第3章 chapter 3

离散时间信号与系统的时域分析

3.1 引　言

前面讨论了连续时间信号与系统。在理论研究与实际工程应用中,离散时间信号与系统同样占有重要的地位。离散时间信号与系统的研究可以追溯到17世纪发展起来的经典数值分析技术,它为离散时间信号与系统的分析奠定了数学基础。在20世纪40年代到50年代抽样数据控制系统的研究取得重大进展后,人们开始了离散时间信号与系统的理论研究。20世纪60年代以后,计算机科学的发展与应用促使离散时间信号与系统的理论研究和实践进入一个新阶段,研究人员开始应用数字方法处理地震信号和大气数据,利用数字计算机计算信号的功率谱。1965年,J.W.Cooley和J.W.Tukey提出了著名的快速傅里叶变换算法(Fast Fourier Transform,FFT)。FFT算法使得许多离散时间系统分析方法的计算量大大减少,从而在实际中得到了广泛应用。FFT不仅是一种快速计算方法,它的思想还有助于启发人们创造新的理论和设计方法,极大地促进了离散时间系统理论的发展。与此同时,微电子学的发展使得计算机的运行速度更快、体积更小,低成本、高性能的离散时间系统完全有可能实现,从而衍生出新的学科——数字信号处理,人们开始以一种全新的观点认识和研究信号与系统分析中遇到的问题。

20世纪后期,数字信号处理技术迅速发展,在诸多领域得到广泛应用。例如,在语音处理、图像处理、通信、数字电视、雷达、声呐、控制、生物医学、地球物理学等许多领域的应用已颇见成效。随着应用技术的不断发展,离散时间信号与系统的理论体系日益丰富和完善。

离散时间信号与系统的分析与连续时间信号与系统的分析有很多类似的理论,这些理论是平行对应的。例如,在连续时间信号与系统中,LTI系统的数学模型是常系数微分方程;与之相对应,在离散时间信号与系统中,LTI系统的数学模型是常系数差分方程。差分方程与微分方程的求解方法相类似,求解步骤有着对应的关系。在连续时间系统的时域分析中,卷积运算在研究系统对信号的处理时有着重要的意义;与之相对应,离散时间信号与系统的理论也存在卷积(或称卷积和)运算。在连续时间信号与系统分析中,常常利用拉普拉斯变换或傅里叶变换将信号与系统转换到变换域中进行分析;同样,离散时间信号与系统的分析也可以在变换域中进行,所采用的变换方法为z变换和离散

傅里叶变换。

读者在学习中可以参照连续时间信号与系统中的有关概念和方法,这将有助于理解离散时间信号与系统的分析理论。但必须注意,离散时间信号与系统在数学模型的建立和求解、系统性能的分析以及系统的实现等各方面都存在独特的属性。例如,离散时间信号只在一些离散的时刻点上有定义;离散时间信号的傅里叶变换在频域存在周期性,而这种频域的周期性对连续时间信号的傅里叶变换却不一定存在。

随着微电子学和计算机技术的发展,与连续时间系统相比,离散时间系统更易于实现,便于大规模集成,可靠性更好,在足够字长的条件下可以设计更高的精度。许多离散时间系统是由可编程器件和软件实现的,所以系统实现更灵活,系统的升级维护更简单。但并非离散时间系统可以完全取代连续时间系统,自然界中要处理的信号大多为连续时间信号,借助离散时间系统处理连续时间信号,必须经过 A/D 转换和 D/A 转换,在转换过程中和转换前后不可避免地要进行连续时间信号的处理。另外,在高频信号处理中,如果工作频率特别高,有时直接采用数字集成器件难以取得良好的效果,在这种情况下,连续时间系统将是不可取代的。此外,就复杂程度而言,有时采用连续时间系统可能会更加简单。

3.2 离散时间信号

首先,要明确什么是离散时间信号,它与连续时间信号有怎样的区别。离散时间信号是指在某些不连续的时刻有定义,而在其他时刻没有定义的信号,简称离散信号。函数值的离散时间间隔通常是均匀的,设间隔为 T,则离散时间信号可表示为 $x(nT)(n=-\infty,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,+\infty)$,如图 3-2-1 所示。显然,离散时间信号 $x(nT)$只在 $t=nT$ 上有定义,在其他时刻没有定义,而不是幅度为 0。从图 3-2-1 可以看出,$x(nT)$是按时间顺序排列的,所以,离散时间信号又称为序列,本书对这两个概念不加区分。

$x(nT)$的时间间隔是均匀的,在离散时间信号的分析和处理中,往往不需要考虑 T 的大小,因为它不影响分析的过程和结果,所以,一般将 $x(nT)$表示为 $x(n)(n=-\infty,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,+\infty)$,通常将某序号 n_0 的函数值称为 $x(n)$在样点 n_0 上的样值。离散时间信号 $x(n)$可以由连续时间信号等间隔抽样获得,如图 3-2-2 所示,序列 $x(n)$是由虚线所表示的连续时间信号等间隔抽样所得的。必须说明的是,$x(n)$仅对 n 的整数值才有定义;对 n 的非整数值,$x(n)$没有意义。

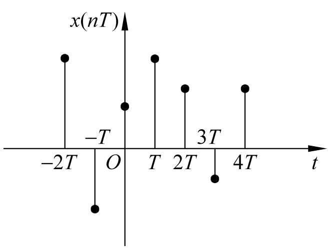


图 3-2-1 离散时间信号

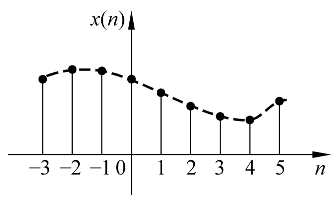


图 3-2-2 连续时间信号等间隔抽样

离散时间信号与人们平常所说的数字信号都是在离散的样点上才有定义,但两者是有区别的。离散时间信号的幅值是连续可变的;而数字信号的幅值是离散的,经过量化,它的精度受到计算机字长的影响。

3.2.1 离散时间信号的描述方法

对于离散时间信号的描述,常采用以下3种形式。

1. 解析形式

若已知 $x(n)$ 与 n 的函数关系,则可以直接写出 $x(n)$ 的数学表达式,即

$$x(n)=\sin\omega_0 n$$

或

$$x(n)=\frac{n+1}{2}$$

解析形式最为简洁,反映了信号的变化规律。

2. 序列形式

将离散时间信号 $x(n)$ 按自变量 n 从小到大的顺序罗列出来,可得到一组有序的数据,即

$$x(n)=\{\cdots,5,6,-1,5,\underset{\uparrow}{12},-3,16,0,-6,\cdots\}$$

其中,序列下方的符号"↑"标明了 $n=0$ 的位置。序列形式直观,但比较烦琐,而且很难直接看出信号 $x(n)$ 的变化规律。在有些情况下,无法获得 $x(n)$ 的简单表达式。例如,对未知连续时间信号抽样所得的有限长离散时间信号,一般无法写出其数学表达式,只能用序列形式描述。

3. 图形形式

图形形式与序列形式类似,将 $x(n)$ 按顺序逐个样值在坐标系中画出来,如图3-2-3所示。图形形式直观明了,方便理解和分析问题。前面引入离散时间信号的定义时已经使用了这种描述方法,只是没有标明信号的幅值而已。

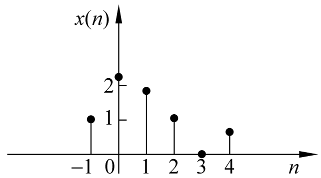


图3-2-3 利用图形形式描述离散时间信号

3.2.2 离散时间信号的基本运算

离散时间信号(即序列)的基本运算包括移位、反折、求和、相乘、差分、累加及时间尺度变换,下面分别介绍。

1. 序列的移位

设某一序列为 $x(n)$,若 $m>0$,则 $x(n-m)$ 表示序列 $x(n)$ 整体右移了 m 个样点形

成的新序列，也称 $x(n-m)$ 是 $x(n)$ 的 m 个样点的延迟。此时，$x(n+m)$ 表示序列 $x(n)$ 整体左移了 m 个样点形成的新序列，也称 $x(n+m)$ 是 $x(n)$ 的 m 个样点的超前。例如，$x(n)$ 序列如图 3-2-4(a)所示，则 $x(n-2)$ 和 $x(n+2)$ 序列分别如图 3-2-4(b)和(c)所示。

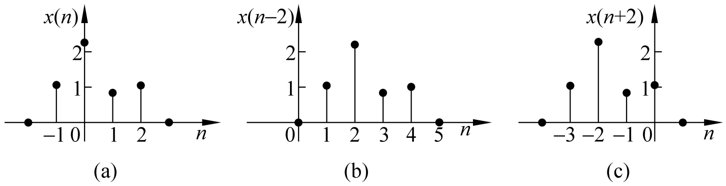


图 3-2-4 序列的移位

2. 序列的反折

设某一序列为 $x(n)$，则 $x(-n)$ 是以 $n=0$ 为对称轴将序列 $x(n)$ 水平翻转，$x(-n)$ 称为序列 $x(n)$ 的反折。若 $x(n)$ 序列如图 3-2-5(a)所示，则 $x(-n)$ 序列如图 3-2-5(b)所示。

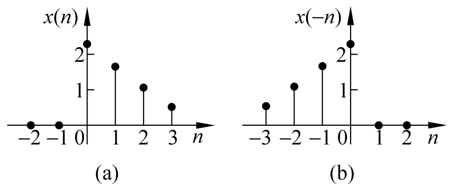


图 3-2-5 序列的反折

3. 序列的求和

$x(n)$ 与 $y(n)$ 两个序列之和是指两个序列同序号(即 n 相同)的序列值逐项相加构成的一个新序列 $z(n)$，表示为

$$z(n)=x(n)+y(n)$$

【例 3-2-1】 已知 $x(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$，$y(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant 0\\ n+1, & n<0\end{cases}$，求 $x(n)+y(n)$。

解：根据序列求和的定义，得

$$z(n)=x(n)+y(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, & n\geqslant 0\\ 2, & n=-1\\ n+1, & n<-1\end{cases}$$

$x(n)$、$y(n)$ 和 $x(n)+y(n)$ 的图形分别如图 3-2-6(a)、(b)和(c)所示。

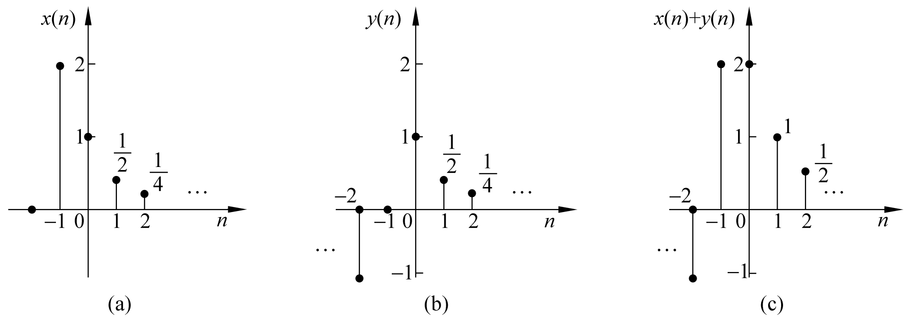


图 3-2-6 序列的求和

4. 序列的相乘

$x(n)$与 $y(n)$两个序列的乘积是指两个序列同序号(即 n 相同)的序列值逐项相乘构成一个新序列 $z(n)$,表示为

$$z(n)=x(n)\cdot y(n)$$

【例 3-2-2】 已知 $x(n)$、$y(n)$同例 3-2-1 中描述的一致,求 $x(n)$与 $y(n)$的乘积 $x(n)\cdot y(n)$。

解:根据序列乘积的定义,得

$$z(n)=x(n)\cdot y(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

另外,序列还可以与标量 α 相乘,定义为

$$y(n)=\alpha\cdot x(n)$$

序列 $x(n)$与标量 α 相乘相当于 $y(n)=\alpha\cdot x(n)$中每一个样值是相同序号(即 n 相同)的 $x(n)$样值的 α 倍。例如例 3-2-1 中的 $x(n)$与标量 α 相乘的结果是

$$\alpha\cdot x(n)=\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

5. 序列的差分

与连续时间信号与系统微分相对应,在离散时间信号与系统的分析中,常常要进行差分运算。差分运算是指序列相邻的两个样点的值相减。差分运算分为前向差分和后向差分两种。前向差分运算定义为

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n) \tag{3-2-1}$$

后向差分运算定义为

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1) \tag{3-2-2}$$

其中,Δ 称为前向差分算子,∇称为后向差分算子。

显然,前向差分与后向差分的关系为

$$\nabla x(n)=\Delta x(n-1) \tag{3-2-3}$$

还可以定义二阶差分运算,即

$$\begin{aligned}\Delta^2 x(n)&=\Delta[\Delta x(n)]=\Delta[x(n+1)-x(n)]=\Delta x(n+1)-\Delta x(n)\\&=x(n+2)-x(n+1)-[x(n+1)-x(n)]\\&=x(n+2)-2x(n+1)+x(n)\end{aligned} \tag{3-2-4}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 x(n)&=\nabla[\nabla x(n)]=\nabla[x(n)-x(n-1)]=\nabla x(n)-\nabla x(n-1)\\&=x(n)-x(n-1)-[x(n-1)-x(n-2)]\\&=x(n)-2x(n-1)+x(n-2)\end{aligned} \tag{3-2-5}$$

类似地,可以定义三阶、四阶直至 n 阶差分。

【例 3-2-3】 已知 $x(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$,求 $\Delta x(n)$和$\nabla x(n)$。

解:根据前向差分的定义,得

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$$

而 $$x(n+1)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & n\geqslant -2\\ 0, & n<-2\end{cases}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & n>-2\\ 2, & n=-2\\ 0, & n<-2\end{cases}$$

所以 $$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n>-2\\ 2, & n=-2\\ 0, & n<-2\end{cases}$$

根据后向差分的定义,得

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$$

而 $$x(n-1)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases},x(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, & n>-1\\ 2, & n=-1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

所以 $$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n>-1\\ 2, & n=-1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

$x(n)$、$\Delta x(n)$和$\nabla x(n)$的图形分别如图 3-2-7(a)、(b)和(c)所示。

6. 序列的累加

与连续时间信号与系统积分相对应,离散时间信号与系统的分析常常要进行序列的累加运算,定义为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \tag{3-2-6}$$

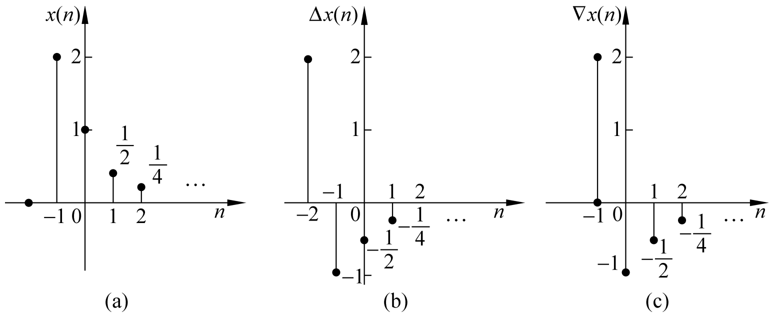


图 3-2-7 序列的差分运算

累加运算表示 $y(n)$在某个样点 n_0 上的值等于 $x(n)$在这个样点 n_0 上的值 $x(n_0)$及 n_0 以前所有样点上的值之和。

【例 3-2-4】 已知 $x(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$,求 $y(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{n}x(k)$。

解:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)=\begin{cases}2+\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k, & n>-1\\ 2, & n=-1\\ 0, & n<-1\end{cases}=\begin{cases}4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n>-1\\ 2, & n=-1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

$x(n)$与 $y(n)$的图形分别如图 3-2-8(a)、(b)所示。

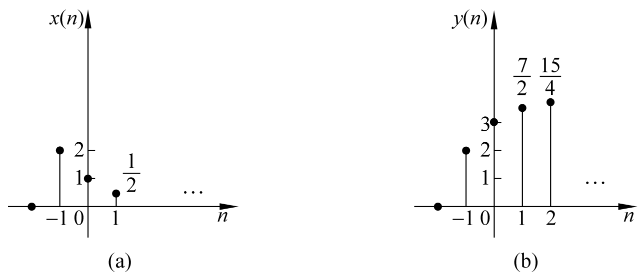


图 3-2-8 序列的累加

7. 序列的时间尺度变换

序列的时间尺度变换分为抽取和零值插入两种情况。

序列 $x(n)$通过尺度变换为一个新的序列 $x_d(n)=x(nN)$,其中,N 为正整数,$x_d(n)=x(nN)$表示 $x(n)$的 N 取 1 的抽取序列。抽取不能简单地理解为时间轴的压缩,$x(nN)$为序列 $x(n)$中每隔 N 个样点抽取一个样值形成的一个新序列。如果认为 $x(n)$是以周期 T 对连续信号 $x_a(t)$等间隔抽样所获得,那么,$x(nN)$就是以周期 NT 对 $x_a(t)$的等间隔抽样,即

$$x_d(n)=x_a(t)\big|_{t=nNT}=x_a(nNT)=x(nN)$$

零值插入是将序列 $x(n)$ 扩展，就是在 $x(n)$ 相邻的两个样点之间插入 $N-1$ 个零值样点，其中，N 为正整数。表示为

$$x_e(n)=\begin{cases}x(n/N), & n=mN, m=0,\pm1,\pm2,\cdots\\0, & 其他\end{cases}$$

【例 3-2-5】 已知序列 $x(n)$ 如图 3-2-9(a)所示，试画出 $x(n)$ 抽取 $x(2n)$ 及零值插入 $x\left(\dfrac{n}{2}\right)$。

解：由定义可得，抽取 $x(2n)$ 及零值插入 $x\left(\dfrac{n}{2}\right)$ 的图形分别如图 3-2-9(b)、(c)所示。

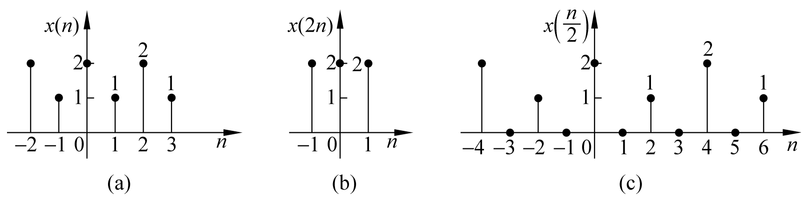


图 3-2-9 序列的时间尺度变换

3.2.3 典型的离散时间信号

与连续时间信号类似，离散时间信号也有一些典型的常用序列，下面分别介绍。

1. 单位抽样序列

单位抽样序列 $\delta(n)$ 又称为离散冲激信号，定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\0, & n\neq0\end{cases}\tag{3-2-7}$$

单位抽样序列 $\delta(n)$ 类似于连续时间信号中的单位冲激信号 $\delta(t)$，在信号与系统的分析中作用相当，但必须注意它们之间的区别。$\delta(n)$ 是一个确定的物理量，在 $n=0$ 时取值为 1，在其他非零的离散时间点上取值为 0；而 $\delta(t)$ 不是一个物理量，只是一个数学抽象，具体而言，$\delta(t)$ 是一个幅度为 $\dfrac{1}{\tau}$、脉宽为 τ 的矩形脉冲，且在 τ 逐渐减小趋于 0($\tau\to0$)时幅度趋于 ∞，但脉冲的面积保持为 1。单位抽样序列 $\delta(n)$ 的图形描述如图 3-2-10 所示。

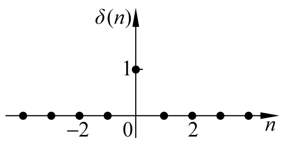


图 3-2-10 单位抽样序列

任何序列都可以用一些延迟的单位抽样序列的加权和表示，即

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)\tag{3-2-8}$$

【例 3-2-6】 已知序列 $x(n)$ 如图 3-2-11 所示，利用单位抽样序列 $\delta(n)$ 写出 $x(n)$ 的数学表达式。

解：由图 3-2-10 可得

$$x(n)=\delta(n+2)-\delta(n+1)-\frac{1}{2}\delta(n)-\frac{1}{4}\delta(n-1)+\frac{1}{2}\delta(n-3)$$

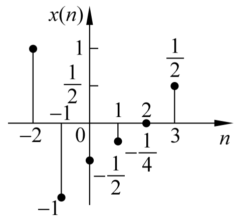


图 3-2-11 序列 $x(n)$

2. 单位阶跃序列

单位阶跃序列 $u(n)$定义为

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{3-2-9}$$

单位阶跃序列 $u(n)$类似于连续时间信号中的单位阶跃信号 $u(t)$,不过,$u(t)$在 $t=0$ 处发生了跳变,在 $t=0$ 时 $u(t)$通常没有定义,只作为奇异信号定义了 $u(0)=\frac{1}{2}$;单位阶跃序列 $u(n)$在 $n=0$ 处明确定义了 $u(n)=1$,如图 3-2-12 所示。

单位阶跃序列 $u(n)$与单位抽样序列 $\delta(n)$的关系为

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)=\nabla u(n) \tag{3-2-10}$$

即 $\delta(n)$等于 $u(n)$的后向一阶差分。另一方面,

$$u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots=\sum_{m=0}^{+\infty}\delta(n-m) \tag{3-2-11}$$

令 $n-m=k$,作变量替换后,$u(n)$还可以表示为 $\delta(n)$的累加。此时,式(3-2-11) 转换为

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k) \tag{3-2-12}$$

3. 矩形序列

矩形序列 $R_N(n)$定义为

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{3-2-13}$$

其中,N 表示矩形序列的长度,如图 3-2-13 所示。

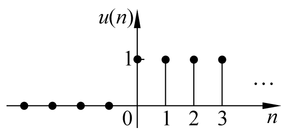


图 3-2-12 单位阶跃序列

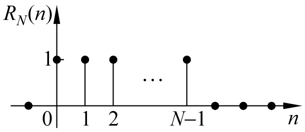


图 3-2-13 矩形序列

矩形序列 $R_N(n)$还可以表示为

$$R_N(n)=u(n)-u(u-N) \tag{3-2-14}$$

4. 实指数序列

实指数序列 $x(n)$定义为

$$x(n)=a^n, \quad -\infty<n<\infty \tag{3-2-15}$$

通常,单边实指数序列应用更广。单边实指数序列定义为

$$x(n)=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{3-2-16}$$

单边实指数序列还可表示为 $x(n)=a^n u(n)$。当 $|a|>1$ 时,序列是发散的;当 $|a|<1$ 时,序列是收敛的;当 $a>0$ 时,序列的所有样值都为正值;当 $a<0$ 时,序列正、负摆动。图 3-2-14(a)、(b)、(c)、(d)分别描述了 $a>1$、$0<a<1$、$a<-1$ 和 $-1<a<0$ 这 4 种情况。

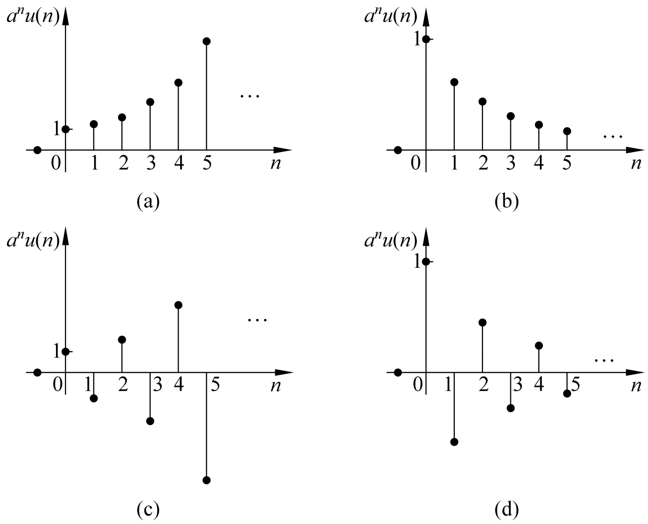


图 3-2-14 单边实指数序列

5. 复指数序列

复指数序列定义为

$$x(n)=e^{(\alpha+j\omega)n} \tag{3-2-17}$$

复指数序列可以表示为实部和虚部的形式,即

$$x(n)=e^{\alpha n}e^{j\omega n}=e^{\alpha n}\cos\omega n+je^{\alpha n}\sin\omega n \tag{3-2-18}$$

也可以表示为极坐标的形式,即

$$x(n)=|x(n)|e^{j\arg[x(n)]} \tag{3-2-19}$$

其中,$|x(n)|=e^{\alpha n}$,$\arg[x(n)]=\omega n$。

6. 正弦型序列

将

$$x(n)=A\cos(\omega n+\varphi) \tag{3-2-20}$$

和

$$x(n)=A\sin(\omega n+\varphi) \tag{3-2-21}$$

统称为正弦型序列。其中,A 为幅度,ω 为数字域频率,φ 为初相,ω 和 φ 的单位都是弧度。正弦型序列如图 3-2-15 所示。

如果 $x(n)=A\sin(\omega n+\varphi)$ 是由连续正弦信号 $x_a(t)=A\sin(\Omega t+\varphi)$ 等间隔抽样而得到的,抽样周期为 T_s,那么

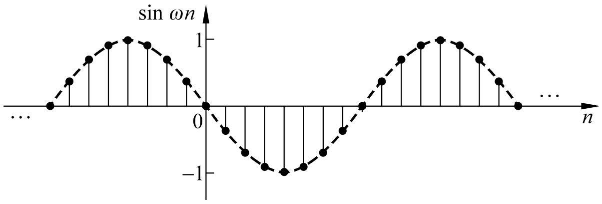


图 3-2-15 正弦型序列

$$x(n)=x_a(nT_s)$$

即
$$A\sin(\omega n+\varphi)=A\sin(\Omega T_s n+\varphi)$$

所以
$$\omega=\Omega T_s \tag{3-2-22}$$

其中，ω 是正弦序列 $x(n)$的频率，称为数字域频率；Ω 是连续正弦信号 $x_a(t)$的角频率，称为模拟域频率。连续时间信号等间隔抽样所得序列的数字域频率 ω 与原连续时间信号模拟域频率 Ω 的关系满足式(3-2-22)。若设 $f_s=\dfrac{1}{T_s}$为抽样频率，f 是 $x_a(t)$的频率，则

$$\omega=\Omega T_s=\frac{2\pi f}{f_s} \tag{3-2-23}$$

ω 又称为归一化频率。

由欧拉(Euler)公式可将正弦型序列表示为复指数序列的形式，即

$$A\cos(\omega n+\varphi)=\frac{A}{2}(e^{j\omega n}e^{j\varphi}+e^{-j\omega n}e^{-j\varphi}) \tag{3-2-24}$$

$$A\sin(\omega n+\varphi)=\frac{A}{2j}(e^{j\omega n}e^{j\varphi}-e^{-j\omega n}e^{-j\varphi}) \tag{3-2-25}$$

3.2.4 序列的周期性

与连续时间周期信号类似，序列也存在周期性。对于所有 n 值，若存在一个最小正整数 N，满足

$$x(n)=x(n+N) \tag{3-2-26}$$

则称序列 $x(n)$为周期序列，最小周期为 N。

下面讨论正弦序列的周期性。

若
$$x(n)=A\sin(\omega n+\varphi)$$

则
$$x(n+N)=A\sin[\omega(n+N)+\varphi]=A\sin(\omega n+\omega N+\varphi)$$

如果 $\omega N=2k\pi$，其中，k 为整数，则

$$x(n+N)=x(n)$$

这时，正弦序列 $x(n)$是周期序列，其周期为 $N=\dfrac{2k\pi}{\omega}$。其中，N、k 为整数，ω 可取任意正值。因此，$\dfrac{2k\pi}{\omega}$不一定为整数，即正弦序列 $x(n)=A\sin(\omega n+\varphi)$不一定是周期序列。下

面分别讨论。

(1) 当$\dfrac{2\pi}{\omega}$为整数时，正弦序列 $A\sin(\omega n+\varphi)$为周期序列，最小周期为$\dfrac{2\pi}{\omega}$。

(2) 当$\dfrac{2\pi}{\omega}$不是整数，但为有理数，即$\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{p}{q}$(其中 p、q 为互质的整数)时，正弦序列 $A\sin(\omega n+\varphi)$是周期序列，取 $k=q$ 可得最小周期 $N=\dfrac{2\pi}{\omega}k=p$。

(3) 当$\dfrac{2\pi}{\omega}$为无理数时，则不存在整数 k，使得 $N=\dfrac{2k\pi}{\omega}$为整数，即正弦序列 $A\sin(\omega n+\varphi)$不是周期序列。

同理，指数为纯虚数的复指数序列的周期性与正弦序列的情况相同。

【例 3-2-7】 判断下列序列是否为周期序列，若是，确定其最小周期。

(1) $x(n)=A\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}n+\dfrac{\pi}{6}\right)$。

(2) $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{8}-\pi\right)}$。

(3) $x(n)=A\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n+\dfrac{\pi}{3}\right)$。

解：(1) $\omega=\dfrac{5\pi}{8}$，$\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{16}{5}$为有理数，所以，序列 $x(n)=A\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}n+\dfrac{\pi}{6}\right)$是周期序列，最小周期为 $N=\left.\dfrac{2\pi}{\omega}k\right|_{k=5}=16$。

(2) $\omega=\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{2\pi}{\omega}=16\pi$ 为无理数，所以，序列 $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{8}-\pi\right)}$不是周期序列。

(3) $\omega=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2\pi}{\omega}=4$ 为整数，所以，序列 $x(n)=A\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n+\dfrac{\pi}{3}\right)$是周期序列，最小周期为 $N=\dfrac{2\pi}{\omega}=4$。

从上述分析可知，连续时间周期信号经间隔抽样所得的序列不一定是周期序列。如果希望连续正弦信号 $x_{\mathrm{a}}(t)=A\sin(\Omega t+\varphi)$等间隔抽样得到的正弦序列 $x(n)=A\sin(\omega n+\varphi)$也是周期序列，抽样周期 T_{s} 应该满足怎样的条件呢？设 $x_{\mathrm{a}}(t)$的周期为 T，由式(3-2-22)和式(3-2-23)，得

$$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\Omega T_{\mathrm{s}}}=\frac{2\pi}{2\pi f T_{\mathrm{s}}}=\frac{T}{T_{\mathrm{s}}}$$

当正弦序列 $A\sin(\omega n+\varphi)$为周期序列时，$\dfrac{T}{T_{\mathrm{s}}}$为有理数，即

$$\frac{T}{T_{\mathrm{s}}}=\frac{p}{q}$$

其中，p、q 为互质的整数。

3.3 离散时间系统

离散时间系统可以定义为一种变换或算子，它将输入序列 $x(n)$ 变换为某种形式的输出序列 $y(n)$，离散时间系统可以用算子 $T[\cdot]$ 表示，即

$$y(n)=T[x(n)] \tag{3-3-1}$$

式(3-3-1) 表示由输入序列计算输出序列的某种规则或数学公式。例如，滑动平均系统定义为

$$y(n)=\frac{1}{N_1+N_2+1}\sum_{k=-N_1}^{N_2}x(n-k) \tag{3-3-2}$$

式(3-3-2) 所描述系统的输出序列 $y(n)$ 第 n 个样本值是对输入序列 $x(n)$ 第 n 个样本的前后 N_1+N_2+1 个样本值求平均而获得的。

离散时间系统还可以用图形表示，如图 3-3-1 所示。应当注意，一个确定、有用的系统对输入 $x(n)$ 的变换是唯一的。

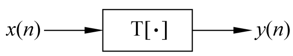


图 3-3-1 离散时间系统的图形表示

3.3.1 离散时间系统的描述

式(3-3-2) 使用了差分方程表示一个滑动平均系统。实际上，差分方程是描述离散时间系统的常用数学工具。可以根据实际应用背景写出系统的差分方程。下面举例说明。

【例 3-3-1】 某城市每年将上一年度的汽车总量的 $\alpha\%$ 报废，第 n 年新增汽车 $x(n)$ 辆，求该城市第 n 年的汽车保有量 $y(n)$ 与新增汽车 $x(n)$ 的关系。

解：第 n 年之前的汽车总量为 $y(n-1)$，第 n 年新增汽车 $x(n)$ 辆，第 n 年报废汽车 $\alpha\%\cdot y(n-1)$，所以

$$y(n)=y(n-1)(1-\alpha\%)+x(n)$$

即

$$y(n)-y(n-1)(1-\alpha\%)=x(n)$$

这是一个常系数后向差分方程。

【例 3-3-2】 某种植物第一天长高 3cm，此后每天新长的高度是前一天的 1/2，建立描述该植物高度的方程。

解：设第 n、$n+1$、$n+2$ 天后植物的高度分别是 $y(n)$、$y(n+1)$、$y(n+2)$，则

$$y(n+2)-y(n+1)=\frac{1}{2}[y(n+1)-y(n)]$$

即

$$2y(n+2)-3y(n+1)+y(n)=0$$

或

$$2y(n+2)-3y(n+1)+y(n)=2[y(n+2)-2y(n+1)+y(n)]+[y(n+1)-y(n)]=0$$

即
$$2\Delta^2 y(n)+\Delta y(n)=0$$
这是一个二阶常系统前向差分方程,前向差分方程与后向差分方程没有本质的区别。例 3-3-2 也可以写成后向差分方程的形式,即
$$y(n)-y(n-1)=\frac{1}{2}[y(n-1)-y(n-2)]$$
或
$$2y(n)-3y(n-1)+y(n-2)=0$$
考虑到离散时间系统的输入多数是因果序列,即 $x(n)=0, n<0$,所以,在系统分析中一般写成后向差分方程的形式。

例 3-3-2 中,如果采用后向差分方程 $2y(n)-3y(n-1)+y(n-2)=0$,依题意可知,$y(-2)=0$、$y(-1)=3$,这两个样本值称为差分方程的起始状态。差分方程的具体求解过程将在 3.4 节讨论。

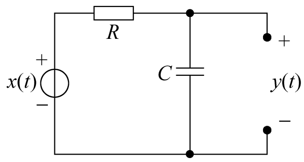


图 3-3-2 低通 RC 网络

差分方程不仅描述了离散时间系统,还可以用于近似处理微分方程的问题。图 3-3-2 给出了低通 RC 网络,它是一个连续时间系统,其微分方程为
$$RC\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=x(t) \tag{3-3-3}$$
如果输入信号 $x(t)$不能用解析表达式描述,就无法利用第 2 章介绍的方法求解式(3-3-3)。这时,可以用差分方程近似微分方程,借助数值计算的方法求解。以周期 T 对输入信号 $x(t)$等间隔抽样,得到 $x(nT)$,记作 $x(n)$。当抽样周期 T 足够小时,信号的差分可近似信号的微分,即
$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{T\to 0}\frac{y(nT)-y((n-1)T)}{T}$$
则式(3-3-3) 近似为
$$RC\frac{y(nT)-y((n-1)T)}{T}+y(nT)\approx x(nT)$$
整理,得
$$\left(\frac{RC}{T}+1\right)y(n)-\frac{RC}{T}y(n-1)\approx x(n)$$
从前面几个例子可以看出,离散时间系统差分方程的基本数学运算包括延时(移位)、与标量相乘、序列相加 3 种运算,即离散时间系统可用延时(移位)器、标量乘法器、序列加法实现。其方框图和流程图两种图形表示分别如图 3-3-3 和图 3-3-4 所示。

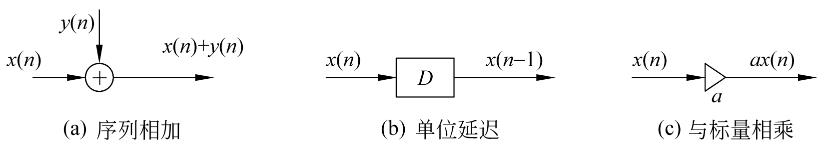
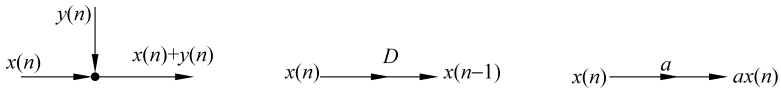


图 3-3-3 离散时间系统基本运算方框图

在第 6 章将给出这样一个结论:时域的单位延迟相当于 z 域乘以 z^{-1},所以,单位延迟的方框图和流程图常用 z^{-1}替代 D,如图 3-3-5 所示。



(a) 序列相加　　(b) 单位延迟　　(c) 与标量相乘

图 3-3-4　离散时间系统基本运算流程图

差分方程描述的离散时间系统均可以用方框图或流程图形式表示。例如，将例 3-3-1 中差分方程 $y(n)-y(n-1)(1-\alpha\%)=x(n)$ 表示为方框图，如图 3-3-6 所示。反之，由方框图或流程图也可以写出离散时间系统的差分方程。

(a) 方框图　　(b) 流程图

图 3-3-5　单位延迟的 z 域表示

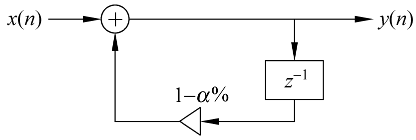


图 3-3-6　例 3-3-1 差分方程的方框图

3.3.2　线性时不变系统

1. 线性系统

与连续时间线性系统类似，离散时间线性系统同时满足叠加性和均匀性，系统对输入的线性组合所产生的响应是原来各个输入单独产生的响应的同样的线性组合，即

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] \tag{3-3-4}$$

【例 3-3-3】　判断 $y(n)=2x(n)+3$ 所描述的系统是否线性系统。

解：由于 $T[x_1(n)]=2x_1(n)+3$，$T[x_2(n)]=2x_2(n)+3$，则

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=2[ax_1(n)+bx_2(n)]+3$$

又

$$\begin{aligned}aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]&=2ax_1(n)+3a+2bx_2(n)+3b\\&=2[ax_1(n)+bx_2(n)]+3(a+b)\end{aligned}$$

因此
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]\neq aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

故该系统不是线性系统。

2. 时不变系统

如果系统的响应与激励施加于系统的时刻无关，则称该系统是时不变系统。对于时不变系统，若输入 $x(n)$ 产生的输出为 $y(n)$，则输入的时移 $x(n-k)$ 产生的输出为 $y(n-k)$。其中，k 为任意整数。即，若

$$T[x(n)]=y(n)$$

则
$$T[x(n-k)]=y(n-k),\ k\ \text{为任意整数} \tag{3-3-5}$$

也就是说，输入与输出的运算关系不随时间而变化，当输入 $x(n)$ 沿着时间轴有任意的位移时，输出 $y(n)$ 也具有相同的位移，而幅值保持不变。

【例 3-3-4】 判断 $y(n)=\sum\limits_{k=n_0}^{n}x(k)$ 所描述的系统是否时不变系统。

解：因为

$$T[x(n)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$$

所以

$$T[x(n-m)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k-m)$$

令 $p=k-m$，作变量替换，有

$$T[x(n-m)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k-m)=\sum_{p=n_0-m}^{n-m}x(p)\neq\sum_{p=n_0}^{n-m}x(p)=y(n-m)$$

故该系统是时变的。

3. 线性时不变系统的性质

若系统既满足线性、又满足时不变性，则称该系统为线性时不变(LTI)系统。下面探讨 LTI 系统的性质。

任何序列都可以分解为延迟的单位抽样序列的加权和，即

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)$$

则 LTI 系统输入 $x(n)$ 及输出 $y(n)$ 之间的关系为

$$y(n)=T[x(n)]=T\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)\Big]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)T[\delta(n-k)] \tag{3-3-6}$$

将单位抽样序列 $\delta(n)$ 作为系统的输入而产生的输出定义为系统的单位抽样响应(或单位冲激响应) $h(n)$，即

$$y(n)=T[\delta(n)]=h(n) \tag{3-3-7}$$

则式(3-3-6) 变为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k) \tag{3-3-8}$$

式(3-3-8)中的运算称为离散线性卷积，离散线性卷积运算用符号“ $*$ ”表示。此时，式(3-3-8)可表示为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n) \tag{3-3-9}$$

离散线性卷积又称为卷积和，简称卷积。它的计算与连续时间的卷积积分类似，将在 3.5 节详细介绍它的计算过程。这里借助卷积的概念讨论 LTI 系统的性质。式(3-3-9)表明，任何 LTI 系统都可以用单位抽样响应来表征，而且系统的输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 之间满足线性卷积的关系，如图 3-3-7 所示。值得注意的是，这里所说的输出 $y(n)$ 只是由输入 $x(n)$ 的激励而产生的输出，并不包含由系统的起始状态而产生的输出。

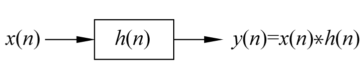


图 3-3-7　LTI 系统

与连续时间系统的卷积积分类似，由定义可以证明，离散卷积和满足交换律、结合律和分配律，LTI 系统也具有相应的性质。

1）交换律

对式(3-3-9)进行变量替换，令 $n-k=m$，可以得到卷积和的另一种形式，即

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)x(n-m)$$

或表示为

$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n) \tag{3-3-10}$$

式(3-3-10)表明，对于 LTI 系统，输入 $x(n)$和单位抽样响应 $h(n)$之间互换位置后，输出 $y(n)$保持不变，如图 3-3-8 所示。

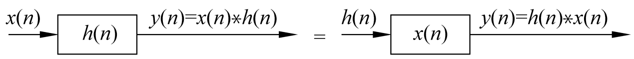


图 3-3-8 LTI 系统 $x(n)$与 $h(n)$互换

2）结合律

卷积和满足结合律，即

$$\begin{aligned}y(n)&=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=[x(n)*h_2(n)]*h_1(n)\\&=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]\end{aligned} \tag{3-3-11}$$

式(3-3-11)表明，两个 LTI 子系统级联所构成的系统还是 LTI 系统，它的单位抽样响应是原来各子系统单位抽样响应的卷积和，与子系统级联次序无关，如图 3-3-9 所示。

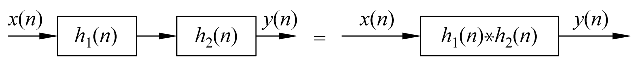


图 3-3-9 结合律与 LTI 子系统的级联

线性时不变子系统级联的结论可推广到 k 个子系统级联的情况，系统总的冲激响应为

$$h(n)=h_1(n)*h_2(n)*\cdots*h_k(n) \tag{3-3-12}$$

3）分配律

卷积和满足分配律，即

$$y(n)=x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n) \tag{3-3-13}$$

式(3-3-13)表明，两个 LTI 子系统并联所构成的系统还是 LTI 系统，它的单位抽样响应是原来各个子系统单位抽样响应之和，如图 3-3-10 所示。

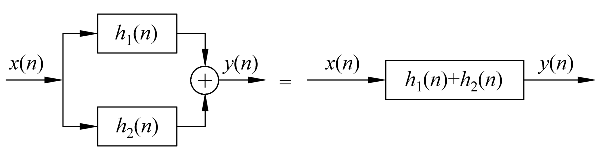


图 3-3-10 分配律与 LTI 系统的并联

LTI 子系统并联的结论可推广到 k 个子系统的并联情况，系统总的冲激响应为

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)+\cdots+h_k(n) \tag{3-3-14}$$

3.3.3 稳定系统

稳定系统是指有界的输入 $x(n)$产生有界的输出 $y(n)$。即对于稳定系统，若所有整数 n 满足

$$|x(n)| \leqslant M < \infty \text{(M 是正的常数)}$$

则

$$|y(n)| < \infty$$

【例 3-3-5】 判断系统 $y(n)=T[x(n)]=\mathrm{e}^{x(n)}$ 的稳定性。

解：设 $|x(n)| \leqslant M$，则 $|y(n)|=|\mathrm{e}^{x(n)}| \leqslant \mathrm{e}^{|x(n)|} \leqslant \mathrm{e}^M < \infty$，所以系统是稳定的。

如果系统是线性时不变的，则可以根据充要条件判断系统的稳定性。一个 LTI 系统稳定的充要条件是其单位抽样响应 $h(n)$绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \tag{3-3-15}$$

证明：(1) 充分性。若 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$，如果所有输入是有界的，即对于所有的 n 都满足 $|x(n)| \leqslant M < \infty$，同时 $|x(n-k)| \leqslant M$ 也成立，则

$$\begin{aligned} |y(n)| &= |x(n) * h(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \right| \\ &\leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)|\,|x(n-k)| \leqslant M \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty \end{aligned}$$

即输出 $y(n)$是有界的，充分性得证。

(2) 必要性。利用反证法。已知系统稳定，假设它的单位抽样响应 $h(n)$不满足绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty$$

可以找到一个界的输入：

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, & |h(-n)| \neq 0 \\ 0, & |h(-n)| = 0 \end{cases}$$

其中，$h^*(n)$为 $h(n)$的复共轭。LTI 系统在 $n=0$ 时刻的输出为

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(0-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty$$

也就是 $n=0$ 时系统的输出是无界的，这与系统稳定相矛盾。因此，假设不成立。所以，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ 是 LTI 系统稳定的必要条件。

值得注意的是，应用式(3-3-15) 判断系统稳定性的前提是系统必须是线性时不变的。另外，从式(3-3-15) 必要性的证明中可以看出，证明一个系统不稳定，只需找一个特别的有界输入 $x(n)$，它对应的输出 $y(n)$有一个样值是无界的，就可判定该系统不稳定。例如，对于系统 $y(n)=nx(n)$，选取 $x(n)=1$，则 $y(n)=n$，当 $n\to\infty$时，$y(n)$无界，所以该系统不稳定。

3.3.4 因果系统

因果系统是指系统的输出不领先于系统的输入，也就是说，系统现时输出 $y(n)$只取决于现时和过去的输入 $x(n)$，$x(n-1)$，$x(n-2)$，…，而与未来的输入 $x(n+1)$，$x(n+2)$，$x(n+3)$，…无关。如果系统现时的输出 $y(n)$与未来的输入有关，则称该系统为非因果系统。因果性是系统另一个重要的特征。

【例 3-3-6】 判断下列系统的因果性。

(1) $y(n)=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$。

(2) $y(n)=x(n)\sin(n+2)$。

解：(1) 当 $n\geqslant n_0$ 时，

$$y(n)=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)+\cdots+x(n_0)$$

输出 $y(n)$只与现时和过去的输入有关，而与未来的输入无关，所以系统是因果的。

当 $n<n_0$ 时，

$$y(n)=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)=x(n)+x(n+1)+x(n+2)+\cdots+x(n_0)$$

输出 $y(n)$与未来的输入有关，所以系统是非因果的。

(2) 判断系统的因果性要将输入与系统定义的其他函数区分开。系统的输出 $y(n)=x(n)\sin(n+2)$取决于现时的输入 $x(n)$，与未来的输入无关，所以它是因果的。$\sin(n+2)$只是一个以 n 为自变量的函数，与输入没有关系。

与连续时间系统不同的是，离散时间系统有些情况下进行的是非实时的处理，待处理的数据都已事先记录下来，在这种情况下，“未来的输入”是可以获得的。所以，不局限于用因果系统处理这些数据。例如，式(3-3-2) 所描述的滑动平均系统就是一个实际应用中常用的系统，其差分方程为

$$y(n)=\frac{1}{N_1+N_2+1}\sum_{k=-N_1}^{N_2}x(n-k)$$

当 $N_1>0$ 时，该系统就是一个非因果系统。另外，在图像处理中，自变量 n 不是时间变量，而是空间变量，这时也常用到非因果系统。

对于 LTI 系统，它是因果系统的充要条件是

$$h(n)=0,n<0 \tag{3-3-16}$$

证明：(1) 充分性。若 $n<0$ 时 $h(n)=0$，LTI 系统的输出为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)h(n-k)$$

即 $y(n)$只取决于现时和过去的输入，与未来的输入无关，因此系统是因果的。

(2) 必要性。采用反证法。已知系统是因果的，假设 $n<0$ 时 $h(n)\neq 0$，LTI 系统的输出为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)h(n-k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}x(k)h(n-k) \tag{3-3-17}$$

其中，$\sum_{k=n+1}^{\infty}x(k)h(n-k)$ 至少有一项不为0，即 $y(n)$ 与未来的输入有关，这与系统是因果的相矛盾，因此假设不成立。所以，式(3-3-16)是LTI系统为因果系统的必要条件。

同样要注意的是，应用式(3-3-16)判断系统因果性的前提是系统必须是LTI系统。

【例3-3-7】 判断LTI系统 $h(n)=2^n u(-n)$ 的稳定性和因果性。

解：(1) 判断稳定性。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|2^n u(-n)|=\sum_{n=-\infty}^{0}|2^n|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2<\infty$$

所以系统是稳定的。

(2) 当 $n<0$ 时，$h(n)=2^n\neq 0$，所以系统是非因果的。

实际上，对于例3-3-7中的系统 $h(n)=2^n u(-n)$，当 $n>0$ 时，$h(n)=0$。常将具有这种特征的系统称为逆因果系统。另外，还可以将系统因果性的概念推广到序列。当 $n<0$ 时，序列 $x(n)=0$，这样的序列称为因果序列；如果对于所有的 $n<0$，$x(n)=0$ 并不总成立，这样的序列称为非因果序列；当 $n>0$ 时，序列 $x(n)=0$，这样的序列称为逆因果序列。

3.4 离散LTI系统常系数差分方程的求解

离散时间LTI系统的差分方程是常系数差分方程，一般形式为

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r) \tag{3-4-1}$$

其中，系数 a_k、b_r 是常数，参数 N 称为系统的阶次。

求解常系数差分方程的方法有以下几种：

(1) 迭代法。该方法为逐次代入求解，简单直观，但一般只能得到 $y(n)$ 的数值解，多数情况下难以得到方程的闭式解，即 $y(n)$ 的解析表达式。手工计算时较少采用这种方法；但采用计算机求 $y(n)$ 的数值解时，迭代法利于程序实现。

(2) 时域经典求解法。与微分方程的时域求解法相类似，这种方法将方程的完全解分为齐次解和特解两部分，得到 $y(n)$ 的解析表达式后，由边界条件确定其待定系数。

(3) 零输入响应和零状态响应。这种方法将方程的完全解分为零输入响应和零状态响应。零输入响应由齐次方程求得；零状态响应由激励的具体形式确定，再由边界条件确定待定系数。只不过这里的边界条件不同于微分方程经典解法中的边界条件。另外，零状态响应也可由激励信号 $x(n)$ 与系统单位抽样响应 $h(n)$ 的卷积求得。

(4) 变换域求解方法。利用 z 变换求解差分方程是最简便的方法，有关内容将在第6章中详细介绍。

下面讨论时域求解的3种方法。

3.4.1 迭代法

式(3-4-1)可以变形为