

第 5 章



布尔代数在 PLC 中的应用

直到目前为止,尚未见到布尔代数在 PLC 中的系统应用,由于作者在这方面的应用有限,在此将自己把布尔代数应用在 PLC 中的经验介绍给大家,在此抛砖引玉。

布尔代数也称为逻辑代数,源于哲学领域中的逻辑学。1847 年,英国数学家乔治·布尔(George Boole)成功地将形式逻辑归结为一种代数演算,创立了有名的布尔代数。1938 年,香农(Shannon)将布尔代数电话继电器的开关电路的设计,提出了“开关代数”。

作者从 PLC 的角度出发,将布尔代数引入 PLC 中,供读者参考应用。

在 PLC 梯形图中最重要的就是各种接点的串并联电路。前面我们讲过,接点接通用 1 表示,接点断开用 0 表示。接点的串并联可以用逻辑表达式表示,用布尔代数就可以对逻辑表达式进行逻辑运算,根据控制要求得出 PLC 控制梯形图。

5.1 PLC 控制电路的基本组成

PLC 电气控制电路根据逻辑关系可以分成 3 个组成部分。

1. 输入元件

PLC 的输入元件为输入继电器 X。输入继电器 X 用于连接外部的输入信号,是控制电路的输入逻辑变量,用于对 PLC 电路的控制。输入继电器 X 在梯形图中是无记忆元件,不允许有线圈。

连接于 PLC 输入端的输入元件有如下两种。

- (1) 主令元件是人向控制电路发布控制指令的元件,如按钮、开关、数字开关等。
- (2) 检测元件是电路和电气控制设备本身向控制电路发布控制指令的元件,用于对电路和电气控制设备的某些物理量(如行程距离、温度、转速、压力和电流等)的检测。常用的检测元件有行程开关、接近开关、热继电器、电流继电器和速度继电器等。

2. 中间逻辑元件

除了 PLC 的输入继电器 X 和输出继电器 Y 之外的软元件都是中间逻辑元件,如 M、T、C、D、Z、V。中间逻辑元件是梯形图中的中间逻辑变量,用于对梯形图中变量的逻辑变换和记忆等。

3. 输出执行元件

PLC 的输出执行元件为输出继电器 Y。输出元件用于对电路控制结果的执行，是控制电路的输出逻辑变量，也具有变量的逻辑变换和记忆功能。

连接于 PLC 输出电路的电气元件可分为有记忆功能和无记忆功能两种。常用的有记忆功能的输出执行元件有接触器、各种继电器等。无记忆功能的输出执行元件有信号灯、报警器、电磁铁、电磁阀和电动机等。

所谓有记忆功能元件，通常是指有线圈也有接点的元件，例如辅助继电器 M，在梯形图中可以有接点，也可以有线圈。

无记忆功能元件是指只有接点而没有线圈的元件，输入继电器 X 是无记忆功能元件，在梯形图中只有接点，没有线圈。

5.2 PLC 位元件的状态和值

位元件(也称布尔元件)是指只有“0”和“1”两种状态或值的元件。PLC 中的位元件有输入继电器 X、输出继电器 Y、辅助继电器 M、状态继电器 S、定时器 T、计数器 C 和数据寄存器 D□. b。

PLC 中的软元件有两种状态，一种是原始状态，另一种是动作状态。通常规定软元件未受激励时的原始状态为 0 状态，受激励时而动作的状态为 1 状态。接点在断开时的值为 0，闭合时的值为 1。

在未受外力的原始状态下，处于断开状态的开关(接点)称为常开开关(接点)，处于接通状态的开关(接点)称为常闭开关(接点)。显然，常开开关(接点)在原始状态下的值为 0，常闭开关(接点)在原始状态下的值为 1。

通常规定元件在失电状态下为 0 状态，对于有记忆元件，常开接点的值为 0，常闭接点的值为 1；元件在得电状态下为 1 状态，对于有记忆元件，常开接点的值为 1，常闭接点的值为 0。元件的状态和值如表 5-1 所示。

表 5-1 元件的状态和值

	原始 状态	动作 状态	常 开 接 点		常 闭 接 点	
			原始状态的 值	动作状态的 值	原始状态的 值	动作状态的 值
输入元件	0	1	0	1	1	0
有记忆元件	0	1	0	1	1	0
无记忆元件	0	1	(无接点)			

常开接点的值和元件本身的状态一致，称为原变量。常闭接点的值和元件本身的状态相反，称为反变量。

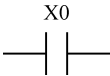
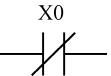
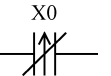
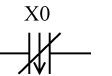
5.3 PLC 中的接点种类

PLC 中的接点是位元件,元件的状态和值可以用一位二进制数(0 或 1)来表示。例如 $X1=0,Y1=1$ 等。

PLC 中接点的种类有 6 种(以 $X0$ 为例):常开接点 $X0$ 、常闭接点 $\overline{X0}$ 、上升沿常开接点 $X0 \uparrow$ 、下降沿常开接点 $X0 \downarrow$ 、上升沿常闭接点 $\overline{X0 \uparrow}$ 、下降沿常闭接点 $\overline{X0 \downarrow}$ 。

PLC 中接点的种类及图形符号如表 5-2 所示。

表 5-2 PLC 中接点的种类

接点名称	常开接点	常闭接点	上升沿常开接点	下降沿常开接点	上升沿常闭接点	下降沿常闭接点
接点符号	$X0$	$\overline{X0}$	$X0 \uparrow$	$X0 \downarrow$	$\overline{X0 \uparrow}$	$\overline{X0 \downarrow}$
图形符号						

5.4 布尔代数的基本逻辑运算

1. 与运算

与运算也称逻辑乘或者逻辑与,在 PLC 中就是接点的串联,如图 5-1 所示。

图 5-1 的逻辑表达式为:

$Y0=X0 \cdot X1$ 或 $Y0=X0 \times X1$ 或 $Y0=X0 X1$

式中“ $\cdot$ ”“ $\times$ ”称为逻辑与,或者称为逻辑乘。

2. 或运算

或运算也称逻辑加,在 PLC 中就是接点的并联,如图 5-2 所示。

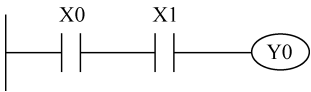


图 5-1 接点的串联

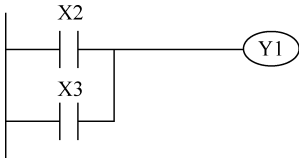


图 5-2 接点的并联

图 5-2 的逻辑表达式为:

$Y0=X0+X1$

式中“ $+$ ”称为逻辑加。

3. 非运算

非运算也称逻辑反,在 PLC 中就是接点的取反,如图 5-3 所示。

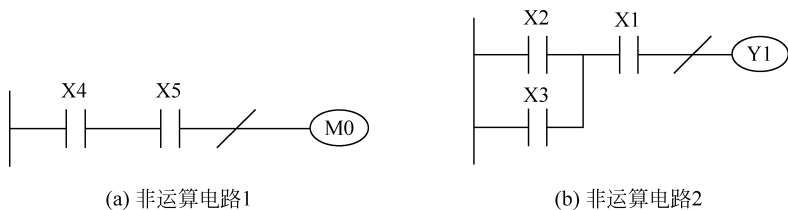


图 5-3 接点的取反

图 5-3(a)的逻辑表达式为:

$$M0 = \overline{X4} \times X5$$

图 5-3(b)的逻辑表达式为:

$$Y1 = (\overline{X2 + X3}) X1$$

式中“——”称为逻辑取反,或者称为逻辑取非。

4. 异或运算和同或(异或非)运算

异或运算电路如图 5-4 所示。

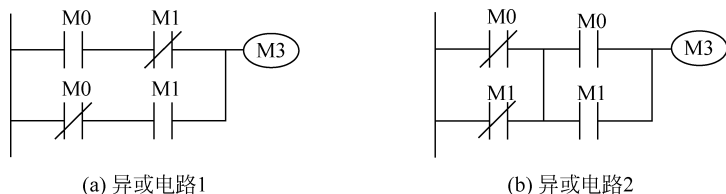


图 5-4 接点的异或连接

图 5-4(a)的逻辑表达式为:

$$M3 = \overline{M0} \overline{M1} + \overline{M0} M1 = M0 \oplus M1$$

图 5-4(b)的逻辑表达式为:

$$M3 = (\overline{M0} + \overline{M1}) (M0 + M1) = M0 \oplus M1$$

式中“ $\oplus$ ”称为逻辑异或运算。

在异或电路中,两个变量 $M0$ 和 $M1$ 不相同,即一个为 0,一个为 1 时,结果为 1。即:

$$M0 \oplus M1 = 0 \oplus 0 = 0, (M0 \text{ 和 } M1 \text{ 都为 } 0)$$

$$M0 \oplus M1 = 1 \oplus 1 = 0, (M0 \text{ 和 } M1 \text{ 都为 } 1)$$

$$M0 \oplus M1 = 0 \oplus 1 = 1, (M0 \text{ 为 } 0, M1 \text{ 为 } 1)$$

$$M0 \oplus M1 = 1 \oplus 0 = 1, (M0 \text{ 为 } 1, M1 \text{ 为 } 0)$$

同或运算电路如图 5-5 所示。

图 5-5(a)的逻辑表达式为:

$$M3 = M0 M1 + \overline{M0} \overline{M1} = M0 \odot M1$$

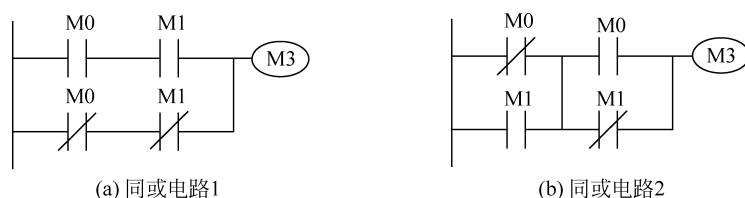


图 5-5 接点的同或连接

图 5-5(b)的逻辑表达式为:

$$M3 = (\overline{M0} + M1)(M0 + \overline{M1}) = M0 \odot M1$$

式中“ $\odot$ ”称为逻辑同或运算,或者称为逻辑异或非运算。

在同或电路中,两个变量 $M0$ 和 $M1$ 同时为 0,或同时为 1 时,结果为 1。即:

$$M0 \odot M1 = 0 \odot 0 = 1 \quad (M0 \text{ 和 } M1 \text{ 都为 } 0)$$

$$M0 \odot M1 = 1 \odot 1 = 1 \quad (M0 \text{ 和 } M1 \text{ 都为 } 1)$$

$$M0 \odot M1 = 0 \odot 1 = 0 \quad (M0 \text{ 为 } 0, M1 \text{ 为 } 1)$$

$$M0 \odot M1 = 1 \odot 0 = 0 \quad (M0 \text{ 为 } 1, M1 \text{ 为 } 0)$$

显而易见,异或取反就是同或,同或取反就是异或。

$$M0 \oplus M1 = \overline{M0 \odot M1} \quad M0 \odot M1 = \overline{M0 \oplus M1}$$

5.5 梯形图逻辑表达式的基本定律

布尔代数中的与、或、非三种运算可以导出布尔代数运算的一些基本定律,再由这些定律导出一些常用公式。它们为逻辑函数的化简提供了理论依据,也是分析和设计 PLC 梯形图的重要工具。

为了公式的简洁,下面用大写字母 A、B、C、D 等表示变量。

1. 基本定律

1) 与常量有关的定律

0-1 率:

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A + 1 = 1$$

图 5-6 为 0-1 率等效图。

自等率(见图 5-7):

$$A \cdot 1 = A$$

$$A + 0 = A$$

2) 与普通代数相似的定律

交换律:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + B = B + A$$

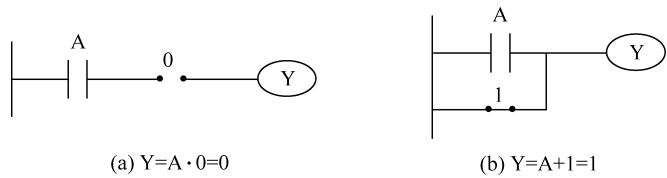


图 5-6 0-1 率等效图

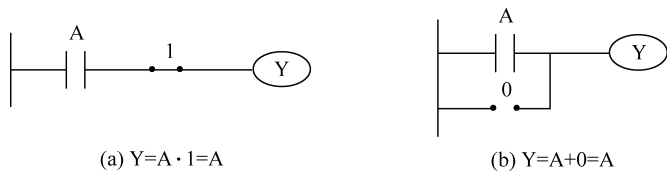


图 5-7 自等率等效图

图 5-8 为 0-1 交换率等效图。

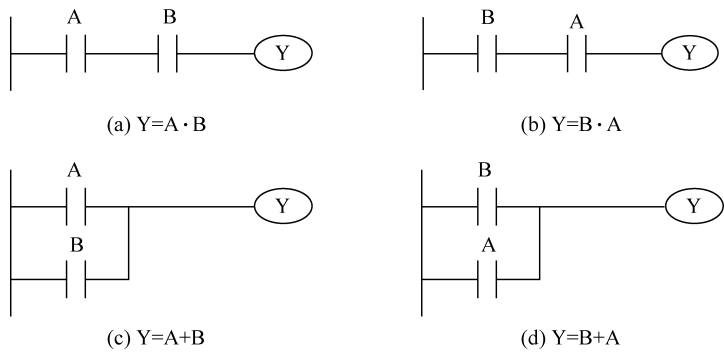


图 5-8 交换率等效图

分配律：

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$$

图 5-9 和图 5-10 为分配律等效图。

互补律：

$$A \cdot \bar{A} = 0$$
$$A + \bar{A} = 1$$

图 5-11 和图 5-12 为互补律等效图。

重叠律：

$$A \cdot A = A$$
$$A + A = A$$

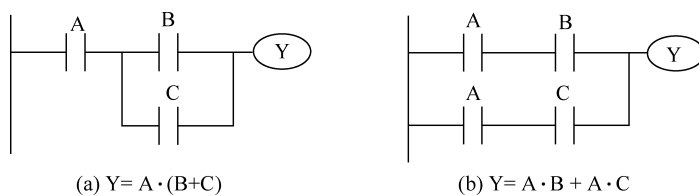


图 5-9 分配律等效图 1

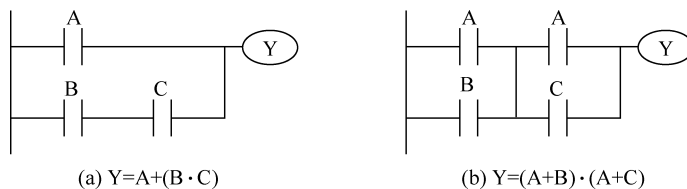


图 5-10 分配律等效图 2

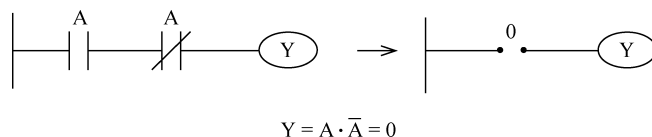


图 5-11 互补律等效图 1

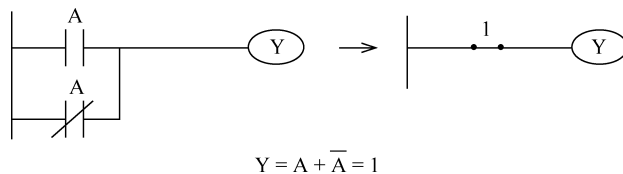


图 5-12 互补律等效图 2

图 5-13 和图 5-14 为重叠律等效图。

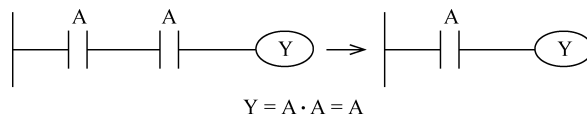


图 5-13 重叠律等效图 1

反演律:

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

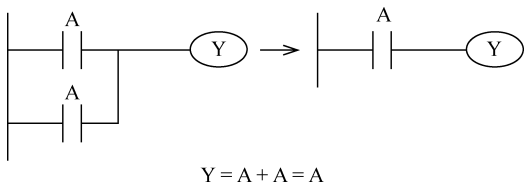


图 5-14 重叠律等效图 2

图 5-15 和图 5-16 为反演律等效图。

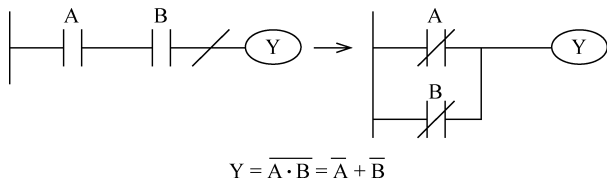


图 5-15 反演律等效图 1

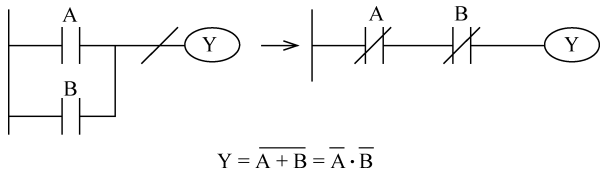


图 5-16 反演律等效图 2

对合律：

$$\overline{\overline{A}} = A$$

图 5-17 为对合律等效图。

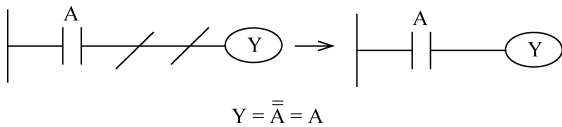


图 5-17 对合律等效图

2. 基本规则

1) 代入规则

一个包含变量 A 的逻辑等式中,如果把 A 换成另一个逻辑式,则等式仍成立。这就是代入规则。

例如前面提到的反演律： $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ 和 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ 。

把 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ 式中的 B 换成 $B \cdot C$,等式也成立。

$$\overline{A \cdot (B \cdot C)} = \overline{A} + \overline{B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

把 $\overline{A+B}=\overline{A} \cdot \overline{B}$ 中的 B 换成 B+C,等式也成立。

$$\overline{A+(B+C)}=\overline{A} \cdot \overline{(B+C)}=\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

利用代入规则可以推导出更多的公式。

以上就是利用代入规则推导公式：

$$\overline{A \cdot B \cdot C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

$$\overline{A+B+C}=\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

2) 反演规则

一个逻辑等式 Y 中,如果把式中的“·”换成“+”,“+”换成“·”;“1”换成“0”,“0”换成“1”,则得到反函数 $\overline{Y}$ 。这就是反演规则。

例如求 $Y=AB(C+DE)+\overline{B}C$ 的反函数,根据反演规则:

$$\overline{Y}=\overline{[A+B+\overline{C} \cdot (\overline{D}+\overline{E})] \cdot (B+\overline{C})}$$

利用反演规则注意如下:

(1) 利用反演规则求得的反函数和用反演律求得的反函数一致。

例如 $Y=A\overline{B}+\overline{A}B$

利用反演规则,求得 $\overline{Y}=(\overline{A}+B)(A+\overline{B})=\overline{A}\overline{B}+AB$

利用反演律,求得 $\overline{Y}=\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}$,求得 $\overline{Y}=\overline{A\overline{B}} \cdot \overline{\overline{A}B}=(\overline{A}+B)(A+\overline{B})=\overline{A}\overline{B}+AB$

(2) 在求反符号下有两个以上变量时,求反符号应该保持不变。

例如 $Y=\overline{A\overline{B}CD}$,则 $\overline{Y}=\overline{\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}}$

5.6 常用公式

表 5-3 和表 5-4 列出了有关逻辑代数常用的基本公式和一些常用公式。

表 5-3 逻辑代数常用的基本公式

序号	公 式	序号	公 式
1	$0 \times A=0$	10	$0+A=A$
2	$1 \times A=A$	11	$1+A=1$
3	$A \times A=A$	12	$A+A=A$
4	$A \times \overline{A}=0$	13	$A+\overline{A}=1$
5	$A \times B=B \times A$	14	$A+B=B+A$
6	$(A \times B) \times C=A \times (B \times C)$	15	$(A+B)+C=A+(B+C)$
7	$A \times (B+C)=A \times B+A \times C$	16	$A+(B \times C)=(A+B) \times (A+C)$
8	$\overline{A \times B}=\overline{A}+\overline{B}$	17	$\overline{A+B}=\overline{A} \times \overline{B}$
9	$\overline{\overline{A}}=A$	18	

表 5-4 逻辑代数的其他常用公式

序 号	公 式
1	$A + A \times B = A$
2	$A + \overline{A} \times B = A + B$
3	$A \times B + A \times \overline{B} = A$
4	$A \times (A + B) = A$
5	$A \times B + \overline{A} \times C + B \times C = A \times B + \overline{A} \times C$ $A \times B + \overline{A} \times C + B \times C \times D = A \times B + \overline{A} \times C$
6	$A \times \overline{A \times B} = A \times \overline{B}$ $\overline{A} \times \overline{A \times B} = \overline{A}$

5.7 基本逻辑电路的类型

逻辑电路根据控制逻辑的特点可分为组合电路和时序电路。

1. 组合电路

组合电路的控制结果只和输入变量的状态有关,如图 5-18 所示的控制电路均为组合电路。

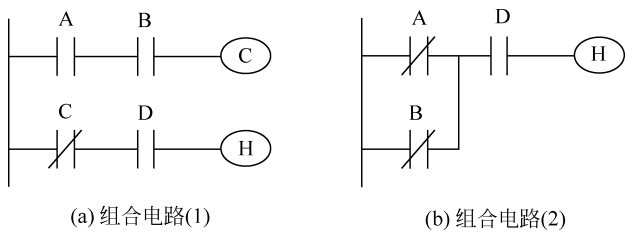


图 5-18 中间逻辑变量的消除

由于组合电路的控制结果只和输入变量的状态有关,所以可以用布尔代数(也称开关代数或逻辑代数)通过计算而得出。

组合电路是由输入变量、中间逻辑变量和输出逻辑变量三者构成的,但不含记忆元件。由于组合电路的输出只和输入有关,所以中间逻辑变量也可以根据逻辑关系将其消除。

如图 5-18(a)所示,写出梯形图的逻辑关系表达式。

$$C = AB$$

$$H = \overline{C}D$$

将 $C = AB$ 代入 $H = \overline{C}D$ 得:

$$H = \overline{C}D = \overline{AB}D = (\overline{A} + \overline{B})D$$

根据上式画出梯形图如图 5-18(b)所示。由上式可知,输出变量 H 只和 A、B、D 有关,与输出变量 H 无关,所以是组合电路。

每个输入变量都有 0 和 1 两种状态(0 表示原始状态,1 表示动作状态),N 个输入变量则有 2^N 种状态,可以用 N 位二进制数来表示。

2. 时序电路

时序电路也称记忆电路,其中包含记忆元件。时序电路的控制结果不仅和输入变量的状态有关,也和记忆元件的状态有关。由于中间逻辑元件和输出执行元件中有记忆元件,所以,时序电路的控制结果和输入变量、中间逻辑变量和输出逻辑变量三者都有关系。时序电路的逻辑关系比较复杂,目前主要用经验法来设计。

继电器、接触器是最基本的记忆元件,在电气控制电路中,绝大多数为记忆电路,记忆电路主要用于对短时通断信号(如按钮、位置开关等)的记忆,常用于各种电动机的起动停止控制,电气控制电路中的自锁电路就是一种记忆电路,如图 5-19 所示。

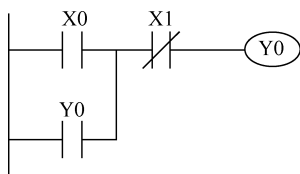


图 5-19 时序电路

写出梯形图的逻辑关系表达式。

$$Y0 = (X0 + Y0)X1$$

由梯形图和逻辑关系表达式可知,输出变量 Y0 不仅和输入变量 X0、X1 有关,还与输出变量 Y0 有关。所以这是一个时序电路(记忆电路)。

布尔代数适用于组合电路的逻辑运算。也可以用于时序电路中的局部电路。

5.8 PLC 组合电路的设计方法

利用布尔代数可以进行 PLC 梯形图的设计。下面通过例子说明 PLC 梯形图设计的方法和步骤。

例 5.1 楼梯走廊灯控制。

在楼梯走廊里,楼上楼下各安装一个开关来控制一盏灯,试画出控制电路。

根据题意分析可知,两个开关只有其中一个开关动作时灯亮,两个开关都动作或都不动作时灯不亮。

(1) 根据题意列出真值表,两个开关只有 4 种输入状态,如表 5-5 所示。

表 5-5 例 5.1 真值表

输入状态		输出结果
X2	X1	Y0
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

设开关 1 输入端为 X1,开关 2 输入端为 X2,输出端灯为 Y0。当两个开关都不动作时,X1=0,X2=0,灯不亮,Y0=0。当开关 1 动作时,X1=1,开关 2 不动作时,X2=0,灯亮,Y0=1。当开关 1 不动作时,X1=0,开关 2 动作时,X2=1,灯亮,Y0=1。当两个开关都动作时,X1=1,X2=1,灯不亮,Y0=0。

(2) 根据真值表写出逻辑表达式。

$$Y0 = X1\overline{X2} + \overline{X1}X2 = X1 \oplus X2$$

(3) 化简逻辑表达式。这个逻辑表达式已经是最简单的,就不需要化简。

(4) 根据逻辑表达式 $Y0 = X1\overline{X2} + \overline{X1}X2$ 画出控制梯形图,如图 5-20 所示。

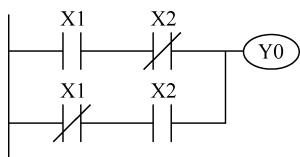


图 5-20 两个开关控制一盏灯控制梯形图

例 5.2 用两个开关控制一个七段数码管显示。

用两个开关控制一个七段数码管显示 1、2、3、4，试画出控制电路。

(1) 确定七段数码管显示 1、2、3、4 的笔画如图 5-21 所示。

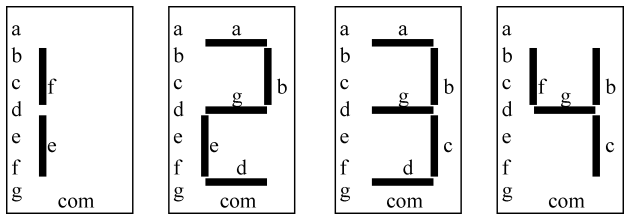


图 5-21 七段数码管显示 1、2、3、4 的笔画

(2) 两个开关有 4 种状态，每个状态显示一个数字，据此列出真值表，如表 5-6 所示。

表 5-6 七段数码管显示的真值表

开 关		显示数字	七段数码管笔画						
S2	S1		a	b	c	d	e	f	g
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	2	1	1	0	1	1	0	1
1	1	3	1	1	1	1	0	0	1
1	0	4	0	1	1	0	0	1	1

(3) 根据真值表写出各笔画的逻辑表达式，并化简。

七段数码管各段笔画的逻辑表达式分别如下：

$$\begin{aligned} a &= d = \overline{S2}S1 + S2S1 = (\overline{S2} + S2)S1 = S1 \\ b &= g = S1 + S2 \\ c &= S2 \\ e &= \overline{S2} \\ f &= \overline{S1} \end{aligned}$$

(4) 根据逻辑表达式画出控制电路，如图 5-22 所示。

说明：为了使电路简单，这里采取了两项措施：①数码管的“1”使用了笔画 f、e 而不是笔画 b、c。②真值表中的 S2、S1 的值不是按二进制数 00、01、10、11 的顺序排列，而是按 00、01、11、10 的顺序排列。

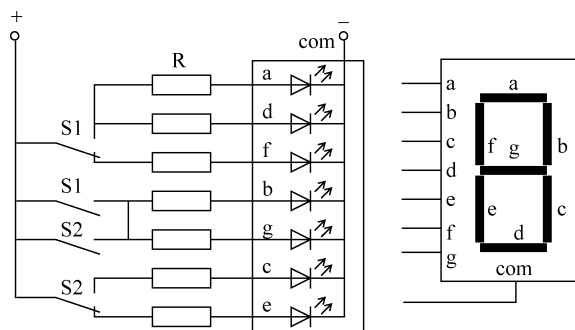


图 5-22 七段数码管控制电路

例 5.3 用 PLC 控制 4 组彩灯。

用 PLC 控制 4 组彩灯,要求每隔 1s 变化 1 次,每次亮 2 组彩灯,按图 5-23(a)所示的时序图反复变化。4 组彩灯分别由 Y0~Y3 控制。

(1) 根据控制要求,列出 Y0~Y3 所对应的真值表,如表 5-7 所示。

表 5-7 输出控制状态真值表

当前值	由 K1M0 表示 C0 当前值				输出控制			
C0	M3	M2	M1	M0	Y3	Y2	Y1	Y0
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
2	0	0	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	0	0	1

(2) 由表 5-7 所示的真值表可写出如下逻辑表达式。

在真值表中,当 M1 M0=00 时 Y0=1,M1 M0=11 时 Y0=1。据此写出 Y0 逻辑表达式:

$$Y0=\overline{M0} \overline{M1}+M0M1$$

同理,写出 Y1、Y2、Y3 的逻辑表达式:

$$Y1=\overline{M1}$$

$$Y2=\overline{M0}M1+M0\overline{M1}=\overline{Y0}$$

$$Y3=M1=\overline{Y1}$$

(3) 梯形图设计。

设计一个循环计数器(参考图 1-24),用计数器 C0 对 M8013(1s 时钟脉冲)计数,M8013 每变化 4 次(4s)为 1 个周期,C0 的计数值为 0、1、2、3,并依次循环。由计数器的当前值控制 Y0~Y3 的状态。

为了取得计数器的当前值,可用 MOV 指令将计数器的当前值传送到 K1M0 中,用 K1M0 表示计数器的当前值。由 K1M0 表示 C0 当前值,再由 K1M0 来控制 Y0~Y3 的

状态。

由逻辑表达式可以画出 Y0~Y3 的梯形图,如图 5-23(b)所示。

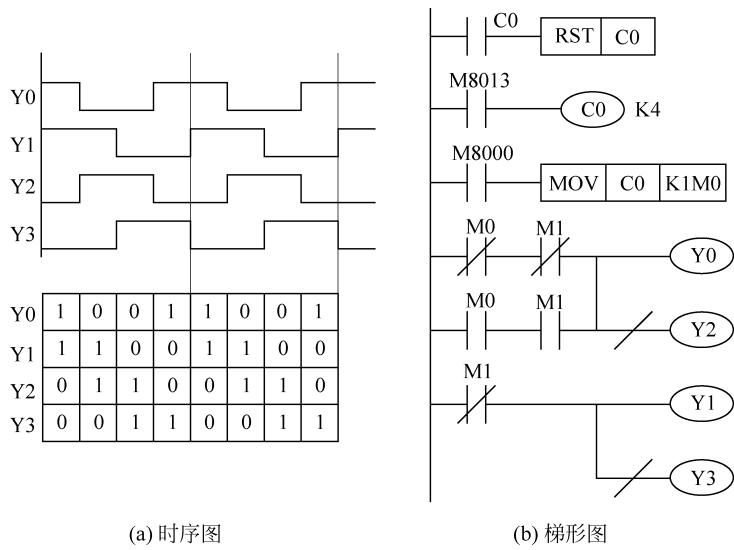


图 5-23 4 组彩灯控制

以上例子比较简单只需 3 步,对于比较复杂的例子,根据真值表写出的逻辑表达式通常需要化简,下面介绍逻辑代数和卡诺图两种常用的化简方法。

5.9 逻辑代数化简法

一个逻辑表达式可以有多种表达方式。例如：

$$Y = AC + D$$
$$= (A + \overline{C})(C + D)$$
$$= \overline{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}$$
$$= \overline{(A + \overline{C}) + (\overline{C} + D)}$$
$$= \overline{\overline{AC} + \overline{CD}}$$

与-或表达式

或-与表达式

与非-与非表达式

或非-或非表达式

与-或非表达式

因为与-或表达式是比较常见的,同时与-或表达式比较容易同其他形式的表达式相互转换,本节所谓化简,一般是指化为最简的与-或表达式。

常用的逻辑代数化简法如下：

1. 并项法

利用 $A + \overline{A} = 1$ 的公式,将两项合并成一项,并消除一个变量。如：

$$Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} = \overline{A}\overline{B}(C + \overline{C}) = \overline{A}\overline{B}$$

2. 吸收法

利用 $A+AB=A$ 的公式,消除多余的变量。如:

$$Y=\bar{A}B+\bar{A}BCD(E+F)=\bar{A}B$$

3. 消去法

利用 $A+\bar{A}B=A+B$ 的公式,消除多余变量。如:

$$Y=AB+\bar{A}C+\bar{B}C=AB+(\bar{A}+\bar{B})C=AB+\overline{AB}C=AB+C$$

4. 配项法

利用 $B=B(A+\bar{A})$ 将 $(A+\bar{A})$ 与某乘积项相乘,再展开,消除多余项。如:

$$\begin{aligned} Y &= AB + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} \\ &= AB + \bar{A}\bar{C} + (A + \bar{A})\bar{B}\bar{C} \\ &= AB + \bar{A}\bar{C} + (A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}) \\ &= AB(1 + \bar{C}) + \bar{A}\bar{C}(1 + B) \\ &= AB + \bar{A}\bar{C} \end{aligned}$$

例 5.4 化简如图 5-24(a) 所示的电路。

根据电路如图 5-24(a)所示写出逻辑表达式:

$$Y=\bar{B}\bar{A}C+AC$$

化简,可得:

$$Y=\bar{B}\bar{A}C+AC=(\bar{B}\bar{A}+A)C=(B+A)C$$

根据化简逻辑表达式画出电路,如图 5-24(b)所示。

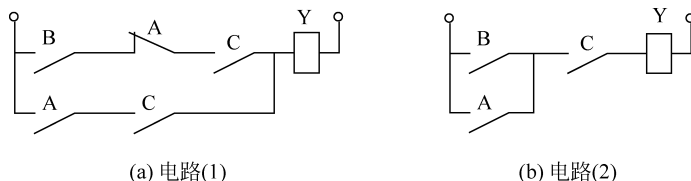


图 5-24 例 5.4 的电路

例 5.5 化简如图 5-25 所示梯形图。

根据图 5-25 所示梯形图写出逻辑表达式并化简。

$$\begin{aligned} Y0 &= (X0 + M0) + (X0 + \bar{M0}) \\ &= X0 \cdot X0 + X0\bar{M0} + M0X0 + M0\bar{M0} \quad (\text{式中 } X0 \cdot X0 = X0, M0\bar{M0} = 0) \\ &= X0 + X0\bar{M0} + M0X0 + 0 \\ &= X0(1 + \bar{M0} + M0) \quad (\text{式中 } 1 + \bar{M0} + M0 = 1) \\ &= X0 \end{aligned}$$

根据化简结果画出梯形图(如图 5-26 所示)。

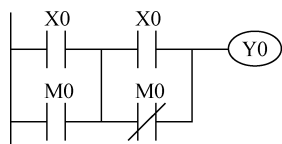


图 5-25 梯形图

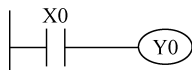


图 5-26 梯形图

5.10 卡诺图化简法

卡诺图是美国工程师 Karnaugh 于 20 世纪 50 年代提出的。用卡诺图可以表示和化简逻辑表达式。首先介绍最小项和最大项的概念以及卡诺图的构成,其次介绍如何用卡诺图表达逻辑表达式、真值表、表达式之间的转换。最后介绍用卡诺图化简逻辑表达式。

我们知道,一个开关变量 A 有两种状态,接通为 A=1,断开为 A=0。两个开关变量 A 和 B 有四种状态,A=0,B=0,写作 AB=00; A=0,B=1,写作 AB=01; A=1,B=0,写作 AB=10; A=1,B=1,写作 AB=11。三个开关变量 A、B 和 C 有八种状态。可见 n 个开关变量有 2ⁿ 种状态。例如 4 个开关(n=4)有 2⁴=16 种状态。n 个开关变量的 2ⁿ 种状态可以用 2ⁿ 个 n 位二进制数表示。如三个开关 A、B、C 的状态可以用八种 3 位二进制数表示。如表 5-8 所示。例如二进制数 011 表示 ABC=011,就是 A=0,B=1,C=1。

1. 逻辑表达式的最小项概念

在介绍卡诺图之前,先介绍最小项的概念。例如有三个逻辑变量 A、B、C,可以有 8 个最小项,分别是 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 、 $\overline{A}\overline{B}C$ 、 $\overline{A}B\overline{C}$ 、 $\overline{A}BC$ 、 $A\overline{B}\overline{C}$ 、 $A\overline{B}C$ 、 $AB\overline{C}$ 、 ABC ,如表 5-8 所示。

表 5-8 三个逻辑变量 A、B、C 最小项编号

最小项	使最小项为 1 的变量取值	对应的十进制数	编号
	A B C		
$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	0 0 0	0	m0
$\overline{A}\overline{B}C$	0 0 1	1	m1
$\overline{A}B\overline{C}$	0 1 0	2	m2
$\overline{A}BC$	0 1 1	3	m3
$A\overline{B}\overline{C}$	1 0 0	4	m4
$A\overline{B}C$	1 0 1	5	m5
$AB\overline{C}$	1 1 0	6	m6
ABC	1 1 1	7	m7

最小项的性质如下:

- (1) 任何一个最小项只有一个取值使它为 1,例如当 ABC=011 时, $\overline{A}B C=\overline{0} 1 1=1$ 。
- (2) 全体最小项之和为 1。
- (3) 任意两个最小项之乘积为 0。例如 $\overline{A} B C \times A B \overline{C} = \overline{A} A B B \overline{C} C = 0$ 。

(4) 相邻两个最小项之和可以合并成一项,并消去一对因子。例如在 4 变量卡诺图中 $m_7(\overline{D}CBA)$ 和 $m_{15}(DCBA)$ 相邻, $\overline{D}CBA + DCBA = (\overline{D} + D)CBA = CBA$ 。

2. 逻辑表达式的最大项概念

在有 n 个变量逻辑表达式中,n 个变量(原变量或反变量)之和称为最大项。

例如三个变量 A、B、C 有 8 个(2^n)最大项: $(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$ 、 $(\overline{A} + \overline{B} + C)$ 、 $(\overline{A} + B + \overline{C})$ 、 $(\overline{A} + B + C)$ 、 $(A + \overline{B} + \overline{C})$ 、 $(A + \overline{B} + C)$ 、 $(A + B + \overline{C})$ 、 $(A + B + C)$,如表 5-9 所示。

表 5-9 三个逻辑变量 A、B、C 最大项编号

最大项	使最大项为 0 的变量取值	对应的十进制数	编号
	A B C		
$A + B + C$	0 0 0	0	M0
$A + B + \overline{C}$	0 0 1	1	M1
$A + \overline{B} + C$	0 1 0	2	M2
$A + \overline{B} + \overline{C}$	0 1 1	3	M3
$\overline{A} + B + C$	1 0 0	4	M4
$\overline{A} + B + \overline{C}$	1 0 1	5	M5
$\overline{A} + \overline{B} + C$	1 1 0	6	M6
$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$	1 1 1	7	M7

最大项的性质如下:

- (1) 在输入变量的任意取值下必有一个最大值,而且只有一个最大项的值为 0。
- (2) 全体最大值之积为 0。
- (3) 任意两个最大项的和为 1。
- (4) 只有一个变量不同的两个最大项的乘积等于各相同变量之和。

对比表 5-8 和表 5-9 可知最小项和最大项存在如下关系:

$$M_i = \overline{m_i}$$

例如 $m_0 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$, $\overline{m_0} = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = A + B + C = M_0$ 。

3. 卡诺图的构成

1) 1 变量卡诺图

1 个变量 A 有 2 个最小项: $\overline{A}$ 、A。1 个变量卡诺图只有 2 个小方格,如图 5-27 所示。

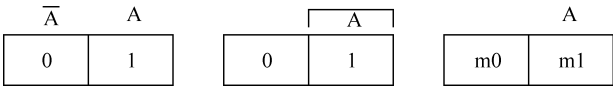


图 5-27 1 变量 A 卡诺图

2) 2 变量卡诺图

2 个变量 B、A 有 4 个最小项: $\overline{B}\overline{A}$ 、 $\overline{B}A$ 、 $B\overline{A}$ 、 BA 。2 个变量卡诺图只有 4 个小方格,如图 5-28 所示。2 变量卡诺图相当于两个折叠的 1 变量卡诺图,如图 5-28(a)所示,向右展开

的 4 个小方格。再加入变量 B,如图 5-28(b)所示。

也可以将 1 变量卡诺图如图 5-28(c)所示向下展开,加入变量 B,变成如图 5-28(d)所示的 2 变量卡诺图。图 5-28(d)左边的 0 表示 B=0,1 表示 B=1。上边的 0 表示 A=0,1 表示 A=1。方格中的 01 表示最小项为 $m_1=\bar{B}A$,10 表示最小项为 $m_2=B\bar{A}$ 等。

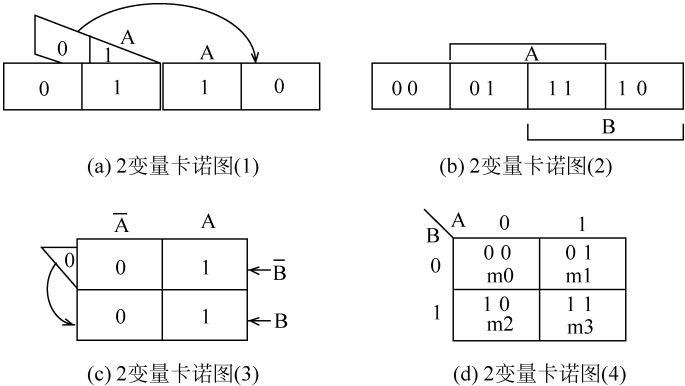


图 5-28 2 变量卡 BA 卡诺图

3) 3 变量卡诺图

3 个变量 C、B、A 有 8 个最小项： $\bar{C}\bar{B}\bar{A}$ 、 $\bar{C}\bar{B}A$ 、 $\bar{C}B\bar{A}$ 、 $\bar{C}BA$ 、 $C\bar{B}\bar{A}$ 、 $C\bar{B}A$ 、 $CB\bar{A}$ 、 CBA 。3 个变量卡诺图有 8 个小方格,如图 5-29 所示。2 变量卡诺图相当于两个折叠的 2 变量卡诺图,如图 5-28(b)所示,向下展开成的 8 个小方格。再加入变量 C,如图 5-29(a)所示。

也可以将 2 变量卡诺图如图 5-28(c)向右展开,变成如图 5-29(b)所示的 3 变量卡诺图。图 5-29(b)左边的 00 表示 CB=00,01 表示 CB=01 等。上边的 0 表示 A=0,1 表示 A=1。方格中的 101 表示最小项为 $m_5=\bar{C}BA$,110 表示最小项为 $m_6=CB\bar{A}$ 等。

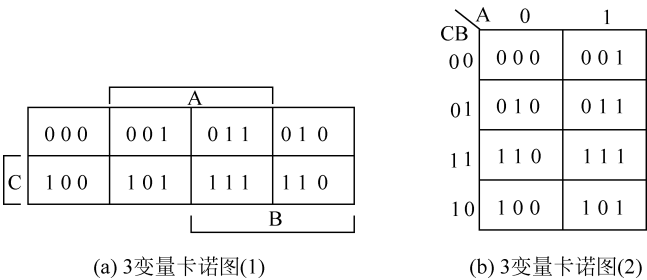


图 5-29 3 变量 CBA 卡诺图

4) 4 变量卡诺图

如图 5-30(a)所示的 4 变量卡诺图是由 3 变量 CBA 卡诺图 5-29(a)向下反转的 4 变量 D、C、B、A 的最小项卡诺图。

当然,4 变量卡诺图也可以由 3 变量 CBA 卡诺图 5-29(b)向右反转成为 4 变量 D、C、B、A 的最小项卡诺图。请读者自己画画看。

A			
0 0 0 0 0	1 0 0 0 1	3 0 0 1 1	2 0 0 1 0
4 0 1 0 0	5 0 1 0 1	7 0 1 1 1	6 0 1 1 0
12 1 1 0 0	13 1 1 0 1	15 1 1 1 1	14 1 1 1 0
8 1 0 0 0	9 1 0 0 1	11 1 0 1 1	10 1 0 1 0
B			

(a) 4变量卡诺图(1)

DC \ BA	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	m0 $\bar{D}\bar{C}\bar{B}\bar{A}$	m1 $\bar{D}\bar{C}\bar{B}A$	m3 $\bar{D}\bar{C}BA$	m2 $\bar{D}\bar{C}\bar{B}\bar{A}$
0 1	m4 $\bar{D}C\bar{B}\bar{A}$	m5 $\bar{D}C\bar{B}A$	m7 $\bar{D}CBA$	m6 $\bar{D}C\bar{B}\bar{A}$
1 1	m12 $D\bar{C}\bar{B}\bar{A}$	m13 $D\bar{C}\bar{B}A$	m15 $D\bar{C}BA$	m14 $D\bar{C}\bar{B}\bar{A}$
1 0	m8 $D\bar{C}\bar{B}\bar{A}$	m9 $D\bar{C}\bar{B}A$	m11 $D\bar{C}BA$	m10 $D\bar{C}\bar{B}\bar{A}$

(b) 4变量卡诺图(2)

图 5-30 4 变量 DCBA 的最小项卡诺图

5) 5 变量卡诺图

如图 5-31 所示的 5 变量卡诺图是由 4 变量 DCBA 卡诺图 5-30(a)向右反转的 5 变量 D、C、E、B、A 的最小项卡诺图。

A				E			
0	1	3	2	18	19	17	16
4	5	7	6	22	23	21	20
12	13	15	14	30	31	29	28
8	9	11	10	26	27	25	24
B				A			

(a) 5变量卡诺图(1)

DC \ EBA	m0 $\bar{D}\bar{C}\bar{E}\bar{B}\bar{A}$	m1 $\bar{D}\bar{C}\bar{E}BA$	m3 $\bar{D}\bar{C}\bar{E}\bar{B}A$	m2 $\bar{D}\bar{C}\bar{E}BA$	m18 $\bar{D}\bar{C}\bar{E}\bar{B}\bar{A}$	m19 $\bar{D}\bar{C}\bar{E}BA$	m17 $\bar{D}\bar{C}\bar{E}\bar{B}A$	m16 $\bar{D}\bar{C}\bar{E}BA$
0 0	m4 $\bar{D}C\bar{E}\bar{B}\bar{A}$	m5 $\bar{D}C\bar{E}BA$	m7 $\bar{D}C\bar{E}\bar{B}A$	m6 $\bar{D}C\bar{E}BA$	m22 $\bar{D}C\bar{E}\bar{B}\bar{A}$	m23 $\bar{D}C\bar{E}BA$	m21 $\bar{D}C\bar{E}\bar{B}A$	m20 $\bar{D}C\bar{E}BA$
0 1	m12 $D\bar{C}\bar{E}\bar{B}\bar{A}$	m13 $D\bar{C}\bar{E}BA$	m15 $D\bar{C}\bar{E}\bar{B}A$	m14 $D\bar{C}\bar{E}BA$	m30 $D\bar{C}\bar{E}\bar{B}\bar{A}$	m31 $D\bar{C}\bar{E}BA$	m29 $D\bar{C}\bar{E}\bar{B}A$	m28 $D\bar{C}\bar{E}BA$
1 0	m8 $DC\bar{E}\bar{B}\bar{A}$	m9 $DC\bar{E}BA$	m11 $DC\bar{E}\bar{B}A$	m10 $DC\bar{E}BA$	m26 $DC\bar{E}\bar{B}\bar{A}$	m27 $DC\bar{E}BA$	m25 $DC\bar{E}\bar{B}A$	m24 $DC\bar{E}BA$

(b) 5变量卡诺图(2)

图 5-31 5 变量 DCEBA 的最小项卡诺图

6) 卡诺图的特点

通过卡诺图可以直接观察相邻项,对应一个小方格的上下左右的变量只有一个因子有变化。这是卡诺图用于化简的基本依据。

现以 4 变量卡诺图为例,观察 m3 对应的 $\bar{D}\bar{C}BA$,左边为 $\bar{D}\bar{C}\bar{B}A$,只有 B 有变化, $\bar{D}$ 、 $\bar{C}$ 、A

没有变化,右边为 $\overline{D}\overline{C}\overline{B}\overline{A}$,只有 A 有变化,下边为 $\overline{D}\overline{C}\overline{B}A$,只有 C 有变化。 m_3 的上面好像没有,其实最上面和最下面也是相邻的,就是 m_3 和 m_{11} 也是相邻的, m_{11} 为 $\overline{D}\overline{C}\overline{B}A$ 只有 D 是变化的。同理,最左面和最右面也是相邻的。

例如在 4 变量卡诺图中,每一个小方格都有上下左右的相邻项。例如 m_2 的 4 个相邻项分别为 m_0 、 m_3 、 m_6 、 m_{10} 。

对于 5 变量卡诺图来说,有 5 个相邻项。在垂直中心线两边相当于两个 4 变量卡诺图。这两个 4 变量卡诺图的相邻关系对于 5 变量卡诺图来说也适用,例如 m_4 和 m_6 相邻, m_{18} 和 m_{16} 相邻。

注意：对称于垂直中心线两边的方格也是相邻项。例如 m_3 和 m_9 是相邻项, m_5 和 m_{21} 是相邻项等。

在 4 变量卡诺图中, m_3 的 4 个相邻项分别为 m_1 、 m_2 、 m_7 、 m_{11} 。在 5 变量卡诺图中, m_3 的相邻项除了 m_1 、 m_2 、 m_7 、 m_{11} ,对称于中线的 m_{19} 也是 m_3 的相邻项。

5 变量以上的卡诺图,直接识别相邻项比较困难,故引用较少。

4. 用卡诺图表示逻辑表达式

任何一个逻辑表达式都可以表示成最小项表达式的形式,所以可以用卡诺图表示逻辑表达式。具体分析如下。

在例 5.1 中的 $Y_0 = X_1\overline{X_2} + \overline{X_1}X_2$,式中有两个最小项 $X_1\overline{X_2}$ 和 $\overline{X_1}X_2$ 。

在 2 变量 X_1 、 X_2 卡诺图,如图 5-32(a)所示,在 $X_1\overline{X_2}$ 的方格中填入 1,在 $\overline{X_1}X_2$ 的方格中填入 1,其他方格中填入 0,如图 5-32(b)所示。这就是逻辑表达式 $Y_0 = X_1\overline{X_2} + \overline{X_1}X_2$ 的卡诺图。

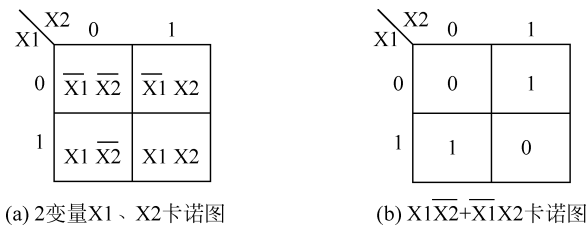


图 5-32 表示逻辑表达式的卡诺图

由上可知,以最小项表达式表示逻辑表达式,只要在卡诺图对应的最小项填入 1 即可。

5. 非最小项的处理

如果逻辑表达式是非最小项该如何处理?

例如,逻辑表达式 $Y = AB + A\overline{C}$,有 3 个变量, AB 和 $A\overline{C}$ 都不是最小项。 AB 在卡诺图的位置:找出即是 A 行又是 B 列的方格中填入 1,如图 5-33(a)所示。 $A\overline{C}$ 在卡诺图的位置:找出即是 A 行又是 $\overline{C}$ 列的方格中填入 1,如图 5-33(b)所示。将图 5-33(a)和图 5-33(b)合并在一起就是 $Y = AB + A\overline{C}$ 的卡诺图,如图 5-33(c)所示。

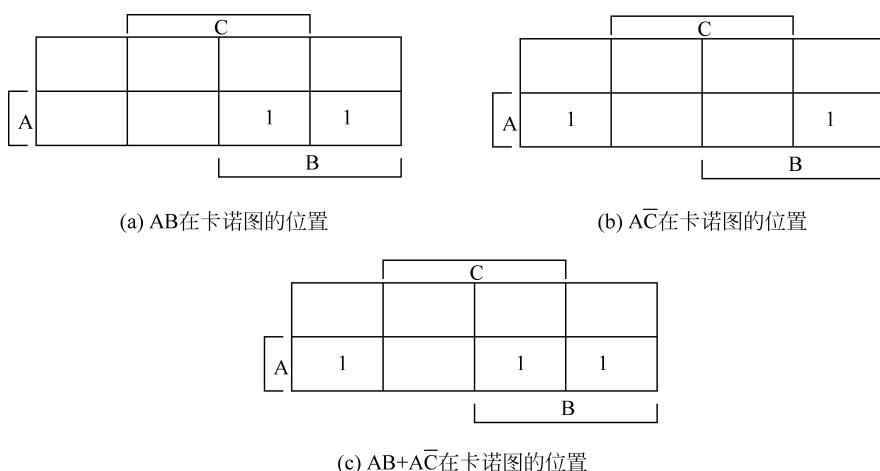


图 5-33 非最小项的处理

也可以先把表达式 Y 变换成最小项逻辑表达式,即:

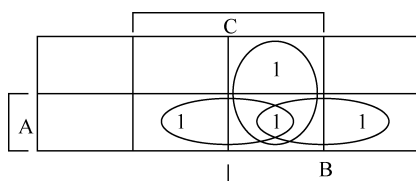
$Y = AB + A\bar{C} = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC$,在卡诺图中的相应最小项位置填上 1。

6. 用卡诺图进行化简

例 5.6 化简逻辑表达式。

化简逻辑表达式 $Y = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$ 。在卡诺图中,将对应 4 个最小项方格中填入 1。将相邻的两个(1)圈起来。共组成 3 个圈,根据这 3 个圈,可得:

$Y = AB + BC + CA$ 如图 5-34 所示。


 图 5-34 $Y = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$ 化简卡诺图

例 5.7 化简逻辑表达式。

化简逻辑表达式 $Y = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$ 。用卡诺图表示逻辑表达式 Y ,如图 5-35 所示。

将取值为 1 的相邻项圈成两个圈,如图 5-35(a)所示得出:

$$Y = A + C$$

也可以将取值为 0 的相邻项圈成 1 个圈,如图 5-35(b)所示得出 Y 的反变量:

$$\bar{Y} = \bar{A}\bar{C}$$

$$Y = \overline{\bar{A}\bar{C}} = A + C$$

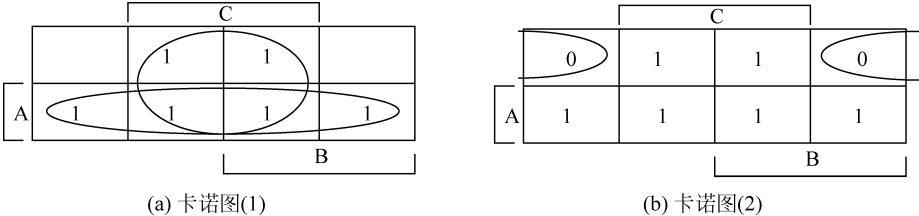


图 5-35 $Y=ABC+AB\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+ABC\bar{C}$ 化简卡诺图

例 5.8 化简逻辑表达式。

化简逻辑表达式 $Y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}C\bar{D}$ 。用卡诺图表示逻辑表达式 Y,如图 5-36 所示。

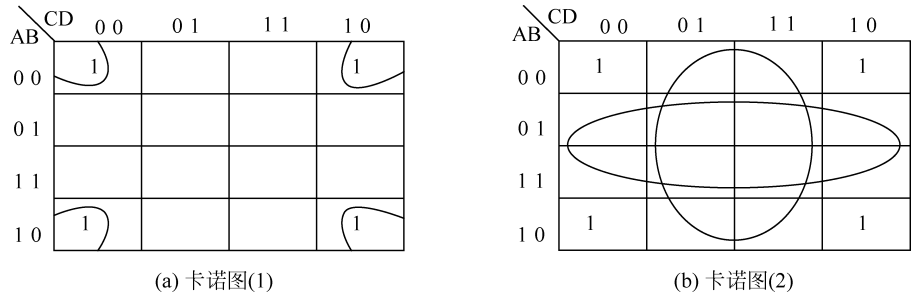


图 5-36 $Y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}C\bar{D}$ 化简卡诺图

化简卡诺图的步骤如下：

(1) 如图 5-36(a)所示,如果将上面两个 1 圈起来,将下面两个 1 圈起来可得：

$$Y=\bar{A}\bar{B}\bar{D}+A\bar{B}\bar{D}=(\bar{A}+A)\bar{B}\bar{D}=\bar{B}\bar{D}。$$

(2) 如图 5-36(a)所示,如果将 4 个 1 圈在一起可直接得：

$$Y=\bar{B}\bar{D}。$$

(3) 如图 5-36(b)所示,如果将图中的 0 圈成两个大圈,可得：

$$\bar{Y}=B+D$$

$$Y=B+D=\overline{\bar{B}+\bar{D}}=\bar{B}\bar{D}。$$

7. 卡诺图在梯形图设计中的应用

下面通过实例,介绍卡诺图在梯形图设计中的应用。

例 5.9 用一个按钮控制 PLC 七段数码管显示数字。

用一个按钮控制 PLC,用七段数码管显示数字 1、2、3、4、5,如图 5-37 所示。

1) PLC 梯形图设计

PLC 梯形图如图 5-38 所示,这是一个用按钮 X0 控制 PLC 七段数码管显示数字 1、2、3、4、5 的梯形图。

2) 控制原理如下

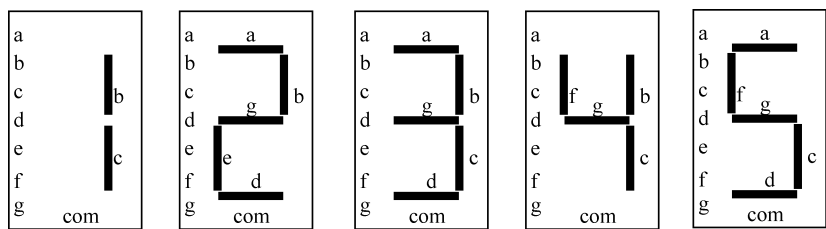


图 5-37 七段数码管显示数字

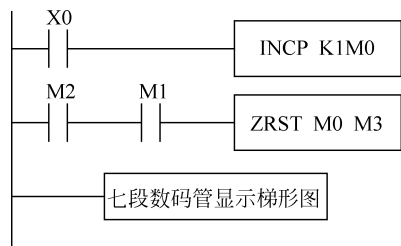


图 5-38 七段数码管显示梯形图

初始状态 $K1M0=0$ ，按一下按钮 $X0$ ，执行加一指令 $INCP K1M0$ ， $K1M0=1$ ，再按一下按钮 $X0$ ， $K1M0=2$ ，每按一下按钮 $X0$ ， $K1M0$ 加一次 1，按到第 6 次时， $K1M0=6=0110_2$ ，这时 $M2=1$ ， $M1=1$ 。 $M2$ 和 $M1$ 接点接通，执行 $ZRST M0 M3$ 指令，将 $K1M0$ 清零。

下面的梯形图是由 $K1M0$ 的计数值控制数码管显示 1~5。

3) 七段数码管显示梯形图设计

根据七段数码管显示的控制要求，列出 $K1M0$ 数值对应如图 5-37 所示七段码的笔画，如表 5-10 所示的真值表(其中 $M3$ 用不到)。

表 5-10 七段码笔画真值表

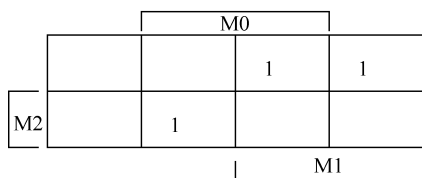
输入(由 X0 控制)			数字	输出(七段数码管)						
M2	M1	M0		Y6 g	Y5 f	Y4 e	Y3 d	Y2 c	Y1 b	Y0 a
0	0	0	0							
0	0	1	1					1	1	
0	1	0	2	1		1	1		1	1
0	1	1	3		1		1	1	1	1
1	0	0	4	1	1			1	1	
1	0	1	5	1	1		1	1		1

下面由真值表画出七段码管的各段笔画。

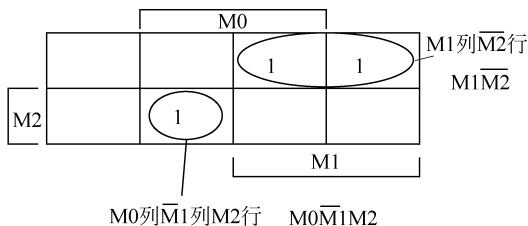
(1) 根据七段码管笔画 a 笔画真值表画出笔画 a 的卡诺图。

观察真值表,对应 $Y_0=1$ 的最小项有三个: m_2 、 m_3 、 m_5 。在这 3 个方格中填入 1,如图 5-39 所示,将相邻的最小项合并,得出 a 笔画 Y_0 的逻辑表达式:

$$Y_0 = M_1 \overline{M_2} + M_0 \overline{M_1} M_2$$



(a) a笔画卡诺图



(b) a笔画卡诺图的化简

图 5-39 a 笔画卡诺图及化简

(2) 根据七段码笔画 b 笔画真值表画出笔画 b 的卡诺图,如 5-40 图所示,将相邻的最小项合并,得出 b 笔画 Y_1 的逻辑表达式:

$$Y_1 = M_1 \overline{M_2} + M_0 \overline{M_2} + \overline{M_0} \overline{M_1} M_2 = (M_1 + M_0) \overline{M_2} + \overline{M_0} \overline{M_1} M_2$$

(3) 根据七段码笔画 c 笔画真值表画出笔画 c 的卡诺图,如图 5-41 所示,将相邻的最小项合并,得出 c 笔画 Y_2 的逻辑表达式:

$$Y_2 = M_0 \overline{M_2} + \overline{M_1} M_2$$

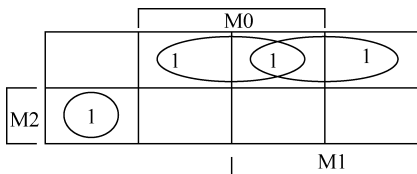


图 5-40 b 笔画卡诺图及化简

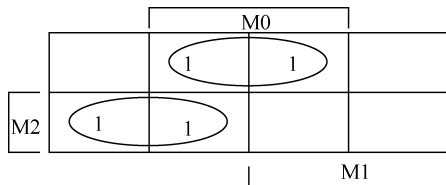


图 5-41 c 笔画卡诺图及化简

(4) 由真值表可知 a 笔画和 d 笔画相同,所以 $Y_3 = Y_0$ 。

(5) 由真值表可直接看出笔画 e, $Y_4 = \overline{M_2} M_1 \overline{M_0}$ 。

(6) 同上述方法得出:

$$Y_5 = M_2 \overline{M_1} + \overline{M_2} M_1 M_0$$

$$Y_6 = M_2 \overline{M_1} + \overline{M_2} M_1 \overline{M_0}$$

(7) 根据以上逻辑表达式可以画出 PLC 的梯形图如图 5-42(a) 所示,PLC 接线图如图 5-42(b) 所示。

由于 $Y_3 = Y_0$,可以用 Y_3 同时控制 a 笔画和 d 笔画, Y_0 另做它用。

8. 卡诺图的无关项

前面提到 n 个变量有 2^n 个变量。如 3 个变量有 8 个最小项,用卡诺图表示就有 8 个方格。如例 5.9 中 M_2 、 M_1 、 M_0 的卡诺图表示就有 8 个方格。但是在真值表中只有最小项

$m_0 \sim m_5$, 而 m_6 和 m_7 是不存在的。这个不存在最小项称为无关项。

在卡诺图中, 无关项用 $\times$ 来表示。无关项既可以是 1 也可以是 0, 这样在化简中既可以把它当作 0 来用, 也可以当作 1 来用, 所得的结果也就更加简单了。

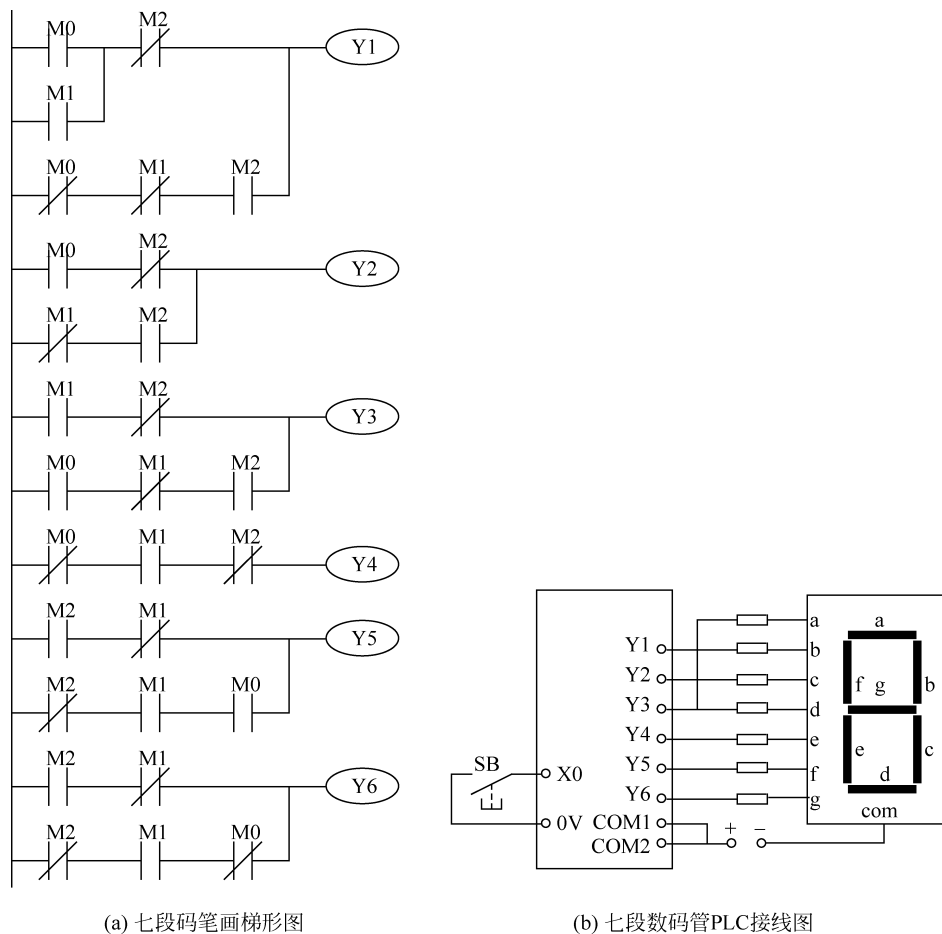


图 5-42 七段数码管梯形图及 PLC 接线图

仍以例 5.9 为例, 在没有加无关项时, a 笔画 Y_0 的逻辑表达式:

$$Y_0 = M_1 M_2 + M_0 \overline{M_1} M_2$$

加上无关项后, 卡诺图如图 5-43(a) 所示, 化简后的 a 笔画 Y_0 的逻辑表达式为:

$$Y_0 = M_0 \overline{M_2} + M_1$$

同理, 由图 5-43(b) ~ 图 5-43(f) 可得:

笔画 b: $Y_1 = M_0 M_2 + M_2 \overline{M_0} + M_1$

笔画 c: $Y_2 = M_0 + M_2$

笔画 d: $Y_3 = Y_0$

笔画 e: $Y_4 = M_1 \overline{M_0}$ 。

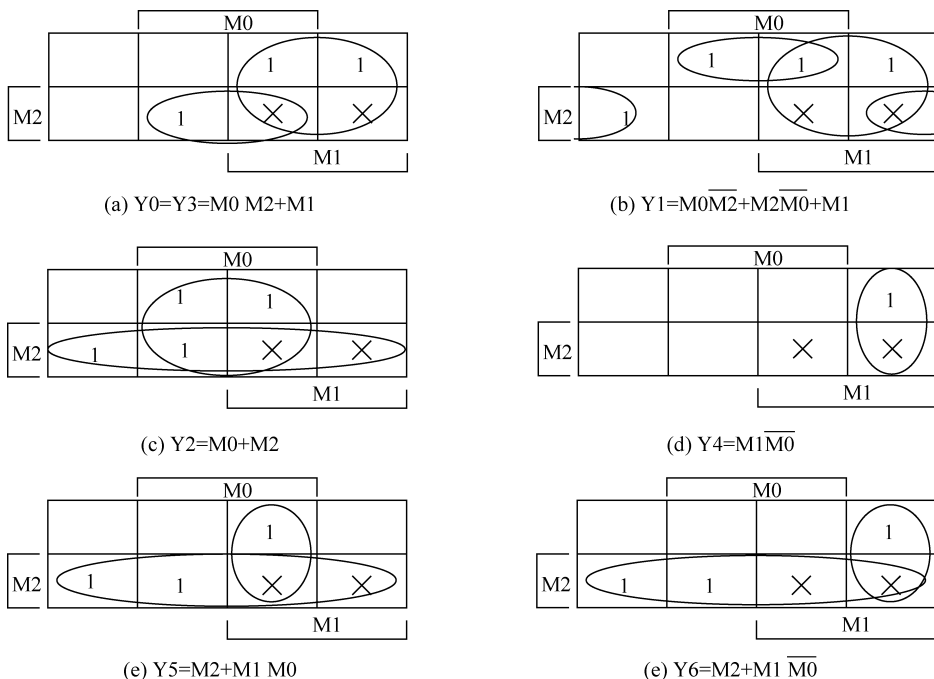


图 5-43 七段数码管无关项卡诺图化简

笔画 f: $Y5=M2+M1M0$

笔画 g: $Y6=M2+M1M0$

可见,加了无关项卡,卡诺图化简的逻辑表达式更简单。

对应于加上无关项卡诺图化简出的逻辑表达式画出对应的七段码笔画梯形图如图 5-44 (a)所示。可见,图 5-44(a)要比图 5-42 (a)对应的梯形图简单。按钮控制七段数码管总梯形图如图 5-44(b)所示。

例 5.10 用 PLC 控制一个 5 人表决器。

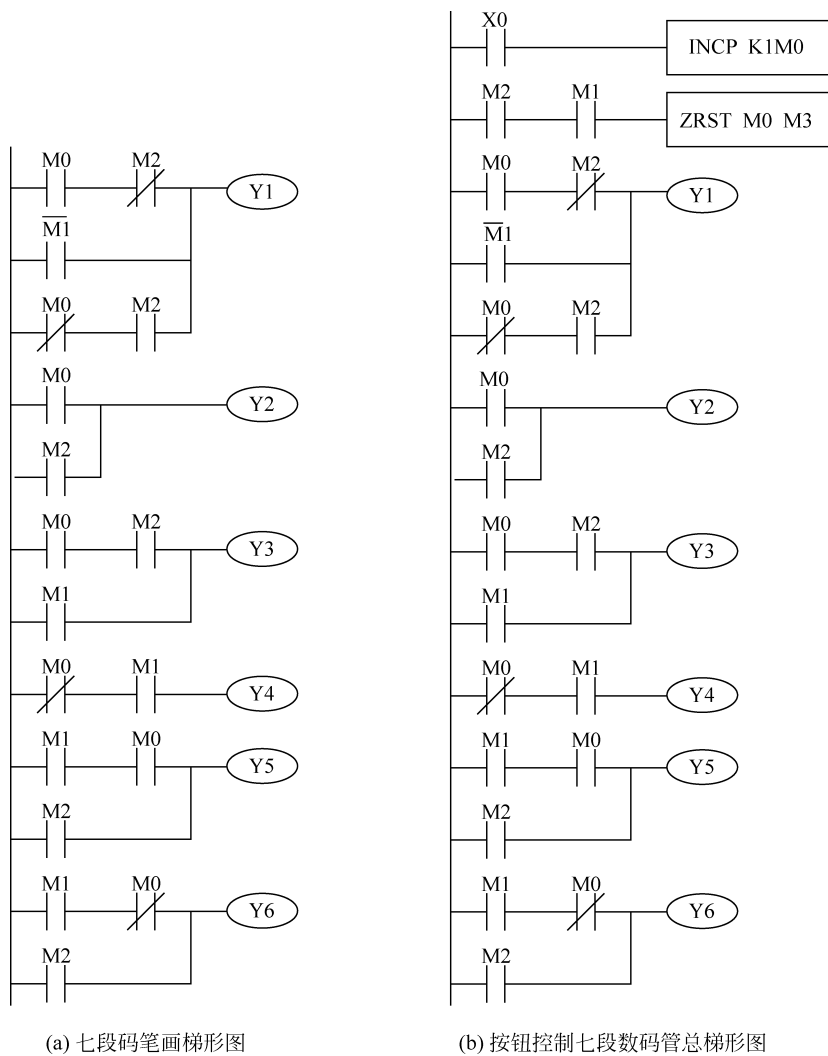
用 PLC 控制一个 5 人表决器,当两人以上者同意红灯亮,当两人及以下者同意绿灯亮。我们知道,5 个变量有 $2^5=32$ 个变量,如用真值表比较麻烦。可以直接画出 5 变量卡诺图如图 5-45 所示。

根据题意,把 5 位二进制数中有 3~5 个 1 的最小项方框中填上 1,如第一行,在 00111 方格中填 1,如第二行,在 01011(01 行,011 列)方格中填 1 等。

为了看得清楚,先把卡诺图右边相邻的 1 圈起来,如图 5-45(a)所示。再把卡诺图左边相邻的 1 圈起来,如图 5-45(b)所示。注意:5 变量卡诺图左右对称的框是相邻的。

由图 5-45(a)得:

$$\begin{aligned}
 Y0_{(a)} &= X0X1X2 + X3X4X2 + X0X4X2 + X1X4X2 + X0X3X2 + X1X3X2 \\
 &= (X0X1 + X3X4 + X0X4 + X1X4 + X0X2 + X1X3)X2 \\
 &= (X0X1 + (X3 + X0 + X1)X4 + (X0 + X1)X3)X2
 \end{aligned}$$



由图 5-45(b)得:

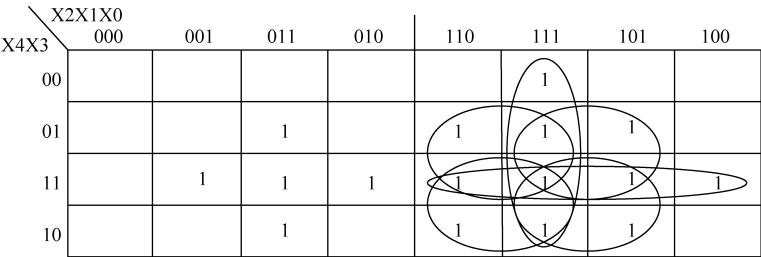
$$\begin{aligned} Y_{0_{(b)}} &= X_1X_3X_4 + X_0X_3X_4 + X_0X_1X_4 + X_0X_1X_3 \\ &= (X_1 + X_0)X_3X_4 + (X_4 + X_3)X_0X_1 \end{aligned}$$

由图 5-45(a)和图 5-45(b)合并得:

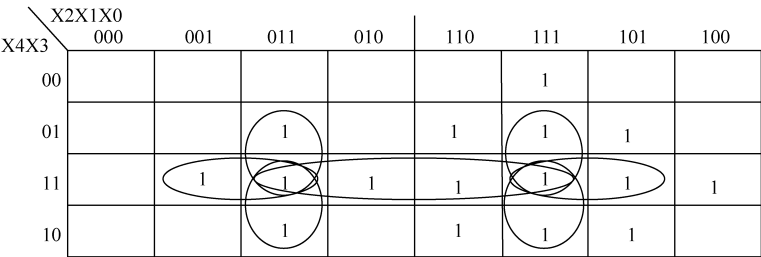
$$Y_0 = (X_0X_1 + (X_3 + X_0 + X_1)X_4 + (X_0 + X_1)X_3)X_2 + (X_1 + X_0)X_3X_4 + (X_4 + X_3)X_0X_1$$

由上述 Y0 逻辑表达式画出梯形图如图 5-46 所示。很明显 $Y1 = \overline{Y0}$ 。

图 5-46 所示梯形图是一个组合电路,不能记忆结果。当裁判松开按钮后结果就变了。并且在未表决之前,X0~X4 均为 0,绿灯是亮的。为了改变这一现象,可改为图 5-47 所示的梯形图。每个按钮控制一个 ALTP 交替指令,按一次按钮由 0 变 1,再按一次按钮由 1 变



(a) 卡诺图(1)



(b) 卡诺图(2)

图 5-45 5 人表决器卡诺图

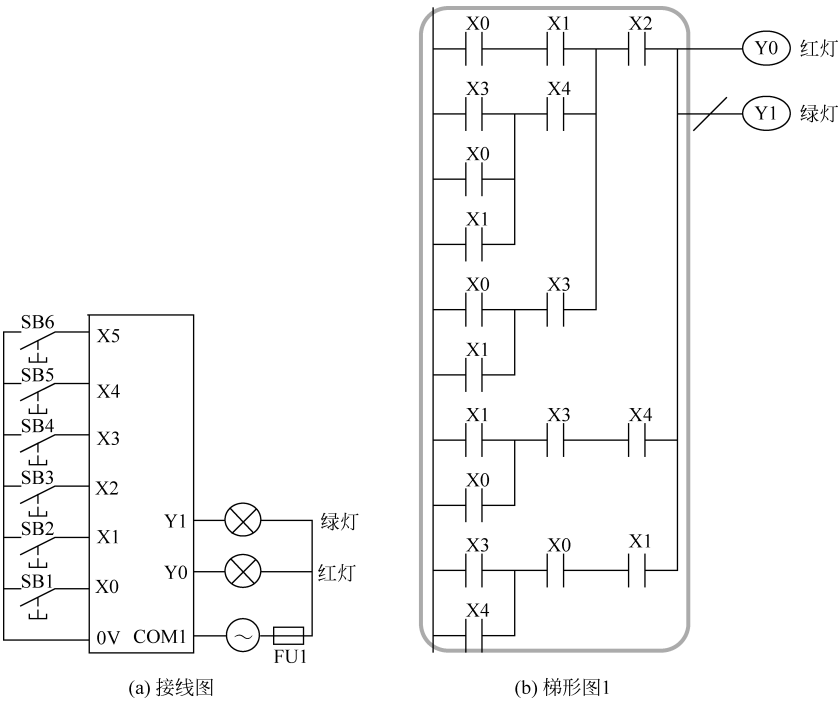


图 5-46 5 人表决接线图和梯形图 1

0, 变为一个记忆电路。

初始状态, 常开接点 M5 断开 Y0 和 Y1 线圈, 灯不亮。5 个裁判按钮进行表决, 其结果记忆在 M0~M4 中。按下按钮 X5, M5=1, 接通 Y0 和 Y1 线圈, 显示结果。结束后再用再按下按钮 X5, M5=0, 断开 Y0 和 Y1 线圈, 同时 M5 下降沿接点使 M0~M4 复位。

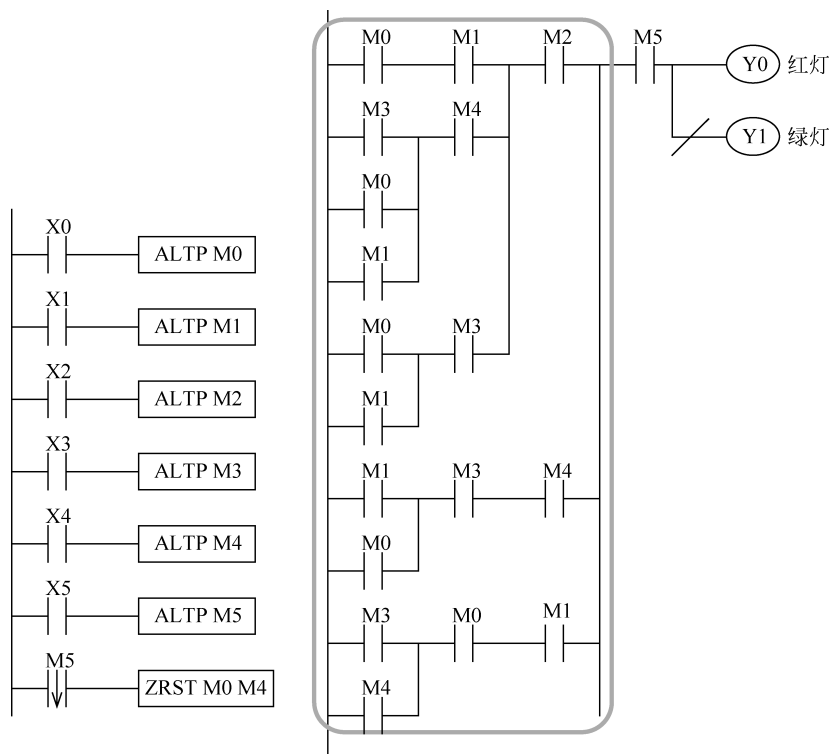
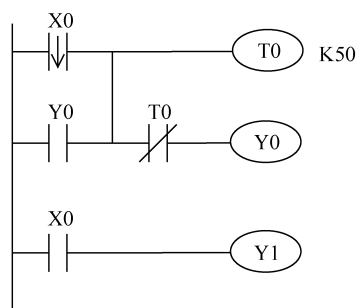


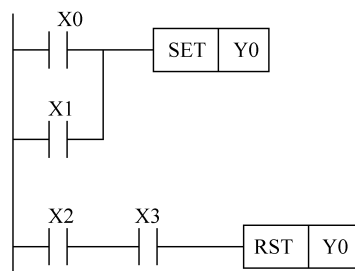
图 5-47 5 人表决梯形图 2

习题

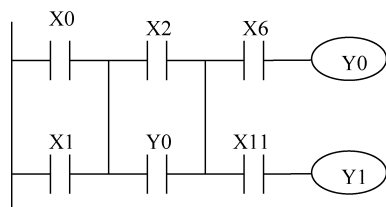
1. 主令元件和检测元件有什么不同?
2. 设计用 3 个开关都可以控制一盏灯, 只有当两个开关闭合时灯才亮的梯形图。
3. 4 个开关的闭合与断开有几种组合? 用二进制数表示。
4. 设计用 3 个开关都可以控制一盏灯的梯形图。
5. 化简逻辑表达式 $Y = AB + \bar{B}C + \bar{A}C$ 。
6. 化简逻辑表达式 $Y = AB + \bar{A}BC + BC$ 。
7. 什么是组合电路? 什么是时序电路?
8. 题图 1 所示的梯形图哪些是组合电路? 哪些是时序电路?
9. 证明题图 2 两个梯形图相同。



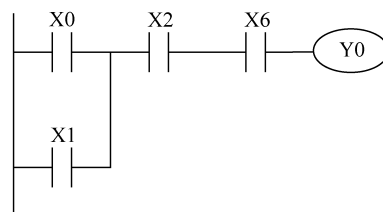
(a) 梯形图(1)



(b) 梯形图(2)

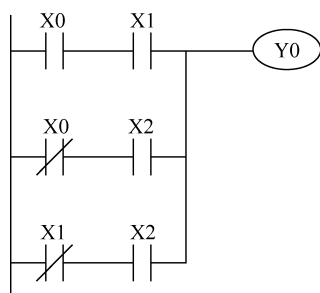


(c) 梯形图(3)

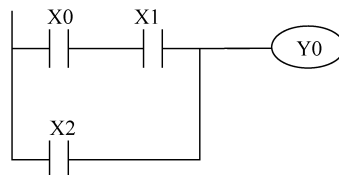


(d) 梯形图(4)

题图 1 4 个梯形图



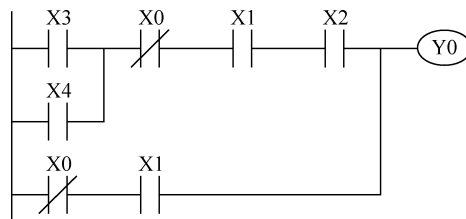
(a) 梯形图(1)



(b) 梯形图(2)

题图 2 两个梯形图

10. 化简题图 3 梯形图的接点。



题图 3 化简梯形图接点