

数字PID控制器的设计方法

PID控制是指按偏差的比例(Proportional)、积分(Integral)和微分(Differential)的线性组合构成的反馈控制律,是技术最成熟的控制规律,具有原理简单、直观易懂、鲁棒性强、易于工程实现、适用面广等优点。PID控制产生于20世纪20年代,是最早发展起来的控制策略。1922年,Nicolas Minorsky第一次提出了PID控制律,指出控制作用应由误差、误差的积分和误差的导数这三项组成。经过深入的理论研究和广泛的应用实践,PID控制取得了巨大的成功,积累了丰富的经验。特别是在工业过程控制中,由于被控对象的结构和参数不能完全掌握,系统参数又经常发生变化,无法建立精确的数学模型,运用控制理论方法进行综合,成本很高且无法取得预期的效果。但是,采用PID控制,经在线调整,往往能够得到满意的控制效果,因此PID控制一直是工程控制中应用最广泛的一类基本控制律,目前仍有90%以上的控制回路具有PID结构。

在早期的控制系统中,PID控制也是最主要的自动控制方式。伴随着计算机技术的发展,现代控制理论在实用性方面获得了很大进展,解决了许多经典控制理论无法解决的问题。这一现象使很多人认为,新的控制理论和技术可以取代PID控制。但后来的发展说明,PID控制仍然是在工程控制中应用最为广泛的一种控制方法。

自20世纪70年代以来,随着计算机技术的飞速发展和应用普及,由计算机实现的数字PID控制逐渐取代模拟PID控制。在计算机控制系统中,计算机作为控制器,可以利用程序方便地实现数字PID控制律,而且调整方便,能够得到满意的控制效果。实践证明,与连续PID控制相比,数字PID控制不仅很容易将PID控制律数字化,而且可以进一步利用计算机灵活的逻辑处理功能,开发出多种不同形式的、完善的PID控制算法,克服了连续PID控制中存在的各种问题,使得数字PID控制的功能和适用性更强,更能满足工程应用对控制算法的要求。

本章主要介绍基本PID控制算法、各种改进的PID控制算法以及PID控制器的参数整定。

5.1 数字PID控制基本算法

数字PID控制器源于模拟PID控制器,其本质是利用一阶后向差分法将模拟PID控制器进行离散。数字PID基本算法包括位置式PID算法和增量式PID算法,下面分别介

绍这两种基本算法。

1. 模拟 PID 与位置式数字 PID 算法

典型的单回路 PID 控制系统如图 5-1 所示。

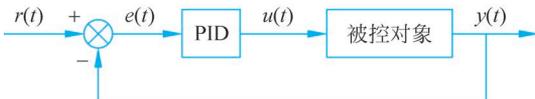


图 5-1 典型的单回路 PID 控制系统

模拟 PID 控制器的输出方程为

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (5-1)$$

式中, $u(t)$ 为 PID 控制器的输出控制量; $e(t)$ 为 PID 控制器输入的系统偏差量; K_p 为比例系数; T_i 为积分时间常数; T_d 为微分时间常数。

对式(5-1)做拉普拉斯变换, 可得模拟 PID 控制器的传递函数为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s \quad (5-2)$$

式中, $K_i = K_p / T_i$ 为积分系数; $K_d = K_p T_d$ 为微分系数。

由式(5-1)和式(5-2)可知, PID 控制就是用系统偏差量 $e(t)$ 的比例、积分、微分的线性组合构成控制量 $u(t)$ 。PID 控制器中三项控制作用的物理意义如下:

(1) 比例控制。比例控制能够按比例迅速反应系统的偏差, 系统一旦出现了偏差, 比例控制立即产生控制作用, 减少偏差。

(2) 积分控制。积分控制能够消除系统稳态误差, 提高无差度。只要系统存在偏差, 积分控制项的输出控制量就会不断增大, 直至偏差消除为零时, 积分作用停止, 积分控制项的输出量才会保持不变, 为一常值。

(3) 微分控制。微分控制能够反应系统偏差的变化率, 具有预见性, 能预见偏差变化的趋势, 在偏差尚未形成之前, 产生超前的控制作用, 阻止偏差的变化。此外, 微分控制反应的是变化率, 当输入没有变化时, 微分控制的输出控制量为零。因此, 微分控制不能单独使用, 需要与另外两种控制规律相结合, 组成 PD 或 PID 控制器。

综合以上三种控制作用的物理意义可以看出, PID 控制算法蕴含了动态控制过程中的过去(积分控制)、现在(比例控制)和将来(微分控制)的信息。在工程应用时, 合理选择三项控制作用, 构成所需要的控制律, 可以使动态过程快速、平稳、准确, 取得良好的控制效果。

由于式(5-1)包含理想微分 $\frac{de(t)}{dt}$, 用模拟控制器难以实现, 所以称为“理想”PID 控制器。在数字控制中可以利用差分数值来近似理想微分。选取第 4 章所讲的任一离散方法, 就可以将理想模拟 PID 控制器 $D(s)$ 离散化为相应的数字 PID 控制器 $D(z)$ 。采用一阶后向差分变换法对模拟控制器 $D(s)$, 即对式(5-2)进行离散化, 可得数字控制器为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = D(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = K_p + K_i \frac{1}{1-z^{-1}} + K_d (1-z^{-1}) \quad (5-3)$$

式中, T 为采样周期; $K_i = K_p \frac{T}{T_i}$ 为积分系数; $K_d = K_p \frac{T_d}{T}$ 为微分系数。

对式(5-3)进行 z 反变换, 可得差分方程形式的理想数字 PID 位置式控制输出为

$$u(k) = K_p e(k) + K_i \sum_{i=0}^k e(i) + K_d [e(k) - e(k-1)] \quad (5-4)$$

也可以采用后向差分近似代替微分进行推导, 令

$$\begin{cases} u(t) \approx u(kT) \\ e(t) \approx e(kT) \\ \int_0^t e(t) dt \approx T \sum_{i=1}^k e(iT) \\ \frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T} \end{cases} \quad (5-5)$$

省略采样周期 T , 记 kT 为 k , 将式(5-5)中的各项代入式(5-1)中, 同样可得位置式 PID 算法式(5-4), 请读者自行推导。

通常情况下, 计算机控制器的输出量 $u(k)$ 直接控制执行机构, 如在流量调节系统中 $u(k)$ 的值与控制阀门的开度一一对应, 所以式(5-4)称为位置式 PID 算法。

2. 增量式数字 PID 算法

位置式 PID 算法中包含数字积分项 $\sum_{i=0}^k e(i)$, 需要存储过去全部偏差量, 累加运算编程计算量较大, 使用不太方便。在工程应用中, 为了简化运算, 通常将该式改为递推算法。由式(5-4)可以得到 $(k-1)T$ 时刻的 PID 输出表达式为

$$u(k-1) = K_p e(k-1) + K_i \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + K_d [e(k-1) - e(k-2)] \quad (5-6)$$

用式(5-4)减去式(5-6), 可得

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= u(k) - u(k-1) \\ &= K_p [e(k) - e(k-1)] + K_i e(k) + K_d [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \end{aligned} \quad (5-7)$$

式(5-7)即为增量式数字 PID 控制算法, 简称增量式 PID 算法。在该算法中, 计算机仅输出控制量的增量 $\Delta u(k)$, 对应于执行机构(如阀门、步进电动机等)的位置调节增量, 即 k 时刻相对于 $k-1$ 时刻的改变量。增量式 PID 算法比位置式 PID 算法应用更广泛, 主要原因是增量式 PID 算法具有以下优点:

(1) 增量式 PID 算法更安全。一旦计算机出现故障, 使控制信号为零时, 执行机构(如阀门、步进电动机等)的位置(如阀门的开度、步进电动机的驱动脉冲)仍能保持前一时刻的位置 $u(k-1)$, 因而对系统不会带来较大的扰动。

(2) 增量式 PID 算法在计算时不需要进行累加, 仅需最近几次误差的采样值。从式(5-7)可以看出, 控制量的增量计算相对简单, 通常采用平移法将历史数据 $e(k-1)$ 和 $e(k-2)$ 保存起来, 即可完成计算。

数字 PID 增量式算法和位置式 PID 算法本质相同,只是形式不同,两者对系统的控制作用完全相同,但是采用增量式 PID 算法系统工作会更安全。

进一步整理式(5-7),可得增量式 PID 算法为

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= K_p[e(k) - e(k-1)] + K_i e(k) + K_d[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \\ &= (K_p + K_i + K_d)e(k) - (K_p + 2K_d)e(k-1) + K_d e(k-2) \\ &= K_p[Ae(k) - Be(k-1) + Ce(k-2)]\end{aligned}\quad (5-8)$$

式中

$$A = \frac{K_p + K_i + K_d}{K_p}, \quad B = \frac{K_p + 2K_d}{K_p}, \quad C = \frac{K_d}{K_p}$$

可以看出,增量式 PID 算法的实质是根据三个时刻的误差采样值进行适当加权计算,求得控制器输出增量 $\Delta u(k)$ 。通过调整加权系数 A 、 B 、 C 的值,就可以获得不同的控制性能。

在实际工程应用中,究竟选用位置式数字 PID 算法还是增量式数字 PID 算法,取决于执行机构的控制特性和接口形式。对于具有积分特性(累加功能)的执行机构,如步进电动机、液压阀门等,应该采用增量式数字 PID 算法;若执行机构无积分特性,则应采用位置式数字 PID 算法。

3. 位置式数字 PID 递推算法

利用增量式 PID 算法 $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ 可以获得位置式数字 PID 算法的递推算式:

$$\begin{aligned}u(k) &= u(k-1) + \Delta u(k) \\ &= u(k-1) + K_p[e(k) - e(k-1)] + K_i e(k) + \\ &\quad K_d[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]\end{aligned}\quad (5-9)$$

为了便于计算,将式(5-9)展开,合并同类项,可得

$$u(k) = u(k-1) + K_0 e(k) + K_1 e(k-1) + K_2 e(k-2) \quad (5-10)$$

式中

$$K_0 = K_p + K_i + K_d, \quad K_1 = -(K_p + 2K_d), \quad K_2 = K_d$$

式(5-10)只表示了各次误差量对控制输出值的影响,但已经无法看出是 PID 表达式,也看不出比例、积分、微分作用的直接关系了。在计算过程中,选择合适的 K_p 、 K_i 和 K_d ,存储最近的 3 个误差采样值 $e(k)$ 、 $e(k-1)$ 和 $e(k-2)$,就可以求得控制器输出值 $u(k)$ 的值。

在工程应用中为了确保数字 PID 控制算法的实时性,可以进一步将式(5-10)写成如下实现形式:

$$\begin{cases} u(k) = K_0 e(k) + A(k-1) \\ A(k-1) = u(k-1) + K_1 e(k-1) + K_2 e(k-2) \end{cases} \quad (5-11)$$

这样的算式需要的存储量和计算量都很小,计算机运算过程中的延时最短,计算流程如图 5-2 所示。实际上,由于简单实用,式(5-11)才是位置式 PID 算法的常用形式。

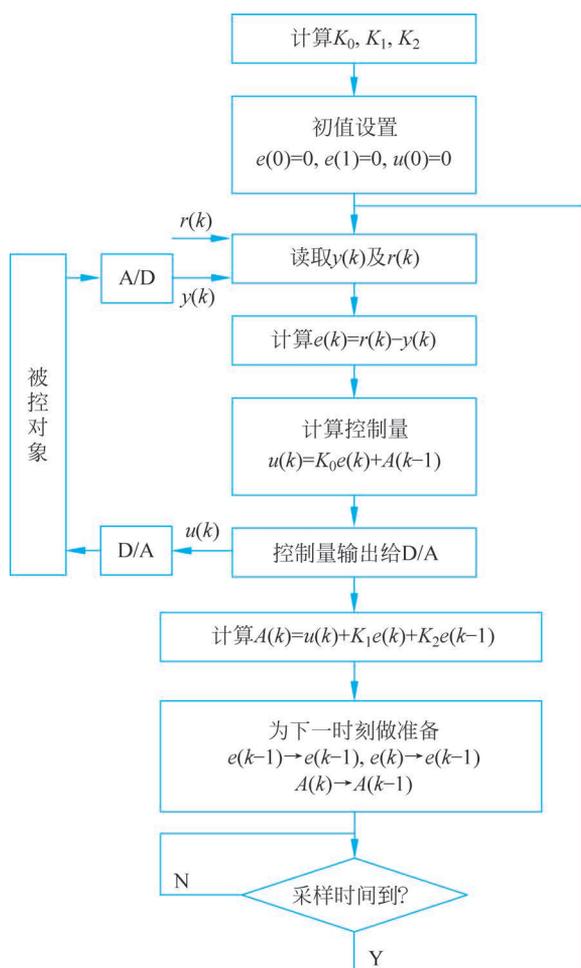


图 5-2 PID 递推算法流程

5.2 数字 PID 控制的改进算法

数字 PID 控制基本算法是由连续 PID 控制算法演变而来的,应用非常广泛。长期以来,为了解决各种实际问题,人们对数字 PID 控制算法的研究不断深化,特别是随着计算机技术的发展,人们在 PID 基本算法的基础上做了许多改进或完善,形成了各种改进型的数字 PID 控制算法,实现了生产过程的更有效控制。实践证明,采用数字 PID 控制器的改进算法后,计算机控制系统的控制效果往往优于连续控制系统。本节介绍几种常用的数字 PID 控制算法改进措施。

5.2.1 数字 PID 控制的微分改进算法

在理想 PID 控制中,理想微分控制项 $\frac{de(t)}{dt}$ 对于幅度变化快的强扰动反应非常灵敏,

但执行机构一般具有低通特性,其带宽有限,动作速度相对较慢,无法及时响应微分控制作用,使得理想微分控制无法发挥抑制扰动来改善系统动态性能的作用,从而导致理想 PID 控制的实际控制效果并不理想。另外, $\frac{de(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}$, 通常情况下,系统调节结束后, $\frac{dr(t)}{dt}$ 的变化不大,但受测量噪声以及外部冲击扰动等因素的影响, $\frac{dy(t)}{dt}$ 的值经常会很大,但持续时间很短,即微分控制对偏差量 $e(t)$ 中的测量噪声以及外部扰动非常敏感。也就是说,偏差量 $e(t)$ 经过理想微分后,会产生变化幅度较大的噪声输出,降低了控制器输出的信噪比,从而影响了系统的控制性能,同时控制器输出值的高频分量会引起机械系统的抖振,增加了执行机构的磨损。在实际工程应用中,为了解决理想微分存在的上述不足,通常在理想微分环节甚至整个 PID 控制器前面串接一个低通滤波环节,构成实际 PID 控制算法,相应的数字控制算法称为实际数字 PID 控制算法。实际 PID 控制算法通常有三种形式,下面分别介绍这三种控制器,选取一阶后向差分法,将模拟控制器离散为数字控制器,推导出数字控制器算法。

1. 不完全微分的数字 PID 控制算法

不完全微分 PID 控制的模拟控制器传递函数为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d}{1 + \frac{T_d}{K_d} s} \right) \quad (5-12)$$

式中, K_d 为微分增益,其他各系数的定义见 5.1 节,控制器如图 5-3 所示。可以看出,实际 PID 控制被分成两个环节的并联,一个是实际 PI 控制环节,另一个是串接一阶低通滤波器(一阶惯性环节)的微分控制环节。

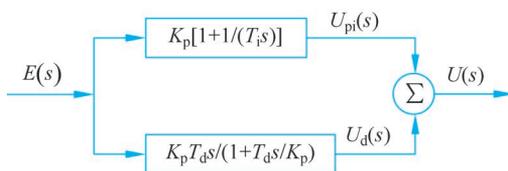


图 5-3 不完全微分的实际 PID 控制器结构框图

实际 PI 控制环节

$$D_{pi}(s) = \frac{U_{pi}(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

根据式(5-5)给出的近似,可得其输出为

$$u_{pi}(k) = K_p e(k) + \frac{K_p T}{T_i} \sum_{j=0}^k e(j) \quad (5-13)$$

进而可得

$$u_{pi}(k-1) = K_p e(k-1) + \frac{K_p T}{T_i} \sum_{j=0}^{k-1} e(j) \quad (5-14)$$

用式(5-13)减去式(5-14),可得实际 PI 控制环节的输出增量为

$$\Delta u_{pi}(k) = K_p \left(1 + \frac{T}{T_i}\right) e(k) - K_p e(k-1) \quad (5-15)$$

串接一阶低通滤波器的微分控制环节

$$D_d(s) = \frac{K_p T_d}{1 + \frac{T_d}{K_d} s}$$

根据式(5-5)给出的近似,可得其输出为

$$u_d(k) = \frac{T_d}{T_d + K_d T} \{u_d(k-1) + K_p K_d [e(k) - e(k-1)]\} \quad (5-16)$$

进而可得

$$u_d(k-1) = \frac{T_d}{T_d + K_d T} \{u_d(k-2) + K_p K_d [e(k-1) - e(k-2)]\} \quad (5-17)$$

用式(5-16)减去式(5-17),可得串接一阶低通滤波器的微分控制环节的输出增量为

$$\Delta u_d(k) = \frac{T_d}{T_d + K_d T} \{\Delta u_d(k-1) + K_p K_d [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]\} \quad (5-18)$$

实际PID控制的总控制输出增量为

$$\Delta u(k) = \Delta u_{pi}(k) + \Delta u_d(k) \quad (5-19)$$

实际PID控制的总控制输出递推公式为

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad (5-20)$$

在这种实际PID控制中,串接在微分控制环节后的一阶低通滤波环节的作用是抑制高频噪声,降低理想微分控制项对于偏差变化的响应速度,从而使微分控制环节适应执行机构的动作速度。当 $e(t)$ 发生阶跃突变时,完全微分控制仅在 $e(t)$ 突变的一个周期内起作用,而不完全微分的控制作用按指数规律逐渐衰减到零,可以延续多个周期,且第一个周期的微分作用减弱,如图5-4所示。从式(5-12)可以看出, K_d 增大,滤波作用减弱,微分作用增强; K_d 减小,滤波作用增强,微分作用减弱。在工程应用中,调节 K_d 可以得到不同的控制效果。

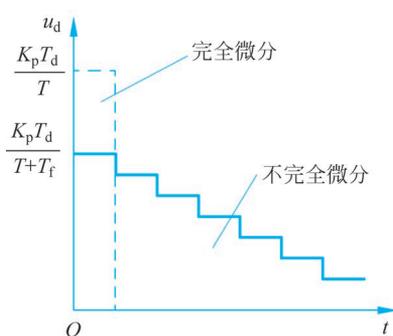
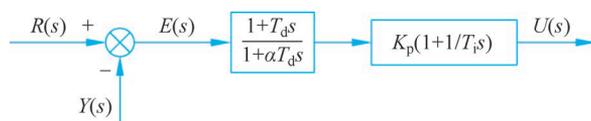


图 5-4 不完全微分PID控制的作用

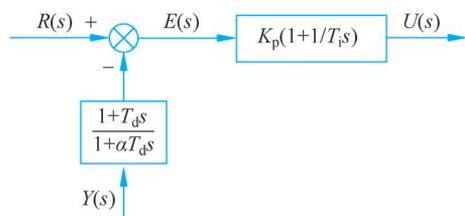
2. 微分先行的数字PID控制算法

在给定值频繁且大幅变化的场合,微分项常会引起执行机构剧烈动作,导致系统超调量过大甚至发生振荡。为了适应这种给定值频繁变化的应用,需要对PID控制器进行改进,从而出现了微分先行的PID控制器,具体结构有两种,如图5-5所示。注意,图中系数 $\alpha < 1$ 。

在图5-5(a)中,对给定值和输出量均有微分作用,称为偏差微分先行。这种微分先



(a) 偏差微分先行



(b) 输出微分先行

图 5-5 微分先行的 PID 控制算法

行的 PID 控制通常应用于串级控制的副控制回路。下面推导位置式控制算法的输出 $u(k)$ ：

$$U(s) = K_p (1 + 1/(T_i s)) \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} E(s) \quad (5-21)$$

整理上式, 可得

$$U(s)(T_i s + \alpha T_i T_d s^2) = K_p E(s)[1 + (T_i + T_d)s + T_i T_d s^2] \quad (5-22)$$

根据(5-5)中的

$$\frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

进一步计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 e(t)}{dt^2} &\approx \frac{1}{T} \left(\frac{e(k) - e(k-1)}{T} - \frac{e(k-1) - e(k-2)}{T} \right) \\ &= \frac{e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)}{T^2} \end{aligned} \quad (5-23)$$

由式(5-22)和式(5-23)可得

$$u(k) = A_1 u(k-1) + A_2 u(k-2) + B_1 e(k) + B_2 e(k-1) + B_3 e(k-2) \quad (5-24)$$

式中

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 + \frac{\alpha T_i T_d}{T_i T + \alpha T_i T_d}, \quad A_2 = -\frac{\alpha T_i T_d}{T_i T + \alpha T_i T_d} \\ B_1 &= K_p \frac{T^2 + T(T_i + T_d) + T_i T_d}{T_i T + \alpha T_i T_d}, \quad B_2 = -K_p \frac{T(T_i + T_d) + 2T_i T_d}{T_i T + \alpha T_i T_d}, \\ B_3 &= K_p \frac{T_i T_d}{T_i T + \alpha T_i T_d} \end{aligned}$$

增量式的控制算法由读者自行完成。

在图 5-5(b)中, 只对输出量微分, 而对给定信号不起微分作用, 称为输出微分先行。

在这种算法中,微分部分只与连续几个控制周期的输出值有关,而与给定值无关,给定值的阶跃变化不会造成高频的干扰。这种微分先行的PID控制适合给定信号频繁升降的场合,可以避免给定信号的大幅改变而导致的超调过大。这种算法的推导不再赘述,感兴趣的读者可以自己尝试。

3. 带低通滤波器的数字PID控制算法

带滤波器PID控制的模拟控制器传递函数为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p}{1 + \frac{T_d}{K_d}s} \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (5-25)$$

对比式(5-2)和式(5-25)可以看出,带滤波器的PID控制算法就是利用一阶低通滤波器对理想PID控制器的整个输出控制量进行滤波,如图5-6所示。可以看出,低通滤波器不仅对微分项起作用,而且对比例和积分项起作用。在实际工程应用中噪声和扰动在比例和积分项中也会有所体现,只是在微分项中的负面作用更明显。所以,对理想PID控制器的整个输出控制量进行滤波是合理且实用的。另外,可调参数 K_d 的作用与不完全微分的数字PID控制算法相同。



图 5-6 带滤波器的实际PID控制器结构框图

重新整理由式(5-7)表示的理想PID控制器输出增量 $\Delta u_{pid}(k)$,可得

$$\Delta u_{pid}(k) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} + \frac{T_d}{T} \right) e(k) - K_p \left(1 + \frac{2T_d}{T} \right) e(k-1) + \frac{K_p T_d}{T} e(k-2) \quad (5-26)$$

将理想PID控制器输出增量 $\Delta u_{pid}(t)$ 看作输入信号,通过传递函数为 $\frac{1}{1 + \frac{T_d}{K_d}s}$ 的一

阶低通滤波环节,其离散输出信号 $\Delta u(k)$ 计算如下

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u(s)}{\Delta u_{pid}(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{T_d}{K_d}s} \Rightarrow \Delta u(s) \left(1 + \frac{T_d}{K_d}s \right) = \Delta u_{pid}(s) \\ &\Rightarrow \Delta u(k) + \frac{T_d}{K_d T} [\Delta u(k) - \Delta u(k-1)] = \Delta u_{pid}(k) \end{aligned} \quad (5-27)$$

整理上式,可得带滤波器的PID控制器的输出控制增量为

$$\Delta u(k) = \frac{T_d}{T_d + K_d T} \Delta u(k-1) + \frac{K_d T}{T_d + K_d T} \Delta u_{pid}(k) \quad (5-28)$$

带滤波器的PID控制器的输出控制量 $u(k)$ 的递推公式为

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad (5-29)$$

例 5-1 考虑 4.3 节中的龙门式 XY 型直线电动机速度控制系统,以 X 轴速度控制系统为例,观察不同微分改进算法的效果,设 $T=0.001\text{s}$ 。

解: PID 控制器的设计参见 5.6 节,取 $K_p=40, K_i=0.5, K_d=1$ 。分别采用不完全微分法($T_{i1}=100, T_{d1}=0.01$)、微分先行法($T_{i2}=100, T_{d2}=0.01$)和低通滤波器法($T_{i3}=100, T_{d3}=1, \alpha=0.5$)改进 PID 控制器中理想微分存在的不足。采用微分改进算法后的系统阶跃响应如图 5-7 所示。可以看出,三种微分改进算法均明显提高了控制系统的动态性能。

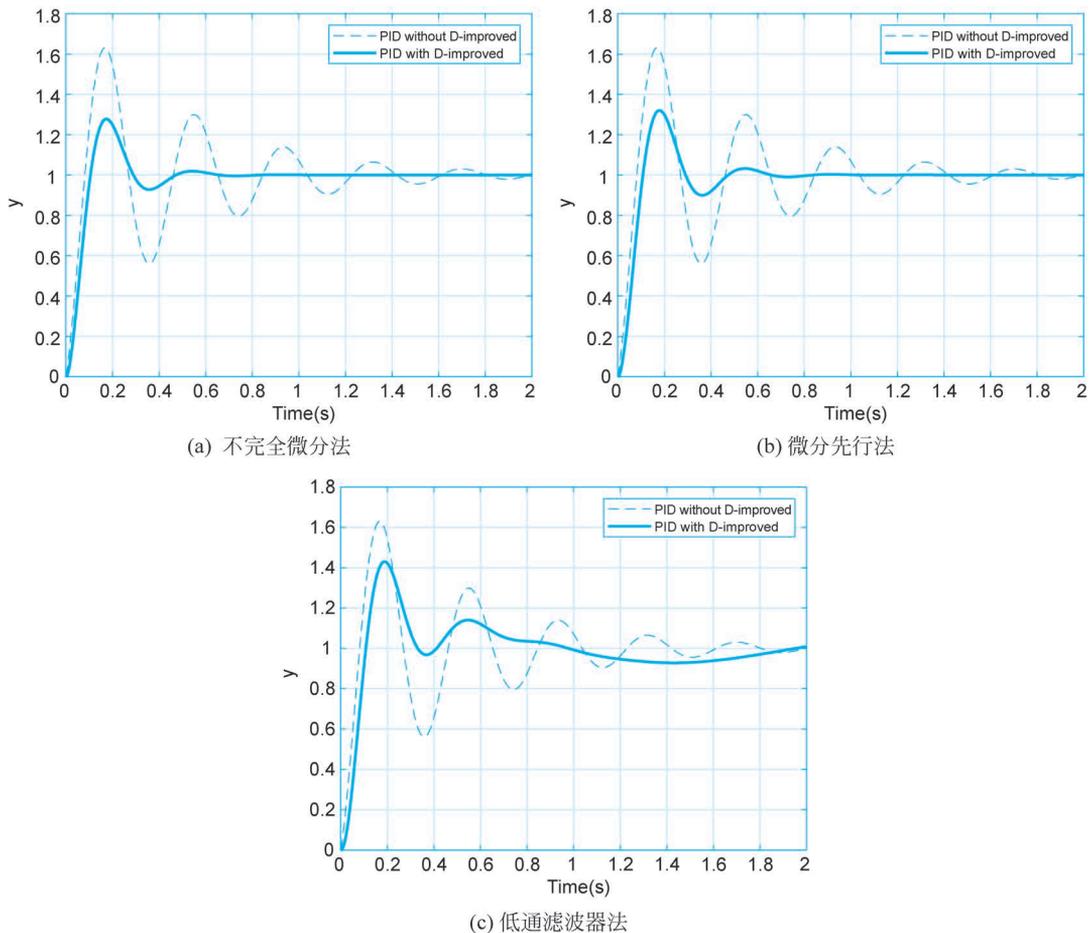


图 5-7 微分改进 PID 的控制效果

5.2.2 数字 PID 控制的积分改进算法

在 PID 控制中,积分控制的作用是消除控制系统的稳态误差(残差),提高系统的稳态精度,然而积分作用会产生负相移,导致闭环系统的稳定裕度变小,系统的动态性能变差。特别地,控制系统突然启动或停止,给定信号大幅度改变时,控制器的输入端会出现较大的偏差(系统的给定值和输出值之间的偏差),不可能在短时间内消除,经过 PID 算

法中积分项的累积后,控制器输出量 $u(k)$ 有可能快速增大(或减小),甚至使执行机构达到了机械或物理特性所能达到的极限(如阀门全开或全关)。但是,系统的偏差仍未消除,因而积分作用控制量继续增大(或减小),此时执行机构已经处于极限位置而无相应动作,从而导致被控量出现长时间的波动,这种现象通常称为积分饱和。当发生积分饱和时,控制系统处于一种非线性状态,无法根据控制器输入偏差的变化按预期控制规律来调节控制量。由于积分项非常大,一般要经过相当长的时间才能减到正常值,因此系统会产生严重的超调和响应延迟。在实际工程应用中这种现象是不能容忍的,必须加以改进。解决积分饱和现象的关键是限制积分,使积分累积值不要过大,既可以发挥积分作用消除系统稳态误差的功能,又能避免积分作用对系统动态性能的不利影响。采用数字PID控制的积分改进算法,计算机控制系统不仅在性能方面远优于连续控制系统,而且适用性更强。下面介绍几种常用的积分饱和和改进措施。

1. 积分分离的PID算法

积分分离法的基本思想是:当系统偏差 $e(k)$ 大于规定的阈值时,取消积分作用,只用PD控制,避免积分作用使系统的稳定性降低,超调量增大;等到被控量接近给定值, $e(k)$ 小于规定阈值时,才引入积分作用,采用PID控制,以便消除静差,提高控制精度。因此,积分分离的PID控制算法又称PD-PID控制算法,如图5-8所示。

积分分离的PID控制算法为

$$u(k) = K_p e(k) + \alpha K_i \sum_{j=0}^k e(j) + K_d [e(k) - e(k-1)] \quad (5-30)$$

式中

$$\alpha = \begin{cases} 0, & |e(k)| > \varepsilon \\ 1, & |e(k)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

ε 为积分分离阈值。

积分分离的PID控制算法流程如图5-9所示。

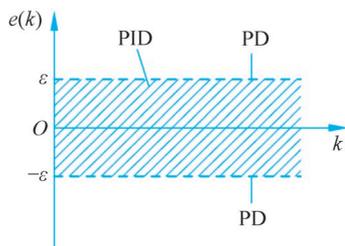


图 5-8 积分分离的PID控制算法

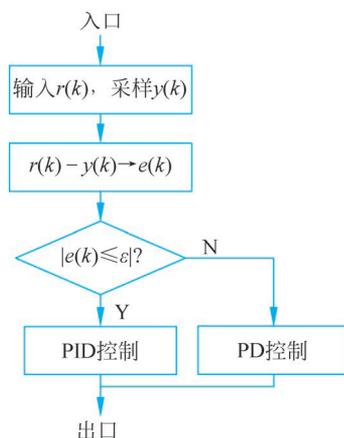


图 5-9 积分分离的PID控制算法流程

积分分离法的偏差阈值 ϵ 是控制算法中的一个可调参数,需要根据被控对象特性及控制要求来确定,既不能过大也不能过小。若 ϵ 过大,则达不到积分分离的目的;若 ϵ 过小,则系统由 PD 控制,系统偏差 $e(k)$ 有可能无法进入积分区,始终无法启动积分作用,导致系统出现较大的残差。

2. 变速积分的 PID 算法

在积分分离的 PID 控制算法中,当系统偏差 $e(k)$ 增大至阈值 ϵ 时,积分项前面的系数 $\alpha=0$,积分不再起作用;当 $e(k)$ 减小至阈值 ϵ 设定的误差带时,积分项累加系统偏差 $e(k)$,积分项前面的系数 $\alpha=1$ 。在实际工程应用中 α 是突变的,使得控制器的输出值也发生了突变,造成了执行机构的较大波动,加大了机械系统的磨损。变速积分的基本思想是:根据系统偏差 $e(k)$ 来实时改变积分项的累加速度,本质上就是改进的积分分离法。 $e(k)$ 越大,累加速度越慢,积分作用越弱;反之,积分作用越强。在变速积分的 PID 控制算法中, α 的变化不仅是缓慢的,而且是连续的,对积分项施加线性控制。因此,变速积分的 PID 控制算法比积分分离的 PID 控制算法性能更优。

变速积分的 PID 控制算法为

$$u(k) = K_p e(k) + \alpha K_i \sum_{j=0}^k e(j) + K_d [e(k) - e(k-1)] \quad (5-31)$$

式中

$$\alpha = \begin{cases} 0, & |e(k)| > \epsilon_2 \\ [\epsilon_2 - e(k)] / (\epsilon_2 - \epsilon_1), & \epsilon_1 \leq |e(k)| \leq \epsilon_2 \\ 1, & |e(k)| < \epsilon_1 \end{cases}$$

ϵ_1 和 ϵ_2 分别为积分分离的下限和上限阈值。变速积分的 PID 控制算法流程如图 5-10 所示。

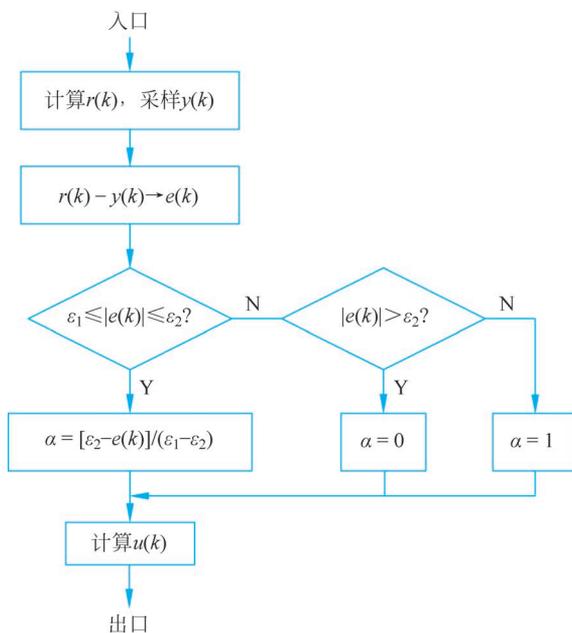


图 5-10 变速积分的 PID 控制流程

3. 遇限削弱积分法

遇限削弱积分法的基本思想是：当控制输出量 $u(k)$ 进入饱和区后，只执行削弱积分项的累加运算，停止使积分项增加的累加运算。因此，在计算 $u(k)$ 时，先判断 $u(k-1)$ 是否超过阈值。若 $u(k-1)$ 已经超过某个方向的输出阈值时，积分只累加反方向的 $e(k)$ 值。

遇限削弱积分法的算法如下：

- (1) 若 $u(k-1) \geq u_{\max}$ 且 $e(k) \geq 0$ ，则不进行积分累加。
- (2) 若 $u(k-1) \geq u_{\max}$ 且 $e(k) < 0$ ，则进行积分累加。
- (3) 若 $u(k-1) \leq u_{\min}$ 且 $e(k) \leq 0$ ，则不进行积分累加。
- (4) 若 $u(k-1) \leq u_{\min}$ 且 $e(k) > 0$ ，则进行积分累加。

对比遇限削弱积分法和积分分离法可以看出，尽管两者都是通过停止积分作用实现的，但停止积分累加的条件完全不同。积分分离法取消或引入积分作用的条件是系统的输入偏差 $e(k)$ ，而遇限削弱积分法取消或引入积分作用的条件是控制输出量 $u(k-1)$ 。因此，遇限削弱积分法能够有效避免控制输出量 $u(k)$ 长时间滞留在饱和区内。遇限削弱积分法的控制流程如图 5-11 所示。

4. 饱和停止积分法

饱和停止积分法的基本思想是：当控制器输出量 $u(k)$ 输出未达到饱和时，积分作用正常累加；当控制作用达到饱和时，停止积分作用。

饱和停止积分法的算法如下：

- (1) 若 $|u(k-1)| \geq u_{\max}$ ，则停止积分累加。
- (2) 若 $|u(k-1)| < u_{\max}$ ，则进行积分累加。

饱和停止积分法的优点是简单易行，但相比遇限削弱积分法，不太容易使系统退出饱和。饱和停止积分法的控制流程如图 5-12 所示。

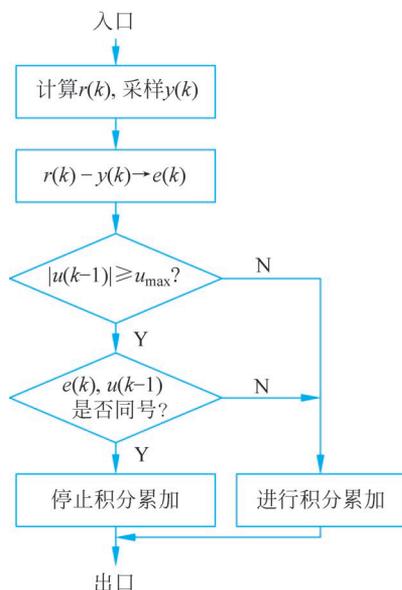


图 5-11 遇限削弱积分的 PID 控制流程

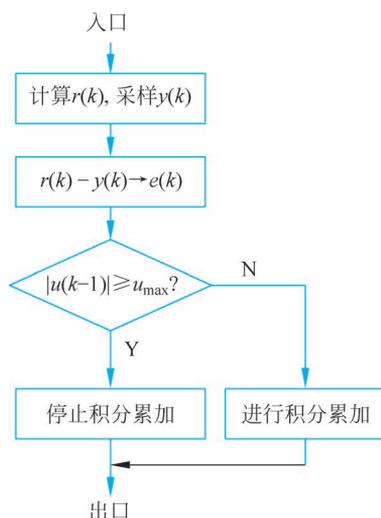


图 5-12 饱和停止积分法的 PID 控制流程

例 5-2 考虑 4.3 节中的龙门式 XY 型直线电动机速度控制系统,以 X 轴速度控制系统为例,观察不同积分改进算法的效果,设 $T=0.001\text{s}$ 。

解: PID 控制器的设计参见 5.6 节,取 $K_p=40, K_i=0.5, K_d=1$ 。分别采用积分分离法($\epsilon=0.2$)、变速积分法($\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.2$)、遇限削弱法($u_{\max}=1.2, u_{\min}=0.8$)和饱和和停止法($u_{\max}=1.2$)改进 PID 控制器中的积分饱和问题。用积分改进算法后的系统阶跃响应如图 5-13 所示。可以看出,四种积分改进算法都明显改善了系统的动态性能,减小了超调量,缩短了调节时间。

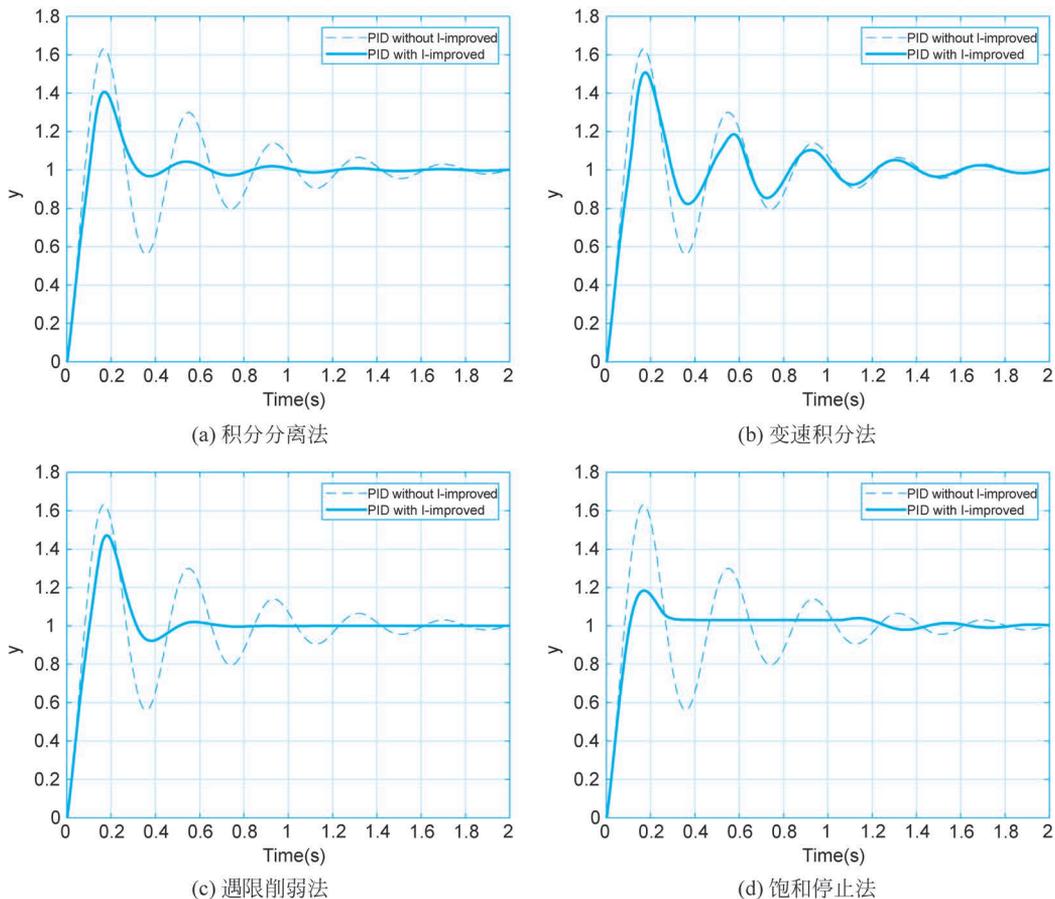


图 5-13 积分改进 PID 的控制效果

5.2.3 数字 PID 控制的其他改进算法

1. 带死区的数字 PID 控制算法

在计算机控制系统中,由于系统特性和计算精度等问题,系统偏差总是存在的,使得系统频繁动作,无法完全稳定。在系统设计时,有时希望系统的调节不要过于频繁,从而消除频繁调整引起的系统输出量持续波动。例如,在工艺流程控制系统中,控制系统的目标是使产品的某个性能达到预先设计的指标要求,即被控量(产品的某个参数)达到工

艺要求的精度,系统偏差 $e(k)$ 小于要求的预期值即可,而不是达到无限小,甚至为零,否则付出很大的代价。一方面,频繁的动作使得执行机构持续抖动,加速了机械系统的磨损;另一方面,在复杂的工艺控制过程中有多个控制系统并存,互相协调工作,各个被控量之间可能存在耦合关系,过分追求某个指标的最优,可能会影响其他指标,因此一个控制系统的性能应该“适可而止”,达到设定目标即可。

引入死区主要是为了消除稳定点附近的波动,带死区的数字PID控制算法结构如图5-14所示,相应的算法如下:

(1) 若 $|e(k)| > \epsilon$, 则 $e_1(k) = e(k)$ 。

(2) 若 $|e(k)| \leq \epsilon$, 则 $e_1(k) = 0$ 。

式中, ϵ 为死区设置值,可根据具体被控制过程特性决定。需要说明的是,死区的大小对系统的影响是不同的。若死区 ϵ 太小,则可能达不到预期的效果;若死区 ϵ 太大,则可能对系统的正常变化造成严重滞后;若死区 $\epsilon = 0$,则为常规PID控制。因此,需要根据具体的被控对象和性能要求来设定死区的大小。

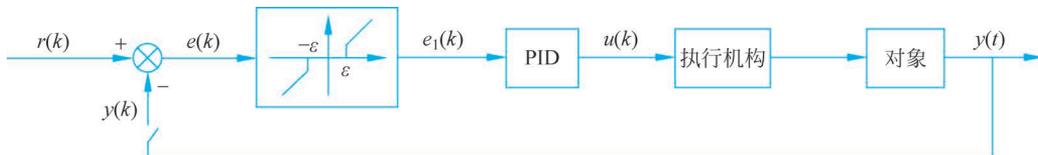


图 5-14 带死区的数字 PID 控制系统

带死区的数字PID控制流程如图5-15所示。

2. 带前馈补偿的PID控制算法

PID控制比较适用于以阶跃响应性能为主要考查指标的调节系统,如速度、温度、电压或位置等参量保持恒定或在给定范围之内缓慢变化的控制过程。但对于设定值持续快速变化的随动系统,除了考查系统的阶跃响应性能外,还需要考查系统对速度、加速度输入信号的跟踪性能。引入积分环节可以提高系统的类型,从而提高闭环系统的无差度,但是积分环节导致系统的稳定性变差,因此很难同时解决跟踪精度和系统稳定性之间的矛盾。另外,反馈控制是按照系统的跟踪偏差 $e(k)$ 进行控制的,当系统输出与输入有偏差时,反馈控制器才能朝着减小系统偏差的方向进行控制,因此这种反馈控制方式在时间上存在一定的滞后。在普通的调节系统中使用反馈控制器可以达到系统的精度要求,但对于高精度的随动控制系统,仅使用反馈控制器控制可能无法满足系统的高精度要求。为了解决以上问题,可以引入前馈补偿控制,构成既利用系统偏差

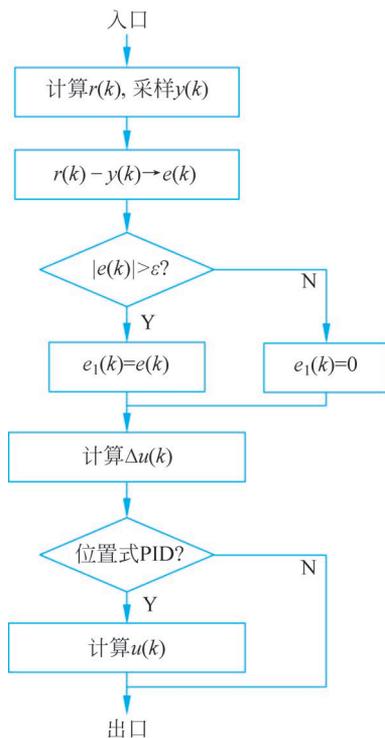


图 5-15 带死区的数字 PID 控制流程

$e(k)$ 进行闭环控制,又利用系统输入 $r(k)$ 进行开环控制的复合控制系统,如图 5-16 所示。

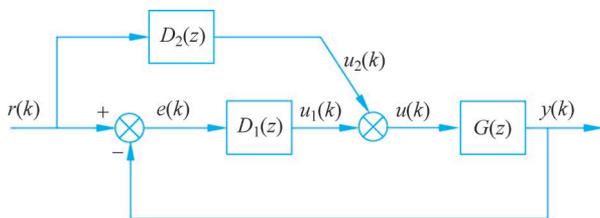


图 5-16 带前馈补偿的数字控制系统结构图

由图 5-16 可得

$$U(z) = E(z)D_1(z) + R(z)D_2(z) \quad (5-32)$$

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)[E(z)D_1(z) + R(z)D_2(z)] \quad (5-33)$$

$$E(z) = R(z) - G(z)[E(z)D_1(z) + R(z)D_2(z)] \quad (5-34)$$

系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1 - D_2(z)G(z)}{1 + D_1(z)G(z)} \quad (5-35)$$

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{[D_1(z) + D_2(z)]G(z)}{1 + D_1(z)G(z)} \quad (5-36)$$

分析式(5-35),令 $1 - D_2(z)G(z) = 0$,可得

$$D_2(z) = \frac{1}{G(z)} \quad (5-37)$$

此时, $\Phi_e(z) = 0$, $\Phi(z) = 1$ 。这表明,若不考虑系统初始条件,则系统输出 $y(k)$ 时刻复现任意的系统输入 $r(k)$,即 $y(k) \equiv r(k)$ 。进一步,由式(5-33)可得

$$Y(z) = E(z)D_1(z)G(z) + R(z)D_2(z)G(z) \quad (5-38)$$

可以看出,在 $D_2(z) = \frac{1}{G(z)}$ 的条件下,要使 $Y(z) = R(z)$,则 $E(z)D_1(z)G(z) = 0$ 。所以,直观的解释就是输入信号 $r(k)$ 经由 $D_2(z)G(z)$ 到达系统输出端 $y(k)$,即 $Y(z) = R(z)D_2(z)G(z) = R(z)$ 。

一般情况下,被控对象的开环传递函数为

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \quad (5-39)$$

因为控制系统一般都有惯性,所以上式中 $m < n$ 。

综合分析式(5-37)和式(5-39)可以看出,为了实现 $D_2(z) = \frac{1}{G(z)}$,就要求取输入量 $r(k)$ 的各阶导数,这在工程上是很难实现的。另外,微分阶次越高,对输入噪声干扰越敏感,反而影响系统工作。在控制系统建模时,所建立的被控对象模型 $G(z)$ 和实际系统越接近,得到的前馈补偿控制器模型越准确,系统的跟踪精度越高。在实际工程应用中,

设计前馈补偿控制 $D_2(z)$ 时, 无法满足 $D_2(z) = \frac{1}{G(z)}$, 只能做到 $D_2(z) \approx \frac{1}{G(z)}$ 。通常仅取输入信号的一、二阶微分, 正好可以补偿等速和等加速度偏差。

在图 5-16 中, 令 $D_2(z) = 0$, 即不考虑前馈补偿, 则系统的闭环传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D_1(z)G(z)}{1 + D_1(z)G(z)} \quad (5-40)$$

对比式(5-36)和式(5-40)可以看出, 加入前馈补偿后, 系统闭环传递函数中的特征多项式 $1 + D_1(z)G(z)$ 没有变化, 也就是说, 前馈补偿不会影响原有系统的稳定性。因此, 前馈补偿在一定程度上可以解决系统精度和稳定性之间的矛盾。若前馈补偿运用得当, 则可以使被控变量不会因系统给定信号变化而产生偏差, 相比反馈控制, 前馈控制能更加及时地施加控制作用, 并且不受系统滞后的影响。

在实际运算中, 对输入信号 $r(k)$ 取一阶、二阶微分, 就可以得到前馈信号, 即

$$u_2(k) = K_v[r(k) - r(k-1)] + K_a[r(k) - 2r(k-1) + r(k-2)] \quad (5-41)$$

式中, K_v 和 K_a 分别为速度补偿系数和加速度补偿系数。

因此, 带前馈补偿的位置式 PID 算法如下:

$$\begin{aligned} u(k) &= u_1(k) + u_2(k) \\ &= K_p e(k) + K_i \sum_{i=0}^k e(i) + K_d [e(k) - e(k-1)] + \\ &\quad K_v [r(k) - r(k-1)] + K_a [r(k) - 2r(k-1) + r(k-2)] \end{aligned} \quad (5-42)$$

5.3 Smith 预估补偿数字 PID 控制器

在工业过程(如热工、化工)控制中, 物料和能量的传输存在延时, 使得许多被控对象具有延迟特性(纯滞后), 传递函数为 $G(s) = G_0(s)e^{-\tau s}$ 。以图 5-17 所示的带钢冷连轧厚度控制系统为例, 图中 h_r 为出口厚度参考值, h 为出口厚度实际值, Δh 为出口厚度差, ΔS 为辊缝调节量。带钢从轧机运行到射线式测厚仪需要较长的时间, 即存在纯滞后时间 τ 。

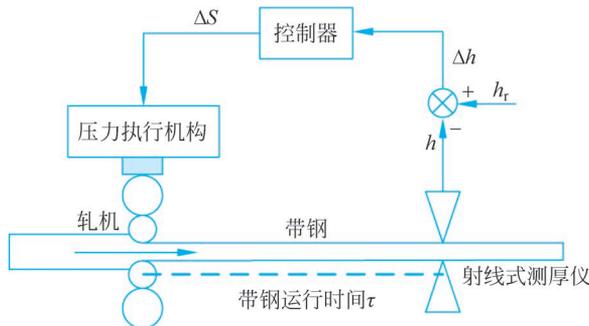


图 5-17 带钢冷连轧厚度控制系统原理图

一般认为, 当难控度 $\tau/T_0 > 0.3$ 时 (T_0 为对象的主导时间常数), 则该过程是具有大滞后或大延迟的过程。实践证明, 当难控度 $\tau/T_0 > 0.5$ 时, 常规的 PID 控制很难获得较

满意的控制性能,甚至产生振荡。分析其原因,简单来说由于被控对象中的延迟环节 $e^{-\tau s}$ 产生负相移 $\varphi(\omega) = -\tau\omega$,且与频率 ω 成正比,而其幅频特性与频率无关,幅值恒为 1,这使得控制回路的稳定裕度下降。为了保证控制回路稳定且有一定的裕度,控制器只能取很小的比例系数以及很大的积分时间常数。然而,这样的系统其控制性能必然很差,动态偏差很大,调节过程缓慢,抑制扰动的能力很弱。因此,纯滞后对象称为“难以控制的单元”。长期以来,人们对纯滞后对象的控制做了大量的研究,代表性的方法有 Smith 预估补偿控制和大林算法。本章结合 PID 控制,介绍 Smith 预估补偿控制方法,大林算法将在第 6 章中讲解。

5.3.1 Smith 预估补偿控制方法

Smith 预估补偿控制方法是美国学者 O. J. M. Smith 于 1957 年提出的,是一种针对纯滞后被控对象,建立在模型基础上的补偿控制策略。尽管 Smith 预估补偿控制的设计思想非常清晰,但由于模拟仪表无法实现这种补偿,因而在提出后一直处于理论研究阶段,无法应用于实际模拟控制系统。随着计算机控制技术的发展,现在人们可以利用计算机程序方便地实现纯滞后补偿控制,取得良好的控制效果。

在图 5-18 所示的单回路反馈控制系统中, $D(s)$ 为模拟控制器的传递函数, $G(s) = G_0(s)e^{-\tau s}$ 为被控对象的传递函数, $G_0(s)$ 为被控对象中不包含纯滞后部分的传递函数, $e^{-\tau s}$ 为被控对象纯滞后部分的传递函数。

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{D(s)G_0(s)e^{-\tau s}}{1 + D(s)G_0(s)e^{-\tau s}} \quad (5-43)$$

系统的特征方程为

$$1 + D(s)G_0(s)e^{-\tau s} = 0 \quad (5-44)$$

从系统的特征方程可以看出,系统难以稳定的根本原因是系统闭环特征方程含有纯滞后环节 $e^{-\tau s}$ 。显然, $e^{-\tau s}$ 使系统的稳定性下降,尤其当 τ 比较大时,系统就会不稳定。因此,常规的控制规律 $D(s)$ 很难使闭环系统获得满意的控制性能。解决这一问题的思想是消去特征方程中的纯滞后环节。

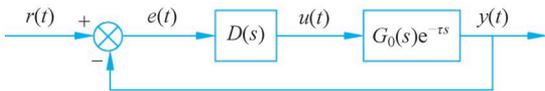


图 5-18 带滞后环节的常规反馈控制系统

从图 5-18 可以看出,系统特征方程含有纯滞后环节,是因为系统的反馈通道中含有纯滞后环节。为了分析方便,将被控对象 $G_0(s)e^{-\tau s}$ 分解为两个环节的串联,即 $G_0(s)$ 和 $e^{-\tau s}$,如图 5-19 所示。若反馈通道不包含纯滞后环节,即将 $y_0(t)$ 反馈到输入端,则系统的稳定性将得到根本改善,这就是 Smith 期望的反馈回路配置。显然,这个方案是行不通的。这给我们一个启发:如果能引入一个与对象并联的被控对象模型 $\hat{G}_0(s)e^{-\hat{\tau}s}$,使得 $\hat{G}_0(s) = G_0(s)$, $\hat{\tau} = \tau$,将控制输出 $u(t)$ 加到这个模型上,并用模型 $\hat{G}_0(s)$ 的输出信号

$y'_m(t)$ 来代替虚拟信号 $y_0(t)$ 反馈到输入端,就可以得到与期望反馈配置相同的控制效果,从而改善控制系统的性能。这就是 Smith 预估控制的初步方案,如图 5-20 所示。

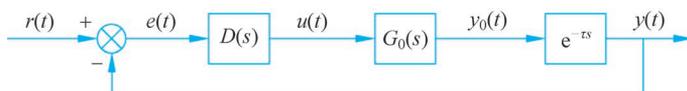


图 5-19 串联滞后环节的反馈控制系统

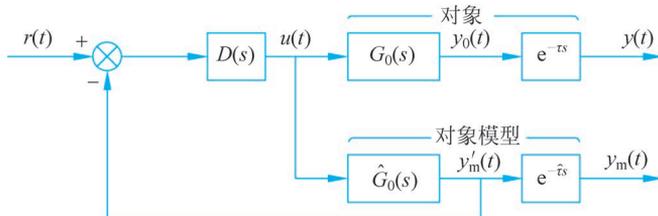


图 5-20 Smith 预估补偿控制初步方案

如果有负载扰动或被控对象模型不准确,Smith 预估控制的初步方案就难以获得理想的控制效果。负载扰动或模型不准确所产生的偏差 $y_e(t) = y(t) - y_m(t)$,为了补偿该偏差,将 $y_e(t)$ 作为第二个反馈信号。这就是完整的 Smith 预估补偿控制方案,如图 5-21 所示。

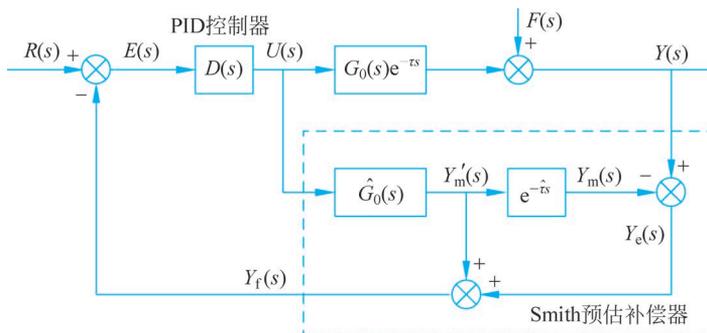


图 5-21 Smith 预估补偿 PID 控制系统

从图 5-21 可以看出,Smith 预估补偿控制方案是在系统中引入一个补偿环节 $G_\tau(s)$

$$G_\tau(s) = \hat{G}_0(s)(1 - e^{-\hat{\tau}s}) \quad (5-45)$$

来补偿延迟环节 $e^{-\tau s}$ 的影响。该补偿环节称为 Smith 预估补偿控制器。由图可以看出,若补偿器中的模型精确,即

$$\hat{G}_0(s)e^{-\hat{\tau}s} = G_0(s)e^{-\tau s}$$

则被控对象输出 $Y(s)$ 与模型输出 $Y_m(s)$ 之差为

$$Y_e(s) = Y(s) - Y_m(s) = F(s) + [G_0(s)e^{-\tau s} - \hat{G}_0(s)e^{-\hat{\tau}s}]U(s) = F(s) \quad (5-46)$$

即等于外界扰动量,而与控制量 $U(s)$ 无关。这表明,控制量 $U(s)$ 不能通过被控对象 $G_0(s)e^{-\tau s}$ 由 $Y_e(s)$ 通路构成反馈回路,而只能通过模型 $\hat{G}_0(s)$ 和控制器 $D(s)$ 构成反馈回路,被控对象 $G_0(s)e^{-\tau s}$ 处于反馈回路外面。拉普拉斯变换的位移定理说明,被控对

象的延迟特性 $e^{-\tau s}$ 只起到延迟的作用,将控制作用在时间轴上推迟了一段时间 τ ,而外界扰动 $F(s)$ 仍然可以经由 $Y_e(s)$ 通路作用到控制回路上,由控制回路加以抑制,控制系统的过渡过程和其他性能指标都与被控对象特性为 $G_0(s)$ (无纯滞后) 时完全相同。由于通过补偿器获得的系统反馈信号 $Y_f(s) = Y'_m(s) + Y_e(s) = Y'_m(s) + F(s)$, 其中 $Y'_m(s)$ 相当于在输入为 $E(s)$ 、控制器为 $D(s)$ 、被控对象为 $\hat{G}_0(s)e^{-\hat{\tau}s}$ 的开环系统中串上一个传递函数为 $e^{\hat{\tau}s}$ 的环节,也就是系统输出 $Y(s)$ 在未来 τ 时间的预测估计值 $\hat{y}(t+\tau)$, 故而称该补偿器为预估补偿器。

由图 5-21 可得系统输出 $Y(s)$ 对于输入 $R(s)$ 的传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G_0(s)e^{-\tau s}}{1 + D(s)\hat{G}_0(s) + D(s)[G_0(s)e^{-\tau s} - \hat{G}_0(s)e^{-\hat{\tau}s}]} \quad (5-47)$$

系统的特征方程为

$$1 + D(s)\hat{G}_0(s) + D(s)[G_0(s)e^{-\tau s} - \hat{G}_0(s)e^{-\hat{\tau}s}] = 0 \quad (5-48)$$

若模型设计精确,即 $\hat{G}_0(s) = G_0(s)$, $\hat{\tau} = \tau$, 则系统的特征方程可写为

$$1 + D(s)\hat{G}_0(s) = 0 \quad (5-49)$$

或

$$1 + D(s)G_0(s) = 0 \quad (5-50)$$

同时,式(5-47)可写为

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G_0(s)}{1 + D(s)\hat{G}_0(s)} e^{-\tau s} \quad (5-51)$$

比较式(5-44)和式(5-50),经 Smith 预估补偿后,从系统特征方程中消除了纯滞后环节,它将不会影响系统的稳定性,因而消除了纯滞后的影响,于是在控制器设计时可以使用较大的开环增益,改善系统动态性能。

从式(5-49)和式(5-51)可以进一步看出,误差传递函数

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + D(s)\hat{G}_0(s)}$$

中不含 $e^{-\tau s}$, 这再次表明延迟特性不会影响控制回路的动态特性。因此, PID 控制器的参数只需要按照被控对象中 $G_0(s)$ 的特性进行整定,而不必考虑 $e^{-\tau s}$ 的影响。

5.3.2 Smith 预估补偿数字 PID 控制器设计

Smith 预估补偿数字 PID 控制策略用计算机实现非常方便。为了便于计算,将图 5-21 等效变换成图 5-22。

用计算机实现的 Smith 预估补偿控制系统如图 5-23 所示。可以看出, Smith 预估补偿的数字 PID 控制器由两部分组成:一部分是由 $D(s)$ 离散化得到的数字 PID 控制器 $D(z)$; 另一部分是 Smith 预估补偿器。如果数字 PID 的控制算法是已知的,控制器设计的核心问题就是 Smith 预估补偿器的数字算法。

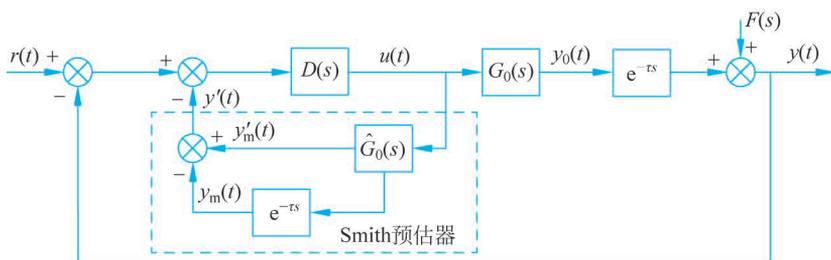


图 5-22 等效的 Smith 预估补偿控制系统

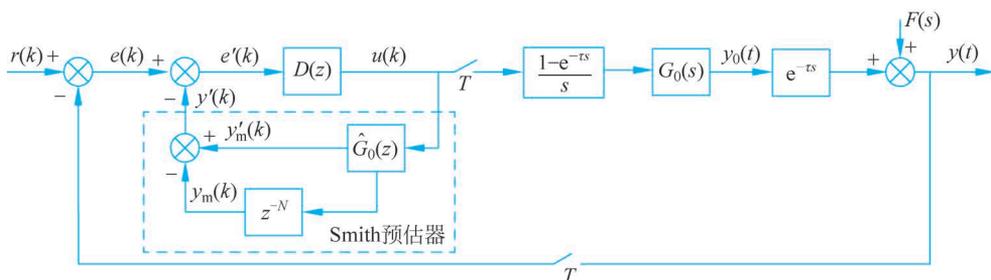


图 5-23 数字 Smith 预估补偿 PID 控制系统

1. Smith 预估补偿器的计算机实现

数字 Smith 预估补偿器是由模拟 Smith 预估补偿器通过等效离散化获得的,下面针对几种常见的对象,给出模拟 Smith 预估补偿算法,并求解相应的纯滞后数字补偿控制器。

(1) 设对象特性为

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{1 + T_1 s} \quad (5-52)$$

式中, τ 为对象的纯滞后时间; T_1 为对象的惯性时间常数。

Smith 预估补偿器的传递函数为

$$D_\tau(s) = \frac{K}{1 + T_1 s} (1 - e^{-\hat{\tau} s}) \quad (5-53)$$

Smith 预估补偿器 $D_\tau(s)$ 的结构如图 5-24 所示。

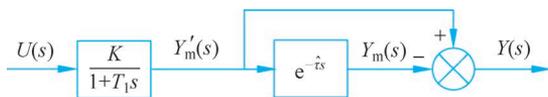


图 5-24 Smith 预估补偿器(一)

为了由计算机实现纯滞后补偿,利用阶跃响应不变法对 $D_\tau(s)$ 离散化(也可以利用第 4 章介绍的其他工程离散化方法),可得

$$D_\tau(z) = \mathcal{Z}[D_\tau(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-T\hat{\tau}}}{s} \frac{K}{1 + T_1 s} (1 - e^{-\hat{\tau} s})\right] = (1 - z^{-N}) \left[\frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \right] \quad (5-54)$$

式中, $a_1 = e^{-T/T_1}$; $b_1 = K(1 - e^{-T/T_1})$; $N \approx \hat{\tau}/T = \tau/T$, 取整数。

利用式(5-54)就可以在计算机上实现差分方程。由图 5-24 可得

$$D_\tau(z) = \frac{Y'(z)}{U(z)} = \frac{Y'(z)}{Y'_m(z)} \frac{Y'_m(z)}{U(z)} = (1 - z^{-N}) \left[\frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \right]$$

为了便于计算机编程实现, 令

$$\frac{Y'(z)}{Y'_m(z)} = 1 - z^{-N} \quad (5-55)$$

$$\frac{Y'_m(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (5-56)$$

由式(5-55)和式(5-56)可得 Smith 预估补偿器的差分方程为

$$y'_m(k) = a_1 y'_m(k-1) + b_1 u(k-1) \quad (5-57)$$

$$y'(k) = y'_m(k) - y'_m(k-N) \quad (5-58)$$

(2) 设对象特性为

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (5-59)$$

式中, T_1 和 T_2 为对象的惯性时间常数。

Smith 预估补偿器的传递函数为

$$D_\tau(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} (1 - e^{-\hat{\tau} s}) \quad (5-60)$$

Smith 预估补偿器 $D_\tau(s)$ 的结构如图 5-25 所示。

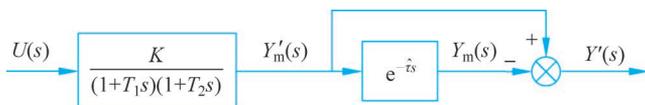


图 5-25 Smith 预估补偿器(二)

利用阶跃响应不变法对 $D_\tau(s)$ 离散化, 可得

$$\begin{aligned} D_\tau(z) &= \mathcal{Z}[D_\tau(s)] = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-T s}}{s} \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} (1 - e^{-\hat{\tau} s}) \right] \\ &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} (1 - z^{-N}) \end{aligned} \quad (5-61)$$

式中, $a_1 = e^{-T/T_1} + e^{-T/T_2}$; $a_2 = e^{-(T/T_1 + T/T_2)}$; $b_1 = \frac{K}{T_2 - T_1} [T_1 (e^{-T/T_1} - 1) - T_2 (e^{-T/T_2} - 1)]$; $b_2 = \frac{K}{T_2 - T_1} [T_2 e^{-T/T_1} (e^{-T/T_2} - 1) - T_1 e^{-T/T_2} (e^{-T/T_1} - 1)]$; $N \approx \hat{\tau}/T = \tau/T$, 取整数。

由图 5-25 可得

$$D_\tau(z) = \frac{Y'(z)}{U(z)} = \frac{Y'(z)}{Y'_m(z)} \frac{Y'_m(z)}{U(z)} = (1 - z^{-N}) \left[\frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \right]$$

令

$$\frac{Y'(z)}{Y'_m(z)} = 1 - z^{-N} \quad (5-62)$$

$$\frac{Y'_m(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (5-63)$$

由式(5-62)和式(5-63)可得 Smith 预估补偿器的差分方程为

$$y'_m(k) = a_1 y'_m(k-1) + a_2 y'_m(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad (5-64)$$

$$y'(k) = y'_m(k) - y'_m(k-N) \quad (5-65)$$

(3) 设对象特性为

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{T_1 s} \quad (5-66)$$

Smith 预估补偿器的传递函数为

$$D_\tau(s) = \frac{K}{T_1 s} (1 - e^{-\hat{\tau} s}) \quad (5-67)$$

Smith 预估补偿器 $D_\tau(s)$ 的结构如图 5-24 所示。

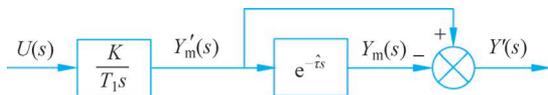


图 5-26 Smith 预估补偿器(三)

利用阶跃响应不变法对 $D_\tau(s)$ 离散化, 可得

$$D_\tau(z) = \mathcal{Z}[D_\tau(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-\hat{\tau}s}}{s} \frac{K}{T_1 s} (1 - e^{-\hat{\tau}s})\right] = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} (1 - z^{-N}) \quad (5-68)$$

式中, $b_1 = KT/T_1$; $N \approx \hat{\tau}/T = \tau/T$, 取整数。

利用式(5-68), 由图 5-26 可得

$$D_\tau(z) = \frac{Y'(z)}{U(z)} = \frac{Y'(z)}{Y'_m(z)} \frac{Y'_m(z)}{U(z)} = (1 - z^{-N}) \frac{b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

令

$$\frac{Y'(z)}{Y'_m(z)} = 1 - z^{-N} \quad (5-69)$$

$$\frac{Y'_m(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (5-70)$$

由式(5-69)和式(5-70)可得 Smith 预估补偿器的差分方程为

$$y'_m(k) = y'_m(k-1) + b_1 u(k-1) \quad (5-71)$$

$$y'(k) = y'_m(k) - y'_m(k-N) \quad (5-72)$$

(4) 设对象特性为

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{s(1 + T_1 s)} \quad (5-73)$$

式中, T_1 为对象的惯性时间常数。

Smith 预估补偿器的传递函数为

$$D_\tau(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)}(1 - e^{-\hat{\tau}s}) \quad (5-74)$$

Smith 预估补偿器 $D_\tau(s)$ 的结构如图 5-27 所示。

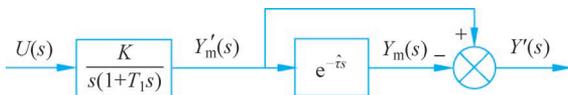


图 5-27 Smith 预估补偿器(四)

利用阶跃响应不变法对 $D_\tau(s)$ 离散化, 可得

$$\begin{aligned} D_\tau(z) &= \mathcal{Z}[D_\tau(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s(1+T_1s)}(1 - e^{-\hat{\tau}s})\right] \\ &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}(1 - z^{-N}) \end{aligned} \quad (5-75)$$

式中, $a_1 = 1 + e^{-T/T_1}$; $a_2 = e^{-2T/T_1}$; $b_1 = K(T - T_1 + T_1 e^{-T/T_1})$; $b_2 = K(T_1 - T e^{-T/T_1} - T_1 e^{-2T/T_1})$; $N \approx \hat{\tau}/T = \tau/T$, 取整数。

由图 5-27 可得

$$D_\tau(z) = \frac{Y'(z)}{U(z)} = \frac{Y'(z)}{Y'_m(z)} \frac{Y'_m(z)}{U(z)} = (1 - z^{-N}) \left[\frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \right]$$

令

$$\frac{Y'(z)}{Y'_m(z)} = 1 - z^{-N} \quad (5-76)$$

$$\frac{Y'_m(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (5-77)$$

由式(5-76)和式(5-77)可得 Smith 预估补偿器的差分方程为

$$y'_m(k) = a_1 y'_m(k-1) + a_2 y'_m(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad (5-78)$$

$$y'(k) = y'_m(k) - y'_m(k-N) \quad (5-79)$$

2. 纯滞后信号的产生

从上述分析可以看出, 纯滞后补偿器的差分方程都包含 $y'_m(k-N)$ 项, 也就是存在滞后 NT 的信号, 因而产生纯滞后信号对纯滞后补偿控制是至关重要的。为此, 需要在计算机内存中设定 N 个存储单元, 用来存放信号 $y'_m(k)$ 的历史数据, 如图 5-28 所示。

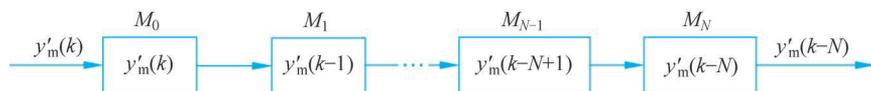


图 5-28 产生纯滞后的存储单元结构图

存储单元数量为

$$N = \tau / T \quad (5-80)$$

存储单元 $M_0, M_1, \dots, M_{N-1}, M_N$ 分别存放 $y'_m(k), y'_m(k-1), \dots, y'_m(k-N+1), y'_m(k-N)$ 。每次采样读入前,先将各存储单元的内容移入下一个存储单元。例如,把 M_{N-1} 单元的内容 $y'_m(k-N+1)$ 移入 M_N 单元,成为下一个采样周期内的 $y'_m(k-N)$,以此类推,把 M_0 单元的内容 $y'_m(k)$ 移入 M_1 单元,成为下一个采样周期内的 $y'_m(k-1)$ 。然后,将当前的采样值 $y'_m(k)$ 存入 M_0 单元。从 M_N 单元输出的值就是滞后 N 个采样周期的 $y'_m(k-N)$ 信号。

3. Smith 预估补偿数字 PID 控制器的设计步骤

从上述的分析可见,Smith 预估补偿的数字 PID 控制器设计包含数字 PID 控制器 $D(z)$ 的设计以及 Smith 预估补偿器 $D_\tau(z)$ 的设计。具体设计步骤如下。

(1) 计算反馈回路的偏差:

$$e(k) = r(k) - y(k) \quad (5-81)$$

(2) 计算 Smith 预估补偿器 $D_\tau(z)$ 的输出 $y'(k)$ 。

根据对象特性 $G(s)$ 求解广义对象的传递函数 $G(z)$,获得 Smith 预估补偿器 $D_\tau(z)$,进而求得 $y'_m(k)$ 。

(3) 计算数字 PID 控制器的输入偏差:

$$e'(k) = e(k) - y'(k) \quad (5-82)$$

(4) 计算数字 PID 的输出 $u(k)$ 。

利用本章介绍的数字 PID 控制器设计方法设计 PID 控制算法,利用计算机实现数字控制器。

应当指出,Smith 预估补偿 PID 控制的系统性能对所用对象模型的误差比较敏感,特别是对延迟时间的误差 $\tau - \hat{\tau}$ 比较敏感,随着模型误差的增大,系统性能下降。因此,采用这种控制策略需要事先获得尽可能准确的对象模型。

5.3.3 设计实例

例 5-3 被控对象的传递函数为 $G(s) = \frac{1}{50s+1} e^{-100s}$, 设采样周期 $T = 10s$, 利用 Smith 预估补偿算法设计数字控制器 $D(z)$, 完成仿真实验。

解: (1) 求被控对象的广义脉冲传递函数 $G(z)$ 。被控对象的滞后时间是采样周期的整数倍,可得

$$N = \tau / T = 10$$

被控对象的广义脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{50s+1} e^{-100s} \right] = (1 - z^{-1}) z^{-10} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(50s+1)} \right] \\ &= \frac{0.1813z^{-11}}{1 - 0.8187z^{-1}} = \frac{0.1813}{z^{11} - 0.8187z^{10}} \end{aligned}$$

(2) 计算 Smith 预估补偿器的输出。

$$y'_m(k) = -0.8187y'_m(k-1) + 0.1813u(k-1)$$

$$y_m(k) = -0.8187y_m(k-1) + 0.1813u(k-11)$$

$$y'(k) = y'_m(k) - y_m(k)$$

(3) 计算数字 PID 控制器的输入偏差。

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

$$e'(k) = e(k) - y'(k)$$

(4) 设计数字 PID 控制器。利用试凑法设计数字 PID 控制器为

$$u(k) = 0.5e'(k) + 0.01 \sum_{i=0}^k e'(i) + 10\dot{e}'(k)$$

(5) 仿真分析。基于以上计算结果,利用 MATLAB 进行仿真,无 Smith 预估补偿的 PID 控制系统阶跃响应曲线如图 5-29(a)所示;利用 Smith 预估补偿算法,准确估计系统参数的情况下,基于 PID 控制的系统阶跃响应曲线如图 5-29(b)所示;利用 Smith 预估补偿算法,未能准确估计系统参数,估计参数为系统参数真实值的 1.5 倍和 2 倍的情况下,基于 PID 控制的系统阶跃响应曲线分别如图 5-30(a)和(b)所示。从以上仿真结果可

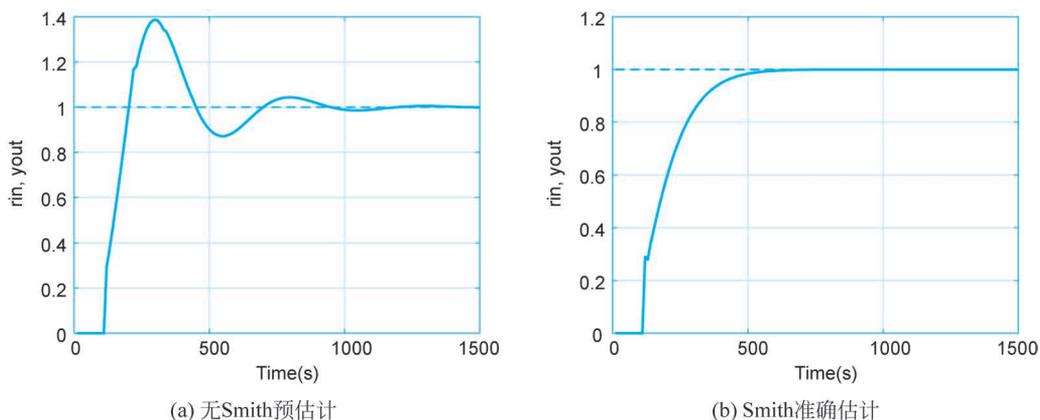


图 5-29 无 Smith 预估估计以及 Smith 准确估计系统参数的 PID 控制系统响应

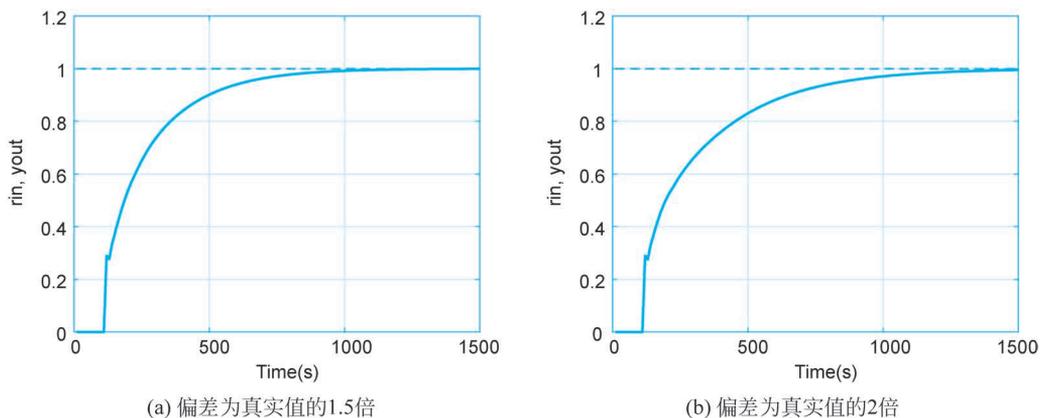


图 5-30 Smith 不准确估计系统参数下的 PID 控制系统响应

以看出,Smith 预估补偿算法能够大幅度提高纯滞后控制系统的动态性能。另外,被控对象模型参数与真实值相差越大,补偿控制效果越差。

以上设计及仿真过程表明,Smith 预估补偿控制方法的前提是必须得到准确的被控对象数学模型,只有这样才能建立精确的预估模型。

5.4 分数阶数字 PID 控制器

分数阶微积分是一个古老而又“新鲜”的概念,早在整数阶微积分创立的初期,就有一些学者开始考虑它的含义,然而,由于缺乏应用背景和计算困难等原因,分数阶微积分理论及应用的研究一直没有得到太多实质性进展。近年来,随着计算机技术的跨越式发展和分数阶微积分理论研究的不断深入,人们发现分数阶微积分特别适合描述具有记忆特性、与历史相关的物理变化过程,而实际系统中具有这样性质或动态特性的对象随处可见。目前,研究人员在控制工程、软物质、反应扩散、流变学等诸多领域开始采用分数阶模型进行描述,并得到了一些特殊性质和更精细化的结果。

分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ (Fractional Order PID, FOPID) 控制器的概念由 Podlubny 于 1999 年提出。FOPID 控制器是传统的整数阶 PID 控制器 (Intergal Order PID, IOPID) 的广义化形式, IOPID 控制器是 FOPID 控制器的特例。与整数阶微积分相比,分数阶微分和积分过程更柔性、更细腻。由于分数阶微积分的特性, FOPID 控制器具有许多 IOPID 控制器无法达到的优点。此外, FOPID 控制器增加了两个可调参数,其积分阶次 λ 和微分阶次 μ 可以在实数范围内任意配置,使得 FOPID 控制器具有更加灵活的控制结构和非常强的鲁棒性,因而得到了广泛应用。近年来,分数阶控制系统的设计及应用成为控制领域中一个新的研究热点。但是,分数阶微分方程的离散化数值实现比较复杂,对计算能力要求较高。本节介绍 FOPID 数字控制器的基本原理。

5.4.1 分数阶微积分简介

1. 基本函数

分数阶微积分的定义和运算将用到伽马 (Gamma)、贝塔 (Beta)、米塔格-累夫勒 (Mittag-Leffler) 等基本函数,这些基本函数是分数阶微分方程的基础。由于这些基本函数都是超越函数,其求解过程比整数阶函数复杂得多。下面简要介绍几种常用的基本函数。

1) Gamma 函数

Gamma 函数是分数阶微积分中最为常用的基本函数之一,是对阶乘概念的拓展,其定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (5-83)$$

式中, $\text{Re}(z) > 0$, 在复平面右半平面收敛。

Gamma 函数一个基本且常用的性质为

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (5-84)$$

2) Beta 函数

Beta 函数是 Gamma 函数的特殊组合形式,可表示为

$$B(z, \omega) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{(\omega-1)} d\tau \quad (5-85)$$

式中, $\operatorname{Re}(z) > 0$; $\operatorname{Re}(\omega) > 0$ 。

在一些情况下,用 Beta 函数比 Gamma 函数表示更加便捷,用拉普拉斯变换可以建立 Beta 函数和 Gamma 函数之间的关系,考虑

$$h_{(z, \omega)}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1-\tau)^{(\omega-1)} d\tau \quad (5-86)$$

式中, $\operatorname{Re}(z) > 0$; $\operatorname{Re}(\omega) > 0$ 。很明显, $h_{(z, \omega)}(1) = B(z, \omega)$ 。

由于两个函数乘积的拉普拉斯变换等于变换的乘积,可得

$$H_{(z, \omega)}(s) = \mathcal{L}[h_{(z, \omega)}(t)] = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \frac{\Gamma(\omega)}{s^\omega} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{s^{z+\omega}} \quad (5-87)$$

由拉普拉斯变换的唯一性,令 $t=1$,可得

$$B(z, \omega) = \mathcal{L}^{-1}[H_{(z, \omega)}(s)] = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} t^{z+\omega-1} \Big|_{t=1} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} \quad (5-88)$$

3) Mittag-Leffler 函数

如同指数函数 e^x 在整数阶微分方程中的作用一样, Mittag-Leffler 函数在分数阶微分方程中起着重要的作用, e^x 可以看作 Mittag-Leffler 函数的特殊情况。根据所含参数的数量不同, Mittag-Leffler 函数可分为单参数、二参数等不同形式。

单参数 Mittag-Leffler 函数的表达式为

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \quad (\alpha > 0) \quad (5-89)$$

当 $\alpha=1$ 时,上式可以表示为

$$E_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = e^z \quad (5-90)$$

双参数 Mittag-Leffler 函数的表达式为

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (5-91)$$

单参数的 Mittag-Leffler 函数可看作双参数的 Mittag-Leffler 函数的特殊形式,双参数的 Mittag-Leffler 函数可以看作 Mittag-Leffler 函数的一般形式。

Mittag-Leffler 函数的广义形式为

$$E_{\alpha, \beta}^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j+\gamma)z^j}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha j + \beta)\Gamma(j+1)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (5-92)$$

式中, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$; $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ 。

2. 分数阶微积分定义

目前,比较常用的分数阶微积分有四种定义,具体如下。

1) Cauchy 积分定义

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2\pi j} \oint_c \frac{f(\tau)}{(\tau - t)^{\alpha+1}} d\tau \quad (5-93)$$

式中, c 为包围 $f(t)$ 单值与解析开区域的光滑封闭曲线; D_t 为分数阶算子。

2) Grünwald-letnikov(G-L)分数阶微积分定义

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil (t-t_0)/h \rceil} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (5-94)$$

式中, ${}_{t_0} D_t^\alpha$ 为微分或积分算子, t 为自变量, t_0 为 t 的下边界, α 可以是实数或复数; $\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ 为函数 $(1-z)^\alpha$ 的多项式系数。该函数还可以更简单地由以下递推公式直接求出:

$$\omega_1^{(\alpha)} = 1, \omega_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right)^j \omega_j^{(\alpha-1)} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (5-95)$$

根据该定义可以推导分数阶微分算法为

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil (t-t_0)/h \rceil} \omega_j^{(\alpha)} f(t-jh) \quad (5-96)$$

当步长 h 足够小时, 则可以直接求出函数数值微分近似值, 并可以证明, 该公式精度为 $o(h)$ 。

3) Riemann-Liouville(R-L)分数阶微积分定义

分数阶微分的 R-L 定义为

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{(\alpha-n+1)}} d\tau \quad (n-1 < \alpha < n, n \in \mathbf{N}) \quad (5-97)$$

分数阶积分的 R-L 定义为

$${}_{t_0} I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{(\alpha+1)}} d\tau \quad (t > 0, \alpha \in \mathbf{R}^+) \quad (5-98)$$

分数阶积分和微分的 R-L 定义可以统一到一个表达式中, 即分数阶微积分定义为

$${}_{t_0} D_t^{\pm\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{(\alpha-n+1)}} d\tau \quad (n-1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbf{N}) \quad (5-99)$$

R-L 定义需要被积函数连续且可积。尽管实际工程中一般满足系统函数连续且可积, 但由于该定义初值问题与实际物理意义匹配问题尚待解决, 故该定义应用受到了一定限制。

4) Caputo 定义

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{(\alpha-n+1)}} d\tau \quad (n-1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbf{N}) \quad (5-100)$$

Caputo 定义要求函数前 n 阶导数可积。

以上四种定义中, R-L 定义是目前最常用的分数阶微积分定义。对于许多实际函数来说, G-L 定义与 R-L 定义是完全等效的。在一些初始状态下, R-L 定义与 Caputo 定义的输出是相同的。在零初始状态下, 进行拉普拉斯变换可得

$$\mathcal{L}\{{}_{t_0} D_t^{\pm\alpha} f(t)\} = s^{\pm\alpha} F(s) \quad (0 < \alpha < 1) \quad (5-101)$$

R-L 定义与 Caputo 定义的主要区别是对常数求导的定义上,后者对常数求导是有界的,而前者对常数求导无界。Caputo 定义则更适合分数阶微积分初值问题的求解。

5.4.2 分数阶控制器分类

IOPID 控制器有三个参数,即比例系数 K_p 、积分系数 K_i 和微分系数 K_d 。FOPID 控制器除了具有 K_p 、 K_i 和 K_d 三个用来调整系统性能的参数外,又增加了两个参数,即积分阶次 λ 和微分阶次 μ ,且 λ 和 μ 可取 $(0,2)$ 内的任意实数。IOPID 控制器和 FOPID 控制器的阶次取值范围如图 5-31 所示。可以看出,IOPID 控制器的阶次只能取图 5-31(a)中的四个固定点处的值,而 FOPID 控制器的阶次 λ 和 μ 可以取图 5-31(b)中阴影区域内的任意值。由于增加了两个参数,FOPID 控制器的参数整定较复杂,但是能够更为丰富且连续地设置系统的控制性能,进而得到更好的控制效果。

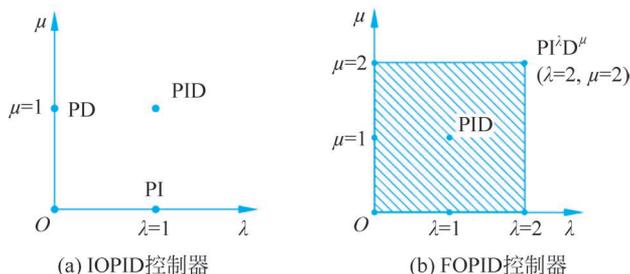


图 5-31 IOPID 控制器和 FOPID 控制器的阶次取值范围

FOPID 控制器的时域模型为

$$u(t) = K_p e(t) + K_i D^{-\lambda} e(t) + K_d D^\mu e(t) \quad (5-102)$$

可以看出,当 $\lambda=1$ 且 $\mu=1$ 时,FOPID 控制器就变成了传统的 IOPID 控制器。根据 λ 和 μ 的不同取值,常用的 FOPID 控制器可以分为以下三种。

1. 分数阶 PI^λ (FOPI) 控制器

FOPI 控制系统结构如图 5-32 所示。

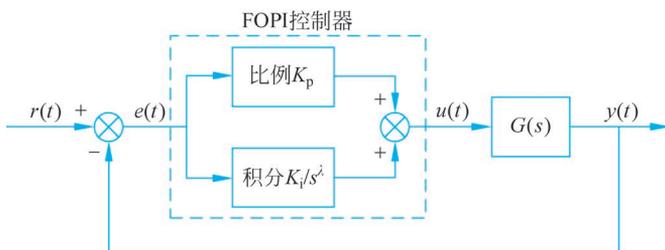


图 5-32 FOPI 控制系统结构

FOPI 控制器的传递函数为

$$D(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} \quad (0 < \lambda < 2) \quad (5-103)$$

2. 分数阶 PD^μ (FOPD) 控制器

FOPD 控制系统结构如图 5-33 所示。

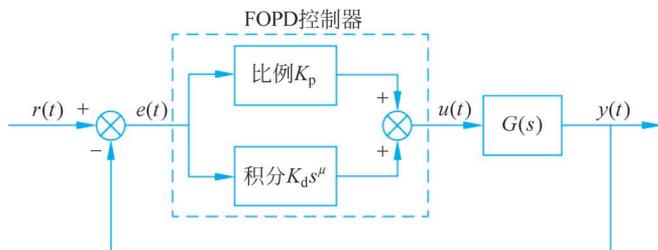


图 5-33 FOPD 控制系统结构

FOPD 控制器的传递函数为

$$D(s) = K_p + K_d s^\mu \quad (0 < \mu < 2) \quad (5-104)$$

3. FOPID 控制器

FOPID 控制系统结构如图 5-34 所示。

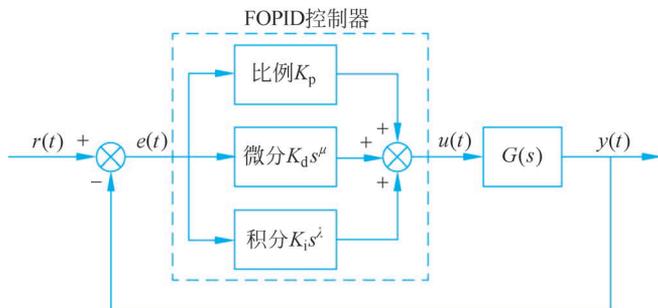


图 5-34 FOPID 控制系统结构

FOPID 控制器的传递函数为

$$D(s) = K_p + K_i s^{-\lambda} + K_d s^\mu \quad (0 < \lambda, \mu < 2) \quad (5-105)$$

5.4.3 分数阶控制器参数整定

IOPID 中积分环节的主要作用是消除系统稳态误差,改善系统的稳态性能。但是,积分环节具有 90° 的滞后相角,增加了系统的超调量和调节时间,降低了系统的动态性能。FOPID 控制器中的积分环节 $K_i s^{-\lambda}$ 中的 λ 可以任意调节,能够在改善系统稳态性能的前提下兼顾系统的稳定性和动态性能。

IOPID 中微分环节的主要作用是加快系统的动态响应速度。但是,对于一些控制系统, 90° 的超前相角可能无法使系统满足动态性能要求。在 FOPID 控制器中,可以调节微分环节 $K_d s^\mu$ 中的 μ 值来改变超前相角,使系统更容易满足性能要求。

与整数阶控制器相比,分数阶控制器中的比例系数 K_p 、积分系数 K_i 、微分系数 K_d 三个参数对系统性能的影响相同,在此不再赘述。

除了以上三个参数会影响系统的性能,调节微积分阶次也能改善系统性能。积分阶

次 λ 主要影响系统的稳态误差。选择合适的积分阶次 λ 可以减小系统的稳态误差,同时获得较好的动态性能。因此,改变积分阶次 λ 能够改变控制器的低频段特性,进而改变系统的低频段特性。但是, λ 值过大会使系统稳定性下降,控制精度降低,甚至导致系统不稳定。

微分阶次 μ 主要改善系统的动态特性,增大 μ 值可以减小系统的超调量,缩短系统调节时间。因此,改变微分阶次 μ 能够改变控制器的中高频段特性,进而改变系统的中高频段特性。但是,当 μ 值过大时,系统调节时间加大,振荡更加剧烈,严重时会导致系统不稳定。

下面介绍三种常用的 FOPID 控制器参数整定方法。

1. 主导极点法

主导极点法是一种常用的 FOPID 参数整定方法。该方法根据闭环系统性能指标 [稳态误差与理想输出终值之比 $e_{ss}/y(t)$ 、调节时间 t_s 、超调量 $\sigma\%$ 及阻尼比 ξ] 的要求,确定比例增益 K_p 和主导极点,再将 these 参数代入闭环系统的特征方程中,求出 FOPID 控制器的其余参数。值得注意的是,主导极点法只对严格二阶系统有效。

2. 基于 ITAE 优化指标法

控制系统常用的时域动态性能指标包括三种:①动态过程的性能指标,如调节时间 t_s 、超调量 $\sigma\%$ 以及上升时间 t_r 等,对于一个零初始状态的控制系统的,这些指标可以衡量其单位阶跃响应动态过程质量的优劣;②正定二次型积分泛函,这是 20 世纪 60 年代后发展起来的一种最佳性能指标,是李雅普诺夫第二方法在最优控制论中的应用;③误差积分评价指标,以控制系统瞬时误差 $e(t)$ 的函数积分为指标,主要包括绝对误差积分准则(Integral Absolute Error, IAE)及时间乘绝对误差积分准则(Integral of Time and Absolute Error, ITAE)等。在这三种指标中,ITAE 指标又以较好的实用性和选择性(系统参数变化引起指标变化越大,选择性越好)得到了广泛应用,许多方法把 ITAE 看作单输入单输出控制系统和自适应控制系统的最好性能指标之一。ITAE 性能指标是时间 t 乘以误差绝对值 $|e(t)|$ 的积分的性能指标,即

$$J_{ITAE} = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \rightarrow \min \quad (5-106)$$

定性来看,利用 ITAE 指标最优化来设计控制器参数,可以使控制系统具有快速平稳的动态性能。这是由于所有控制系统的动态过程都是能量变换和传送过程,动态过程不能瞬时完成,总是需要持续一段时间,所以初始误差是不可避免的。ITAE 最优指标是对误差 $e(t)$ 给予时间 t 的加权,正好符合这一动态过程的要求。在过渡过程之初, $t \rightarrow 0$,加权 t 对 $e(t)$ 的影响极小。随着时间 t 的增加, $e(t)$ 的权值 t 逐渐加大,这样可以抑制误差继续增大。

3. 截止频率处水平相位法

系统的相位与阻尼相互联系,相位裕度可以作为鲁棒控制器设计的一个主要规则。因而,给定系统截止频率 ω_c 、穿越频率 ω_p 、相位裕度 ϕ_m 以及幅值裕度 M_g ,就可以得到 FOPID 控制器的参数整定规则。

(1) 控制系统开环传递函数 ω_c 处相位特性为

$$\arg[D(j\omega_c)G(j\omega_c)] = -\pi + \phi_m \quad (5-107)$$

(2) 控制系统开环传递函数在 ω_c 处的幅值特性为

$$\left| D(j\omega_c)G(j\omega_c) \right|_{\text{dB}} = 0 \quad (5-108)$$

(3) 在 ω_p 处满足的条件为

$$\arg[D(j\omega_p)G(j\omega_p)] = -\pi \quad (5-109)$$

$$\left| D(j\omega_p)G(j\omega_p) \right|_{\text{dB}} = 1/M_g \quad (5-110)$$

(4) 为保证系统对增益变化的鲁棒性,需要增加增益变化的鲁棒性条件,即要求系统开环传递函数的相频特性在 ω_c 附近是平坦的。控制系统增益鲁棒性条件要求系统开环传递函数的相位满足

$$\left. \frac{d(\arg[D(j\omega)G(j\omega)])}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} = 0 \quad (5-111)$$

结合以上参数整定规则,利用试凑、联立式(5-107)~式(5-111)、图解计算等方法,可以整定 FOPID 控制器的比例系数 K_p 、积分系数 K_i 、微分系数 K_d 、积分阶次 λ 和微分阶次 μ 五个参数。由于直接求解非常麻烦,可以借助 MATLAB 优化工具箱中的 fmincon 非线性优化函数,以式(5-107)为目标函数,其余各式作为非线性等式约束条件,求解方程组,完成 FOPID 控制器的参数整定。

5.4.4 设计实例

例 5-4 考虑 4.3 节中的龙门式 XY 型直线电动机速度控制系统,以 X 轴速度控制系统为例,设计 FOPID 控制器 $D(s)$,利用双线性变换法求解 $D(z)$,设 $T=1\text{s}$,完成仿真验证。

$$G(s) = \frac{8.2653}{s(s+11.0134)} = \frac{0.75}{s(0.091s+1)} = \frac{K}{s(\tau s+1)}$$

式中,开环放大倍数 $K=0.75$; 机电时间常数 $\tau=0.091\text{s}$ 。

设 FOPID 控制器为 $D(s)$,则系统开环传递函数为 $D(s)G(s)$ 。令系统的 ω_c 和 ϕ_m 满足参数整定约束规则,则可以获得满意的动态性能。利用 Simulink 搭建仿真模型,如图 5-35 所示。

1. 参考 IOPID 控制器设计

已知被控对象传递函数模型的基础上,使用 IOPID 控制,可以使系统达到动态和稳态性能指标。采用 MATLAB 辅助设计箱,整定 PID 控制器参数,可得

$$K_p = 12.244$$

$$K_i = 0.128$$

$$K_d = 0.001$$

由此,可得 IOPID 控制器的传递函数为

$$D_{\text{IOPID}}(s) = 12.244 + \frac{0.128}{s} + 0.001s$$

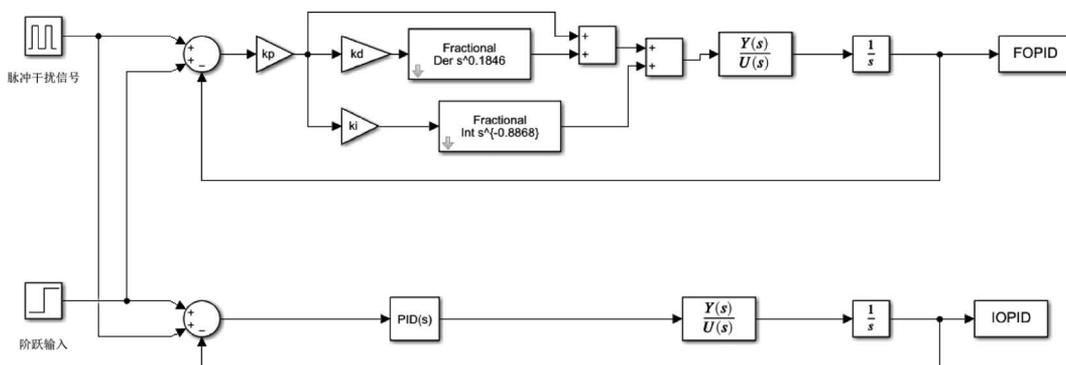


图 5-35 FOPID 控制系统仿真模型

$D_{\text{IOPID}}(s)$ 的频率特性见图 5-36。可以看出, IOPID 控制器 $D_{\text{IOPID}}(s)$ 的剪切频率 $\omega_c = 7.56 \text{ rad/s}$, 相角裕度 $\phi_m = 55.6^\circ$ 。

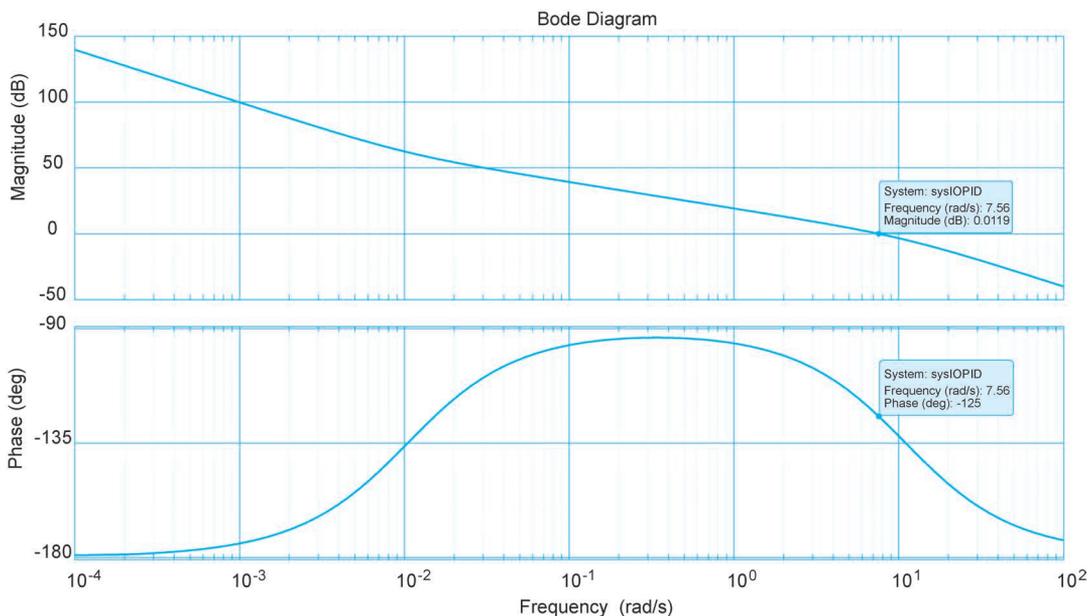


图 5-36 IOPID 控制器的频率特性

2. FOPID 控制器设计

令 $s = j\omega$, 可得被控对象 $G(s)$ 频域表达式、相角及幅值表达式为

$$G(j\omega) = \frac{-K}{\tau^2 \omega^2 + 1} + j \frac{-K}{\omega(\tau^2 \omega^2 + 1)}$$

$$\arg [G(j\omega)] = \arctan\left(\frac{1}{\tau\omega}\right)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}}$$

设计 FOPID 控制器的传递函数为

$$D(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu$$

令 $s = j\omega$, 可得

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= K_p + \frac{K_i}{(j\omega)^\lambda} + K_d (j\omega)^\mu \\ &= \left(K_p + K_i \omega^{-\lambda} \cos \frac{\lambda\pi}{2} + K_d \omega^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2} \right) + j \left(K_d \omega^\mu \sin \frac{\mu\pi}{2} - K_i \omega^{-\lambda} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

FOPID 控制器相角和幅值分别为

$$\begin{aligned} \arg[D(j\omega)] &= \arctan \frac{K_d \omega^\mu \sin \frac{\mu\pi}{2} - K_i \omega^{-\lambda} \sin \frac{\lambda\pi}{2}}{K_p + K_i \omega^{-\lambda} \cos \frac{\lambda\pi}{2} + K_d \omega^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2}} \\ |D(j\omega)| &= \sqrt{\left(K_p + K_i \omega^{-\lambda} \cos \frac{\lambda\pi}{2} + K_d \omega^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2} \right)^2 + \left(K_d \omega^\mu \sin \frac{\mu\pi}{2} - K_i \omega^{-\lambda} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \right)^2} \end{aligned}$$

系统开环频率特性为

$$D(j\omega)G(j\omega)$$

系统相角表达式为

$$\begin{aligned} \arg[D(j\omega)G(j\omega)] &= \arg[D(j\omega)] + \arg[G(j\omega)] \\ &= \arctan \frac{K_d \omega^\mu \sin \frac{\mu\pi}{2} - K_i \omega^{-\lambda} \sin \frac{\lambda\pi}{2}}{K_p + K_i \omega^{-\lambda} \cos \frac{\lambda\pi}{2} + K_d \omega^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2}} + \arctan\left(\frac{1}{\tau\omega}\right) \end{aligned}$$

系统幅值表达式为

$$\begin{aligned} |D(j\omega)G(j\omega)| &= |D(j\omega)| |G(j\omega)| = \\ &= \sqrt{\left(K_p + K_i \omega^{-\lambda} \cos \frac{\lambda\pi}{2} + K_d \omega^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2} \right)^2 + \left(K_d \omega^\mu \sin \frac{\mu\pi}{2} - K_i \omega^{-\lambda} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \right)^2} \frac{K}{\omega \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \end{aligned}$$

3. FOPID 控制器的参数整定

当控制系统的角频率 ω 等于剪切频率 ω_c 时, 根据控制器设计参数整定规则, FOPID 控制器中的参数应满足以下方程组:

$$\begin{cases} |D(j\omega_c)G(j\omega_c)| = |D(j\omega_c)| |G(j\omega_c)| = 1 \\ \arg[D(j\omega_c)G(j\omega_c)] = \arg[D(j\omega_c)] + \arg[G(j\omega_c)] = -\pi + \phi_m \\ \left. \frac{d(\arg[D(j\omega_c)G(j\omega)])}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} = 0 \end{cases}$$

将 IOPID 控制器整定的 ω_c 和 ϕ_m 代入上述方程组, 为了简化方程组的数值计算, 设初始值 $K_p = 10$, 利用试凑法, 最后解得

$$\begin{cases} \lambda = 0.8868 \\ \mu = 0.1846 \\ K_p = 9.2134 \\ K_i = 0.0046 \\ K_d = 0.0034 \end{cases}$$

FOPID 控制器 $D(s)$ 为

$$D(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu = 9.2134 + \frac{0.0046}{s^{0.8868}} + 0.0034 s^{0.1846}$$

利用双线性变换法,可得

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = 9.2134 + 0.0046 \left(2 \frac{z-1}{z+1}\right)^{-0.8868} + 0.0034 \left(2 \frac{z-1}{z+1}\right)^{0.1846}$$

4. 仿真分析

FOPID 和 IOPID 控制器作用下的闭环系统阶跃响应如图 5-37 所示。可以看到,相比 IOPID 控制器,FOPID 控制器作用下的直线电动机速度控制系统,动态性能更好,稳态误差更小。

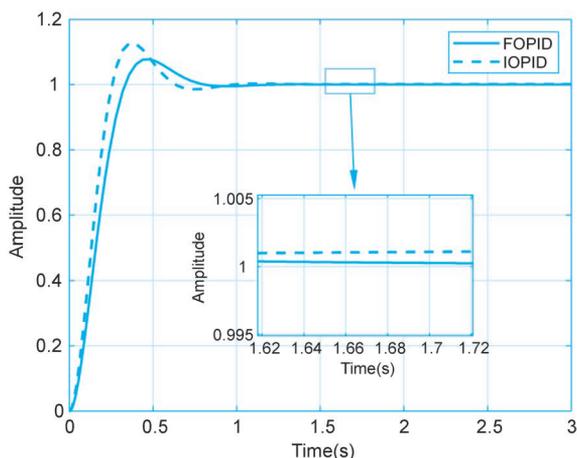


图 5-37 IOPID 与 FOPID 控制器作用下的直线电动机速度控制系统阶跃响应

为了验证 FOPID 控制器作用下的闭环系统鲁棒性,改变 FOPID 中 K_p 值,令 $K_{p1} = 1.5K_p$, $K_{p2} = 0.5K_p$,其他控制器参数不变,闭环系统的阶跃响应如图 5-38 所示。仿真结果表明,FOPID 控制器具有良好的增益鲁棒性。

为了进一步验证 FOPID 控制器作用下的速度控制系统抗干扰能力,在动态调节过程结束后,即在 $t=1s$ 处加入一个幅值为 1、宽度为 0.1s 的脉冲干扰,系统响应如图 5-39 所示。可以看出,相比 IOPID 控制器,FOPID 控制器作用下的速度控制系统具有更强的抗干扰能力。

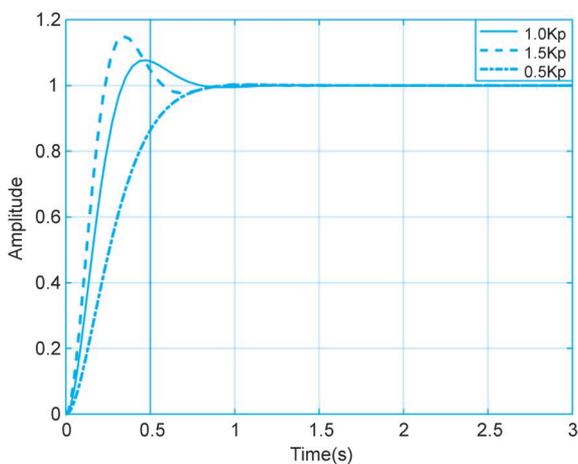
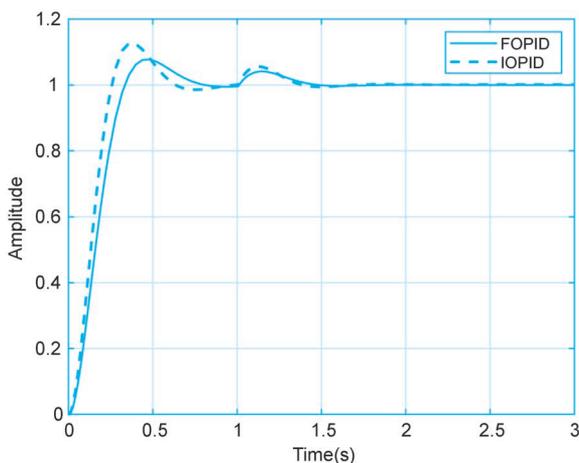
图 5-38 不同 K_p 下的 FOPID 控制系统阶跃响应图

图 5-39 脉冲干扰作用下的速度控制系统阶跃响应

5.5 数字 PID 控制器的参数整定

PID 控制器的参数整定是控制系统设计的核心内容。PID 控制器参数整定就是设置和调整控制器的比例系数 K_p 、积分时间常数 T_i 、微分时间常数 T_d 和采样周期 T , 使控制系统的过渡过程达到满意的品质。一般情况下, 本着“稳、准、快”的控制原则, 设定 PID 控制器四个参数的初始值, 同时考虑对象特性的多样性及控制指标的不同进行整定与优化, 直到获得满意的控制效果。由于计算机控制系统的采样周期 T 很小, 数字 PID 算式与模拟 PID 算式十分相似, 因而其参数整定方法也相似。下面介绍几种常用的参数整定方法。

5.5.1 PID 参数对系统性能的影响

数字 PID 中各环节参数对系统性能的影响归纳如下。

1. 比例环节

比例系数 K_p 对系统静态性能的影响：在系统稳定的前提下，加大 K_p 可以减小稳态误差，提高系统精度，但不能消除稳态误差。

比例系数 K_p 对系统动态性能的影响：加大 K_p ，系统响应速度加快； K_p 偏大，系统振荡次数增加，调节时间变长； K_p 过大，将导致系统不稳定； K_p 偏小，系统的响应速度变慢。 K_p 的选择通常以输出响应产生 4 : 1 衰减过程为宜。

2. 积分环节

积分时间常数 T_i 对系统静态性能的影响：积分控制有助于消除系统稳态误差，提高系统的控制精度； T_i 越大，积分作用越弱，反之越强； T_i 太大，积分作用太弱，无法消除静态误差。

积分时间常数 T_i 对系统动态性能的影响：积分控制通常影响系统的稳定性； T_i 太小，系统可能不稳定，且振荡次数较多； T_i 太大，对系统动态性能的影响太小；当 T_i 较适合时，系统的过渡过程特性比较理想。

3. 微分环节

微分环节对系统静态性能的影响：微分环节的引入，可以在偏差出现或变化瞬间，按偏差变化的趋势进行控制，有助于增加系统的稳定性。

微分时间常数 T_d 对系统动态性能的影响：选择合适 T_d 可以改善系统的动态性能，如缩短调节时间，减小超调量，允许适当加大比例控制；但 T_d 偏大或偏小都会适得其反；微分作用有可能放大系统的噪声，降低系统的抗干扰能力。

5.5.2 试凑法整定 PID 参数

试凑法是一种凭借经验整定参数的方法，通过闭环实验，观察系统的响应曲线，根据各控制参数对系统响应的大致影响，反复试凑参数，以达到满意的响应，从而确定 PID 控制参数。用试凑法整定 PID 参数，试凑不是盲目的，而是在熟悉 PID 各个参数变化对系统性能影响的前提下，在控制理论的指导下进行的。在闭环控制系统中，基于初步确定的采样周期，一般按照 K_p 、 T_i 、 T_d 的顺序进行调节，一边调节参数，一边观察过程，直到满足要求为止。试凑法的整定步骤如下：

(1) 整定比例参数，将比例系数 K_p 由小变大，观察相应的系统响应，直至得到反应快、超调小的响应曲线。若系统的静态误差已经小到允许范围，达到了性能指标，则只需要比例控制器，且该比例系数就是最优比例系数。

(2) 若在比例控制的基础上稳态误差无法满足设计要求，则应加入积分环节构成 PI 控制器。在整定时，首先设置积分时间常数 T_i 为一较大值，并将第一步整定的 K_p 适当减小(如缩小为原值的 0.8)，然后减小 T_i ，使系统在保持良好动态的情况下，消除静态误差。在此过程中，需要根据对响应曲线的满意程度反复改变 K_p 和 T_i ，以期得到满意的响应过程。

(3) 若使用PI控制器消除了静态误差,但系统的动态性能仍然不满足设计要求,主要是超调量过大或系统响应速度不够快,则可以加入微分环节,构成PID控制器。在整定时, T_d 从零逐渐增大,同时相应地改变比例系数和积分时间常数,不断试凑,直至得到满意的控制效果。

应该指出,“满意”的调节效果是依据不同的被控对象和性能指标而异的。此外,PID控制器的参数对控制效果的影响不敏感,因而整定过程中的参数选择并不唯一。PID控制器的三部分相互配合,只要合理选择PID调节器的参数,就可以迅速、准确、平稳地消除偏差,达到良好的控制效果。事实上,PID控制器的三个参数具有互相补偿的功能,即某一个参数的减小可由其他两个参数增大或减小来补偿,因而不同的整定参数完全有可能获得相同或相近的控制效果。从工程应用的角度看,只要系统的性能已经达到了设计指标,就选取相应的值作为控制器参数。

需要注意的是,上述参数整定步骤是针对 K_p 、 T_i 和 T_d ,可以根据式(5-3)中参数的对应关系 $K_i = K_p \frac{T}{T_i}$, $K_d = K_p \frac{T_d}{T}$,将上述整定过程转化为对参数 K_p 、 K_i 和 K_d 的整定。

5.5.3 经验法整定PID参数

用试凑法整定PID控制器参数,需要通过反复实验来确定有效的控制参数,试凑次数较多,整定时间较长。为了减少试凑次数,可以利用人们在选择PID控制参数时已经获得的经验,根据性能要求,执行若干基于实际系统的动态实验,获得被控对象的某些基本动态特性参数,按经验近似公式计算出PID控制参数,并在系统投入运行后,根据系统控制效果再做适当调整,这种方法称为经验法。经验法源自经典的频率法,简单易行,在工程中广泛采用。下面介绍几种典型的经验法。

1. 扩充临界比例度法

扩充临界比例度法是基于系统临界振荡参数的闭环整定方法,是对整定连续系统PID控制器参数临界比例度法的推广,适用于具有自平衡特性的受控对象,不需要被控对象的准确特性。

调节器的输入偏差信号变化的相对值与输出信号变化的相对值之比的百分数称为比例度,如图5-40所示。比例度 δ 与放大倍数 K_p 成反比,即 $\delta = 1/K_p$ 。例如,对于一个调节系统,若比例度 $\delta = 50\%$,则调节器的放大倍数 $K_p = 2$,表明被调量产生50%的偏差时,调节阀能从全开到全关(或全关到全开)满量程变化。

控制系统在外界干扰作用后,无法恢复到稳定的平衡状态,而是出现一种既不衰减也不发散的等幅振荡过程,这样的过渡过程称为临界振荡过程,如图5-41所示。在临界比例度法整定中,首先需要得到临界参数,即在临界状态下被控量 y 来回振荡一次所用的时间,称为临界振荡周期 T_K ,被调参数处于临界振荡状态时的比例度称为临界比例度 δ_K ,相应的比例系数称为临界比例系数 K_K 。

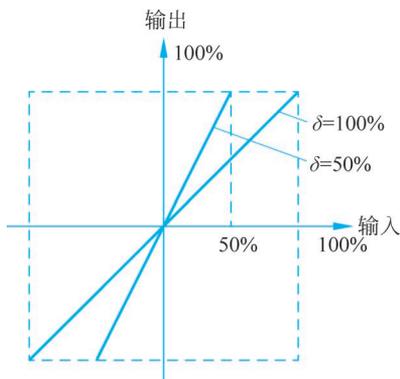


图 5-40 比例度

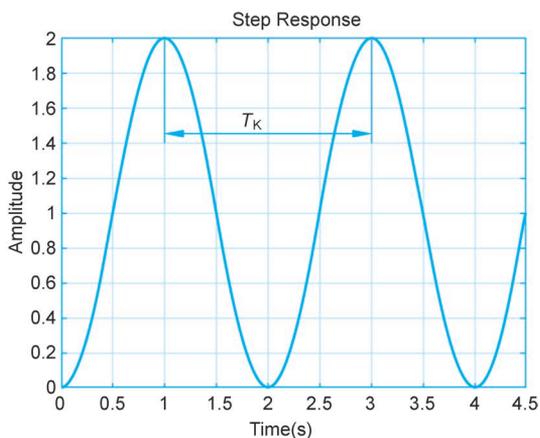


图 5-41 等幅振荡曲线

模拟 PID 控制器的临界比例度法：①取 $T_i = \infty, T_d = 0$, 比例度取较大值, 系统按纯比例控制状态运行稳定后, 逐步减小比例度, 在外界输入作用(给定或干扰的变化)下, 观察系统输出量的变化情况, 直到系统出现近似等幅振荡为止, 即系统达到临界振荡状态, 记录此时的临界比例度 δ_K 和振荡周期 T_K ; ②根据 δ_K 和 T_K , 按表 5-1 中所列的经验算式, 分别求出三种情况下的控制器最佳参数值, 将计算所得的参数投入在线运行, 根据效果进一步调节参数, 直到满意为止。

表 5-1 临界比例度法整定模拟 PID 参数

调节规律	调节参数		
	比例度 $\delta/\%$	积分时间 T_i	微分时间 T_d
P	$2\delta_K$	∞	0
PI	$2.2\delta_K$	$0.85T_K$	0
PID	$1.7\delta_K$	$0.5T_K$	$0.125T_K$

把整定模拟控制器的临界比例度法扩充到数字控制系统中, 整定数字控制系统中的四个参数 K_p, T_i, T_d 和 T , 具体步骤如下:

(1) 选择一个合适的采样周期 T 。通常可以按照采样定理和工程实践经验来选择采样周期, 如果被控对象包括纯滞后, 那么可以选择对象纯滞后时间 τ 的 $1/10$ 为采样周期, 也可以更小。

(2) 取 $T_i = \infty, T_d = 0$, 调节器只投入比例进行控制, 形成闭环, 给定输入为单位阶跃。逐渐减小比例度 δ (增大比例系数 K_p), 使系统出现临界振荡, 记录此时临界比例度 δ_K 和临界振荡周期 T_K 。

(3) 选择控制度 Q 。控制度定义为数字控制系统与模拟控制系统所对应过渡过程的误差平方的积分之比, 即

$$Q = \frac{\left[\int_0^{\infty} e^2(t) dt \right] \Big|_{\text{数字控制}}}{\left[\int_0^{\infty} e^2(t) dt \right] \Big|_{\text{模拟控制}}} \quad (5-112)$$

控制度表明数字控制相对模拟控制的效果,由于数字控制系统是断续控制,而模拟控制系统是连续控制,所以对于同一个系统采用相同的控制律,数字控制系统的品质总是低于模拟控制系统的品质,控制度总是大于1。控制度越大,说明相应的数字控制系统的品质越差。工程经验表明,当控制度 $Q=1.05$ 时,数字控制与模拟控制的效果相当;当控制度 $Q=2$ 时,表示数字控制比模拟控制效果差1倍。从提高数字PID控制系统性能出发,控制度可以选得小一些;但就系统稳定性而言,控制度应该选得稍大一些。另外,在实际应用中,不需要计算两个误差平方积分,工程经验已经给出整定参数与控制度的关系。

(4) 根据选定的控制度,按表5-2计算采样周期 T 和PID控制器的参数。

(5) 按照求得的整定参数,投入在线运行,观察控制效果,如果性能不满意,就可根据经验进一步调整参数,直到获得满意的控制效果。

表5-2 扩充临界比例度法整定PID参数

控制度	控制规律	T/T_K	$K_p K_K$	T_i/T_K	T_d/T_K
1.05	PI	0.03	0.53	0.88	—
	PID	0.14	0.63	0.49	0.14
1.20	PI	0.05	0.49	0.91	—
	PID	0.043	0.47	0.47	0.16
1.50	PI	0.14	0.42	0.99	—
	PID	0.09	0.34	0.43	0.20
2.00	PI	0.22	0.36	1.05	—
	PID	0.16	0.27	0.40	0.22

2. 扩充响应曲线法

在模拟控制系统中可以用响应曲线法代替临界比例度法。同样,可以将整定模拟PID参数的响应曲线整定法推广到数字控制系统中。用扩充响应曲线法整定采样周期 T 和PID控制器参数 K_p 、 T_i 和 T_d 的步骤如下:

(1) 断开数字PID控制器,使系统处于手动操作状态,将被控量调节到给定值附近,并使其稳定下来。然后,突然改变给定值,给被控对象一个单位阶跃输入信号,记录仪表记下被控量在阶跃输入下的单位阶跃响应曲线,如图5-42所示。

(2) 在被控对象响应曲线的拐点处作一切线,求出纯滞后时间 τ 、时间常数 T_m 以及它们的比值 T_m/τ 。

(3) 根据选定的控制度,按表5-3计算采样周期 T 和PID参数。

(4) 按照求得的整定参数,投入系统运行,观察控制效果,按照经验再适当调整参数,直到获得满意的控制效果。

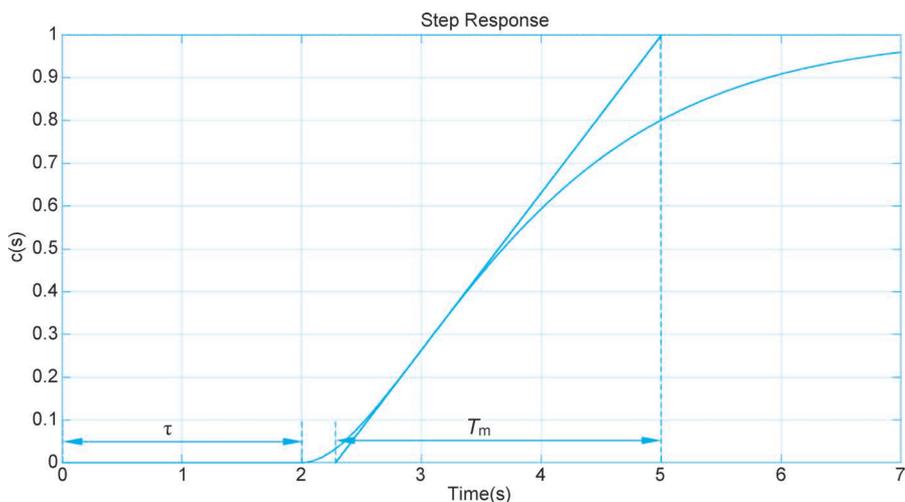


图 5-42 对象阶跃响应曲线

表 5-3 扩充响应曲线法整定 PID 参数表

控制度	控制规律	T/τ	$K_p/(T_m/\tau)$	T_i/τ	T_d/τ
1.05	PI	0.10	0.84	3.40	—
	PID	0.05	1.15	2.00	0.45
1.20	PI	0.20	0.78	3.60	—
	PID	0.16	1.00	1.90	0.55
1.50	PI	0.50	0.68	3.90	—
	PID	0.34	0.85	1.62	0.65
2.00	PI	0.80	0.57	4.20	—
	PID	0.60	0.60	1.50	0.82

3. 归一参数整定法

为了减少 PID 在线整定参数的数目, P. D. Roberts 在 1974 年提出了一种只需要整定一个参数的简化扩充临界比例度法(又称 PID 归一参数整定法), 这种整定法简单易行, 工作量小。该方法以扩充临界比例度法为基础, 人为规定以下约束条件:

$$\begin{cases} T = 0.1T_K \\ T_i = 0.5T_K \\ T_d = 0.125T_K \end{cases} \quad (5-113)$$

式中, T_K 为纯比例控制时的临界振荡周期。

数字 PID 位置递推算法(式(5-10))可以进一步推导如下:

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k-1) + K_0 e(k) + K_1 e(k-1) + K_2 e(k-2) \\ &= u(k-1) + K_p \left[1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} \right] e(k) - K_p \left[1 + 2 \frac{T_d}{T} \right] e(k-1) + K_p \frac{T_d}{T} e(k-2) \\ &= u(k-1) + K_p \left\{ \left[1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} \right] e(k) - \left[1 + 2 \frac{T_d}{T} \right] e(k-1) + \frac{T_d}{T} e(k-2) \right\} \end{aligned} \quad (5-114)$$

将式(5-113)代入上式,可得

$$u(k) = u(k-1) + K_p [2.45e(k) - 3.5e(k-1) + 1.25e(k-2)] \quad (5-115)$$

这样,四个参数的整定就可以简化为只有一个参数 K_p 的整定,大大简化了整定过程。在线调整 K_p ,观察控制效果,直到满意为止。

5.5.4 基于 PID Tuner 的控制器参数整定

PID Tuner 是 MATLAB 软件的一个应用程序,提供了一个交互性工具和响应曲线来设计 PID 控制系统,能够方便地整定 PID 控制器参数。PID Tuner 将 PID 模块的输入端和模型输出端之间的所有模块视为一个被控装置,因此,被控装置为控制回路中的所有块体,包括控制器和被控对象,如图 5-43 所示。对于被控装置中的非线性模块,PID Tuner 用线性化模型来逼近。

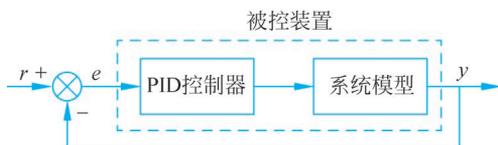


图 5-43 PID Tuner 的被控装置

在默认情况下,PID Tuner 启动后,自动获取被控装置参数,基于被控装置模型,自动选择穿越频率和相位裕度(通常约为 60°),整定出一组 PID 控制器参数,并给出阶跃响应曲线、波特图以及对应的时频域参数。

设计者改变被控装置的时域性能指标(包括响应时间和过渡特性)或频域性能指标(包括带宽和相位裕度)时,PID Tuner 自动整定 PID 参数,更新阶跃响应曲线和波特图。下面举例说明如何利用 PID Tuner 来整定数字控制器的参数。

例 5-5 以 4.3 节中的龙门式 XY 型直线电动机位置控制系统的 X 轴为例,利用 PID Tuner 整定控制器参数,设采样周期 $T=0.005s$ 。

解: 由 4.3 节可知,X 轴被控对象模型为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8.2653}{s(s + 11.0134)}$$

控制器 $D(s)=1$ 作用下的单位阶跃响应曲线见 4.3 节。下面利用 PID Tuner 来整定 PID 控制器,提高闭环控制系统的性能。

(1) 搭建被控装置。

使用 Simulink 搭建被控装置,如图 5-44 所示。

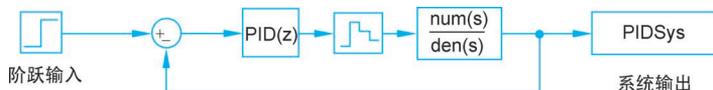


图 5-44 被控装置模块图

其中, $\text{num}(s)=[8.2653]$, $\text{den}(s)=[1 \ 11.0134 \ 0]$ 。

(2) 启动 PID Tuner。

双击 PID(z) 模块, 打开设置 PID 控制器设置界面, 如图 5-45 所示。

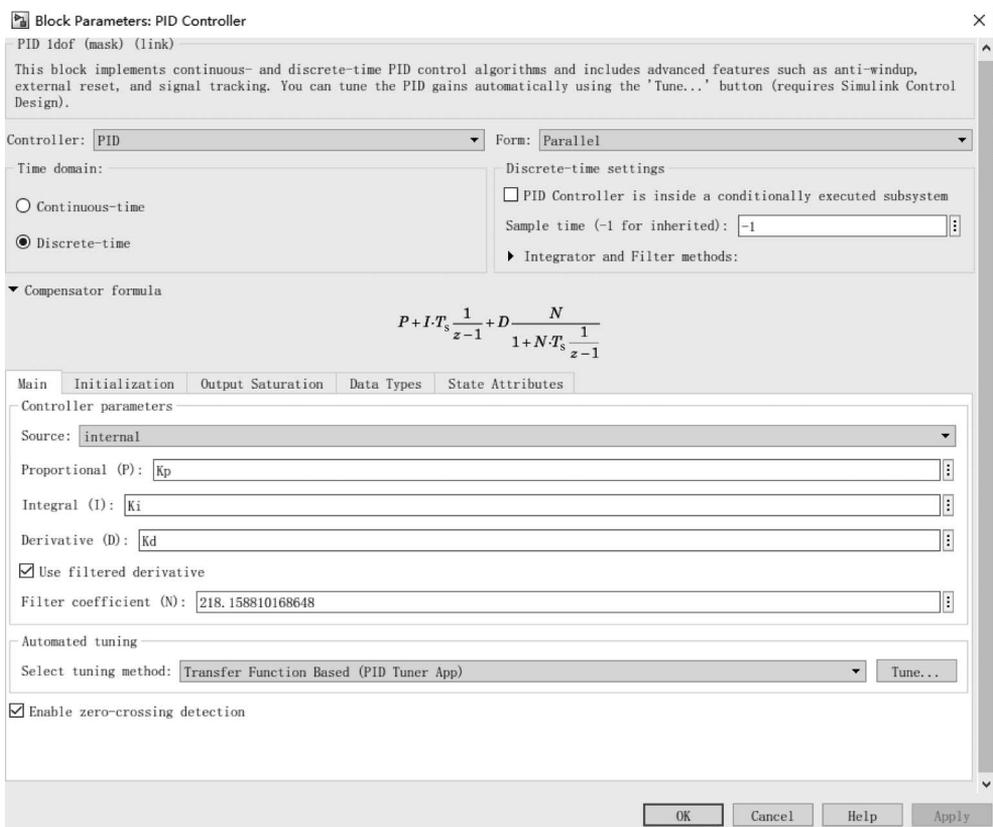
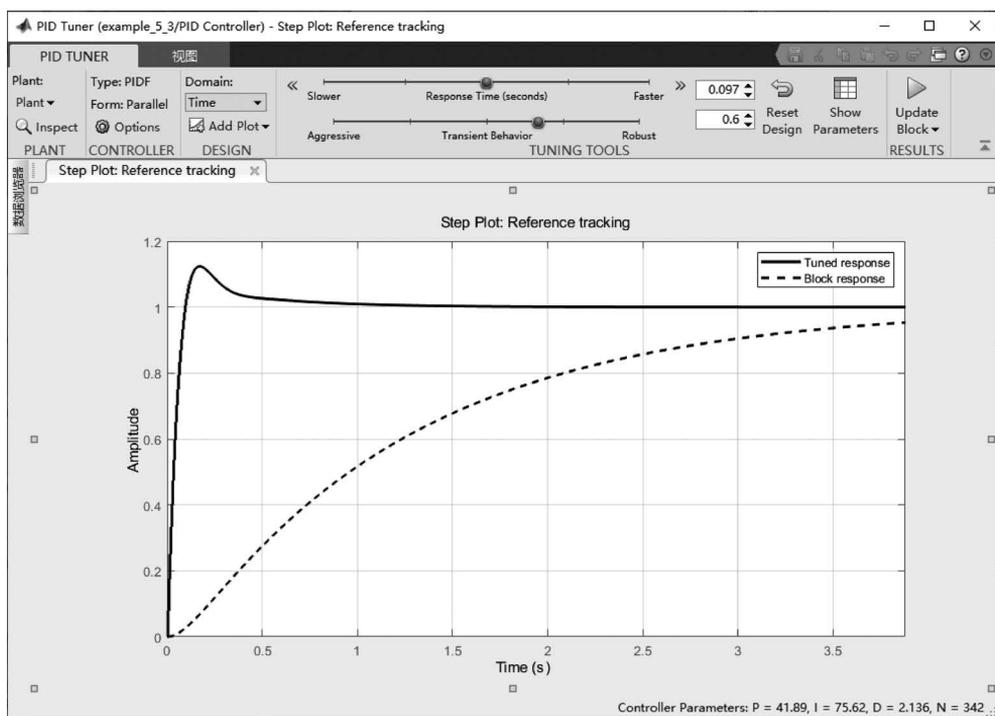


图 5-45 PID(z) 设置界面

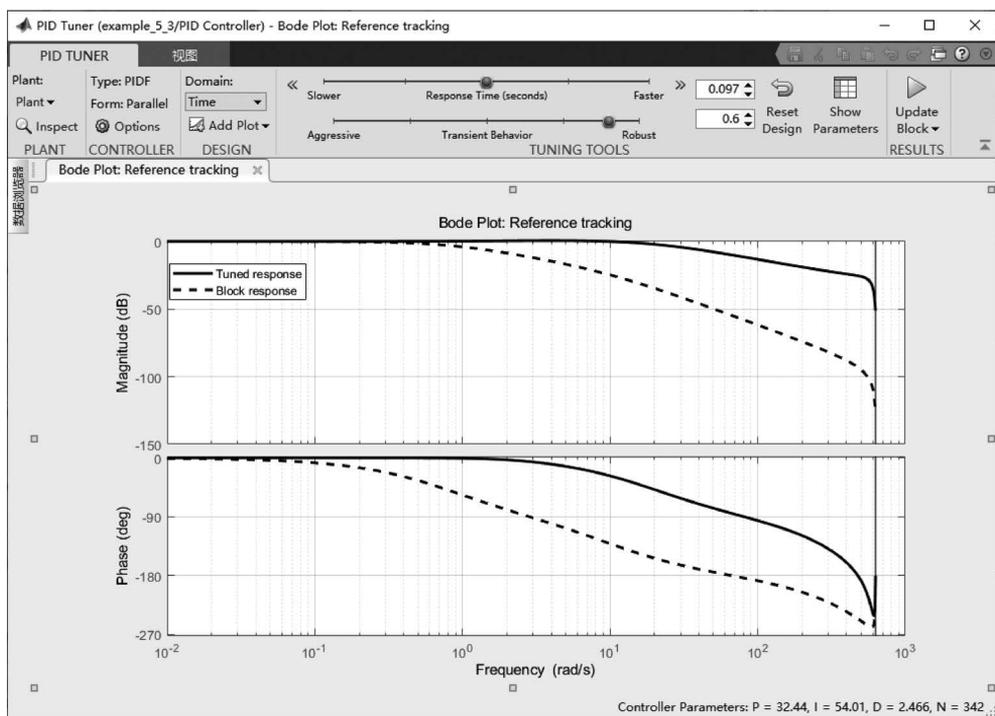
单击 Tune, 启动 PID Tuner。PID Tuner 自动给出初始设计的 PID 控制器参数, 绘制出阶跃响应曲线, 如图 5-46(a) 所示。在图中右击, 在 Plot Type 中选择 Bode, 绘制出频率响应曲线, 如图 5-46(b) 所示。在 PID Tuner 界面中单击 Show Parameters, 打开 Control Parameters 控制参数表格, 获取 PID 控制器整定参数以及系统性能指标, 如图 5-47 所示。对比 4.3 节, 可以看出, 基于初始化整定的 PID 参数, 闭环系统的时域和频率特性均不满足要求。

(3) 利用 PID Tuner 整定控制器参数。

在 PID Tuner 设计界面, 分别选择 Domain 栏中的时域 Time 或频域 Frequency 选项, 调整时域响应时间 Response Time 和过渡过程 Transient Behavior, 如图 5-48(a) 所示, 或者调整频域带宽 Bandwidth 和相位裕量 Phaze Margin, 如图 5-48(b) 所示。调整时域或频域性能指标后, PID Tuner 自动更新阶跃响应和频域响应曲线, 如图 5-49(a) 和 (b) 所示, 并给出整定后的 PID 控制器参数及闭环系统的性能指标, 如图 5-49(c) 所示。在整定过程中, 反复设置性能指标, 观察阶跃响应和频域响应, 直至得到满意的 PID 控制器参数。



(a) 单位阶跃响应

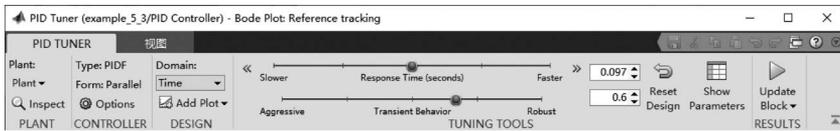


(b) 频域响应

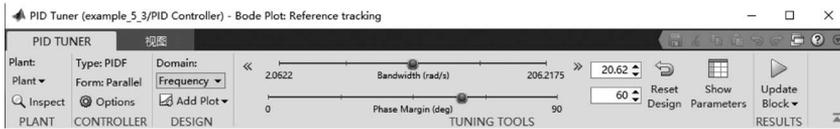
图 5-46 初始设计的 PID 控制器与 $D(z)=1$ 作用下的系统响应

Controller Parameters		
	Tuned	Block
P	41.8902	1
I	75.6243	0
D	2.1361	0
N	342.0038	218.1588
Performance and Robustness		
	Tuned	Block
Rise time	0.065 seconds	2.72 seconds
Settling time	0.645 seconds	4.92 seconds
Overshoot	12.4 %	0 %
Peak	1.12	0.999
Gain margin	27.1 dB @ 475 rad/s	54.6 dB @ 66.1 rad/s
Phase margin	69 deg @ 20.6 rad/s	86 deg @ 0.749 rad/s
Closed-loop stability	Stable	Stable

图 5-47 初始设计的 PID 控制器参数及其性能指标

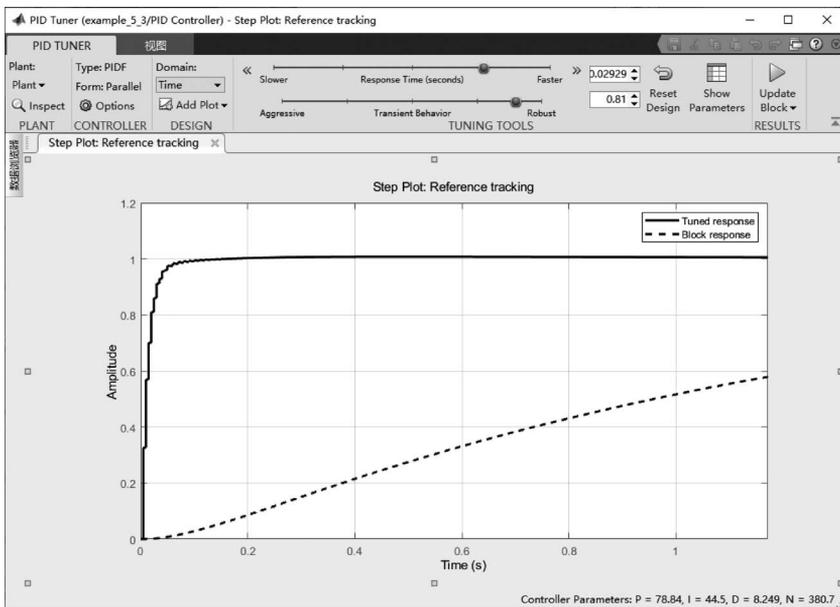


(a) 设置时域性能指标



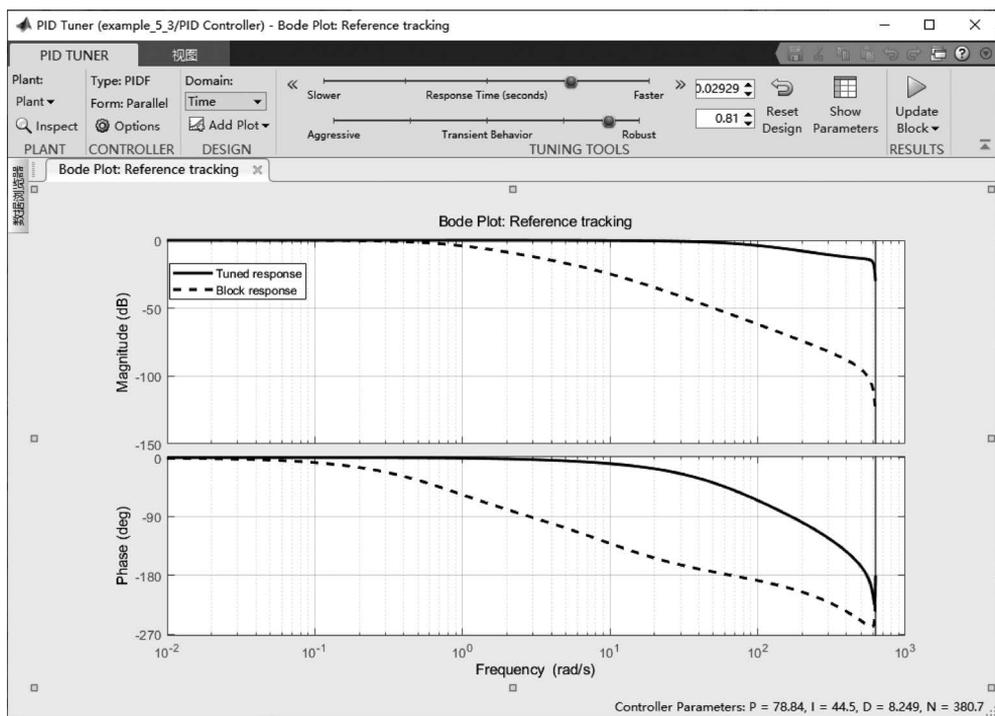
(b) 设置频域性能指标

图 5-48 设置性能指标



(a) 单位阶跃响应

图 5-49 调整性能指标后的系统响应及系统性能指标



(b) 频率响应

Controller Parameters		
	Tuned	Block
P	78.8418	1
I	44.5012	0
D	8.2489	0
N	380.6775	218.1588
Performance and Robustness		
	Tuned	Block
Rise time	0.025 seconds	2.72 seconds
Settling time	0.06 seconds	4.92 seconds
Overshoot	0.782 %	0 %
Peak	1.01	0.999
Gain margin	15.4 dB @ 548 rad/s	54.6 dB @ 66.1 rad/s
Phase margin	81 deg @ 68.3 rad/s	86 deg @ 0.749 rad/s
Closed-loop stability	Stable	Stable

(c) 整定后的PID参数及系统性能指标

图 5-49 (续)

5.6 PID 应用实例

考虑 4.3 节中的龙门式 XY 型直线电动机位置控制系统,以 X 轴位置控制系统为例,设计数字 PID 控制器,并观察控制器参数变化对控制性能的影响。

本节选用 ode45(四阶五级 Runge-Kutta 算法)求解微分方程,令 $y_1 = y, y_2 = \dot{y}$, 则 X 轴位置控制系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -11.0134 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8.2635 \end{bmatrix} u$$

本节将基于上述微分方程组进行仿真分析。ode45 的原理及 MATLAB 实现, 详见相关参考文献, 不再赘述。下面选用不同的控制策略, 对比分析各种 PID 控制器作用下的闭环系统性能。

1. 不同比例系数下的 P 控制效果分析

选择不同的比例系数 K_p , 构成不同的 P 控制器, 闭环数字控制系统的阶跃响应如图 5-50 所示, 比例系数及性能指标如表 5-4 所示。可以看出, 随着比例系数 K_p 的增大, 超调量 $\sigma\%$ 增大, 调节时间 t_s 减小, 响应速度变快, 振荡加剧。另外, 当比例系数 K_p 增大至 20 时, 由于振荡加剧, 调节时间 t_s 反而增大, 系统的稳定性变差。

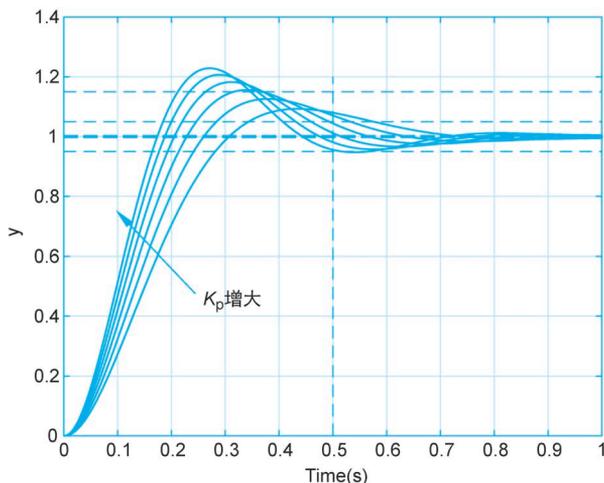


图 5-50 不同比例系数控制下的系统阶跃响应曲线

表 5-4 不同比例系数控制下的系统阶跃性能指标

K_p	超调量 $\sigma\%$	调节时间 t_s/s
10	9.275	0.577
12	12.602	0.534
14	15.586	0.494
16	18.263	0.460
18	20.678	0.432
20	22.868	0.566

2. 不同积分系数下的PI控制效果分析

固定比例系数 $K_p = 16$, 选择积分系数 K_i 为 $0.002, 0.004, \dots, 0.012$, 构成不同的PI控制器, 闭环数字控制系统的阶跃响应如图 5-51 所示。可以看出, 随着积分系数 K_i 的增大, 闭环控制系统的稳态误差逐渐减小。但是, 随着积分系数的增大, 闭环系统的稳定性降低, 超调量增大, 动态响应变慢。

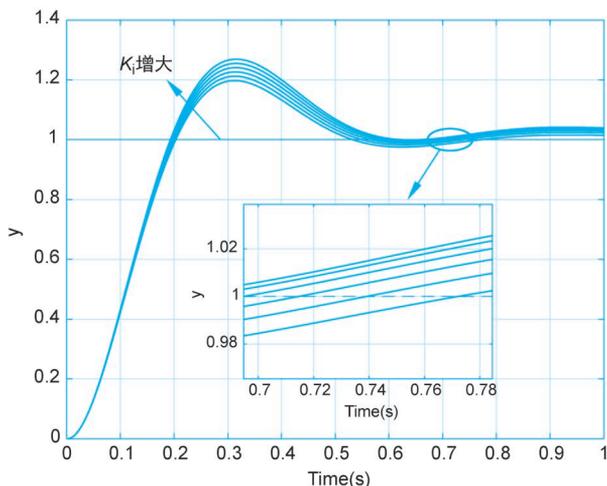


图 5-51 不同积分系数控制下的系统阶跃响应曲线

3. 不同微分系数下的PD控制效果分析

固定比例系数 $K_p = 12$, 选择微分系数 K_d 为 $0.1, 0.2, \dots, 0.6$, 构成不同的PD控制器, 闭环数字控制系统的阶跃响应如图 5-52 所示。可以看出, 在微分系数 K_d 选择合适的前提下, 随着 K_d 的增大, 超调量减小, 振荡减弱, 调节时间变短, 系统的动态性能变好。

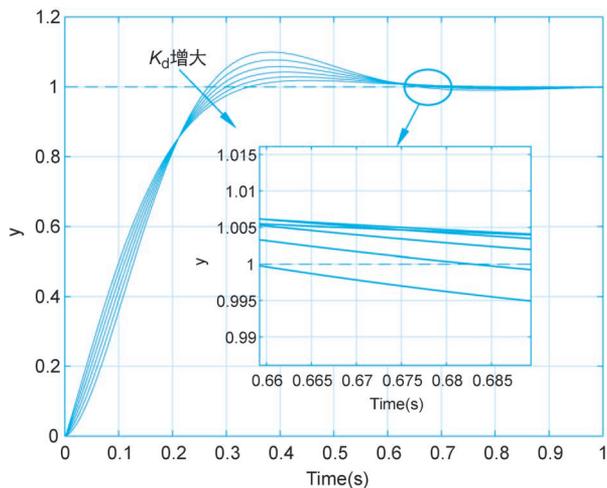


图 5-52 不同微分系数控制下的系统阶跃响应曲线

4. PID 控制效果分析

综合以上分析,选择合适的 PID 控制器参数, $K_p = 16$, $K_i = 0.002$, $K_d = 0.20$, 构成 PID 控制器, 闭环数字控制系统的阶跃响应如图 5-53 所示。可以看出, 阶跃响应实现了快速、平稳以及准确的目标, 取得了良好的控制效果。

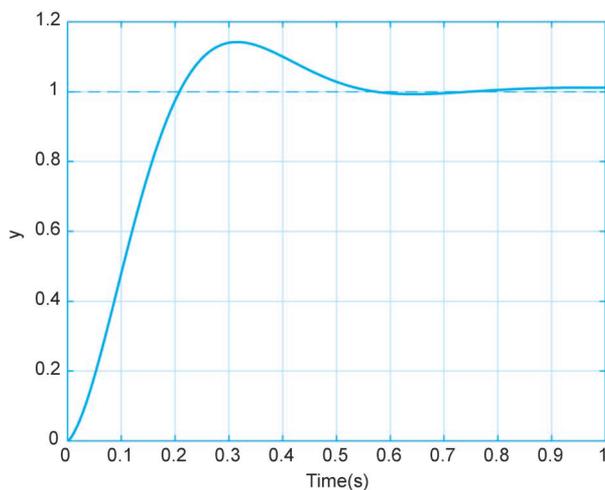


图 5-53 PID 控制下的系统阶跃响应曲线

5. 不同比例系数下带前馈的 PD 控制效果分析

为了进一步提高闭环系统的跟踪性能, 在 PD 控制器的基础上, 增加了前馈补偿环节, $K_p = 10, 12, \dots, 20$, $K_d = 0.20$, 构成带前馈的 PD 控制器, 给定信号 $r(k) = \sin(\pi k T)$, 闭环数字控制系统的输出 $y(k)$ 如图 5-54 所示, 跟踪误差曲线如图 5-55 所示。可以看出, 前馈补偿提高了系统的动态跟踪性能, 取得了良好的跟踪效果。但是, 随着 K_p 的增大, 跟踪误差也略有增大。

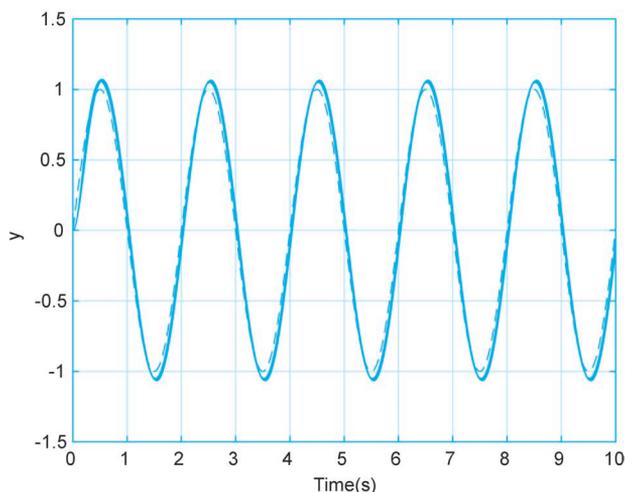


图 5-54 带前馈的 PD 控制下的正弦信号跟踪曲线

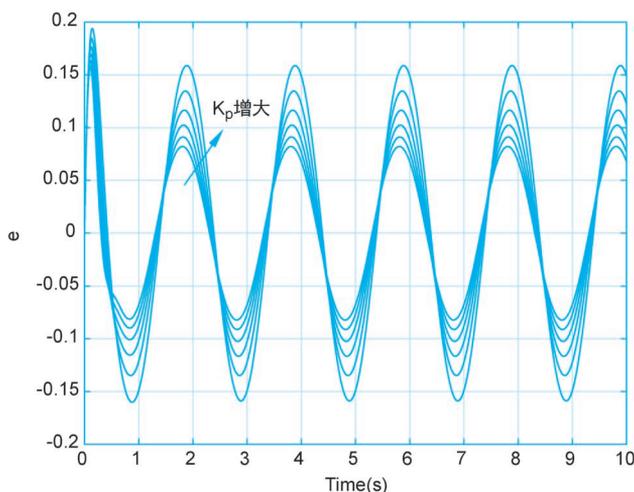


图 5-55 带前馈的 PD 控制下的正弦信号动态跟踪误差曲线

5.7

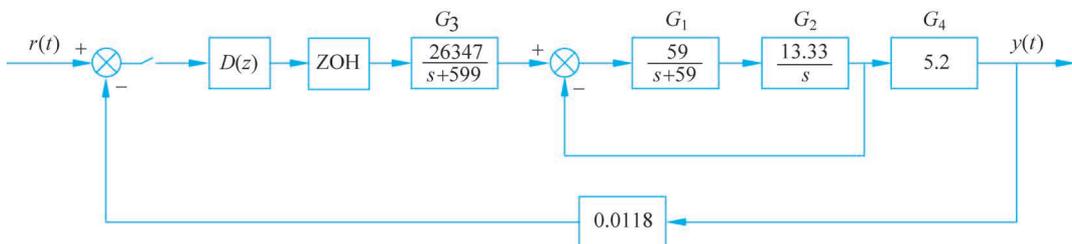
本章小结

数字 PID 控制器是一种最实用的、应用最广泛的控制器,本章介绍了位置式和增量式两种基本 PID 控制算法,在此基础上介绍了几种常用的数字 PID 控制改进算法,包括改进的积分算法和微分算法。针对工业过程控制中的纯延时特性,介绍了 Smith 预估补偿的 PID 控制算法。FOPID 控制器是传统的 IOPID 控制器的广义化形式,是一种新型的 PID 控制器,具有广阔的应用前景,分数阶微分和积分过程更柔性、更细腻,具有很多优良的特性。在学习中,应该重点掌握各种 PID 控制算法的原理及其参数对系统动态性能的影响。

习题

1. 试说明比例、积分、微分控制作用的物理意义。
2. 为什么微分控制器不能单独使用?
3. 对于相同的广义被控对象,分别采用 P 控制和 PI 控制,当比例系数 K_p 相同时,试比较分析两种控制下的系统性能。
4. 什么是数字 PID 位置式算式和增量式算式,试分析它们的优缺点。
5. 针对数字 PID 控制的几种微分改进算法,推导位置式控制算法的输出表达式。
6. PID 改进算法有哪些,各自针对什么问题而提出?
7. PID 控制器在处理纯滞后对象会遇见什么问题,该如何补偿?
8. PID 参数整定的原则是什么,有哪些方法?
9. 数字 PID 控制器采样周期的选择,需要考虑什么因素?
10. 已知模拟控制器的传递函数为 $D(s) = \frac{1+0.15s}{0.05s}$, $T=1s$,试求 $D(z)$ 的增量型输出表达式,并给出 K_p 、 T_i 的值。

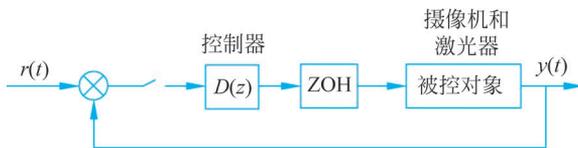
11. 某控制系统如图所示,试设计数字 PID 控制器,使闭环系统稳定,绘制系统单位阶跃响应曲线,分析 K_p 、 K_i 、 K_d 三个参数对系统性能的影响。



习题 11 图

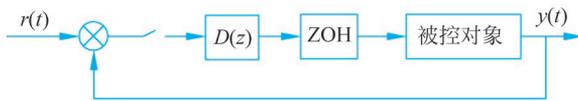
12. 激光在医疗领域中可以应用于切除病变组织或帮助受损组织愈合。眼科医生可以利用如图所示的位置控制系统,指示损伤部位给控制器,然后由控制器监视视网膜,并控制激光位置。控制系统被控对象传递函数 $G_0(s) = \frac{1}{(20s+1)(5s+1)(2s+1)}$,试设计合适的 PID 控制算法,使得性能满足:

- (1) 超调量 $\sigma\% \leq 15\%$; (2) 调节时间 $t_s < 20s$; (3) 上升时间 $t_r < 10s$ 。



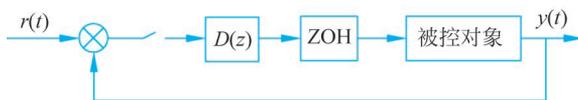
习题 12 图

13. 温度控制系统是在工业生产中常见的过程控制系统,其特点是被控对象一般包括时延环节。在某工厂塑料生产过程中,采用如图所示控制器 $D(z)$ 调节塑料部件的温度,已知被控对象为一个带延迟的惯性环节,其传递函数为 $G(s) = \frac{2}{30s+1}e^{-10s}$,采用 Smith 预估控制,试写出数字 PID 控制器 $D(z)$ 的算法表达式 $u(k)$ 。



习题 13 图

14. 向水中添加石灰可以控制煤矿废水的酸度,在添加石灰时,通常用阀门来控制石灰添加量,并在废水下游放置传感器监测废水酸度。酸度控制系统模型如图所示,已知被控对象模型为 $G(s) = \frac{e^{-80s}}{60s+1}$,采样时间 $T=20s$,输入信号为单位阶跃,试采用 PID 控制器 $D(z)$ 改善其跟踪性能。



习题 14 图