

随着信息技术的不断发展及其应用领域的不断扩展,“信号与系统”这门课程已经从电子信息工程类专业的专业基础课程扩展成电子信息、自动控制、电子技术、电气工程、通信工程、信号和信息分析与处理、计算机技术、网络工程、生物医学工程等众多电类专业的专业基础课程,甚至在很多非电专业中也设置了这门课程,其作用已经越来越重要;其内容也从单一的电系统分析扩展到许多非电系统分析。虽然各个专业开设这门课程时的侧重点有所不同,应用背景也有差异,但是,该课程依然保留了以分析系统对信号的响应为主线的教学体系,并且在长期的教学实践中取得了很好的效果。

“信号与系统”是电子电气信息类专业本科生的专业基础主干课程。该课程的教学目的是让学生掌握信号和线性系统分析的基本理论、基本原理和基本方法,能够在后续课程的学习和工作中灵活应用这些方法解决问题。该课程与本科生的许多专业课(例如,通信原理、数字信号处理、通信电路、自动控制原理、图像处理、微波技术等)有很强的联系,也是这些学科研究生入学考试的必考科目之一,其重要性是其他课程不可替代的。该课程涉及信号与系统的概念、信号分析、连续时间系统和离散时间系统的时域和频域分析、系统的状态变量描述、傅里叶变换、拉普拉斯变换、 z 变换等,内容涉及大量的数学课程,例如,线性微分方程、积分变换、复变函数、离散数学等。信号与系统课程不仅具有很强的理论性,而且具有很强的实用性,因此该课程对于理论和实践两个体系都有很高的要求。

1. 历史的回顾

人类进入 21 世纪的信息时代,科学技术的创新不断涌现,使人们享受着现代文明的乐趣,信号与系统的概念已经深入到人们的生活和社会的各个方面。手机、电视机、通信网、计算机网络、物联网等已成为人们日常使用的工具和设备。回顾科学技术的发展历史,尤其是信号与系统学科的发展,令人激动不已。

20 世纪 40 年代末创立的三大科学思想和理论,即系统论、信息论和控制论成为许多学科的理论根基。系统论是美国生物学家贝塔朗菲创立的,他为确立适用于系统的一般原则做出了贡献。信息论是美国数学家香农创立的,它成为现代通信理论的基础。控制论是美国数学家维纳提出的,它促进了自动控制、通信、计算机、人工智能理论及应用的发展。

当然,三大科学理论是在吸取前人许多成果基础上通过深刻思考建立的。1822 年,法国数学家傅里叶(J. Fourier, 1768—1830)证明了将周期信号展开为正弦级数的理论,为信

号的分析和处理打下了基础。法国数学家拉普拉斯(P. S. Laplace, 1749—1825)于19世纪初提出了拉普拉斯变换方法,为后来电路和系统的分析提供了有力工具。1831年,英国人法拉第(M. Faraday, 1791—1867)发现了电磁感应现象。1837年,美国人莫尔斯(S. F. Morse, 1791—1872)发明了电报。1864年英国科学家麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831—1879)提出了电磁波理论。1875年美国人贝尔(A. G. Bell, 1847—1922)发明了电话。1894年,意大利人马可尼(G. Marconi, 1874—1937)和俄国人波波夫分别发明了无线电。马可尼利用赫兹的火花振荡器作为发射器,实现了无线电信号的传递。1907年,美国人福斯特发明了真空三极管,实现了对微弱信号的放大。1946年,第一台电子计算机(ENIAC)在美国宾州大学莫尔电子工程学院研制成功。1947年,美国贝尔实验室的布拉丁、巴丁和肖克利研制成功第一只点接触晶体管,翻开了半导体应用历史的第一页,大大促进了电子工程、通信、计算机等技术的发展。

再如1912年,阿姆斯特朗组装了第一台超外差收音机。1916年,人类实现了第一次语言和音乐的无线电广播。1925年,英国的贝尔德发明了电视。1954年,彩色电视试播成功。1958年,美国的基尔比利用半导体单晶硅材料研制成第一片集成电路(IC)。1965年,世界上第一颗地球同步通信卫星发射升空,从而推动了电话、电报、数据传输和电视转播的革命。1998年11月,铱星通信正式启用,从而使通信技术达到了更高的水平。这些成就又反过来促进了信号、信息、系统的理论不断完善。

2. 信号与系统的应用领域

信号与系统的应用领域非常广泛,下面仅举几例。

1) 通信领域

在通信系统中,许多信号不能直接进行传输,需要根据实际情况进行适当的调制以提高信号的传输质量或传输效率。信号的调制有多种形式,如信号的幅度调制、频率调制和相位调制,但都是基于信号与系统的基本理论。信号的正弦幅度调制可以实现频分复用,信号的脉冲幅度调制可以实现时分复用,复用技术可以极大地提高信号的传输效率,有效利用信道资源。信号的频率调制和相位调制可以增强信号的抗干扰能力,提高传输质量。此外,离散信号的调制还可以实现信号的加密、多媒体信号的综合传输等。由此可见,信号与系统的理论与方法在通信领域有着广泛的应用。

2) 控制领域

在控制系统中,系统的传输特性和稳定性是描述系统的重要属性。信号与系统分析中的系统函数可以有效地分析和控制连续时间系统与离散时间系统的传输特性和稳定性。一方面,通过分析系统的系统函数,可以清楚地确定系统的时域特性、频响特性和相位特性,以及系统的稳定性等。另一方面,在使用系统函数分析系统特性的基础上,可以根据实际需要调整系统函数以实现所需的系统特性。如通过分析系统函数的零、极点分布,可以了解系统是否稳定。若不稳定,可以通过反馈等方法调整系统函数实现系统稳定。系统函数在控制系统的分析与设计中有着重要的应用。

3) 信号处理

在信号处理领域中,信号与系统的时域分析和变换域分析的理论和方法为信号处理奠定了必要的理论基础。在信号的时域分析中,信号的卷积与解卷积理论可以实现信号恢复和信号去噪,信号相关理论可以实现信号检测和谱分析等。在信号的变换域分析中,信号的

傅里叶变换可以实现信号的频谱分析,连续信号的拉普拉斯变换和离散信号的 z 变换可以实现信号的变换域描述和表达。信号的变换域分析拓展了信号时域分析的范畴,为信号的分析 and 处理提供了一种新途径。信号与系统分析的理论也是现代信号处理的基础,如信号的自适应处理、时域分析、小波分析等。

4) 生物医学工程

生物医学工程是信息学科与医学学科的交叉,生物医学领域中许多系统描述和信号处理都是基于信号与系统的基本理论和方法。例如,在生物神经系统中,神经元的等效电路是以非线性系统描述的,相应的数学模型为非线性微分方程或状态方程,其分析方法为解析方法或数值计算方法。近年来,随着生命科学和信息科学的迅速发展和渗透,信号与系统的分析在生物医学工程领域中的应用也日益深入且广泛。

3. 本书的研究内容及性质

本书主要讨论的是确定性信号的时域和频域分析,线性时不变系统的描述与特性,以及信号通过线性时不变系统的时域分析与变换域分析。通过本书的学习,可以使學生牢固掌握信号与系统的时域、变换域分析的基本原理和基本方法,理解傅里叶变换、拉普拉斯变换、 z 变换的数学概念、物理概念与工程概念,掌握利用信号与系统的基本理论与方法分析和解决实际问题的基本方法,为进一步学习后续课程打下坚实的基础。

本书从概念上可以区分为信号分解和系统分析两部分,但二者又是密切相关的。根据连续信号分解为不同的基本信号,对应推导出线性系统的分析方法分别为时域分析、频域分析和复频域分析;离散信号分解和系统分析也是类似的过程。

本书采用先连续后离散的顺序安排知识,使学生可先集中精力学好连续信号与系统分析的内容,再通过类比理解离散信号与系统分析的概念。状态分析方法也结合这两大块给出,从而建立完整的信号与系统的概念。

信号与系统课程是一门实践性较强的课程。考虑到后续课程的实践性更强,对学生实验基本技能的熟练程度提出更高的要求。因此,将信号与系统课程实验教学部分定位于基础性的实验教学。实验课程的教学目标是:通过实验课,使学生加深对信号与系统课程教学内容的理解,通过实践验证所学的理论知识;培养学生的实际动手能力、分析问题与解决问题能力,为后继课程的学习以及课程设计、毕业设计打下坚实的实践基础。实验课程教学的基本要求是:正确且熟练地使用实验所需各种电子仪器;掌握使用电子元器件构建典型的电网络的基本技能,及其测试与分析技术;具有正确处理实验数据、进行误差分析的能力;能独立写出理论分析完善、文理通顺、字迹工整的实验报告;其要点在于培养学生实事求是地进行科学实验的严谨学风。所有实验均可应用 MATLAB 语言加以实现。

4. 信号与系统的研究方法

信号分析主要研究信号的描述、运算、特性以及信号发生某些变化时其特性的相应变化。信号分析的基本目的是揭示信号自身的特性,例如,确定信号的时域特性与频域特性、随机信号的统计特性等。实现信号分析的主要途径是研究信号的分解,即将一般信号分解成众多基本信号单元的线性组合,通过研究这些基本信号单元在时域或变换域的分布规律来达到了解信号特性的目的。由于信号的分解既可以在时域进行,也可以在频域或复频域进行,因此信号的分析方法有时域法、频域法和复频域法。

在信号的时域分析中,采用单位冲激信号 $\delta(t)$ 或单位脉冲序列 $\delta(n)$ 作为基本信号,将

连续时间信号表示为 $\delta(t)$ 的加权积分,将离散时间信号表示为 $\delta(n)$ 的加权和,它们分别是一种特殊的卷积积分运算与卷积和运算。这里通过基本信号单元的加权值随变量 t 或 n 的变化直接表征信号的时域特性。

在信号的频域分析中,采用虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 或 $e^{j\Omega n}$ 作为基本信号,将连续时间或离散时间信号表示为 $e^{j\omega t}$ 或 $e^{j\Omega n}$ 的加权积分或加权和。这就导出了傅里叶分析的理论和方法。这里,通过各基本信号的单元振幅(或振幅密度)、相位随频率的变化(即信号的频谱)来反映信号的频域特性。

在信号的复频域分析中,采用复指数信号 e^{st} ($s=\sigma+j\omega$) 或 z^n ($z=re^{j\theta}$) 作为基本信号,将连续时间或离散时间信号表示为 e^{st} 或 z^n 的加权积分或加权和,相应导出了拉普拉斯变换与 z 变换的理论和方法。

系统分析的主要任务是分析给定系统在激励作用下产生的响应。其分析过程包括建立系统模型,用数学方法求解由系统模型建立的系统方程,求得系统的响应。必要时,对求解结果给出物理解释,赋予一定的物理意义。就本书所研究的线性时不变系统(Linear Time-Invariant System, LTI 系统)而言,由输入-输出模型建立的系统方程是一个线性常系数的微分方程或差分方程,只着眼于系统激励与响应之间的关系,并不关心系统内部变量的情况,多用于单输入-单输出系统;由状态空间模型建立的状态方程是一阶线性微分方程组或差分方程组,输出方程是一组代数方程,它不仅给出系统的响应,而且会提供系统内部各变量的情况,多用于多输入-多输出系统的分析。

在系统方程或系统输出响应的求解方面,按照系统理论,一般先求出系统的零输入响应和零状态响应;然后将它们叠加,得到系统的完全响应。设系统的初始观察时刻 $t_0=0$,如果将系统的初始状态看成另一种历史输入信号,那么,零输入响应 $y_{zi}(t)$ ($t\geq 0$) 是历史输入信号作用于系统后在 t 时刻所产生的响应;而零状态响应 $y_{zs}(t)$ ($t\geq 0$) 是在 $[0, t]$ 区间的当前输入信号作用于系统后在 t 时刻所产生的响应。就系统分析方法而言,两者没有本质的差别。所以,系统分析问题可以归结为系统在当前输入作用下零状态响应的求解问题。

分析 LTI 系统的基本思想是先将激励信号分解为众多基本信号单元的线性组合,求出各基本信号单元通过系统后产生的响应分量,再将这些响应分量叠加起来得到系统在激励信号作用下的输出响应。与信号分析类似,系统分析也有相应的时域分析法、频域分析法和复频域分析法。

在 LTI 系统的时域分析中,将输入信号 $f(t)$ 分解成冲激信号(或脉冲序列)单元的线性组合,只要求出基本信号 $\delta(t)$ 或 $\delta(n)$ 作用下系统的响应,就可以根据系统的线性和时不变特性确定各种冲激信号(或脉冲序列)单元作用下系统的响应分量,再将这些响应分量叠加,求得系统在 $f(t)$ 激励下的输出响应。这就产生了系统响应的卷积积分与卷积和计算方法。

在 LTI 系统的频域分析中,把输入信号 $f(t)$ 分解为虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 或 $e^{j\Omega n}$ 单元的线性组合,只要求出基本信号 $e^{j\omega t}$ 或 $e^{j\Omega n}$ 作用下系统的响应,再由系统的线性、时不变特性确定各虚指数信号单元作用下的系统响应分量,并将这些响应分量叠加,便可求得 $f(t)$ 激励下的系统响应,这就是傅里叶分析的思想。

在 LTI 系统的复频域分析中,用复指数信号 e^{st} 或 z^n 作为基本信号,将输入 $f(t)$ 或 $f(n)$ 分解为复指数信号单元的线性组合,其系统响应表示为各复指数信号单元作用下相应输出的叠加,这就是拉普拉斯变换和 z 变换的系统分析方法。

综上所述,LTI 系统分析方法的理论基础是信号的分解特性和系统的线性、时不变特性。实现系统分析的统一观点和方法是:激励信号可以分解为众多基本信号单元的线性组合;系统对激励所产生的零状态响应是系统对各基本信号单元分别作用时相应响应的叠加;不同的信号分解方式将导致不同的系统分析方法。在统一观点下,传统的数学变换工具被赋予了明确的物理意义。同时表明,无论是连续时间系统还是离散时间系统的变换域分析法在本质上都属于“时域”的分析方法,所有系统分析方法都是在使用某种基本信号进行信号分解的条件下导出合乎逻辑的必然结果。

随着现代科学技术的迅速发展,新的信号与系统的分析方法不断涌现。其中计算机辅助分析方法就是近年来较为活跃的方法。这种方法利用计算机进行数值运算,从而免去复杂的人工运算,且计算结果精确可靠,因而得到了广泛的应用和发展。本书引入了 MATLAB 对信号与系统进行分析,尤其是 MATLAB 的强大绘图功能,对信号与系统进行数值计算、可视化建模及仿真调试成为可能。

本书按照先输入-输出描述后状态变量描述,先连续后离散,先时间域后变换域的顺序,研究线性时不变系统的基本分析方法,并结合实例介绍其简单应用。

本章要点：

- (1) 信号的定义和分类,重点阐述典型连续信号和奇异信号的时域特性及其描述。
- (2) 信号的时域变换和运算。
- (3) 系统的定义、分类、特性及其描述。
- (4) 典型例题分析。

学习目标：

- (1) 了解信号与系统的基本概念与定义,会画信号的波形。
- (2) 了解常用基本信号的时域描述方法、特点与性质,并会应用这些性质。
- (3) 掌握信号的时域变换与运算的方法,并会求解。
- (4) 理解线性时不变系统的定义与性质,并会应用这些性质。

本章重点：

- (1) 基本的连续时间信号的时域描述与时域特性。
- (2) 单位冲激信号的定义、性质及应用。
- (3) 信号的时域变换与时域运算及其综合应用。
- (4) 线性时不变系统的性质及应用。

1.1 信号的定义与分类

1.1.1 信号的定义

信号已经深入人们的日常生活和社会的各个方面,具有广泛的含义。严格地说,信号是指信息的表现形式与传送载体,而信息则是信号的具体内容。但是,信息的传送一般都不是直接的,需借助某种物理量作为载体。例如,电台的各种信息就是通过电磁波信号传向四面八方。

信号可以是时间的一元函数,也可以是空间与时间的二元函数(如电视信号中的亮度信号),还可以是变换域中变量的函数。它可以用函数式、曲线、数据或图像来描述。本书后面经常研究的是时间函数表示的信号,在讨论信号的有关问题时,“信号”与“函数”两个词常互相通用。

1.1.2 信号的分类

信号的分类方法很多,可以从不同的角度对信号进行分类。在信号与系统分析中,根据信号的特点,可将其分为连续时间信号与离散时间信号、周期信号与非周期信号、确定信号与随机信号、能量信号与功率信号等。

1. 连续时间信号与离散时间信号

根据信号定义域的特点,信号可以分为连续时间信号与离散时间信号。

连续时间信号是指在信号的定义域内,除有限个间断点外,任意时刻都有确定函数值的信号,通常用 $f(t)$ 来表示,如图 1-1-1 所示。

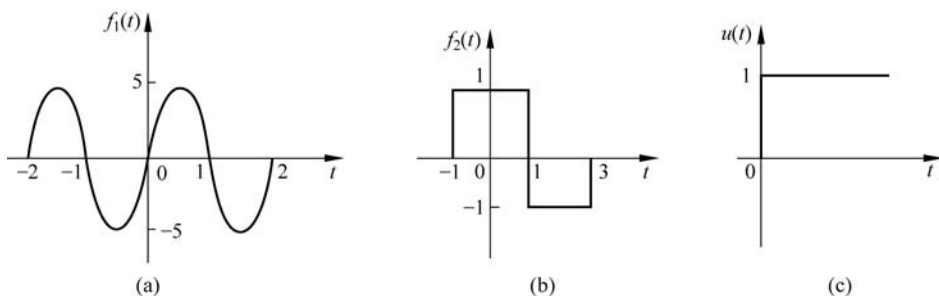


图 1-1-1 连续时间信号

图 1-1-1(a)中的信号是正弦信号,其数学表达式为

$$f_1(t) = 5\sin(\pi t) \quad (1-1-1)$$

其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 和值域 $[-5, 5]$ 都是连续的。

图 1-1-1(b)中的信号的数学表达式为

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & -1 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases} \quad (1-1-2)$$

其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 是连续的,但信号的值只取 $-1, 0, 1$ 3 个离散的数值。信号在 $t = -1$ 、 $t = 1$ 和 $t = 3$ 处有间断点。

图 1-1-1(c)中的信号为单位阶跃信号,通常记为 $u(t)$,其数学表达式为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1-1-3)$$

其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 是连续的,但信号的值只取 0 或 1。信号在 $t = 0$ 处有间断点。

对于间断点处的信号值一般不作定义,这样做不会影响分析结果。如有必要,可按高等数学规定,定义信号在间断点处的信号值等于其左极限与右极限的算术平均值。此处不再赘述。

离散时间信号是指信号的定义域为一些离散时刻,通常用 $f(n)$ 来表示。离散时间信号最明显的特点是其定义域为离散的时刻,而在这些离散的时刻之外无定义,如图 1-1-2 所示。

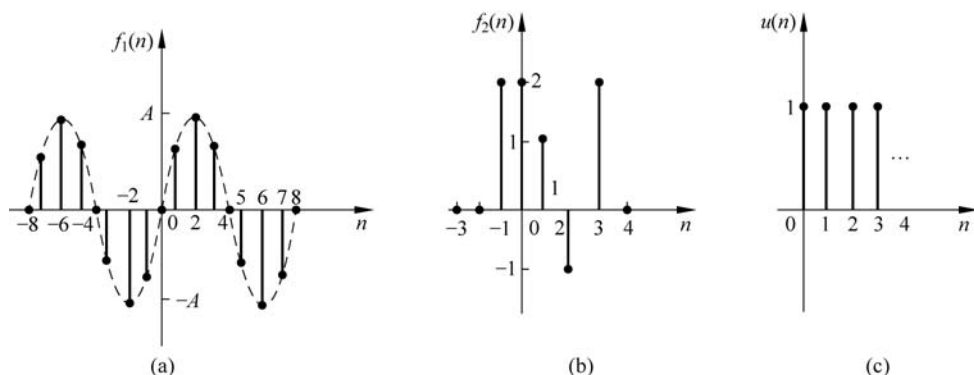


图 1-1-2 离散时间信号

图 1-1-2(a)中的信号为正弦序列,其数学表达式为

$$f_1(n) = A \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \quad (1-1-4)$$

随着 n 的变化,序列值在值域 $[-A, A]$ 上连续取值。

图 1-1-2(b)中的序列,其数学表达式为

$$f_2(n) = \begin{cases} 2, & n = -1, 0, 3 \\ 1, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-5)$$

或写为

$$f_2(n) = \{\cdots, 0, 2, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{2}, 1, -1, 2, 0, \cdots\} \quad (1-1-6)$$

在式(1-1-6)中,箭头指明 $n=0$ 的位置。

图 1-1-2(c)中的信号为单位阶跃序列,其数学表达式为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1-1-7)$$

连续时间信号的幅值可以是连续的,也可以是离散的。时间和幅值均连续的信号称为模拟信号。离散时间信号的幅值也可以是连续的或离散的。时间和幅值均离散的信号称为数字信号。时间离散而幅值连续的信号称为抽样信号。

为了方便起见,有时将信号 $f(t)$ 或 $f(n)$ 的自变量省略,简记为 $f(\cdot)$,表示信号变量允许取连续变量或离散变量,即用 $f(\cdot)$ 统一表示连续时间信号和离散时间信号。

2. 周期信号与非周期信号

根据时间函数的周期性划分,信号可以分为周期信号与非周期信号。

周期信号是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 区间,每隔一定时间 T (或整数 N),按相同规律重复变化的信号,如图 1-1-1(a)和图 1-1-2(a)所示的信号均为周期信号。

连续周期信号可表示为

$$f(t) = f(t + mT), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad (1-1-8)$$

离散周期信号可表示为

$$f(n) = f(n + mN), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-1-9)$$

非周期信号是不具有重复性的信号。

例 1-1 判断下列信号是否为周期信号,如果是周期性的,确定其周期。

$$(1) f_1(t) = \sin(4t) + \cos(5t) \quad (2) f_2(t) = \cos(3t) + \sin(7\pi t)$$

$$(3) f_3(n) = \sin\left(\frac{\pi}{8}n + \frac{3\pi}{7}\right) \quad (4) f_4(n) = \cos\left(\frac{3}{5}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

解: 如果两个周期信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的周期具有公倍数,则它们的和信号

$$f(t) = x(t) + y(t)$$

仍然是一个周期信号,其周期是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的周期的最小公倍数。

(1) 因为 $\sin(4t)$ 是一个周期信号,其角频率 ω_1 和周期 T_1 为

$$\omega_1 = 4 \text{ rad/s}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{2}\pi \text{ s}$$

信号 $\cos(5t)$ 也是一个周期信号,其相应的角频率 ω_2 和周期 T_2 为

$$\omega_2 = 5 \text{ rad/s}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2}{5}\pi \text{ s}$$

T_1 和 T_2 的最小公倍数为 2π , 所以 $f_1(t)$ 是周期信号,其周期为 $2\pi \text{ s}$ 。

(2) 同理, $f_2(t)$ 中两个周期信号 $\cos(3t)$ 和 $\sin(7\pi t)$ 的周期分别为

$$T_1 = \frac{3\pi}{\omega_1} = \frac{3}{2}\pi \text{ s}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2}{7} \text{ s}$$

T_1 和 T_2 间不存在公倍数,所以 $f_2(t)$ 是非周期信号。

(3) $f_3(n)$ 的周期为

$$N = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16$$

且是有理数,所以 $f_3(n)$ 是周期信号,其周期为 16。

(4) $f_4(n)$ 的周期为

$$N = \frac{2\pi}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{3}\pi$$

且是无理数,所以 $f_4(n)$ 是非周期信号。

3. 确定信号与随机信号

根据时间函数的确定性划分,信号可以分为确定信号与随机信号。

确定信号是指能够以确定的时间函数表示的信号,该信号在其定义域内的任意时刻都有确定的函数值。如图 1-1-1 和图 1-1-2 所示信号均为确定信号。

随机信号也称为不确定信号,它不是时间的函数。也就是说,在其定义域内的任意时刻没有确定的函数值。如道路上的噪声,其强度与频谱因时因地而异,且无法准确预测,因此它是随机信号;电网电压(有效值)随时间波动,其波动量的大小也是不可能确切预测的随机信号。

虽然实际应用中的大部分信号都是随机信号,但在一定条件下,可以将许多随机信号近似地作为确定信号来分析,从而简化分析过程,便于实际应用。因此,一般先研究确定信号,

在此基础上再根据随机信号的统计规律进一步研究随机信号的特性。本书着重讨论确定信号,随机信号的分析将在数字信号处理等后续课程中研究。

4. 能量信号与功率信号

根据时间信号的可积性划分,信号可以分为能量信号与功率信号。

如果把信号 $f(t)$ 看作随时间变化的电流或电压,则当信号 $f(t)$ 通过 1Ω 的电阻时,信号在时间间隔 $-T \leq t \leq T$ 内所消耗的能量称为归一化能量,即

$$E = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-1-10)$$

而在上述时间间隔 $-T \leq t \leq T$ 内的平均功率称为归一化功率,即

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-1-11)$$

对于离散时间信号 $f(n)$,其归一化能量 E 与归一化功率 P 的定义分别为

$$E = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N |f(n)|^2 \quad (1-1-12)$$

$$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |f(n)|^2 \quad (1-1-13)$$

若信号的归一化能量为非零的有限值,且其归一化功率为零,即 $0 < E < +\infty, P = 0$,则该信号为能量信号;若信号的归一化能量为无限值,且其归一化功率为非零的有限值,即 $E \rightarrow +\infty, 0 < P < +\infty$,则该信号为功率信号。直流信号与周期信号都是功率信号。值得注意的是,一个信号不可能既是能量信号又是功率信号,但却有少数信号既不是能量信号也不是功率信号。例如,后面将要讲到的单位斜变信号既不是能量信号也不是功率信号。

1.1.3 连续时间信号的 MATLAB 实现

在 MATLAB 中通常用两种方法来表示信号:一种是用向量表示信号,另一种是用符号运算的方法表示信号。

1. 向量表示法

对于连续信号 $f(t)$,可以用两个行向量 f 和 t 来表示,其中向量 t 是形如 $t_1 : p : t_2$ 的 MATLAB 命令定义的时间范围向量, t_1 为信号起始时间, t_2 为终止时间, p 为时间间隔。向量 f 为连续信号 $f(t)$ 在向量 t 所定义的时间点上的样值。例如,输入如下程序:

```
t = -10:0.02:10;
f = sin(t)./t;
plot(t,f);
title('f(t) = Sa(t)');
xlabel('t');
axis([-10,10,-0.4,1.1])
```

则绘制的 $Sa(t)$ 信号波形如图 1-1-3 所示。改变 p 的值,可以观察绘制的波形与上述波形的差别。

2. 符号运算表示法

符号运算表示法就是用符号来进行的运算方法。例如,用符号运算表示法绘制连续信

号 $f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ 的波形。输入如下程序：

```
f = 'sin(pi/4 * t)';
ezplot(f, [-16, 16])
```

则得到的波形如图 1-1-4 所示。改变相应的参数,可以得到不同的图形。

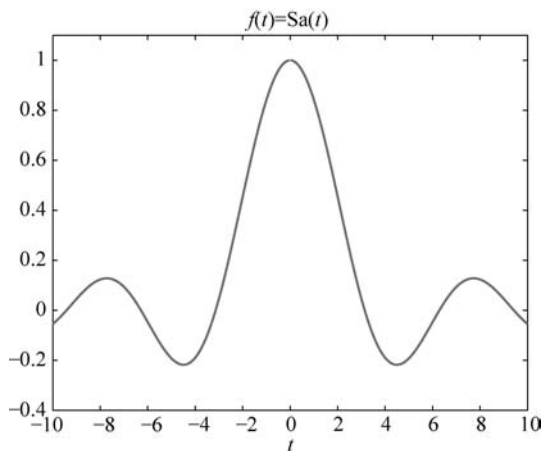


图 1-1-3 $Sa(t)$ 信号波形

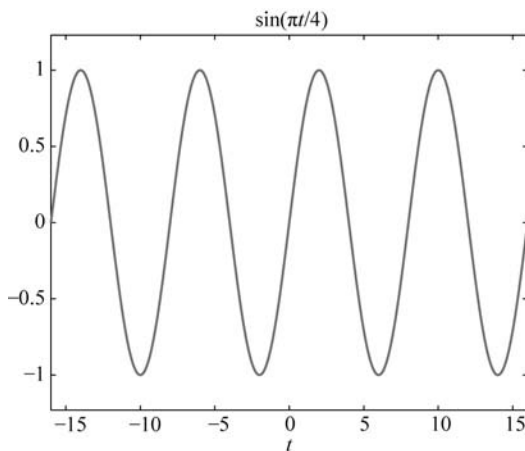


图 1-1-4 $f(t) = \sin(\pi t/4)$ 的波形

1.2 典型连续信号及其时域特性

1.2.1 直流信号

直流信号的数学表达式为

$$f(t) = A \quad (1-2-1)$$

式中 A 为实数,其定义域为 $(-\infty, +\infty)$,波形如图 1-2-1 所示。若 $A=1$,则称之为单位直流信号。

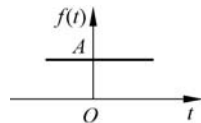


图 1-2-1 直流信号

1.2.2 正弦信号

正弦信号的数学表达式为

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1-2-2)$$

式中 A 、 ω 、 φ 分别称为正弦信号的振幅、角频率、初相位,均为实数。其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。正弦信号具有如下性质。

- (1) 正弦信号是无时限信号。
- (2) 正弦信号是周期信号,其周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。

(3) 正弦信号的微分仍然是正弦信号。

(4) 正弦信号满足如下形式的二阶微分方程,即

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (1-2-3)$$



视频讲解

1.2.3 指数信号

指数信号的数学表达式为

$$f(t) = Ae^{\alpha t} \quad (1-2-4)$$

式中 A 和 α 是实数,其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。系数 A 是 $t=0$ 时指数信号的初始值,当 A 为正实数时,若 $\alpha > 0$,则指数信号的幅度随时间增长而增长;若 $\alpha < 0$,指数信号的幅度随时间增长而衰减。在 $\alpha=0$ 的特殊情况下,信号不随时间而变化,称为直流信号。指数信号的波形如图 1-2-2 所示。

指数信号为单调增或单调减信号,为了表示信号随时间单调变化的快慢程度,将 $|\alpha|$ 的倒数称为指数信号的时间常数,用 τ 表示,即

$$\tau = \frac{1}{|\alpha|} \quad (1-2-5)$$

当 $\alpha < 0$,且 $t = \tau = 1/|\alpha|$ 时,式(1-2-4)为

$$f(\tau) = Ae^{-1} = 0.368A$$

这表明当 $t = \tau$ 时,指数信号衰减为初始值 A 的 36.8%。显然 $|\alpha|$ 越大, τ 就越小,信号衰减得越快;反之, $|\alpha|$ 越小, τ 就越大,信号衰减得越慢。

同样,当 $\alpha > 0$ 时,指数信号随时间增长而增长,其增长快慢程度也取决于 $|\alpha|$ 或 τ 的大小。

在实际中遇到的多是单边指数衰减信号,其数学表达式为

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}, & t \geq 0, \alpha > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1-2-6)$$

其波形如图 1-2-3 所示。单边指数衰减信号有如下性质。

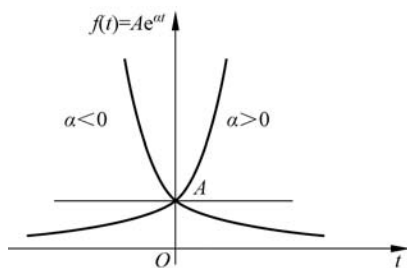


图 1-2-2 指数信号

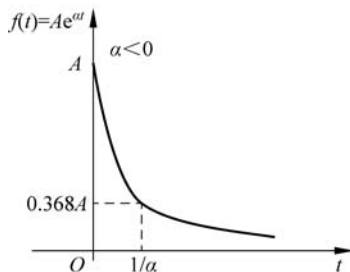


图 1-2-3 单边指数衰减信号

- (1) $f(0_-) = 0, f(0_+) = A$,即在 $t=0$ 时刻有跳变,跳变的幅度为 A 。
- (2) 经过 $1/\alpha$ 的时间,函数值从 A 衰减到 $0.368A$ 。 α 称为衰减系数。
- (3) 单边指数衰减信号对时间的微分和积分仍是指数形式。

1.2.4 复指数信号

复指数信号的数学表达式为

$$f(t) = Ae^{st} \quad (1-2-7)$$

式中 $s = \sigma + j\omega_0$ 称为复数频率, 简称复频率, 其中 σ, ω_0 均为实数, A 一般是实数, 也可以是复数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。利用欧拉公式将式(1-2-7)展开, 可得

$$Ae^{st} = Ae^{(\sigma + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma t} \cos(\omega_0 t) + jAe^{\sigma t} \sin(\omega_0 t) \quad (1-2-8)$$

式(1-2-8)表明, 一个复指数信号可以分解为实部、虚部两部分。其实部、虚部分别为幅度按指数规律变化的正弦信号。

(1) 若 $\sigma < 0$, 复指数信号的实部、虚部为衰减正弦信号, 波形如图 1-2-4(a)、图 1-2-4(b) 所示。

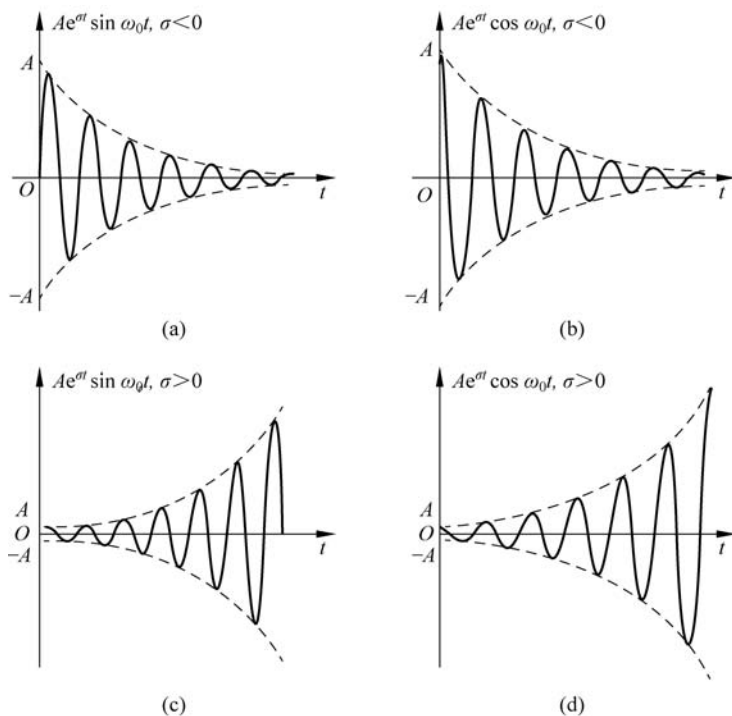


图 1-2-4 复指数信号

(2) 若 $\sigma > 0$, 复指数信号的实部、虚部为增幅正弦信号, 波形如图 1-2-4(c)、图 1-2-4(d) 所示。

(3) 若 $\sigma = 0$, 式(1-2-8)可写成虚指数信号, 即

$$f(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (1-2-9)$$

为等幅正弦信号。虚指数信号的一个重要特性是具有周期性, 其周期为 $2\pi/\omega_0$ 。

(4) 若 $\omega_0 = 0$, 则复指数信号成为一般的实指数信号。

(5) 若 $\sigma = 0, \omega_0 = 0$, 复指数信号的实部、虚部均与时间无关, 成为直流信号。

复指数信号在物理上是不可实现的, 但是它概括了多种情况。利用复指数信号可以表示常见的普通信号, 如直流信号、指数信号、正弦信号等。复指数信号的微分和积分仍然是复指数信号, 利用复指数信号可以使许多运算和分析简化。因此, 复指数信号是信号分析中非常重要的基本信号。

1.2.5 抽样信号

抽样信号的数学表达式为

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1-2-10)$$

定义域为 $(-\infty, +\infty)$,其波形如图 1-2-5 所示。抽样信号有如下性质。

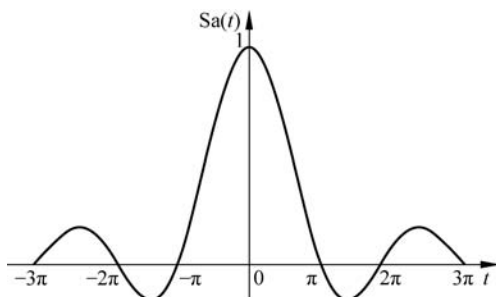


图 1-2-5 抽样信号

(1) 抽样信号为实变量 t 的偶函数, 即有 $\text{Sa}(t) = \text{Sa}(-t)$ 。

(2) $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Sa}(t) = \text{Sa}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ 。

(3) 当 $t = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $\text{Sa}(t) = 0$, 即 $t = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为 $\text{Sa}(t)$ 出现零点值的时刻。

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$ 。

(5) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{Sa}(t) = 0$ 。

1.2.6 MATLAB 实现

1. 正弦信号

正弦信号 $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ 和 $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, 分别用 MATLAB 内部函数 `cos` 和 `sin` 表示, 其调用形式为

```
A * cos(w0 * t + phi)
A * sin(w0 * t + phi)
```

若给定如下参数, 执行该程序, 可得如图 1-2-6 所示的波形。

```
A = 1;
w0 = 2 * pi;
phi = pi/4;
t = 0:0.0001:6;
f = A * sin(w0 * t + phi);
plot(t, f)
```

2. 指数信号

指数信号 $f(t) = Ae^{at}$ 在 MATLAB 中可用 `exp` 函数表示, 其调用形式为

$$y = A * \exp(a * t)$$

若给定如下参数,执行该程序,可得如图 1-2-7 所示波形。

```
A = 1;
a = -0.5;
t = 0:0.01:10;
f = A * exp(a * t);
plot(t,f)
```

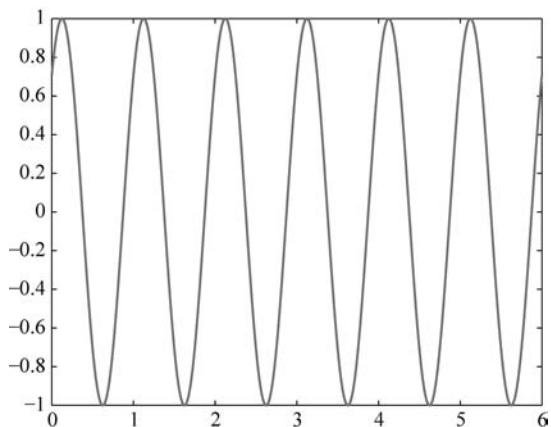


图 1-2-6 正弦信号的波形

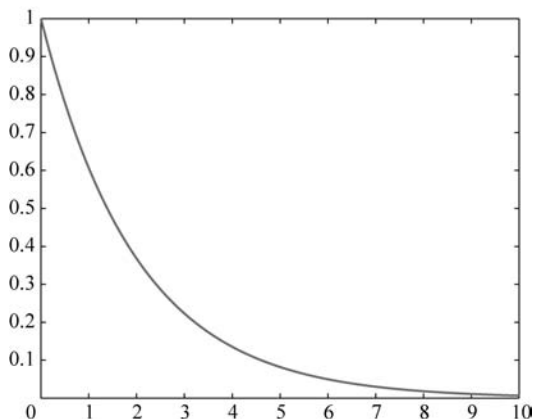


图 1-2-7 指数信号的波形

3. 虚指数信号

虚指数信号 $f(t) = A e^{j\omega t} = A(\cos\omega t + j\sin\omega t)$ 是时间 t 的复函数,需要用两个实信号来表示虚指数信号,即用模与相角或实部与虚部来表示虚指数信号随时间变化的规律。

下面是用 MATLAB 绘制虚指数信号的实用子函数。

```
function xzsu(w,n1,n2,a)
% n1:绘制波形的起始时间
% n2:绘制波形的终止时间
% w:虚指数信号角频率
% a: 虚指数信号的幅度
t = n1:0.01:n2;
X = a * exp(i * w * t);
Xr = real(X);
Xi = imag(X);
Xa = abs(X);
Xn = angle(X);
subplot(2,2,1),plot(t,Xr),axis([n1,n2, -(max(Xa) + 0.5),max(Xa) + 0.5]),
title('实部');
subplot(2,2,3),plot(t,Xi),axis([n1,n2, -(max(Xa) + 0.5),max(Xa) + 0.5]),
title('虚部');
subplot(2,2,2), plot(t,Xa),axis([n1,n2,0,max(Xa) + 1]),title('模');
subplot(2,2,4),plot(t,Xn),axis([n1,n2, -(max(Xn) + 1),max(Xn) + 1]),title('相角');
```

例如,绘制信号 $f(t) = 2e^{j\frac{\pi}{4}t}$ 的时域波形,只需输入如下程序,运行结果如图 1-2-8 所示。

```
xzsu(pi/4,0,15,2)
```

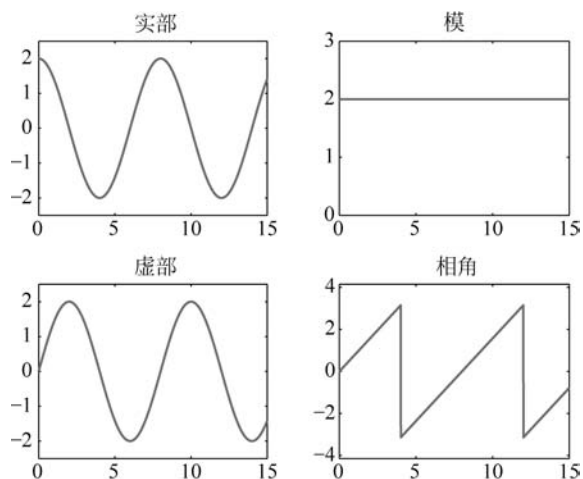


图 1-2-8 虚指数信号的波形

4. 复指数信号

绘制复指数信号 $f(t) = e^{-t} e^{j10t}$ 的程序如下,运行结果如图 1-2-9 所示。

```
t = 0:0.01:3;
a = -1;b = 10;
z = exp((a + i * b) * t);
subplot(2,2,1),plot(t,real(z)),title('实部'),
subplot(2,2,2),plot(t,imag(z)),title('虚部'),
subplot(2,2,3),plot(t,abs(z)),title('模'),
subplot(2,2,4),plot(t,angle(z)),title('相角');
```

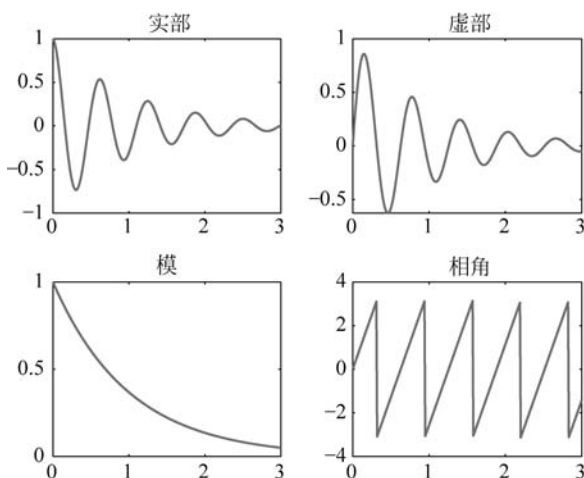


图 1-2-9 复指数信号的波形



视频讲解

1.3 信号的时域变换

信号在时域中的变换有反折、时移、尺度、倒相等。

1.3.1 反折

信号的时域反折,就是将信号 $f(t)$ 的波形以纵轴为轴翻转 180° 。

设信号 $f(t)$ 的波形如图 1-3-1(a) 所示。将 $f(t)$ 以纵轴为轴对折,即得反折信号 $f(-t)$ 。反折信号 $f(-t)$ 的波形如图 1-3-1(b) 所示。可见,若要求得 $f(t)$ 的反折信号 $f(-t)$,则必须将 $f(t)$ 中的 t 换为 $-t$,同时将 $f(t)$ 定义域中的 t 也必须换为 $-t$ 。

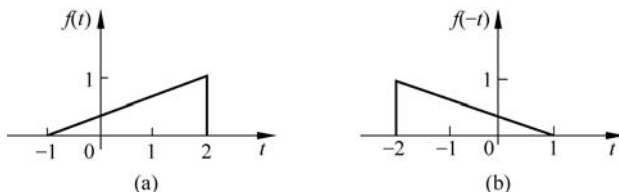


图 1-3-1 连续时间信号的反折

1.3.2 时移

信号的时移(也称平移),就是将信号 $f(t)$ 的波形沿时间 t 轴左、右平行移动,但波形的形状不变。

设信号 $f(t)$ 的波形如图 1-3-2(a) 所示。将 $f(t)$ 沿 t 轴平移 t_0 ,即得 $f(t-t_0)$, t_0 为实数。当 $t_0 > 0$ 时,为沿 t 轴正方向移动(右移);当 $t_0 < 0$ 时,为沿 t 轴负方向移动(左移)。时移信号 $f(t-t_0)$ 的波形如图 1-3-2(b)、(c) 所示(图中 $t_0 = \pm 1$)。可见,若要求得 $f(t)$ 的时移信号 $f(t-t_0)$,则必须将 $f(t)$ 中的 t 换为 $t-t_0$,同时将 $f(t)$ 定义域中的 t 也必须换为 $t-t_0$ 。

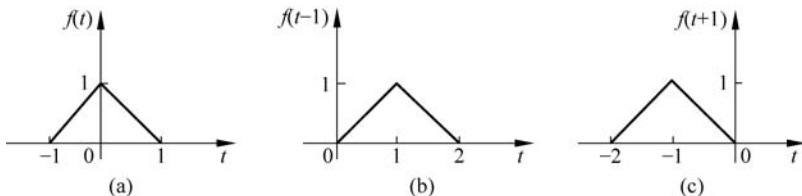


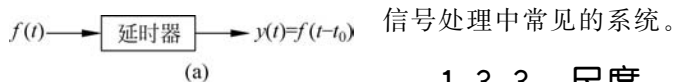
图 1-3-2 连续时间信号的时移

例如,在雷达系统中,雷达接收到的目标回波信号比发射信号延迟了时间 t_0 ,利用该延迟时间 t_0 可以计算出目标与雷达之间的距离。雷达接收到的目标回波信号就是延时信号。

信号的时移变换用时移器(也称延时器)实现,如图 1-3-3(a) 所示。图中 $f(t)$ 是延时器的输入信号, $y(t) = f(t-t_0)$ 是延时器的输出信号,可见输出信号 $y(t)$ 较输入信号 $f(t)$ 延迟了时间 t_0 。

需要指出的是,当 $t_0 > 0$ 时,延时器为因果系统,是可以由硬件实现的;当 $t_0 < 0$ 时,延

时器是非因果系统,此时的延时器变成预测器,如图 1-3-3(b)所示。延时器和预测器都是



1.3.3 尺度



图 1-3-3 延时器和预测器

信号的尺度变换,就是将信号 $f(t)$ 变化到 $f(at)$ ($a>0$),即信号 $f(t)$ 在时间轴上的扩展或压缩,但纵轴上的值不变。

设信号 $f(t)$ 的波形如图 1-3-4(a)所示。将变量 at 置换 $f(t)$ 中的 t , 所得信号 $f(at)$ 即为信号 $f(t)$ 的尺度变换信号,其中 a 为正实数。若 $0<a<1$,则表示将 $f(t)$ 的波形在时间 t 轴上扩展到 a 倍(纵轴上的值不变),如图 1-3-4(b)所示(图中取 $a=\frac{1}{2}$);若 $a>1$,则表示将 $f(t)$ 的波形在时间 t 轴上压缩 $\frac{1}{a}$ 倍(纵轴上的值不变),如图 1-3-4(c)所示(图中取 $a=2$)。

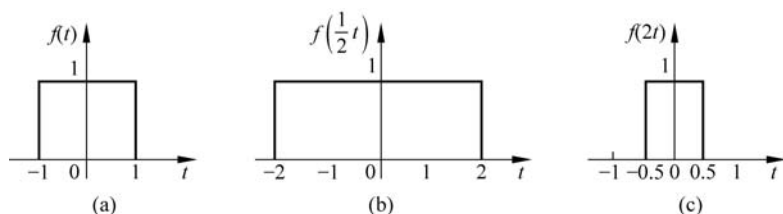


图 1-3-4 信号的尺度变换

1.3.4 倒相

信号的倒相(也称反相)就是将信号 $f(t)$ 的波形以横轴为轴翻转 180° 。

设信号 $f(t)$ 的波形如图 1-3-5(a)所示。将 $f(t)$ 以横轴为轴对折,即得倒相信号 $-f(t)$ 。倒相信号 $-f(t)$ 的波形如图 1-3-5(b)所示。可见,信号进行倒相时,横轴上的值不变,仅是纵轴上的值改变了正负号,正值变成了负值,负值变成了正值。

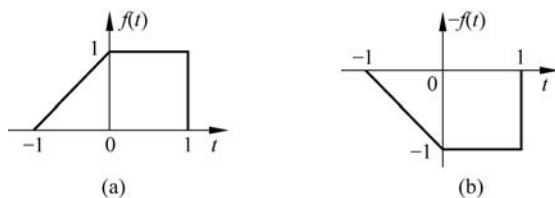


图 1-3-5 信号的倒相

信号的倒相用倒相器实现,如图 1-3-6 所示。在图 1-3-6 中, $f(t)$ 为倒相器的输入信号, $y(t)=-f(t)$ 为倒相器的输出信号。



图 1-3-6 倒相器

例 1-2 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 1-3-7(a)所示,试画出信号 $f(-2-t)$ 的波形。

解: $f(t) \rightarrow f(-2-t) = f[-(t+2)]$ 可分解为

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow -t]{\text{反折}} f(-t) \xrightarrow[t \rightarrow t+2]{\text{时移}} f[-(t+2)]$$

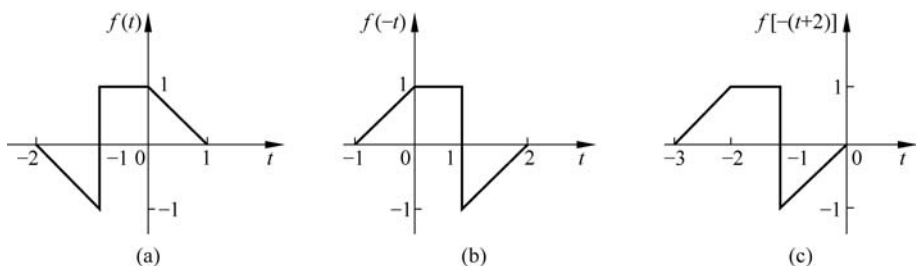


图 1-3-7 信号的反折与时移

即先有 $f(t)$ 通过反折 ($t \rightarrow -t$) 得 $f(-t)$, 再由 $f(-t)$ 通过延时 ($t \rightarrow t+2$) 得 $f[-(t+2)]$, 其变换过程如图 1-3-7 的 (a) $\rightarrow$ (b) $\rightarrow$ (c) 所示。值得注意的是, 由信号 $f(-t)$ 变化为 $f[-(t+2)]$ 时, 一定要把 $-t$ 前的符号提出来, 使 t 前的系数为 1。

例 1-3 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 1-3-8(a) 所示, 试画出信号 $f(2-2t)$ 的波形。

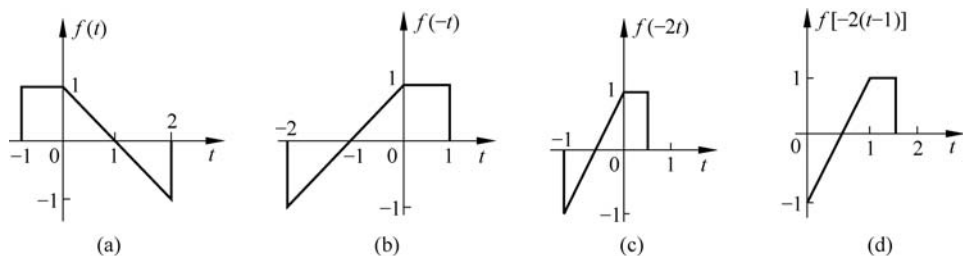


图 1-3-8 信号的反折、尺度与时移

解: $f(t) \rightarrow f(2-2t) = f[-2(t-1)]$ 可分解为

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow -t]{\text{反折}} f(-t) \xrightarrow[t \rightarrow 2t]{\text{尺度}} f(-2t) \xrightarrow[t \rightarrow t-1]{\text{时移}}$$

其变换过程如图 1-3-8 的 (a) $\rightarrow$ (b) $\rightarrow$ (c) $\rightarrow$ (d) 所示。

从上面两例中可以看出, 信号的时域变换过程只是函数自变量的简单变换, 但变换前后信号端点的函数值不变。因此, 可以通过端点函数值不变这一关系来确定变换前后图形中各端点的位置。

设变换前的信号为 $f(t)$, 变换后为 $f(at+b)$, t_1 和 t_2 对应变换前信号 $f(t)$ 的左、右端点的坐标, t_{11} 和 t_{22} 对应变换后信号 $f(at+b)$ 的左、右端点的坐标。由于信号变换前后的端点函数值不变, 故有

$$f(t_1) = f(at_{11} + b) \quad (1-3-1)$$

$$f(t_2) = f(at_{22} + b) \quad (1-3-2)$$

根据上述关系可以求解出变换后信号的左、右端点的坐标 t_{11} 和 t_{22} , 即

$$t_1 = at_{11} + b \Rightarrow t_{11} = \frac{1}{a}(t_1 - b) \quad (1-3-3)$$

$$t_2 = at_{22} + b \Rightarrow t_{22} = \frac{1}{a}(t_2 - b) \quad (1-3-4)$$

上述方法过程简单, 特别适合信号从 $f(mt+n)$ 变换到 $f(at+b)$ 的过程。根据信号变

换前后的端点函数值不变的原理,可推导出如下计算公式:

$$f(mt_1 + n) = f(at_{11} + b) \quad (1-3-5)$$

$$f(mt_2 + n) = f(at_{22} + b) \quad (1-3-6)$$

所以

$$mt_1 + n = at_{11} + b \Rightarrow t_{11} = \frac{1}{a}(mt_1 + n - b) \quad (1-3-7)$$

$$mt_2 + n = at_{22} + b \Rightarrow t_{22} = \frac{1}{a}(mt_2 + n - b) \quad (1-3-8)$$

即得到变换后信号的左、右端点的坐标 t_{11} 和 t_{22} 。

1.3.5 MATLAB 实现

MATLAB 的两种表示连续信号的方法均可实现连续信号的时域变换,但用符号运算的方法则较为简便。下面分别介绍各种变换的符号运算实现方法。

1. 时移

MATLAB 实现为

```
y = subs(f, t, t - t0);
ezplot(y)
```

其中, f 为符号表达式表示的连续信号, t 是符号变量, subs 命令则将连续信号中的时间变量 t 用 $t - t_0$ 替换。

2. 反折

MATLAB 实现为

```
y = subs(f, t, -t),
ezplot(y)
```

其中, f 为符号表达式表示的连续信号, t 是符号变量。

3. 尺度

MATLAB 实现为

```
y = subs(f, t, a * t);
ezplot(y)
```

其中, f 为符号表达式表示的连续信号, t 是符号变量。

4. 倒相

MATLAB 实现为

```
y = -f;
ezplot(y)
```

其中, f 为符号表达式表示的连续信号。

例 1-4 设信号 $f(t) = \left(1 + \frac{t}{2}\right) \times [u(t+2) - u(t-2)]$, 用 MATLAB 求 $f(t+2)$, $f(t-2)$, $f(-t)$, $f(2t)$, $-f(t)$, 并绘出其时域波形(这里要用到单位脉冲子函数 heaviside)。