

第5章 集合论基础

本章导引

集合论作为数学中最富创造性的伟大成果之一，是 19 世纪末由德国数学家格奥尔格·康托尔^①创立起来的。现在，集合已经发展成为数学及其他各学科不可缺少的描述工具，并且成为数学中最基本的概念。在计算机科学中，集合论不仅可以表示数和数的运算，还可以应用于非数值领域中信息的表示和处理，在程序设计语言、数据结构、操作系统、数据库以及人工智能等课程中有着广泛的应用。

一般认为，康托尔建立的集合体系属于朴素集合论体系，将满足相关性质的个体放在一起组成集合。但在康托尔体系中隐含着矛盾，这就是著名的理发师问题^②。为了消除悖论，产生了集合论的公理体系。

5.1 集合的概念与表示

定义 5-1 把具有某种性质的个体汇集在一起，就形成一个集合（set）。在集合中，个体通常被称为元素（element）或成员。

例如，所有企鹅汇集在一起形成的集合；所有自然数形成的集合；所有鲁东大学的学生汇集在一起形成的集合等。

一般情况下，用大写字母 $A, B, C, \dots, A_1, B_1, C_1, \dots$ 表示集合，而集合中的元素通常用小写字母 $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots$ 表示。如果元素 a 是集合 A 中的元素，记为 $a \in A$ ，读作“ a 属于 A ”；如果元素 a 不是集合 A 中的元素，记为 $a \notin A$ ，读作“ a 不属于 A ”。

例 5-1 （1）全体自然数构成的全体，称为自然数集合，用 $\mathbf{N}$ 表示。

（2）全体整数构成的全体，称为整数集合，用 $\mathbf{Z}$ 表示。

（3）全体实数、有理数、复数构成的全体，分别称为实数集合、有理数集合、复数集合，分别用 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{C}$ 表示。

（4）C 语言中的所有标识符构成的集合。

（5）全体英文字母构成的集合。

□

在集合中，元素之间是互不相同的，相同的元素只能出现一次。同一个元素在集合中的出现没有先后顺序，即集合 $\{a, b\}$ 和集合 $\{b, a\}$ 是同一个集合。对元素而言，要么属

① 格奥尔格·康托尔（Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp, 1845—1918），德国数学家，在数学领域的主要贡献是集合论和超穷数理论。

② 理发师问题：某理发师在理发店门口贴了一张告示——我只为那些不给自己理发的人理发。请问谁给这位理发师理发？

于某个集合, 要么不属于该集合, 二者必居其一。

一般来说, 集合有两种表示方法: 列举法和描述法。

列举法。 当一个集合中元素的个数有限时, 通常将集合中的所有元素列举出来, 这种方法称为列举法, 又称枚举法。例如:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$$

等, 都是用列举法表示的集合。

描述法。 通常通过刻画集合中元素具备的性质来表示集合, 这种方法称为描述法。一般地, 用谓词 $P(x)$ 表示 x 具备的性质, 用 $\{x|P(x)\}$ 表示具有性质 P 的全体元素构成的集合。例如:

$\mathbf{R} = \{x | x \text{ 是一个实数}\}$ 表示实数集合;

$\mathbf{N} = \{x | x \text{ 是正整数或零}\}$ 表示自然数集合;

$K = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge a \leq x \leq b\}$ 表示区间 $[a, b]$ 中的所有实数组成的集合。

例 5-2 用列举法表示下列集合。

- (1) 不大于 10 的非负偶数组成的集合。
- (2) $y = 2x + 1$ 与 y 轴的交点组成的集合。
- (3) 式子 $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}$ ($a \neq 0, b \neq 0$) 的所有值组成的集合。

解:

(1) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 。

(2) $\{(0, 1)\}$ 。

(3) 根据 a 、 b 的正负值, 对上述情况进行如下 3 种情况的分析。

① 当 $a > 0$ $b > 0$ 时, $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} = 2$;

② 当 $a > 0$ $b < 0$ 或 $a < 0$ $b > 0$ 时, $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} = 0$;

③ 当 $a < 0$ $b < 0$ 时, $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} = -2$ 。

因此, 上述集合用列举法表示为 $\{2, 0, -2\}$ 。

□

例 5-3 用描述法表示下列集合。

- (1) 正偶数集。
- (2) 被 3 除余 2 的正整数的集合。
- (3) 平面直角坐标系上坐标轴上的点组成的集合。

解:

(1) $A = \{a \in \mathbf{Z}^+, a \bmod 2 = 0\}$;

(2) $B = \{b \in \mathbf{Z}^+ | b \bmod 3 = 2\}$;

(3) $C = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}, xy = 0\}$ 。

□

5.2 集合之间的关系

定义 5-2 设 A 、 B 是两个集合, 如果集合 A 中的每个元素都是集合 B 中的元素, 称集合 A 是集合 B 的子集(subset), 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 如果 A 不是 B 的子集, 记作 $A \not\subseteq B$ 。形式化表示如下:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$$

例 5-4 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 4\}$, 则有 $A \subseteq B$, $C \subseteq B$, $A \subseteq A$, $C \not\subseteq A$ 等成立。

□

从定义 5-2 可以看出, 对任意集合 A 来讲, $A \subseteq A$ 成立。

定义 5-3 设 A 、 B 是两个集合, 如果 A 是 B 的子集, 同时 B 也是 A 的子集, 称两集合相等^①, 即

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

如果集合 A 和 B 不相等, 记为 $A \neq B$, 即

$$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A$$

如果集合 A 是集合 B 的子集, 并且 $A \neq B$, 则称集合 A 是集合 B 的真子集(proper subset), 记为 $A \subset B$, 即

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

定义 5-4 不含任何元素的集合称为空集(empty set), 记为 $\emptyset$ 。空集可以符号化表示如下。

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

需要说明的是, 空集是客观存在的。例如, 集合 $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\}$ 就是空集, 因为在实数范围内 $x^2 + 1 = 0$ 是不成立的。

定理 5-1 空集是一切集合的子集。

分析: 证明空集是任意集合的子集, 只能从子集的定义出发。对空集中的任意元素而言, 判断它在给定的任意集合中。由于空集中不含任何元素, 因此这里需要利用命题逻辑中蕴涵联结词的相关性质, 如果前提不成立, 蕴涵式一定为真。

证明:

由于空集中不含有任何元素, 因此 $x \in \emptyset$ 为假, 进而对任意集合 A 而言, 必有 $x \in \emptyset \rightarrow x \in A$ 为真, 即对任意元素 x , $x \in \emptyset \rightarrow x \in A$ 为永真式。因此, $\emptyset \subseteq A$ 成立。

□

推论 5-1 空集是唯一的。

分析: 对于唯一性的判断, 通常采用反证法进行。利用反证法的思路是, 假设存在两个空集 $\emptyset_1$ 、 $\emptyset_2$, 通过证明 $\emptyset_1 = \emptyset_2$ 来证明空集的唯一性。证明两个集合相等可以根据定

^① 这种描述也称集合的外延性定理, 即两个集合相等, 当且仅当两个集合中含有的元素相等。

义 5-3, 通过证明二者互为子集来证明, 而二者互为子集可以利用定义 5-2 来证明。

证明: 略。

定义 5-5 在讨论的范围内, 一切元素构成的集合称为全集, 用 U 表示。

集合论中的全集与谓词逻辑中的全总个体域不一样, 全总个体域是绝对的, 包含了宇宙间的一切个体, 而集合论中的全集是相对的, 是相对唯一的。

定义 5-6 集合 A 中元素的个数称为集合的基数或势 (cardinality), 记为 $|A|$ 。如果一个集合的基数是有限的, 称该集合为有限集合, 反之称其为无限集合。

常见的集合, 例如, 自然数集合 $\mathbf{N}$ 、整数集合 $\mathbf{Z}$ 、有理数集合 $\mathbf{Q}$ 、实数集合 $\mathbf{R}$ 等都是无限集合。在这些集合中, 自然数集合称为可数集合 (enumerable set), 因为它的记法与常用的记法一致, 其元素可以一个一个地数出来。

定义 5-7 设有 A 、 B 两个集合, 如果存在一一映射: $A \rightarrow B$, 则称集合 A 和 B 是等势的。凡与自然数集合 $\mathbf{N}$ 等势的集合, 称为可数集合 (countable set) 或可列集。可列集的基数记为 $\aleph_0$, 读作“阿列夫零”。

例 5-5 证明以下集合是可数集合。

(1) $O^+ = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \bmod 2 = 1\}$ 。

(2) 整数集合 $\mathbf{Z}$ 。

(3) 素数集合。

(4) 有理数集合 $\mathbf{Q}$ 。

分析: 要证明上述集合是可数集合, 只需在上述集合与自然数集合之间建立一一映射即可。

证明:

(1) 集合 O^+ 是正奇数集合, 可以在该集合与自然数之间建立如下的一一映射:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots & 2n+1 & \cdots \end{array}$$

可见, 集合 O^+ 是可数集合。

(2) 在整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集合 $\mathbf{N}$ 之间可以建立如下的一一映射:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 2n-1 & 2n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & \cdots & n & n & \cdots \end{array}$$

可见, 整数集合 $\mathbf{Z}$ 也是可数集合。

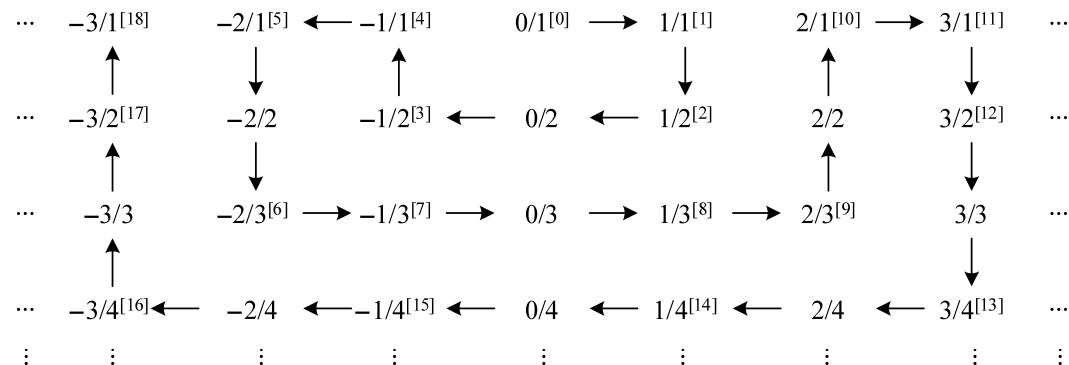
(3) 在素数集合与自然数集合之间可以建立如下的一一映射:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & \cdots \end{array}$$

可见, 素数集合也是可数集合。

(4) 有理数中的任何数字可以表示为分数 p/q 的形式 (p, q 是整数且 $q \neq 0$)。因此可以将有理数中的元素以 p/q 的形式排列成一个有序图形, 然后从 $0/1$ 开始, 沿着一条

穿过整个图形的路径把所经过的有理数与自然数配对:



可见, 有理数集合 Q 也是可数集合。

9

5.3 集合的运算

定义 5-8 设 A 、 B 为两个集合, 则

(1) 由 A 和 B 的全体元素构成的集合称为 A 和 B 的并集 (union), 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(2) 由 A 和 B 的公共元素构成的集合称为 A 和 B 的交集(intersection), 记为 $A \cap B$,

即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(3) 由属于集合 A 但不属于集合 B 的元素构成的集合称为 A 和 B 的差集 (difference), 记为 $A - B$, 即

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(4) 由属于集合 A 但不属于集合 B , 或者属于集合 B 而不属于集合 A 的元素构成的集合, 称为集合 A 和 B 的对称差 (symmetric difference), 记为 $A \oplus B$, 即

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

(5) 设 U 为全集, 对任意 $A \subseteq U$, 称 $U - A$ 为集合 A 的补集 (complement), 记为 $\bar{A}$, 即

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

例 5-6 设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, 则有

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

$$A \oplus B = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$$

$$\bar{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\bar{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

□

例 5-7 满足 $\{1, 2\} \cup A = \{1, 2, 3\}$ 的集合 A 的个数有多少？

解：通过并集运算的分析，得知集合 A 中必须包含 3，而对于元素 1 和 2 可以包含，也可以不包含。因此，集合 A 可以是以下 4 种情况： $\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ 。即满足上述运算的集合 A 的个数为 4 个。

□

例 5-8 已知 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ， $A = \{2, 3, 5, 6\}$ ， $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ ，计算 $A \cap (U - B)$ 的值。

解：根据差集运算的定义，有

$$U - B = \{2, 5, 8\}$$

因此有 $A \cap (U - B) = \{2, 5\}$ 。

□

上述集合之间的运算可以用韦恩^①图 (Venn diagram) 直观地表示，韦恩图是用封闭曲线表示集合及其关系的图形，其构造方式如下：用一个矩形内部的点代表全集 U ，用矩形内部的圆或者其他封闭曲线的内部表示 U 的子集，用阴影区域表示集合之间运算结果构造的新的集合。

设集合 A 、 B 是全集 U 的子集，图 5-1 给出了集合的交集、并集、差集、对称差以及补集的韦恩图。

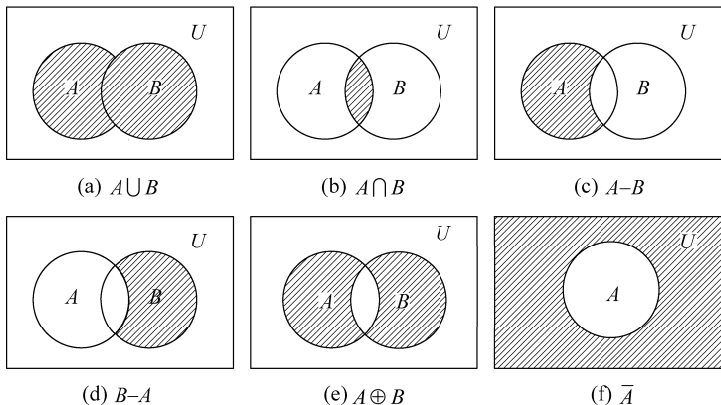


图 5-1 集合运算的韦恩图表示

定义 5-9 设 A 是一个集合，由 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集(power set)，记为 $\rho(A)$ 或 2^A ，即

$$\rho(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

例 5-9 设 $A = \{1, 2, 3\}$ ，求该集合的幂集。

^① 韦恩 (Venn, 1834—1923)，英国数学家，在概率论和逻辑学方面有所贡献，曾澄清了布尔在 1854 年的《思维规律的研究》中一些含混的概念。

解:

按 A 的全部子集从小到大进行分类。

含有 0 个元素的子集, 即空集, 只有 C_3^0 个: $\emptyset$ 。

含有 1 个元素的子集, 有 C_3^1 个: $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 、 $\{3\}$ 。

含有 2 个元素的子集, 有 C_3^2 个: $\{1,2\}$ 、 $\{1,3\}$ 、 $\{2,3\}$ 。

含有 3 个元素的子集, 有 C_3^3 个: $\{1,2,3\}$ 。

所以, 集合 $A=\{1,2,3\}$ 的全部子集总数为

$$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 = 8$$

集合 A 的幂集为

$$\rho(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

□

定理 5-2 设集合 A 中有 n 个元素, 则 $\rho(A)$ 中有 2^n 个元素。

证明:

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

□

由于 $\rho(A)$ 中元素的个数即为集合 A 的子集个数, 即集合 A 有 2^n 个不同的子集, 读者可以进一步考虑, 集合 A 有多少个真子集? 有多少个非空子集? 又有多少个非空真子集呢?

进一步考虑, 如何通过编程求出一个集合的幂集呢? 这是程序设计中非常经典的一个问题——遍历解空间。可以发现, 含有 3 个元素的集合幂集中有 8 个集合, 含有 4 个元素的集合幂集中有 16 个集合, 恰好对应深度为 3 和 4 的完全二叉树的叶结点数目。将该问题与数的进制转换思想结合起来, 可以得到集合的幂集, 即含有 3 个元素的集合幂集中有 8 个元素, 可以将元素是否在相应的子集中用 1 和 0 表示, 则幂集中的 8 个元素可以用长度为 3 的二进制串来表示, 分别表示为 000, 001, $\cdots$, 111, 对应 0~7 的二进制; 而含有 4 个元素的集合幂集中有 16 个元素, 可以用长度为 4 的二进制串来表示, 分别表示为 0000, 0001, $\cdots$, 1111, 对应 0~15 的二进制。程序 5-1 如下所示。

程序 5-1 计算集合的幂集

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define N 3
int main()
{
    int a[N]={1,2,3};
    int number,temp;
    int i;

    for(number=0;number<(int)pow(2.0,N);number++)
    {
```

```

temp=number;
for(i=0;i<N;i++)
{
    if(temp%2)
        printf("%d",a[i]);
    temp=temp/2;
}
printf("\n");
}
return 0;
}

```

程序运行结果如图 5-2 所示。

```

1
2
12
3
13
23
123

```

图 5-2 程序运行结果

根据集合的运算，可以得到如下有关运算的许多性质。

定理 5-3 设全集为 U ， A 、 B 为 U 的子集，则有如下恒等式成立。

- (1) 交换律： $A \cap B = B \cap A$ ， $A \cup B = B \cup A$ 。
- (2) 结合律： $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ， $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 。
- (3) 分配律： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ， $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。
- (4) 吸收律： $A \cap (A \cup B) = A$ ， $A \cup (A \cap B) = A$ 。
- (5) 幂等律： $A \cap A = A$ ， $A \cup A = A$ 。
- (6) 德摩根律： $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ， $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 。
- (7) 矛盾律： $A \cap \overline{A} = \emptyset$ 。
- (8) 排中律： $A \cup \overline{A} = U$ 。
- (9) 零律： $A \cup U = U$ ， $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。
- (10) 同一律： $A \cup \emptyset = A$ ， $A \cap U = A$ 。
- (11) 双重否定律： $\overline{\overline{A}} = A$ 。

对上述恒等式的证明，可以采用韦恩图来说明，也可以采用两个集合相等的定义进行严格证明。以 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 为例说明上述恒等式的证明过程。

证明：

为了证明 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ，考虑到恒等式两边都是集合，因此根据两个集合相等的定义，需要证明二者互为子集，即 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ 和 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ ，下面分别证明。

- (1) 对任意的 $x \in \overline{A \cup B}$ ，有 $x \notin A \cup B$ ，因此有 $x \notin A$ 和 $x \notin B$ 都成立，即 $x \in \overline{A}$ ， $x \in \overline{B}$ 。

因而有 $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ 。因此, $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

(2) 对任意的 $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, 有 $x \in \overline{A}$ 和 $x \in \overline{B}$ 都成立, 即 $x \notin A$, $x \notin B$ 。因而有 $x \notin A \cup B$, 即 $x \in \overline{A \cup B}$ 。因此, $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ 。

□

5.4 序偶与笛卡儿积

定义 5-10 设有两个元素 x, y , 二者按照一定的顺序组成的二元组称为序偶(ordered pair), 记为 $\langle x, y \rangle$, 其中 x 称为序偶的第一元素, y 称为序偶的第二元素。

例 5-10 平面直角坐标系中点的坐标就是序偶, 如 $(1, 2)$ 、 $(-1, 3)$ 等; $\langle$ 操作码, 地址码 $\rangle$ 这条单地址指令也是序偶。

在序偶中, 元素是有顺序的, 即两个序偶 $\langle x, y \rangle$ 和 $\langle u, v \rangle$ 相等, 当且仅当它们的第一元素和第二元素都相等。

例 5-11 设序偶 $\langle x+2, y-1 \rangle = \langle 2y-1, 2x+3 \rangle$, 根据序偶相等的条件, 可知

$$x+2=2y-1, \quad y-1=2x+3$$

解得 $x=-5/3, y=2/3$ 。

考虑序偶反映的是两个元素按照一定的顺序构成的二元组, 可以在此基础上进行推广, 得到 n 元有序组的概念。

定义 5-11 设有 n 个元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 它们按照一定的顺序组成的 n 元组称为 n 元有序组, 记为 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ 。

同样, 两个 n 元有序组 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ 和 $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ 相等, 当且仅当 $a_i = b_i$, 其中 $1 \leq i \leq n$ 。

定义 5-12 设 A, B 为两任意集合, 以集合 A 中的元素为第一元素, 集合 B 中的元素为第二元素组成序偶, 所有这样的序偶构成的集合, 称为 A 与 B 的笛卡儿^①积(Cartesian product)或叉积, 记为 $A \times B$, 符号化表示为

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B \}$$

例 5-12 (1) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{a, b\}$, 则有

$$A \times B = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle \}$$

(2) 设 $\mathbf{R}$ 为实数集合, 则 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbf{R} \}$ 是平面直角坐标系上所有点构成的集合。

可以证明, $|A \times B| = |A| \times |B|$ 。当 $A = B$ 时, $A \times A$ 可以表示为 A^2 。

定理 5-4 (1) 笛卡儿积不满足交换律, 即, 如果 $A \neq B$, 则 $A \times B \neq B \times A$ 。

① 勒内·笛卡儿(René Descartes, 1596—1650), 法国著名的哲学家、物理学家、数学家、神学家, 他对现代数学的发展做出重要的贡献, 因将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父。笛卡儿是二元论的代表, 留下名言“我思故我在”, 提出了“普遍怀疑”的主张, 是欧洲近代哲学的奠基人之一, 黑格尔称他为“现代哲学之父”。他的哲学思想深深影响了之后的几代欧洲人, 开拓了所谓“欧陆理性主义”哲学。笛卡儿自成体系, 融唯物主义与唯心主义于一体, 在哲学史上产生了深远的影响, 同时, 他又是一位勇于探索的科学家, 所建立的解析几何在数学史上具有划时代的意义。笛卡儿堪称 17 世纪的欧洲哲学界和科学界最有影响的巨匠之一, 被誉为“近代科学的始祖”。

(2) 笛卡儿积对集合的交运算和并运算满足分配律, 即

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

该定理中的(1)是显然的, 以(2)中的前两个公式为例对分配律进行证明。

分析: 要证明笛卡儿积对集合的交运算和并运算满足分配律, 关键在于要清楚笛卡儿积的本质是集合, 不同的是集合中的元素是序偶。而要证明两个集合相等, 只需证明二者互为子集即可。

证明:

(1) 证明 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 。

对 $A \times (B \cup C)$ 中的任意序偶 $\langle a, b \rangle$, 根据笛卡儿积的定义, 有 $a \in A$, $b \in B \cup C$ 。根据集合并集的定义, 知 $b \in B$ 或 $b \in C$ 。进一步可得 $\langle a, b \rangle \in A \times B$ 或 $\langle a, b \rangle \in A \times C$ 。即 $\langle a, b \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$, 因此 $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ 。

对 $(A \times B) \cup (A \times C)$ 中的任意序偶 $\langle a, b \rangle$, 根据集合并集的定义, 有 $\langle a, b \rangle \in A \times B$ 或 $\langle a, b \rangle \in A \times C$, 即 $a \in A, b \in B$ 或 $a \in A, b \in C$ 。所以 $a \in A$, $b \in B \cup C$ 。因此有 $\langle a, b \rangle \in A \times (B \cup C)$ 。所以有 $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$ 。

根据上述两点, 可以得到 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 。

(2) 证明 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ 。

对 $A \times (B \cap C)$ 中的任意序偶 $\langle a, b \rangle$, 根据笛卡儿积的定义, 可得 $a \in A, b \in B \cap C$ 。根据集合交集的定义, 有 $b \in B$, $b \in C$ 。因而有 $\langle a, b \rangle \in A \times B$, $\langle a, b \rangle \in A \times C$ 。所以 $\langle a, b \rangle \in (A \times B) \cap (A \times C)$ 。因此, $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ 。

对 $(A \times B) \cap (A \times C)$ 中的任意序偶 $\langle a, b \rangle$, 根据交集的定义, 可得 $\langle a, b \rangle \in A \times B$, $\langle a, b \rangle \in A \times C$ 。因此有 $a \in A$, $b \in B$, $b \in C$ 成立, 即 $a \in A$, $b \in B \cap C$ 。所以 $\langle a, b \rangle \in A \times (B \cap C)$ 。因此, $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$ 。

□

与序偶到 n 元有序组的扩展类似, 可以将笛卡儿积的定义从两个集合推广到 n 个集合。

定义 5-13 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为任意 n 个集合, 它们的笛卡儿积为由这些集合中的元素构成的所有 n 元有序组构成的集合, 表示为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, 形式化表示如下:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

5.5 容斥原理

定义 5-14 容斥, 指在计算某类物的数目时, 要排斥那些不应包含在这个数目中的数目, 但同时要包容那些被错误排斥了的数目作为补偿。这种原理称为容斥原理 (the principle of inclusion-exclusion), 又称包含排斥原理 (include exclusion principle)。

定理 5-5 设 A, B 为任意有限集合, 则有

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$