在电子技术中,通常需要将信号经过一系列的变换,才能提取到有用的信息。变换可以看作为信号通过系统,所以随机过程的变换就是分析随机过程通过系统后的响应。系统一般分为线性系统和非线性系统两大类,因此随机过程的变换也分为线性变换和非线性变换两大类。本章介绍随机过程的线性变换,随机过程的非线性变换将在第 4 章介绍。

3.1 变换的基本概念和基本定理

3.1.1 变换的基本概念

1. 变换的定义

首先回顾普通函数变换的概念。

给定一个函数 $x(t)$,按照某种法则 T,指定一个新的函数 $y(t)$,那么,就说 $y(t)$是$x(t)$经过变换 T 后的结果。记为

$$y(t)=T[x(t)] \tag{3.1.1}$$

T 称为从 $x(t)$到 $y(t)$的变换。类似地,随机过程的变换也可以这样来定义。

定义 给定一个随机过程 $X(t)$,按照某种法则 T,对它的每一个样本函数 $x(t)$,都指定一个对应函数 $y(t)$,于是就得到了一个新的随机过程 $Y(t)$,记为

$$Y(t)=T[X(t)] \tag{3.1.2}$$

T 就叫作从随机过程 $X(t)$到 $Y(t)$的变换,$Y(t)$是随机过程 $X(t)$经过变换后的结果。

需要说明的是式(3.1.2)的变换关系,如果要用普通函数的变换关系来理解的话是一簇变换关系,也就是说,对 $X(t)$和 $Y(t)$的每一个样本函数都有一个变换等式。

随机过程的变换也可以用系统的观点来加以解释。如图 3.1 所示,假定系统是按照法则 T 来定义的,那么 $Y(t)$就可以看作随机过程 $X(t)$通过系统后的响应。

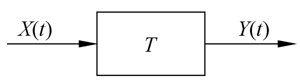

图 3.1 随机过程的变换示意图

变换有确定性变换和随机性变换两种。对于某个试验结果 e_i,对应一个特定的时间函数 $x(t,e_i)$,用这个信号作为系统的输入,可以得到一个特定的输出函数 $y(t,e_i)$,这个函数是 $Y(t)$对应于 e_i 的一个样本。于是,系统对随机输入的响应与确定性信号的响应是相同的,所谓随机性主要表现在输入上,而不是变换本身。按这种方式解释的变换称为确定性变换。即如果 e_1 和 e_2 是两个实验结果,且 $x(t,e_1)=x(t,e_2)$,则 $y(t,e_1)=y(t,e_2)$,则称 T 是确定性变换,否则称为随机性变换。本章只介绍确定性变换。

2. 线性变换

定义 设有任意两个随机变量 A_1 和 A_2 及任意两个随机过程 $X_1(t)$和 $X_2(t)$,如果满足

$$L[A_1X_1(t)+A_2X_2(t)]=A_1L[X_1(t)]+A_2L[X_2(t)] \tag{3.1.3}$$

则称 L 是线性变换。

对于线性变换 L,$Y(t)=L[X(t)]$,如果

$$Y(t+\varepsilon)=L[X(t+\varepsilon)] \tag{3.1.4}$$

其中 ε 为任意常数,即输入的时延对输出也只产生一个相应的时延,则称 L 是线性时不变的。

3.1.2 线性变换的基本定理

下面针对线性变换给出两个基本定理,这两个定理描述了随机过程经过线性变换后数字特征的变化。

定理1 设 $Y(t)=L[X(t)]$,其中 L 是线性变换,则

$$E[Y(t)]=L\{E[X(t)]\} \tag{3.1.5}$$

即随机过程经过线性变换后,其输出的数学期望等于输入的数学期望通过线性变换后的结果。

由于

$$E[Y(t)]=E\{L[X(t)]\}=L\{E[X(t)]\} \tag{3.1.6}$$

可见,如果把 L 和 E 看作为算子,那么 L 和 E 这两个算子是可以交换次序的。

定理1可以用大数定理加以证明。设第 i 次试验时,得到样本函数 $x_i(t)$,将其加到系统的输入端,而在输出端得到一个样本函数 $y_i(t)$:

$$y_i(t)=L[x_i(t)] \tag{3.1.7}$$

在 n 次重复试验后,可以得到 n 个样本函数 $y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)$,那么 $Y(t)$的样本均值为

$$\begin{aligned}\overline{Y(t)}&=\frac{1}{n}[y_1(t)+y_2(t)+\cdots+y_n(t)]\\&=\frac{1}{n}\{L[x_1(t)]+L[x_2(t)]+\cdots+L[x_n(t)]\}\\&=L\left\{\frac{1}{n}[x_1(t)+x_2(t)+\cdots+x_n(t)]\right\}\\&=L\{\overline{X(t)}\}\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

当 $X(t)$与 $Y(t)$的方差有限时,根据大数定理,当 $n\to\infty$时,有

$$\overline{X(t)}\to E[X(t)],\quad \overline{Y(t)}\to E[Y(t)]$$

所以

$$E[Y(t)]=L\{E[X(t)]\}$$

定理2 设 $Y(t)=L[X(t)]$,其中 L 是线性变换,则

$$R_{XY}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)] \tag{3.1.9}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]=L_{t_1}\cdot L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)] \tag{3.1.10}$$

其中 L_{t_1} 表示对 t_1 做 L 变换,L_{t_2} 表示对 t_2 做 L 变换。

证明 因为

$$X(t_1)Y(t)=X(t_1)L[X(t)]=L[X(t_1)X(t)]$$

$$E[X(t_1)Y(t)]=E\{L[X(t_1)X(t)]\}=L\{E[X(t_1)X(t)]\}$$

令 $t=t_2$,可得

$$R_{XY}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]$$

同理可证

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]$$

联合上面两式,得

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}\cdot L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]$$

以上两个定理是线性变换的两个基本定理,它给出了随机过程经过线性变换后,输出的均值和相关函数的计算方法。

从两个定理可知,对于线性变换,输出的均值和相关函数可以分别由输入的均值和相关函数确定。推广而言,对于线性变换,输出的 k 阶矩可以由输入的相应阶矩来确定。如

$$E[Y(t_1)Y(t_2)Y(t_3)]=L_{t_1}\cdot L_{t_2}\cdot L_{t_3}\{E[X(t_1)X(t_2)X(t_3)]\} \tag{3.1.11}$$

假定系统是线性时不变的,由线性时不变的基本特性和两个基本定理可以看出,如果 $X(t)$ 是严平稳的,则 $Y(t)$ 也是严平稳的。如果 $X(t)$ 是广义平稳的,则 $Y(t)$ 也是广义平稳的。

例 3.1 随机过程导数的统计特性。设 $\dot{X}(t)=\mathrm{d}X(t)/\mathrm{d}t$,$L=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,很容易证明,导数是一种线性变换,$\dot{X}(t)$ 可以看作 $X(t)$ 经过微分变换后的输出,如图 3.2 所示。

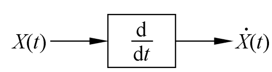

图 3.2 随机过程的导数变换示意图

根据线性变换的基本定理 1,导数过程 $\dot{X}(t)$ 的均值为

$$E[\dot{X}(t)]=E\{L[X(t)]\}=L\{E[X(t)]\} \tag{3.1.12}$$

即

$$m_{\dot{X}}(t)=\frac{\mathrm{d}m_X(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.1.13}$$

根据线性变换的定理 2,$X(t)$ 和 $\dot{X}(t)$ 的互相关函数为

$$R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]=\frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2} \tag{3.1.14}$$

自相关函数为

$$R_{\dot{X}}(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)]=\frac{\partial R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2} \tag{3.1.15}$$

如果 $X(t)$ 为平稳随机过程，则

$$m_{\dot{X}}(t)=0 \tag{3.1.16}$$

$$R_{X\dot{X}}(\tau)=-\frac{\mathrm{d}R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau},\quad R_{\dot{X}}(\tau)=\frac{\mathrm{d}R_{X\dot{X}}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\mathrm{d}^2R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{3.1.17}$$

$$G_{X\dot{X}}(\omega)=-\mathrm{j}\omega G_X(\omega)\quad G_{\dot{X}}(\omega)=\mathrm{j}\omega G_{X\dot{X}}(\omega)=\omega^2G_X(\omega) \tag{3.1.18}$$

导数过程的相关函数可用图 3.3 来表示。

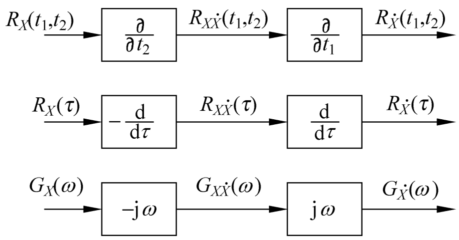

图 3.3 随机过程及其导数相关函数示意图

另外，$R_{X\dot{X}}(-\tau)=R_{\dot{X}X}(\tau)=\frac{\mathrm{d}R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$，综合式(3.1.17)，可得 $R_{X\dot{X}}(-\tau)=-R_{X\dot{X}}(\tau)$，$R_{X\dot{X}}(\tau)$ 是奇函数，$R_{X\dot{X}}(0)=0$。因此，平稳随机过程 $X(t)$ 与它的导数 $\dot{X}(t)$ 在同一时刻是正交的和不相关的，如果 $X(t)$ 服从正态分布，则它们还是相互独立的。

3.2 随机过程通过线性系统分析

随机过程通过线性系统分析的中心问题是：给定系统的输入函数和线性系统的特性，求输出函数，由于输入是随机过程，所以输出也是随机过程；对于随机过程，一般很难给出确切的函数形式，因此，通常只分析随机过程通过线性系统后输出的概率分布特性和某些数字特征。线性系统既可以用冲激响应描述，也可以用系统传递函数描述，因此，随机过程通过线性系统的常用分析方法也有两种：冲激响应法和频谱法。

3.2.1 冲激响应法

设有如图 3.4 所示的线性系统，其中 $h(t)$ 为系统的冲激响应。

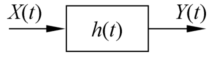

图 3.4 线性系统示意图

根据线性系统的理论，输出 $Y(t)$ 为

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=h(t)*X(t) \tag{3.2.1}$$

如果用 $L=h(t)*$ 表示与冲激响应的卷积,即 $Y(t)=L[X(t)]$,很容易证明,L 是一种线性变换,由定理1,输出的均值为

$$m_Y(t)=L[m_X(t)]=h(t)*m_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}m_X(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.2.2}$$

如果 $X(t)$ 为平稳随机过程,则

$$m_Y=\int_{-\infty}^{+\infty}m_X h(\tau)\mathrm{d}\tau=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{d}\tau=m_X H(0) \tag{3.2.3}$$

其中 $H(0)$ 为系统的传递函数在 $\omega=0$ 时的值。

由定理2,输入和输出的互相关函数为

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1,t_2)&=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]=h(t_2)*R_X(t_1,t_2)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1,t_2-u)h(u)\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

输出的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]=h(t_1)*R_{XY}(t_1,t_2)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

综合式(3.2.4)与式(3.2.5),得

$$R_Y(t_1,t_2)=h(t_1)*R_{XY}(t_1,t_2)=h(t_1)*h(t_2)*R_X(t_1,t_2) \tag{3.2.6}$$

同理可证

$$R_{YX}(t_1,t_2)=h(t_1)*R_X(t_1,t_2) \tag{3.2.7}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=h(t_2)*R_{YX}(t_1,t_2) \tag{3.2.8}$$

输入输出相关函数的关系如图3.5所示。

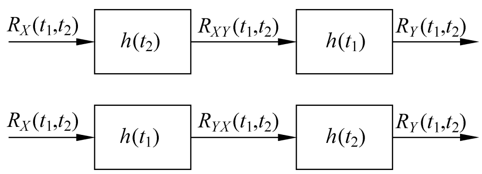

图3.5 随机过程通过线性系统输入输出相关函数之间的关系

如果 $X(t)$ 是平稳随机过程,则

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1,t_2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1,t_2-u)h(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1-t_2+u)h(u)\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+u)h(u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

其中,$\tau=t_1-t_2$,即

$$R_{XY}(\tau)=h(-\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.9}$$

同理

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(t_1-t_2-u)h(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u$$

即

$$R_Y(\tau)=h(\tau)*R_{XY}(\tau) \tag{3.2.10}$$

所以

$$R_Y(\tau)=h(-\tau)*h(\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.11}$$

类似地，

$$R_{YX}(\tau)=h(\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.12}$$

$$R_Y(\tau)=h(-\tau)*R_{YX}(\tau) \tag{3.2.13}$$

平稳随机过程通过线性系统输入输出相关函数之间的关系如图 3.6 所示。

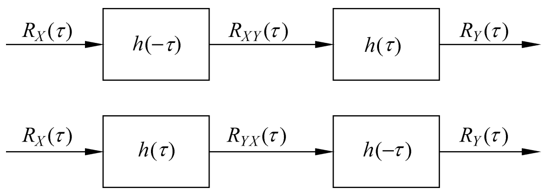

图 3.6 平稳随机过程通过线性系统输入输出相关函数之间的关系

例 3.2 设有微分方程描述的线性系统：

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha Y(t)=X(t)$$

其中 α 为常数，系统的起始状态为 $Y(0)=0$，输入 $X(t)$ 为平稳随机过程，且 $E[X(t)]=\lambda$，$R_X(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$，求输出 $Y(t)$ 的统计特性。

解 首先确定系统的冲激响应，令输入为 $\delta(t)$，则冲激响应为

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha h(t)=\delta(t)$$

由此可解得

$$h(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}U(t)$$

由于系统是因果系统，系统的响应只有在 $t\geqslant 0$ 时才存在，因此，其输入也只有在 $t\geqslant 0$ 时才对系统起作用，即实际加到系统的输入为 $X(t)U(t)$，那么，输出 $Y(t)$ 的均值为

$$m_Y(t)=h(t)*[m_X(t)U(t)]=\int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{\lambda}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t}) \quad (t\geqslant 0)$$

由式(3.2.4)，输入与输出的互相关函数为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2} R_X(t_1,t_2-u)h(u)\mathrm{d}u=\int_0^{t_2}[\lambda^2+\lambda\delta(t_1-t_2+u)]\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\lambda^2}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t_2})+\lambda\mathrm{e}^{-\alpha(t_2-t_1)}U(t_2-t_1) \quad (t_2>t_1)$$

由式(3.2.5)，输出的自相关函数为

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1} R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u$$