos \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= -A_n \sin \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3-1-23)$$

由式(3-1-22)可见, A_n 是 n (或 $n\Omega$)的偶函数,即有 $A_{-n} = A_n$;而 φ_n 是 n (或 $n\Omega$)的奇函数,即有 $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ 。

式(3-1-21)表明,任何满足狄里赫利条件的周期函数可分解为直流和许多余弦(或正弦)分量。其中第一项 $\frac{A_0}{2}$ 是常数项,是周期信号中所包含的直流分量;第二项 $A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$ 称为基波或一次谐波,其角频率与原周期信号相同, A_1 是基波振幅, φ_1 是基波初始相角;第三项 $A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2)$ 称为二次谐波,其频率是基波频率的二倍, A_2 是二次谐波振幅, φ_2 是其初始相角。以此类推,还有三次、四次等谐波。因此,式(3-1-21)表明,周期信号可以分解为各次谐波分量之和。

例 3-1 将图 3-1-3 所示的方波信号 $f(t)$ 展开为傅里叶级数。

解: 由式(3-1-19)和式(3-1-20)可得

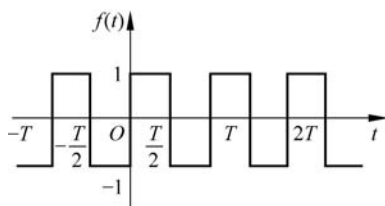


图 3-1-3 例 3-1 图

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) \cos(n\Omega t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (1) \cos(n\Omega t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \frac{1}{n\Omega} [-\sin(n\Omega t)] \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{2}{T} \frac{1}{n\Omega} [\sin(n\Omega t)] \Big|_0^{\frac{T}{2}}
 \end{aligned}$$

考虑到 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, 可得

$$\begin{aligned}
 a_n &= 0 \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 -\sin(n\Omega t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(n\Omega t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \frac{1}{n\Omega} \cos(n\Omega t) \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{2}{T} \frac{1}{n\Omega} [-\cos(n\Omega t)] \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

将它们代入式(3-1-18), 得到如图 3-1-3 所示信号的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\Omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\Omega t) + \dots + \frac{1}{n} \sin(n\Omega t) + \dots \right], \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3-1-24)$$

它只含有一次、三次、五次等奇次谐波分量。

这里顺便计算用有限项级数逼近 $f(t)$ 引起的均方误差。根据式(3-1-15), 对于本例, 考虑到 $t_2 = \frac{T}{2}, t_1 = -\frac{T}{2}, K_j = \frac{T}{2}$, 均方误差为

$$\begin{aligned}
 \overline{\epsilon^2} &= \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt - \sum_{j=1}^n b_j^2 \frac{T}{2} \right] = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt - \frac{T}{2} \sum_{j=1}^n b_j^2 \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n b_j^2 \quad (3-1-25)
 \end{aligned}$$

当只取基波时

$$\overline{\epsilon_1^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 = 0.189$$

当取基波和三次谐波时

$$\overline{\epsilon_2^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 = 0.0994$$

当取一次、三次、五次谐波时

$$\overline{\epsilon_2^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5\pi} \right)^2 = 0.0669$$

当取一次、三次、五次、七次谐波时

$$\overline{\epsilon_2^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{7\pi} \right)^2 = 0.0504$$

图 3-1-4 画出了一个周期的方波组成情况,其中图 3-1-4(a)为基波,图 3-1-4(b)为基波+三次谐波,图 3-1-4(c)为基波+三次谐波+五次谐波,图 3-1-4(d)为基波+三次谐波+五次谐波+七次谐波。由图 3-1-4 可见,当它包含的谐波分量越多时,波形越接近于原来的方波信号 $f(t)$ (如图 3-1-4 中的虚线所示),其均方误差越小。可以看出,频率较低的谐波其振幅较大,它们组成方波的主体,而频率较高的高次谐波振幅较小,它们主要影响波形的细节。波形中所含的高次谐波越多,波形的边缘越陡峭。

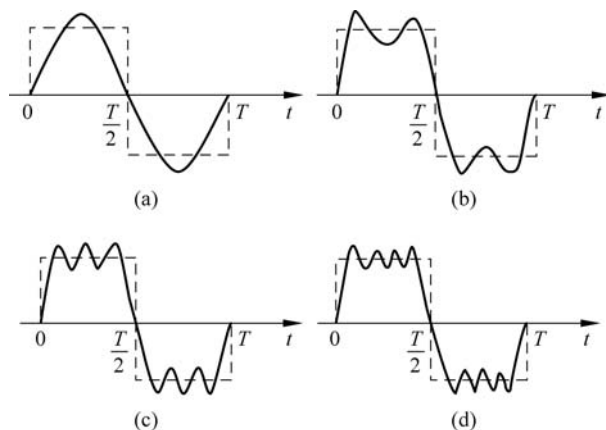


图 3-1-4 方波的组成

由图 3-1-4 还可以看到,合成波形所包含的谐波分量越多时,除间断点附近外,它越接近于原方波信号。在间断点附近,随着所含谐波次数的增高,合成波形的尖峰越接近间断点,但尖峰幅度并未明显减小。可以证明,即使合成波形所含谐波次数 $n \rightarrow +\infty$ 时,在间断点处仍有约 9% 的偏差,这种现象称为吉布斯(Gibbs)现象。在傅里叶级数的项数取得很大时,间断点处尖峰下的面积非常小以至于趋近于零,因而在均方的意义上合成波形同原方波的真值之间没有区别。

3.1.2 奇、偶函数的傅里叶级数

若给定的函数 $f(t)$ 具有某些特点,那么,有些傅里叶系数将等于零,从而使傅里叶系数的计算较为简便。

1. $f(t)$ 为偶函数

若函数 $f(t)$ 是时间 t 的偶函数,即 $f(-t) = f(t)$,则波形对称于纵坐标轴,如图 3-1-5 所示。

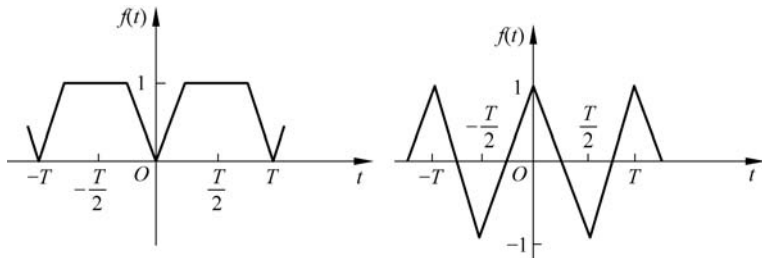


图 3-1-5 偶函数



视频讲解

当 $f(t)$ 是 t 的偶函数时, 式(3-1-19)、式(3-1-20)中被积函数 $f(t)\cos(n\Omega t)$ 是 t 的偶函数, 而 $f(t)\sin(n\Omega t)$ 是 t 的奇函数。当被积函数为偶函数时, 在对称区间 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 的积分等于其半区间 $\left(0, \frac{T}{2}\right)$ 积分的二倍; 而当被积函数为奇函数时, 在对称区间的积分为零, 故由式(3-1-19)、式(3-1-20), 得

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt, & n=0, 1, 2, \dots \\ b_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3-1-26)$$

进而由式(3-1-22), 有

$$\left. \begin{aligned} A_n &= |a_n|, \\ \varphi_n &= m\pi, \quad m \text{ 为整数}, \end{aligned} \right\} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3-1-27)$$

2. $f(t)$ 为奇函数

若函数 $f(t)$ 是时间 t 的奇函数, 即 $f(-t) = -f(t)$, 则波形对称于原点, 如图 3-1-6 所示。

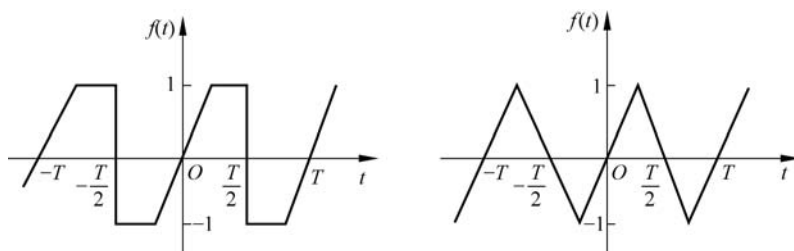


图 3-1-6 奇函数

这时有

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt, \end{aligned} \right\} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3-1-28)$$

进而有

$$\left. \begin{aligned} A_n &= |b_n|, \\ \varphi_n &= \frac{(2m+1)\pi}{2}, \quad m \text{ 为整数}, \end{aligned} \right\} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3-1-29)$$

实际上, 任意函数 $f(t)$ 都可分解为奇函数和偶函数两部分, 即

$$f(t) = f_{\text{od}}(t) + f_{\text{ev}}(t)$$

式中, $f_{\text{od}}(t)$ 表示奇函数部分, $f_{\text{ev}}(t)$ 表示偶函数部分。由于

$$f(-t) = f_{\text{od}}(-t) + f_{\text{ev}}(-t) = -f_{\text{od}}(t) + f_{\text{ev}}(t)$$

所以有

$$f_{\text{od}}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad f_{\text{ev}}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad (3-1-30)$$

需要注意, 某函数是否为奇(或偶)函数不仅与周期函数 $f(t)$ 的波形有关, 而且与时间

坐标原点的选择有关。

3.1.3 傅里叶级数的指数形式

三角函数形式的傅里叶级数含义比较明确,但运算不方便,因而经常采用指数形式的傅里叶级数。

由于

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

所以式(3-1-21)可写为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{2} [e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + e^{-j(n\Omega t + \varphi_n)}] \\ &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-j\varphi_n} e^{-jn\Omega t} \end{aligned}$$

将上式第三项中的 n 用 $-n$ 代换,并考虑到 A_n 是 n 的偶函数,即 $A_{-n} = A_n$; φ_n 是 n 的奇函数,即 $\varphi_{-n} = -\varphi_n$,则上式可写为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} A_{-n} e^{-j\varphi_{-n}} e^{jn\Omega t} \\ &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} \end{aligned}$$

如将上式中的 A_0 写成 $A_0 e^{j\varphi_0} e^{j0\Omega t}$ (其中, $\varphi_0 = 0$),则上式可以写为

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} \quad (3-1-31)$$

令复数量 $\frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = |F_n| e^{j\varphi_n} = F_n$, 称其为复傅里叶系数,简称傅里叶系数,其模为 $|F_n|$, 相角为 φ_n ,则得傅里叶级数的指数形式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (3-1-32)$$

根据式(3-1-23),傅里叶系数

$$F_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} [A_n \cos \varphi_n + j A_n \sin \varphi_n] = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \quad (3-1-33)$$

将式(3-1-19)和式(3-1-20)代入式(3-1-33),得

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3-1-34)$$

这就是求指数形式傅里叶级数的复系数 F_n 的公式。

式(3-1-32)表明,任意周期信号 $f(t)$ 可分解为许多不同频率的虚指数信号 ($e^{jn\Omega t}$) 之和,